Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ф. Шарапов, О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 10, 125–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:08:47

УДК 517.956+517.984

Т. Ф. Шарапов

О резольvente многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле

Рассмотрен эллиптический оператор в многомерной области с частой сменой краевых условий в случае, когда усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле. Доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному, получены оценки скорости сходимости. Построено полное асимптотическое разложение для резольвенты в случае, когда она действует на достаточно гладкие функции.

Библиография: 41 название.

Ключевые слова: частая смена, усреднение, равномерная резольвентная сходимость, асимптотика.

DOI: 10.4213/sm8364

§ 1. Введение

Вопросы усреднения эллиптических краевых задач в областях с частой сменой граничных условий исследовались достаточно широко (см., например, [1]–[10]). Большинство работ посвящено случаю ограниченных областей с достаточно гладкой границей. Опишем постановку подобных краевых задач. На границе области выделяется набор подмножеств. На этих подмножествах задается граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы – условие Неймана или третье краевое условие. Исследовалось поведение решений таких краевых задач, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремятся к нулю. Рассматривались также случаи, когда смена краевых условий задавалась лишь на фиксированной части границы, а на оставшейся части было задано одно из классических граничных условий. Основные результаты касались определения вида усредненных задач и доказательства теорем сходимости для решений. Усредненными задачами были краевые задачи для тех же самых уравнений в тех же самых областях, но с одним из классических граничных условий. Для эллиптических задач с разными типами чередования граничных условий были получены усредненные задачи. Сходимость решений была доказана в смысле слабой или сильной резольвентной сходимости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований и гранта Президента РФ для молодых ученых-докторов наук (грант № МД-183.2014.1).

Кроме определения вида усредненных задач для задач с частой сменой типа граничных условий актуален также вопрос об оценках скорости сходимости. Для периодической смены краевых условий оценки скорости сходимости для разности решений возмущенных и усредненных задач были выведены в [1], [2], [10], [11]. Схожие оценки для непериодического чередования были получены в [3], [4], [7]–[9].

Более сильный тип сходимости – равномерная резольвентная сходимость. Для эллиптических задач с быстро осциллирующими коэффициентами такой тип сходимости был доказан в разных операторных нормах, а также были получены многочисленные оценки скорости сходимости (см., например, [12]–[15], а также дальнейшие работы авторов). В [16]–[18] такие результаты были получены для эллиптических операторов в бесконечной плоской полосе с периодической сменой граничных условий, а в [19] – с непериодической сменой граничных условий. При этом были рассмотрены все возможные усредненные операторы.

Имеется также много работ, в которых строились асимптотики решений задач с чередованием граничных условий (см., например, [7]–[9], [18]–[25]). В работе [23] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в многомерном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями. На одной из гиперплоскостей было задано периодическое чередование граничных условий Дирихле и Неймана, решение задачи также искалось периодическим. Для решения рассматриваемой задачи было получено полное асимптотическое разложение. В [20]–[22] были построены асимптотики для двумерных задач с периодическим чередованием граничных условий Дирихле и Неймана. Аналогичные результаты были получены в работах [24], [25] для трехмерного цилиндра с частым чередованием граничных условий Дирихле и Неймана на узких поперечных полосах, лежащих на боковой поверхности. Достаточно близки к задачам с частой сменой граничных условий задачи с большим количеством концентрированных масс. Усреднению такого рода задач посвящено довольно много работ (см., например, [11], [26], [27]).

В настоящей работе рассматривается эллиптический оператор в произвольной многомерной области с частым чередованием краевого условия Дирихле и третьего краевого условия. Область может быть как ограниченной, так и неограниченной. Чередование граничных условий задается непериодическим. При этом оно вводится на всей границе или на какой-то ее фиксированной части. В последнем случае на оставшейся части границы ставится условие Дирихле. Мы рассматриваем случай, когда усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле. Исследуется поведение резольвенты возмущенного оператора, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремятся к нулю. Первый основной результат: доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному в смысле нормы оператора, действующего из L_2 в W_2^1 , и получены оценки скорости сходимости. Второй основной результат: получено полное асимптотическое разложение для резольвенты в неограниченной области с дополнительным предположением, что чередование граничных условий имеет периодическую структуру и задано на гиперплоскости, а резольвента действует на достаточно гладкие функции.

§ 2. Постановка задачи

Пусть $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно, Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2 . Область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной. Пусть τ – расстояние от точки до границы Ω , измеренное вдоль внутренней нормали. В случае неограниченной области Ω предположим, что существует $\tau_0 > 0$ такое, что переменная τ определена корректно, по крайней мере при $0 < \tau \leq \tau_0$. В частности, это означает, что область $\{x : 0 < \tau < \tau_0\}$ расположена внутри Ω .

Предположим, что в окрестности каждой точки $P \in \partial\Omega$ можно ввести локальные координаты $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$ так, что точка $s = 0$ соответствует точке P . Будем считать, что существует такое $R_0 > 0$, что якобианы перехода от переменных x к переменным (s, τ) и обратно ограничены равномерно для всех точек из $\{x : 0 < \tau \leq \tau_0/2, |s| \leq R_0\}$ некоторой константой, не зависящей от выбора точки P .

Через ε обозначим малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – некоторая ограниченная положительная функция. Всюду считаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} = 0. \quad (2.1)$$

Границу области Ω разобьем на две непересекающиеся части: $\partial\Omega = \Upsilon \cup \Xi$. На Υ выберем набор ограниченных подмножеств $\gamma_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, \dots, K(\varepsilon)$. В случае, если Υ ограничена, $K(\varepsilon)$ – это некоторая целочисленная функция, стремящаяся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. В случае, если Υ не является ограниченным множеством, полагаем $K(\varepsilon) = \infty$ для всех ε . Рассматривая $\gamma_\varepsilon^{(i)}$ как $(n-1)$ -мерные области, границы этих областей будем предполагать состоящими из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-2)$ -мерных поверхностей класса C^2 . Положим $\gamma_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{K(\varepsilon)} \gamma_\varepsilon^{(i)}$.

Обозначим через $B_r(M)$ шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M радиуса r . Будем предполагать, что существуют точки $M_\varepsilon^i \in \gamma_\varepsilon^{(i)}$ и положительные числа R_1 и R_2 , не зависящие от ε , такие, что выполняется

$$C_1 \varepsilon \leq \min_{i \neq j} |M_\varepsilon^i - M_\varepsilon^j| \leq C_2 \varepsilon, \quad (2.2)$$

$$B_{R_2 \varepsilon \eta}(M_\varepsilon^i) \cap \Upsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^{(i)} \subseteq B_{R_1 \varepsilon \eta}(M_\varepsilon^i), \quad B_{R_1 \varepsilon \eta}(M_\varepsilon^i) \cap B_{R_1 \varepsilon \eta}(M_\varepsilon^j) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (2.3)$$

где $i, j = 1, \dots, K(\varepsilon)$, а C_1 и C_2 – положительные константы, не зависящие от ε , i и j .

Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим заданные на Ω функции такие, что $A_{ij} \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_j \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0 \in L_\infty(\Omega)$, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Функции A_{ij} и A_0 предполагаются вещественными, A_j – комплекснозначными. Кроме того, функции A_{ij} удовлетворяют условию эллиптичности:

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) z_i \bar{z}_j \geq c_0 \sum_{i=1}^n |z_i|^2, \quad x \in \Omega, \quad z_i \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

где c_0 – положительная константа, не зависящая от x и z_i . Через $a = a(x)$ обозначим вещественную функцию, заданную на Υ , и предположим, что $a \in L_\infty(\Upsilon)$.

Основным объектом изучения в настоящей работе является оператор в $L_2(\Omega)$, определенный дифференциальным выражением

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{A}_j + A_0 \quad (2.5)$$

с краевым условием Дирихле на γ_ε и третьим краевым условием:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mu} + a \right) u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon := \Upsilon \setminus \bar{\gamma}_\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} := - \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \nu_j \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \bar{A}_j \nu_j,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Определим $\mathcal{H}_\varepsilon$ как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := & \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega)} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(u, A_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega)} + (a u, v)_{L_2(\Upsilon)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$. Здесь $\dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$ – подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\gamma_\varepsilon \cup \Xi$. Через $\dot{W}_2^i(\Omega, Q)$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций из $W_2^i(\Omega)$ с нулевым следом на поверхности Q , лежащей в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Целью работы является изучение асимптотического поведения резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для формулировки первого основного результата введем усредненный оператор. А именно определим $\mathcal{H}_0$ как оператор в $L_2(\Omega)$ с дифференциальным выражением

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{A}_j + A_0 \quad (2.7)$$

и краевым условием Дирихле на $\partial\Omega$. Введем $\mathcal{H}_0$ как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(u, v) := & \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega)} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(u, A_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(\mathfrak{h}_0) := \dot{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$.

Через $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$ обозначим норму оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y .

Первым основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – компакт в комплексной плоскости, не пересекающийся со спектром оператора $\mathcal{H}_0$, $\lambda \in K$. Тогда для всех достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon + \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 + \lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow W_2^1(\Omega)} \leq C(\lambda, K) \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}}, \quad (2.9)$$

где константа C не зависит от ε и η , но зависит от λ и от выбора компакта K .

Во второй части работы строится полная асимптотика резольвенты возмущенного оператора, суженной на функции из $L_2(\Omega)$ с дополнительными условиями гладкости. Асимптотику резольвенты будем строить для неограниченной области Ω с дополнительным предположением, что при малых x_n она совпадает со слоем. А именно, будем считать, что существует $\tau_0 > 0$ такое, что $\Omega \cap \{x : 0 < x_n < \tau_0\} = \{x : 0 < x_n < \tau_0\}$. Пусть $\Upsilon := \{x : x_n = 0\}$, $\gamma - (n-1)$ -мерное множество, лежащее в $(n-1)$ -мерном параллелепипеде $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : -a_i/2 < x_i < a_i/2, i = 1, \dots, n-1, x_n = 0\}$, где a_i – положительные константы. Потребуем также, чтобы коэффициенты возмущенного оператора и функция $a(x)$ были бесконечно дифференцируемы при $0 \leq x_n \leq \tau_0$, а все эти производные и сами функции были равномерно ограничены при $0 \leq x_n \leq \tau_0$. Будем также считать, что на границе Υ функции $A_{ij}(x)$ равны нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$. Положим

$$\gamma_\varepsilon := \bigcup_k \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (\varepsilon\eta)^{-1}(x - (\varepsilon a_1 k_1, \dots, \varepsilon a_{n-1} k_{n-1})) \in \gamma, k \in \mathbb{Z}^{n-1}\}.$$

Пусть f – произвольная функция из $L_2(\Omega)$, бесконечно дифференцируемая в области $\{x : 0 \leq x_n \leq \tau_0\}$, $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}f$.

Второй основной результат работы выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Асимптотика функции u_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \eta) + \chi(x_n) u_\varepsilon^{\text{mid}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right), \quad (2.10)$$

где $\chi(x_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $x_n > \tau_0$ и единице при $x_n < \tau_0/3$, а функции $u_\varepsilon^{\text{ex}}$ и $u_\varepsilon^{\text{mid}}$ имеют асимптотики

$$u_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m(x, \eta), \quad (2.11)$$

$$u_\varepsilon^{\text{mid}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right) = e^{(\bar{A}_n(x', 0) - a(x'))x_n} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right). \quad (2.12)$$

Коэффициенты рядов (2.11) и (2.12) определяются леммами 6.2, 6.3. В частности, v_1 имеет вид $v_1(\xi, x', \eta) = -\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', 0, \eta)X(\xi, \eta)$, где функция X определяется леммой 5.8, а функция u_0 задается формулой $u_0 = (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f$.

Обсудим кратко результаты работы. Сразу подчеркнем, что теорема 1 верна для произвольной структуры чередования краевых условий и нет никаких существенных ограничений для частей выделенного подмножества границы с условием Дирихле. Число частей может быть конечно или бесконечно, и структура этого набора может быть достаточно произвольной. Более того, теорема 1 утверждает не только наличие равномерной резольвентной сходимости, но и дает оценку скорости сходимости, см. неравенство (2.9). Правая часть в этом неравенстве стремится к нулю в силу (2.1). Отметим также, что теорема справедлива вне зависимости от того, ограничена область или нет.

Второй основной результат, теорема 2, дает полное асимптотическое разложение для резольвенты. Вместе с тем для возможности построения такой асимптотики приходится требовать дополнительную гладкость у функции f в окрестности части границы со сменой краевых условий. И налагается еще одно условие на сами граничные условия – их смена теперь является строго периодической на гиперплоскости. Коэффициенты рядов строятся как решения некоторой последовательности задач, см. построения § 5.

Из теоремы 2 следует неухудшаемость по порядку оценки в теореме 1. Действительно, пусть f – финитная бесконечно дифференцируемая функция. Тогда из (6.17), (6.7), леммы 7.2, асимптотики функции u_ε и теоремы 2 следует, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \sim \varepsilon^{1/2} \eta^{-(n-2)/2}.$$

Это означает, что оценка (2.9) неухудшаема по порядку.

§ 3. Резольвентная сходимость

В этом параграфе доказывается теорема 1. Идейно наше доказательство схоже с доказательством аналогичной теоремы 1.1 из [28] для случая быстро осциллирующей границы.

Обозначим через $\chi_1 = \chi_1(t)$ бесконечно дифференцируемую функцию, равную нулю при $t > 2$ и единице при $t < 1$. Положим

$$\chi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \chi_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \{x : 0 < \tau < \tau_0\}. \end{cases}$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$ – произвольная функция, $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon + \lambda)^{-1}f$, $u_0 := (\mathcal{H}_0 + \lambda)^{-1}f$, $v_\varepsilon := u_\varepsilon - (1 - \chi_\varepsilon)u_0$. Основная идея доказательства состоит в том, что вначале мы оцениваем норму функции v_ε , а потом норму разности функции $u_\varepsilon - u_0$. Функцию v_ε оценивать легче, чем разность $u_\varepsilon - u_0$, потому что функция $(1 - \chi_\varepsilon)u_0$ удовлетворяет одновременно граничному условию Дирихле и третьему граничному условию на Υ .

В соответствии с определением функции u_ε и u_0 удовлетворяют интегральным тождествам

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) + \lambda(u_\varepsilon, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для любой } \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi), \quad (3.1)$$

$$\mathfrak{h}_0(u_0, \varphi) + \lambda(u_0, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для любой } \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega). \quad (3.2)$$

Ясно, что $(1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$, $(1 - \chi_\varepsilon)u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$. В равенствах (3.1) и (3.2) положим $\varphi = v_\varepsilon$ и $\varphi = (1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon$, тогда соответственно получим

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + \lambda(u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \quad (3.3)$$

$$\mathfrak{h}_0(u_0, (1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon) + \lambda(u_0, (1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, (1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}. \quad (3.4)$$

Используя (2.8), перепишем выражение $\mathfrak{h}_0(u_0, (1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(u_0, (1 - \chi_\varepsilon)v_\varepsilon) &= \sum_{i,j=1}^n \left((1 - \chi_\varepsilon)A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + (A_0(1 - \chi_\varepsilon)u_0, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(A_j(1 - \chi_\varepsilon) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left((1 - \chi_\varepsilon)u_0, A_j \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^n \left(u_0, A_j v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \\ &= \mathfrak{h}_\varepsilon((1 - \chi_\varepsilon)u_0, v_\varepsilon) + \sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^n \left(u_0, A_j v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} u_0 \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Вычисляя разность (3.3) и (3.4), получаем

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(v_\varepsilon, v_\varepsilon) - \lambda \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = g_\varepsilon(f, v_\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(f, v_\varepsilon) &:= (f, \chi_\varepsilon v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^n \left(u_0, A_j v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} u_0 \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дальнейшая идея доказательства теоремы 1.1 из [28] состоит в том, чтобы оценить правую часть (3.5) и получить оценку для v_ε . Для этого нам понадобятся вспомогательные утверждения. Всюду далее через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от f , u_0 , u_ε , v_ε , ε , η и x . Согласно [29; гл. 5, § 5.3, неравенство (5.3)] имеем

$$\|u_0\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3.1. Для любой функции $u \in \dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$ верна оценка

$$\|u\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}^2 \leq C(\mathfrak{h}_\varepsilon(u, u) + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.4), (2.6) и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} \right| &\geq c_0 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ \left| \sum_{j=1}^n \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, u \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left(u, A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \right| &\leq \frac{c_0}{4} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ |(A_0 u, u)_{L_2(\Omega)} + (a u, u)_{L_2(\partial\Omega)}| &\leq \frac{c_0}{4} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u, u) \geq \frac{c_0}{2} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_1 \mathfrak{h}_\varepsilon(u, u) + C_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

откуда уже вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 3.2. Область определения усредненного оператора $\mathcal{H}_0$ имеет вид $D(\mathcal{H}_0) = \dot{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$. Для любых функций $u \in D(\mathfrak{h}_0)$ верна оценка

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как усредненный оператор $\mathcal{H}_0$ соответствует форме $\mathfrak{h}_0(u, v)$, область определения оператора $\mathcal{H}_0$ – это множество функций $u \in \dot{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$ таких, что найдется функция $\varphi \in L_2(\Omega)$, для которой выполнено

$$\mathfrak{h}_0(u, v) = (\varphi, v)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для любой функции } v \in \dot{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega). \quad (3.7)$$

Действие оператора $\mathcal{H}_0$ на функцию u есть функция φ . Функция u является обобщенным решением краевой задачи, соответствующая интегральному тождеству (3.7), а потому в силу теорем о повышении гладкости [30; гл. 4, § 2], см. также [31; лемма 2.2], функция u является элементом $\dot{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$ и верна требуемая оценка из утверждения леммы.

В равенстве (3.1) положим $\varphi = u_\varepsilon$. Тогда получим

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \lambda(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Дополнительно будем считать, что λ имеет ненулевую мнимую часть. Тогда согласно [29; гл. 5, § 5.3, неравенство (5.3)] верна оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.8)$$

Из леммы 3.1 вытекает

$$C_1 \|u_\varepsilon\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}^2 \leq \mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

что приводит к неравенству

$$\|u_\varepsilon\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.3. Для любой функции $v \in \dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ выполняется оценка

$$\|v\|_{L_2(\{x: 0 < \tau < 2\varepsilon\})} \leq C \frac{\varepsilon}{\eta^{(n-2)/2}} \|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε , η и v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точки $M_\varepsilon^i \in \Xi$, $i = K(\varepsilon) + 1, \dots, N(\varepsilon)$, так, чтобы для них было выполнено условие (2.2). В случае $K(\varepsilon) = +\infty$ считаем, что $N(\varepsilon) = +\infty$. Введем множества $\gamma_\varepsilon^{(i)} = B_{R_1\varepsilon\eta}(M_\varepsilon^i) \cap \Xi$, для которых выполняется (2.3). В окрестности каждой точки M_ε^i на границе области Ω введем ортогональные координаты $s^i = (s_1^i, s_2^i, \dots, s_{n-1}^i)$. Обозначим $Q_\varepsilon^i := \{x : |s| < R_4\varepsilon, \tau = 0\}$, $\Pi_\varepsilon^i := \{x : 0 < \tau < 2\varepsilon, s \in Q_\varepsilon^i\}$, где $R_4 > 0$ – некоторая константа. В силу (2.2) и условия ограниченности якобианов можно выбрать $R_4 > 0$ так, что для достаточно малого положительного ε будет выполнено вложение $\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} Q_\varepsilon^i \supset \partial\Omega$. С учетом этого вложения заключаем, что для достаточно малого положительного ε выполнено вложение

$$\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Pi_\varepsilon^i \supset \{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}. \quad (3.10)$$

В силу (2.2) каждая точка из $\{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}$ попадает в конечное число Π_ε^i , причем это число ограничено равномерно по ε .

Функция $v(x)$ в результате перехода к переменным $y = (s, \tau)$ перейдет в функцию $\tilde{v}(y)$, заданную в областях Π_ε^i . Пусть $\xi = (\xi', \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, $\xi = y\varepsilon^{-1}$, $\Sigma_\eta^i = \{\xi : 0 < \xi_n < 2, \xi' \in Q_\eta^i\}$, где Q_η^i – область, полученная сжатием области Q_ε^i в ε^{-1} раз. Обозначим $\tilde{B}_\eta = \{\xi : |\xi'| < R_5\eta, \xi_n = 0\}$, $R_5 > 0$.

Аналогично [32] для $n \geq 3$ можно вычислить асимптотику первого собственного значения оператора Лапласа в Σ_η^i с краевым условием Дирихле на $\tilde{B}_\eta$ и краевым условием Неймана на оставшейся части границы. Первый ненулевой член асимптотики есть величина порядка η^{n-2} . Отсюда на основе принципа минимакса для $\tilde{v} \in \dot{W}_2^1(\Sigma_\eta^i, \tilde{B}_\varepsilon)$ выводится следующее неравенство:

$$\|\tilde{v}\|_{L_2(\Sigma_\eta^i)}^2 \leq \frac{C}{\eta^{n-2}} \|\nabla_\xi \tilde{v}\|_{L_2(\Sigma_\eta^i)}^2 = C \frac{\varepsilon^2}{\eta^{n-2}} \|\nabla_y \tilde{v}\|_{L_2(\Sigma_\eta^i)}^2,$$

где константа C не зависит от $\tilde{v}$, i , ε и η . Переходя обратно к переменным x , в силу ограниченности якобиана и гладкости границы $\partial\Omega$ получаем

$$\|v\|_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)}^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{\eta^{n-2}} \|\nabla_x v\|_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)}^2.$$

Далее, суммируя по всем Π_ε^i , имеем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \|v\|_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)}^2 \leq C \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{\varepsilon^2}{\eta^{n-2}} \|\nabla_x v\|_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)}^2.$$

Так как каждая точка из $\{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}$ попадает в конечное число Π_ε^i , то из последней оценки и вложения (3.10) вытекает утверждение леммы.

Обозначим $\Omega_\varepsilon = \{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $u \in \dot{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$. Тогда выполнены оценки

$$\|u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^3 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2, \quad \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2,$$

где константа C не зависит от u, ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u \in \dot{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$, верно представление $u(x) = \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial \tau}(s, t) dt$, $0 < \tau < \tau_0$. Отсюда, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$|u(x)|^2 \leq C\tau \int_0^\tau \left| \frac{\partial u}{\partial \tau}(s, t) \right|^2 dt. \quad (3.11)$$

Пусть $\chi_0 = \chi_0(\tau)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $\tau > 3\tau_0/4$ и единице при $\tau < \tau_0/2$. Тогда для $\tau \in [0, \tau_0]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x) &= \int_{\tau_0}^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\chi_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)(s, t) dt, \\ \left| \frac{\partial u}{\partial \tau}(x) \right|^2 &\leq C \int_0^{\tau_0} \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}(s, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial \tau}(s, t) \right|^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Интегрируя оценки (3.11) и (3.12) по области Ω_ε , приходим к утверждению леммы.

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (3.5). Так как $v_\varepsilon \in \dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$, то из леммы 3.2 и последней оценки следует, что

$$|(f, \chi_\varepsilon v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}| \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \frac{\varepsilon}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (3.13)$$

Оценим второе слагаемое в правой части равенства (3.5). Так как $u_0 \in \dot{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$ и $v_\varepsilon \in \dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$, то в силу лемм 3.2–3.4 и неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\left| \sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq C \frac{\varepsilon^{3/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (3.14)$$

Аналогично выводим:

$$\left| \sum_{j=1}^n \left(u_0, A_j v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq C \frac{\varepsilon^{3/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad (3.15)$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, v_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq C \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad (3.16)$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} u_0 \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq C \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (3.17)$$

Учитывая полученные оценки (3.13)–(3.17), выводим:

$$|g_\varepsilon(v_\varepsilon, f)| \leq C \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

В силу лемм 3.3 и 3.4 теперь имеем

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Используя леммы 3.2 и 3.4, аналогично (3.13)–(3.17) легко показать, что

$$\|\chi_\varepsilon u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из полученных выше оценок для v_ε следует

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon - (1 - \chi_\varepsilon)u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\chi_\varepsilon u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \frac{\varepsilon^{1/2}}{\eta^{(n-2)/2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Напомним, что выше при доказательстве этой теоремы использовался тот факт, что λ имеет ненулевую мнимую часть. И для таких λ согласно только что доказанному неравенству резольвента возмущенного оператора сходится к резольвенте усредненного в операторной норме. Следовательно, верна сходимость спектра возмущенного оператора к спектру усредненного оператора. Поэтому если $\lambda \in K$ и компакт K не пересекается со спектром усредненного оператора, то λ равномерно отделено от спектра возмущенного оператора для достаточно малых ε . Тогда согласно [29; гл. 5, § 5.3, неравенство (5.3)] верна оценка (3.8). В остальных оценках не использовалось, что мнимая часть λ не равна нулю, а потому все оценки остаются в силе. Теорема 1 полностью доказана.

§ 4. Формальное построение асимптотик

В этом параграфе доказывается теорема 2. Доказательство состоит из двух основных частей. В первой проводится формальное построение асимптотики функции u_ε , во второй части эта асимптотика строго обосновывается, т.е. выводятся оценки остатков.

Всюду далее под $\mathcal{L}$ будем понимать дифференциальное выражение (2.5), а функцию u_ε будем рассматривать как решение краевой задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \Xi, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + a \right) u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \quad (4.2)$$

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (4.1), (4.2) будем строить на основе метода пограничного слоя [33] и метода многих масштабов [34]. Базовой идеей данного построения является использование пограничного слоя в окрестности Υ с целью удовлетворения граничных условий (4.2).

Функцию u_ε будем искать в виде суммы внешнего разложения и пограничного слоя:

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \eta) + u_\varepsilon^{\text{mid}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right).$$

Внешнее разложение $u_\varepsilon^{\text{ex}}$ и пограничный слой $u_\varepsilon^{\text{mid}}$ строятся в виде

$$u_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m(x, \eta), \quad (4.3)$$

$$u_\varepsilon^{\text{mid}}(x, \eta) = e^{\rho(x')x_n} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m(\xi, x', \eta), \quad (4.4)$$

где $\xi = (\xi', \xi_n) = (x'\varepsilon^{-1}, x_n\varepsilon^{-1})$ – растянутые переменные, $\rho(x') := \bar{A}_n(x', 0) - a(x')$. Подставляя разложение (4.3) в (4.1), (4.2), собирая члены с одинаковыми степенями ε , получаем уравнения на коэффициенты внешнего разложения:

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_0 = f, \quad x \in \Omega, \quad (4.5)$$

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_m = 0, \quad x \in \Omega, \quad m \geq 1, \quad (4.6)$$

а также граничные условия на u_m :

$$u_m = 0, \quad x \in \Xi, \quad m \geq 0. \quad (4.7)$$

Граничные условия на Υ для коэффициентов внешнего разложения будут определены позднее при построении пограничного слоя.

Разложим коэффициенты $A_{ij}(x)$, $A_j(x)$ и $A_0(x)$ в ряд Тейлора при $x_n \rightarrow 0$, а затем сделаем замену $x_n = \varepsilon\xi_n$:

$$\begin{aligned} A_{ij}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_n^k \frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x', 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi_n)^k \frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x', 0) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon\xi_n)^k \frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x', 0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$A_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_n^k \frac{\partial^k A_p}{\partial x_n^k}(x', 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\xi_n)^k \frac{\partial^k A_p}{\partial x_n^k}(x', 0), \quad p \geq 0,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Сходимость рядов (4.8) не предполагается, ряды понимаются как асимптотические.

Подставляя (4.8) в (4.1) и собирая члены в полученных равенствах с одинаковыми степенями ε , выпишем граничные условия для функций v_m :

$$v_m = -u_m(x', \eta), \quad \xi \in \gamma_\eta, \quad \frac{\partial v_m}{\partial \xi_n} = \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}(x', \eta), \quad \xi \in \Gamma_\eta, \quad (4.9)$$

$$\gamma_\eta := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \eta^{-1}(x - (\varepsilon a_1 k_1, \dots, \varepsilon a_{n-1} k_{n-1})) \in \gamma\},$$

$$\Gamma_\eta := \mathbb{R}^{n-1} \setminus \overline{\gamma_\eta}.$$

Подставляем разложение (4.4) в уравнение (4.1) и в полученных равенствах собираем члены с одинаковыми степенями ε :

$$\Delta_\xi v_m = F_m, \quad \xi_n > 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
F_m := & \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i,j=1}^n \left[\left(2\xi_n^l A_{ij}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \xi_n^{l-1} A_{i,j}^{l-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) v_{m-l} \right. \\
& + \xi_n^{l-1} \left(2A_{ij}^l \left(\xi_n \rho \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial x_j} \right) + A_{i,j}^{1,l} \left(\rho - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + A_j^{0,l} \right) v_{m-(l+1)} \\
& + \left(\xi_n^l \left(A_{i,j}^{1,l-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + A_{ij}^l \left(\rho^2 - 2 \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \right) - 2\xi_n^{l-1} A_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \right) v_{m-(l+2)} \\
& - 2\xi_n^l A_{ij}^l \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \xi_n \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) v_{m-(l+3)} \\
& + \left(\xi_n^{l+2} A_{ij}^l \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) v_{m-(l+4)} + \left(2\rho \frac{\partial}{\partial \xi_n} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial x_j} \right) v_{m-1} \\
& + \left(\rho^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \xi_n \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \lambda \right) v_{m-2} + \xi_n \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) v_{m-3} \\
& \left. + \left(\xi_n \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right)^2 v_{m-4} \right],
\end{aligned}$$

$$v_{-1} := v_0 := 0, \quad A_q^l := \frac{\partial^l A_q}{\partial x_n^l}, \quad A_j^{1,l} := A_j^l - \bar{A}_j^l, \quad A_j^{0,l} := A_0^l - \bar{A}_j^{l+1},$$

$$A_{i,j}^l := A_j^{1,l} - A_{ij}^{l+1}, \quad A_{ij}^{l+p} := \frac{\partial^{l+p} A_{ij}}{\partial x_n^l \partial x_i^p}, \quad \bar{A}_j^{l+p} := \frac{\partial^{l+p} \bar{A}_j}{\partial x_n^l \partial x_j^p}, \quad p = 0, 1, \quad q \geq 0.$$

Производные коэффициентов операторов здесь берутся в точках $(x', 0)$.

Таким образом, для функций v_m получены задачи (4.9), (4.10) с периодической структурой по переменным ξ' . Согласно методу пограничного слоя будем строить функции v_m экспоненциально убывающими при $\xi_n \rightarrow +\infty$. Дополнительно наложим на них условие $\square$ -периодичности по ξ' , где $\square := \left\{ \xi : -\frac{a_i}{2} < \xi_i < \frac{a_i}{2}, \xi_n = 0 \right\}$. Тогда исходная краевая задача сводится к задаче в $\Pi = \left\{ \xi : -\frac{a_i}{2} < \xi_i < \frac{a_i}{2}, \xi_n > 0 \right\}$ с периодическими граничными условиями на боковых гранях Π . Задачи (4.9), (4.10) на коэффициенты пограничного слоя зависят от параметра η . В следующем параграфе будет исследована разрешимость задач (4.9), (4.10) и зависимость их решений от параметра η .

§ 5. Исследование задач пограничного слоя

5.1. Модельная задача. Пусть F – функция из $L_2(\Pi)$, экспоненциально убывающая при $\xi_n \rightarrow +\infty$. Рассмотрим задачу

$$\Delta_\xi v = F, \quad \xi \in \Pi, \quad v = A, \quad \xi \in \gamma_\eta, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_n} = G, \quad \xi \in \Gamma_\eta, \quad (5.1)$$

$$v|_{\xi_i = -a_i/2} = v|_{\xi_i = a_i/2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i = -a_i/2} = \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i = a_i/2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

где $A = A(\eta)$, $G = G(\eta)$ – некоторые заданные константы. Обозначим $\Pi_R = \{\xi : -a_i/2 < \xi_i < a_i/2, \xi_n < R\}$, $R = \text{const} > 0$. Здесь и всюду далее решения задач, рассматриваемых в Π и Π_R , будем искать удовлетворяющими периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и Π_R соответственно. Решение краевой задачи (5.1), (5.2) мы понимаем в обобщенном смысле. Решение есть функция из пространства $W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$-(\nabla_\xi v, \nabla_\xi \zeta)_{L_2(\Pi)} + (\zeta, B)_{L_2(\Gamma_\eta)} = (F, \zeta)_{L_2(\Pi)}$$

для всех функций ζ , принадлежащих $C^\infty(\overline{\Pi}_a)$ для любого $a > 0$, равных нулю при $\xi_n > a$, обращающихся в нуль на γ_η и удовлетворяющих периодическим граничным условиям на боковых гранях Π . Функция v удовлетворяет периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и граничному условию $v = A$ на γ_η .

Основная цель этого параграфа – исследовать разрешимость модельной задачи (5.1) и выяснить зависимость решения задачи от параметра η . Затем полученные результаты будут применены к задачам (4.9), (4.10).

5.2. Сведение к операторному уравнению. В этом пункте мы отказываемся от условия принадлежности решения задачи (5.1), (5.2) пространству $W_2^1(\Pi)$. Вместо этого мы предполагаем, что решение попадает в $W_2^1(\Pi_a)$ для всех $a > 0$, удовлетворяет однородным краевым условиям $A = 0$, $B = 0$, функция F равна нулю при $\xi_n > R$, а при $\xi_n \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотика

$$v(\xi, \eta) = K(\eta) + O(e^{-\alpha \xi_n}), \quad \alpha > 0. \quad (5.3)$$

Как и выше, решение этой краевой задачи понимаем в обобщенном смысле. В силу теорем о повышении гладкости решение бесконечно дифференцируемо при $\xi_n > R$, а потому все утверждения о поведении решения на бесконечности будем понимать в обычном смысле.

Для исследования разрешимости задачи (5.1), (5.2) воспользуемся методом, предложенным в [35], [36; гл. 16, § 4], см. также [37]. Пусть g – функция из $L_2(\Pi_R)$, продолжим ее нулем для $\xi_n > R$. Рассмотрим задачу

$$\Delta_\xi V_1 = g, \quad \xi \in \Pi, \quad V_1 = 0, \quad \xi \in \square, \quad (5.4)$$

с периодическими условиями (5.2). Эта задача легко решается методом разделения переменных:

$$V_1(\xi) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} X_k(\xi_n) e^{2\pi i \frac{k}{a} \cdot \xi'}, \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} X_k(\xi_n) &= \frac{1}{M_k} \int_{\Pi_R} g(t) (e^{-M_k(\xi_n+t_n)} - e^{-M_k|\xi_n-t_n|}) e^{-2\pi i \frac{k}{a} \cdot t'} dt, \quad M_k := \pi \left| \frac{k}{a} \right|, \\ X_0(\xi_n) &= -\xi_n \int_{\xi_n}^{+\infty} \int_{\square} g(t) dt - \int_0^{\xi_n} t_n \int_{\square} g(t) dt, \\ \frac{k}{a} &:= \left(\frac{k_1}{a_1}, \frac{k_2}{a_2}, \dots, \frac{k_{n-1}}{a_{n-1}} \right), \\ k &= (k_1, k_2, \dots, k_{n-1}), \quad t = (t', t_n) = (t_1, t_2, \dots, t_n), \end{aligned}$$

“ $\cdot$ ” – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Всюду далее через C будем обозначать несущественные константы, не зависящие от η , g , F и V_1 . Аналогично лемме 3.1 из [37] доказывается

ЛЕММА 5.1. Пусть $\tilde{R} > 0$. Ряд (5.5) сходится в норме $W_2^2(\Pi_{\tilde{R}})$. Функция V_1 может быть представлена как $V_1 = T_1 g$, где $T_1: L_2(\Pi_R) \rightarrow W_2^2(\Pi_{\tilde{R}})$ – ограниченный линейный оператор. Верна следующая оценка:

$$\|V_1\|_{W_2^2(\Pi_{\tilde{R}})} \leq C(\tilde{R}, R) \|g\|_{L_2(\Pi_R)}. \quad (5.6)$$

Всюду ниже в обозначениях зависимость от R не подчеркивается. На следующем шаге мы рассматриваем еще одну краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi V_2 &= \Delta_\xi V_1, & \xi &\in \Pi_R, & V_2 &= V_1, & \xi_n &= R, \\ V_2 &= 0, & \xi &\in \gamma_\eta, & \frac{\partial V_2}{\partial \xi_n} &= 0, & \xi &\in \Gamma_\eta, \end{aligned} \quad (5.7)$$

с периодическими условиями (5.2).

Так как $V_1 \in W_2^2(\Pi_R)$, то $\Delta_\xi V_1 \in L_2(\Pi_R)$. И так как задача содержит краевое условие Дирихле, то она имеет единственное решение $V_2 \in W_2^1(\Pi_R)$. Используя теорему о гладкости решений эллиптических краевых задач [30; гл. 4, § 2, теорема 3], получаем $V_2 \in W_2^1(\Pi_R) \cap W_2^2(Q_s)$ для каждого фиксированного s , где $Q_s = \Pi_R \setminus \bar{\Pi}_s$. Следовательно, по правилу $V_2 = T_2(\eta)V_1$ мы можем определить линейный ограниченный оператор $T_2(\eta)$, действующий из $W_2^2(\Pi_R)$ в $W_2^1(\Pi_R)$ и из $W_2^2(\Pi_R)$ в $W_2^2(Q_s)$. Верны оценки

$$\begin{aligned} \|V_2\|_{W_2^1(\Pi_R)} &\leq C(\eta) \|V_1\|_{W_2^2(\Pi_R)} \leq C(\eta) \|g\|_{L_2(\Pi_R)}, \\ \|V_2\|_{W_2^2(Q_s)} &\leq C(\eta, s) \|V_1\|_{W_2^2(Q_s)} \leq C(\eta, s) \|g\|_{L_2(\Pi_R)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Пусть $\chi_2(\xi_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $\xi_n > R/2$ и нулю при $\xi_n < R/3$. Будем строить функцию v в виде

$$v(\xi, \eta) = (T_3(\eta)g)(\xi, \eta) := \chi_2(\xi_n)V_1(\xi) + (1 - \chi_2(\xi_n))V_2(\xi, \eta), \quad (5.9)$$

где $T_3(\eta)$ – линейный ограниченный оператор, который отображает функцию $g \in L_2(\Pi_R)$ в функцию $v \in W_2^1(\Pi_a)$, определенную в (5.9), где V_1 и V_2 – решения (5.4), (5.2) и (5.7), (5.2) соответственно.

Согласно определению функций V_1 и V_2 функция v удовлетворяет всем граничным условиям задачи (5.1), (5.2). Следовательно, осталось проверить только уравнение из задачи (5.1), (5.2). Применим оператор Лапласа к функции v :

$$\Delta_\xi v = \Delta_\xi (\chi_2(\xi_n)V_1(\xi) + (1 - \chi_2(\xi_n))V_2(\xi, \eta)) = g + T_4(\eta)g,$$

где

$$T_4(\eta)g := (V_1 - V_2) \frac{d^2 \chi_2}{d\xi_n^2} + 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \frac{\partial(V_1 - V_2)}{\partial \xi_n}.$$

Получаем уравнение

$$g + T_4(\eta)g = F. \quad (5.10)$$

Аналогично лемме 3.3 из [37] доказывается

ЛЕММА 5.2. *Оператор $T_4(\eta)$ является линейным компактным оператором из $L_2(\Pi_R)$ в $L_2(\Pi_R)$.*

ЛЕММА 5.3. *Уравнение (5.10) эквивалентно краевой задаче (5.1), (5.2). А именно для каждого решения g уравнения (5.10) существует решение краевой задачи (5.1), (5.2), задаваемое формулой $v = T_3(\eta)g$. Для каждого решения v краевой задачи (5.1), (5.2) существует единственное решение уравнения (5.10), связанное с v равенством $v = T_3(\eta)g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – решение задачи (5.1), (5.2). Построим решение g уравнения (5.10) таким образом, что $v = T_3(\eta)g$. Через V мы обозначаем решение задачи

$$\Delta_\xi V = 0, \quad \xi \in \Pi_R, \quad V = 0, \quad \xi_n = R, \quad V = v, \quad \xi \in \square, \quad (5.11)$$

с периодическими условиями (5.2). Эта задача однозначно разрешима в $W_2^1(\Pi_R)$ [30; гл. 4, § 1, теорема 10]. Обозначим

$$V_1(\xi, \eta) := v(\xi, \eta) - (1 - \chi_2(\xi_n))V(\xi, \eta), \quad V_2(\xi, \eta) := v(\xi, \eta) + \chi_2(\xi_n)V(\xi, \eta), \\ g(\xi, \eta) := F(\xi, \eta) - \Delta_\xi(\chi_2(\xi_n)V(\xi, \eta)).$$

Легко проверить, что функция $v = \chi_2 V_1 + (1 - \chi_2)V_2$ удовлетворяет всем необходимым граничным условиям задачи (5.1) с однородными краевыми условиями, функцией F равной нулю при $x_n > R$, периодическими условиями (5.2). В свою очередь, функция V_1 удовлетворяет задаче (5.4) с периодическими условиями (5.2), функция V_2 – задаче (5.7) с периодическими условиями (5.2). Также нетрудно убедиться, что $\Delta_\xi V_1 = \Delta_\xi V_2$ в Π_R . Для V_1 в Π_R выполнено уравнение

$$\Delta_\xi V_1(\xi) = g(\xi, \eta) = \Delta_\xi(v(\xi, \eta) + \chi_2(\xi_n)V(\xi, \eta)) = F(\xi, \eta) + \Delta_\xi(\chi_2(\xi_n)V(\xi, \eta)).$$

Проверим, что эта функция g является решением уравнения (5.10). Учитывая определения функций V , V_1 , V_2 и краевые задачи для V_1 , V_2 , вычислим действие оператора $T_4(\eta)$ на g :

$$T_4(\eta)g := -V \frac{d^2 \chi_2}{d\xi_n^2} - 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \frac{\partial V}{\partial \xi_n} - \chi_2 \Delta_\xi V = -\Delta_\xi(\chi_2 V) = F - g.$$

Последнее соотношение показывает, что g является решением уравнения (5.10).

Докажем теперь, что каждой функции v соответствует ровно одна функция g . Предположим, что существуют два решения g_1 и g_2 уравнения (5.10), соответствующие одной функции v . Тогда функции $g := g_1 - g_2 \neq 0$ соответствует функция v , равная нулю. Пусть V_1 и V_2 будут решениями задач (5.4) и (5.7) соответственно, и возьмем $V := V_2 - V_1$. Видно, что V является решением (5.11) с однородным граничным условием на $\square$. Такое решение единственно, $V = 0$. Таким образом, $V_1 = V_2 = v = 0$ в Π_R , и поэтому $g = \Delta_\xi V_1 = 0$ в Π_R , что является противоречием.

Так как оператор $T_4(\eta)$ компактен, то разрешимость уравнения (5.10) можно изучить на основе альтернатив Фредгольма. Это поможет решить нашу задачу: чтобы построить решение (5.1), (5.2), мы должны решить уравнение (5.10), затем процедурой, описанной выше, восстанавливаем решение v краевой задачи (5.1), (5.2).

5.3. Исследование оператора $T_4(\eta)$. В этом пункте нашей главной целью является исследование зависимости оператора $T_4(\eta)$ от параметра η . Рассматривается случай $\eta \rightarrow 0$. Будет доказано, что при $\eta \rightarrow 0$ оператор $T_4(\eta)$ сходится к некоторому предельному оператору.

Возьмем функцию g и по ней построим функцию V_1 – решение задачи (5.4), а затем по этому решению V_1 построим решение задачи

$$\Delta_\xi V_2^0 = \Delta_\xi V_1, \quad \xi \in \Pi_R, \quad V_2^0 = V_1, \quad \xi_n = R, \quad \frac{\partial V_2^0}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square, \quad (5.12)$$

с периодическими условиями (5.2). С помощью этих функций аналогично (5.9) строится функция $v'(\xi, \eta) = \chi_2(\xi_n)V_1(\xi) + (1 - \chi_2(\xi_n))V_2^0(\xi, \eta)$ – решение задачи

$$\Delta_\xi v' = F, \quad \xi \in \Pi, \quad \frac{\partial v'}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square, \quad (5.13)$$

с периодическими условиями (5.2). Решение этой задачи имеет при $\xi_n \rightarrow +\infty$ асимптотику (5.3). Такое поведение решения на бесконечности определяется из поведения на бесконечности функции V_1 . Как и выше, решение этой краевой задачи понимаем в обобщенном смысле. Задача (5.13) разрешима лишь для функций F , удовлетворяющих условию $\int_{\Pi_R} F d\xi = 0$. Тем не менее функции V_1 и V_2 можно определить, так как они не зависят от разрешимости этой задачи. Ясно, что решение (5.12), (5.2) определяется неоднозначно с точностью до константы.

Через T_5g обозначим оператор

$$T_5g := (V_1 - V_2^0) \frac{d^2 \chi_2}{d\xi_n^2} + 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \frac{\partial(V_1 - V_2^0)}{\partial \xi_n}.$$

По аналогии с леммой 5.3 можно показать, что операторное уравнение

$$g + T_5g = F$$

эквивалентно задаче (5.13).

Главной целью этого пункта является оценка разности операторов $\|T_4(\eta) - T_5\|$, где $\|\cdot\|$ означает норму оператора в $L_2(\Pi_R)$, а сама разность имеет вид

$$T_4(\eta)g - T_5g = V_3 \frac{d^2 \chi_2}{d\xi_n^2} + 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \frac{\partial V_3}{\partial \xi_n}, \quad (5.14)$$

где $V_3 := V_2^0 - V_2$. Аналогично (5.8) доказываются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_R)} &\leq C \|V_1\|_{W_2^2(\Pi_R)} \leq C \|g\|_{L_2(\Pi_R)}, \\ \|V_2^0\|_{W_2^2(Q_s)} &\leq C(s) \|V_1\|_{W_2^2(Q_s)} \leq C(s) \|g\|_{L_2(\Pi_R)}, \\ \|(T_4(\eta) - T_5)g\|_{L_2(\Pi_R)} &\leq C \|V_3\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь и всюду далее до конца раздела через C будем обозначать несущественные константы, не зависящие от η и g . Функция V_3 является обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\xi V_3 &= 0, \quad \xi \in \Pi_R, \quad V_3 = 0, \quad \xi_n = R, \\ V_3 &= \psi, \quad \xi \in \gamma_\eta, \quad \frac{\partial V_3}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \Gamma_\eta, \end{aligned} \quad (5.16)$$

с периодическими условиями (5.2), функцией $\psi = V_2^0$. Дальнейшая цель – оценить норму функции V_3 .

Возьмем $r > 0$ такое, что для достаточно малых η будет выполнено вложение $\gamma_\eta \subseteq S_{2r\eta} \subseteq \Pi_R$, где $S_{2r\eta} := \{\xi : |\xi| < 2r\eta, \xi_n > 0\}$. Обозначим

$$\langle V_2^0 \rangle = \frac{1}{|S_{2r\eta}|} \int_{S_{2r\eta}} V_2^0(\xi) d\xi.$$

Решение краевой задачи (5.16) представим в виде суммы $V_3 = V_4 + V_5$, где функция V_4 – решение той же задачи с $\psi = V_2^0(\xi) - \langle V_2^0 \rangle$, а функция V_5 – вновь решение той же задачи с $\psi = \langle V_2^0 \rangle$.

Оценим норму функции V_4 . Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi(\xi) := \chi_3 \left(\frac{|\xi|}{r\eta} \right) (V_2^0(\xi) - \langle V_2^0 \rangle),$$

где $\chi_3(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Ясно, что $\Psi = V_2^0(\xi) - \langle V_2^0 \rangle$ на γ_η и

$$\begin{aligned} \|\nabla_\xi \Psi\|_{L_2(\Pi_R)} &\leq \|(V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle) \nabla_\xi \chi_3\|_{L_2(\Pi_R)} + \|\chi_3 \nabla_\xi V_2^0\|_{L_2(\Pi_R)}, \\ \int_{S_{2r\eta}} (V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle) d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Оценим норму функции $(V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle) \nabla_\xi \chi_3$ в $L_2(\Pi_R)$:

$$\begin{aligned} \|(V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle) \nabla_\xi \chi_3\|_{L_2(\Pi_R)}^2 &= \int_{\Pi_R} |(V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle) \nabla_\xi \chi_3|^2 d\xi \\ &\leq C\eta^{-2} \int_{S_{2r\eta}} |V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Теперь, растягивая область $S_{2r\eta}$ в η^{-1} раз и применяя к функции $V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle$ в растянутых переменных неравенство Пуанкаре, с учетом [38; гл. 3, § 5, лемма 5.1] получаем

$$\|(V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle) \nabla_\xi \chi_3\|_{L_2(\Pi_R)} \leq C\eta \|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_R)}.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \|\chi_3 \nabla_\xi (V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle)\|_{L_2(\Pi_R)} &\leq C\eta \|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_R)}, \\ \|\chi_3 (V_2^0 - \langle V_2^0 \rangle)\|_{L_2(\Pi_R)} &\leq C\eta \|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_R)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу [30; гл. 4, § 8] и неравенств (5.15) для функции V_2^0 выводим оценку нормы функции V_4 :

$$\|V_4\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leq C\|\Psi\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leq C\eta\|g\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \quad (5.17)$$

Рассмотрим задачу для V_5 . Решение этой задачи строим в виде

$$V_5 = \langle V_2^0 \rangle Y \left(\frac{\xi}{\eta} \right) \chi_4(|\xi|) + V_6, \quad (5.18)$$

где $\chi_4(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < b/4$ и нулю при $t > b/3$, $b := \min a_i$, $i = 1, \dots, n-1$, функция $Y(\zeta)$ – решение задачи

$$\Delta_\zeta Y = 0, \quad \zeta \in S^+, \quad Y = 1, \quad \zeta \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial \zeta_n} = 0, \quad \zeta \in \Gamma_2, \quad (5.19)$$

где $\zeta = \eta^{-1}\xi$, $S^+ = \{\zeta : \zeta_n > 0\}$,

$$\Gamma_1 := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x - (\varepsilon a_1 k_1, \dots, \varepsilon a_{n-1} k_{n-1})) \in \gamma\},$$

$$\Gamma_2 := \{\zeta : \zeta_n = 0\} \setminus \bar{\Gamma}_1.$$

ЛЕММА 5.4. *Существует решение задачи (5.19), имеющее при $|\zeta| \rightarrow \infty$ асимптотику*

$$Y(\zeta) = C|\zeta|^{-n+2} + O(|\zeta|^{-n+1}). \quad (5.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование решения задачи с помощью преобразования Кельвина: $y = (y', y_n + 1) = \zeta|\zeta|^{-2}$, $\zeta = y|y|^{-2}$. Полупространство S^+ взаимно однозначно отобразится в некоторую ограниченную область $\tilde{S}$. Функция $\tilde{Y}(y) = Y(\zeta)/|y|^{n-2}$ является обобщенным решением задачи

$$\Delta_\zeta \tilde{Y} = 0, \quad y \in \tilde{S}, \quad \tilde{Y} = \frac{1}{|y|^2}, \quad y \in \tilde{\Gamma}_1, \quad \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial y_n} = 0, \quad y \in \tilde{\Gamma}_2, \quad (5.21)$$

где $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ – образы Γ_1 и Γ_2 соответственно. Нуль не попадает в $\tilde{\Gamma}_1$, поэтому граничное условие не содержит особенностей на $\tilde{\Gamma}_1$. Следовательно, задача (5.21) разрешима в $W_2^1(\tilde{S})$. Тогда согласно [30; гл. 4, § 2.2, лемма 2] и [30; гл. 3, § 6.2, теорема 2] функция $\tilde{Y}$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $(0, 0, \dots, -1)$. Следовательно, в этой точке функция $\tilde{Y}$ разлагается в асимптотический ряд Тейлора

$$\tilde{Y}(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha \tilde{Y})(0, 0, \dots, -1) y^\alpha.$$

Переходя к исходной функции $Y(\zeta)$, получаем

$$Y(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha \tilde{Y})(0, 0, \dots, -1) \zeta^\alpha |\zeta|^{-2|\alpha|-n+2},$$

откуда уже следует (5.20).

Функция V_6 в (5.18) – обобщенное решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\xi V_6 &= \widehat{F}, \quad \xi \in \Pi_R, \quad \frac{\partial V_6}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \Gamma_\eta, \\ V_6 &= 0, \quad \{\xi : \xi \in \Pi, \xi_n = R\} \cup \gamma_\eta, \end{aligned} \quad (5.22)$$

с периодическими условиями (5.2), и верна оценка

$$\|V_6\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leq C \|\widehat{F}\|_{L_2(\Pi_R)}, \quad (5.23)$$

где

$$\widehat{F} := \langle V_2^0 \rangle \Delta_\xi (Y \chi_4) = \langle V_2^0 \rangle \left(Y \Delta_\xi \chi_4 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial \xi_i} \frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_i} \right).$$

Оценим норму функции $\widehat{F}$ в $L_2(\Pi_R)$. Функции $\nabla_\xi \chi_4$, $\Delta_\xi \chi_4$ гладкие и равны нулю в $\{\xi : b/4 < |\xi| < b/3\}$. Используя неравенство Коши–Буняковского и [38; гл. 3, § 5, неравенство (5.5)], имеем

$$|\langle V_2^0 \rangle| \leq \frac{1}{|S_{2r\eta}|} \int_{S_{2r\eta}} |V_2^0| d\xi \leq C \eta^{-n/2} \|V_2^0\|_{L_2(S_{2r\eta})} \leq C \eta^{-n/2+1} \|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \quad (5.24)$$

С учетом леммы 5.4 прямыми вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned} \|Y(\cdot \eta^{-1}) \Delta_\xi \chi_4\|_{L_2(\Pi_R)}^2 &\leq C \int_{b/4 < |\xi| < b/3} |Y(\xi \eta^{-1})|^2 d\xi \\ &\leq C \eta^{2(n-2)} \int_{b/4 < |\xi| < b/3} \frac{d\xi}{|\xi|^{2(n-2)}} \leq C \eta^{2(n-2)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Аналогично находим

$$\left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial \xi_i} \frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_i} \right\|_{L_2(\Pi_R)} \leq C \eta^{n-2}. \quad (5.26)$$

Тогда, учитывая (5.23)–(5.25) и последнее неравенство, получаем

$$\|V_6\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leq C \eta^{n/2-1} \|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \quad (5.27)$$

С учетом (5.24) и леммы 5.4 прямыми вычислениями проверяем, что

$$\| \langle V_2^0 \rangle Y(\cdot \eta^{-1}) \chi_4 \|_{L_2(\Pi_R)}^2 \leq C \eta^{-n+2} \|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_R)}^2 \int_{|\xi| < b/3, \xi_n > 0} |Y(\xi \eta^{-1})|^2 d\xi.$$

Переходя к переменным $\zeta = \xi \eta^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| < b/4, \xi_n > 0} |Y(\xi \eta^{-1})|^2 d\xi &\leq C \eta^n \left(1 + \int_{1 < |\zeta| < b/(4\eta), \zeta_n > 0} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{2(n-2)}} \right) \\ &= \begin{cases} C \eta^2, & n = 3, \\ C \eta^4 (1 + |\ln \eta|), & n = 4, \\ C \eta^n, & n \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Из последней оценки и (5.27) следует

$$\|V_5\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leq C\eta^{1/2}\|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_R)}, \quad (5.28)$$

откуда с учетом (5.17), неравенств (5.15) для функции V_2^0 и последней оценки имеем

$$\|V_3\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leq C\eta^{1/2}\|g\|_{L_2(\Pi_R)}.$$

Таким образом, доказана

ЛЕММА 5.5. *При $\eta \rightarrow 0$ справедлива оценка*

$$\|T_4(\eta) - T_5\|_{L_2(\Pi_R) \rightarrow L_2(\Pi_R)} \leq C\eta^{1/2}.$$

5.4. Обращение оператора $(I + T_4(\eta))$. Обозначим $T_6(\eta) := T_4(\eta) - T_5$. Рассмотрим операторное уравнение в $L_2(\Pi_R)$

$$(I + T_5)g = F, \quad (5.29)$$

которое согласно п. 5.3 эквивалентно задаче (5.13), (5.3), (5.2). В силу первой альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение (5.29) разрешимо только при F , ортогональных в $L_2(\Pi_R)$ каждому решению сопряженного однородного уравнения

$$(I + T_5^*)h_0 = 0. \quad (5.30)$$

Пусть $h_0(\xi) \equiv 1$, тогда для любой функции $g \in L_2(\Pi_R)$ имеем

$$((I + T_5)g, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = \int_{\Pi_R} \Delta_\xi(\chi_2 V_1 + (1 - \chi_2)V_2^0) d\xi = - \int_{\square} \frac{\partial v'}{\partial \xi_n} d\xi' = 0.$$

Следовательно, h_0 – решение уравнения (5.30). Докажем, что других решений нет. Согласно третьей альтернативе Фредгольма уравнения (5.29) и (5.30) имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений. Задача (5.13), (5.3) с периодическими условиями (5.2) и однородной правой частью имеет единственное решение – константу. Следовательно, при $F = 0$ существует единственное нетривиальное решение уравнения (5.29) и единственное нетривиальное решение уравнения (5.30) с однородной правой частью. Единственность здесь понимается с точностью до умножения на константу. Отсюда и из теоремы Банаха об обратном операторе следует существование ограниченного обратного оператора $(I + T_5)^{-1}: X_1 \rightarrow X_0$, где $X_0 = \{u \in L_2(\Pi_R) : (u, g_0)_{L_2(\Pi_R)} = 0\}$, $X_1 = \{u \in L_2(\Pi_R) : (u, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = 0\}$, а через g_0 обозначено решение операторного уравнения $(I + T_5)g_0 = 0$, соответствующее функции h_0 в смысле, аналогичном лемме 5.3.

Решение операторного уравнения (5.29) представим в виде $g = \alpha(\eta)g_0 + g_1$, $\alpha(\eta)$ – некоторая константа, $g_1 \in X_0$. Вычисляя скалярное произведение уравнения $(I + T_4(\eta))g = F$ и h_0 в $L_2(\Pi_R)$, с учетом равенства $T_4(\eta) = T_5 + T_6(\eta)$ получаем

$$\begin{aligned} ((I + T_5)g, h_0)_{L_2(\Pi_R)} + (T_6(\eta)g, h_0)_{L_2(\Pi_R)} &= (F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}, \\ \alpha(\eta)(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)} + (T_6(\eta)g_1, h_0)_{L_2(\Pi_R)} &= (F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\alpha(\eta) = \frac{(F, h_0)_{L_2(\Pi_R)} - (T_6(\eta)g_1, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}. \quad (5.31)$$

Ниже в лемме 5.6 мы докажем, что

$$(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = \eta^{n-2}(C + o(1)), \quad \eta \rightarrow 0, \quad C \neq 0, \quad (5.32)$$

потому и (5.31) имеет смысл. Подставляя (5.31) в уравнение (5.10), получаем

$$\begin{aligned} (I + T_5 + T_7(\eta))g_1 &= \tilde{F}, \\ T_7(\eta)g_1 &:= T_6(\eta)g_1 - \frac{(T_6(\eta)g_1, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}T_6(\eta)g_0, \\ \tilde{F} &= F - \frac{(F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}T_6(\eta)g_0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Легко показать, что $\tilde{F} \in X_1$ и $T_7(\eta)$ отображает X_0 в X_1 . Ниже в лемме 5.6 мы докажем, что

$$\frac{\|T_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_R)}}{|(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}|} \leq C. \quad (5.34)$$

Так как оператор $(I + T_5)^{-1}: X_1 \rightarrow X_0$ существует и ограничен, то для существования обратного оператора $(I + T_5 + T_7(\eta))^{-1}: X_1 \rightarrow X_0$ необходимо доказать, что норма оператора $T_7(\eta)$ мала. Из неравенства

$$\|T_7(\eta)\|_{L_2(\Pi_R)} \leq \left\| T_6(\eta) - \frac{(T_6(\eta) \cdot, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}T_6(\eta)g_0 \right\|_{L_2(\Pi_R)} \leq C\|T_6(\eta)\|_{L_2(\Pi_R)},$$

(5.34) и леммы 5.5 следует малость нормы оператора $T_7(\eta)$. Следовательно, оператор $(I + T_5 + T_7(\eta))^{-1}$ ограничен равномерно по η .

ЛЕММА 5.6. *При $\eta \rightarrow 0$ справедливы равенство (5.32) и неравенство (5.34).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [32] и доказательству леммы 5.3 нетрудно проверить, что

$$g_0 = -\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} \left(\frac{\xi_n}{R} - 1 \right) - \frac{1}{R} \frac{d\chi_2}{d\xi_n}, \quad (5.35)$$

а действие оператора $T_6(\eta)$ на g_0 имеет вид

$$T_6(\eta)g_0 = W \frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \frac{\partial W}{\partial \xi_n}, \quad (5.36)$$

где функция W – решение краевой задачи (5.16) с $\psi = 1$. Для функции W аналогично [32] имеем

$$\|W - \eta^{n-2}w\|_{W_2^1(\Pi_R \setminus \Pi_{R/3})} = O(\eta^{n-1}). \quad (5.37)$$

Здесь функция w – решение задачи

$$\Delta_\xi w = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad w = 0, \quad \xi_n = R, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square \setminus \{0\},$$

с периодическими условиями (5.2), имеющая при $|\xi| \rightarrow 0$ асимптотику $w = |\xi|^{-n+2} + O(|\xi|^{-n+1})$. Тогда с учетом этой особенности и равенства (5.37) не сложно показать, что

$$\begin{aligned} (T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)} &= \int_{\Pi_R} \left(W \frac{d^2 \chi_2}{d\xi_n^2} + 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \frac{\partial W}{\partial \xi_n} \right) d\xi \\ &= \eta^{n-2} \int_{\Pi_R} \Delta_\xi (w(\chi_2 - 1)) d\xi + O(\eta^{n-1}) = C\eta^{n-2} + O(\eta^{n-1}), \end{aligned}$$

где константа C не равна нулю. Равенство (5.32) доказано. В силу (5.37) имеем

$$\|T_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_R)} \leq C\eta^{n-2}. \quad (5.38)$$

Из последнего неравенства и (5.32) следует (5.34). Лемма доказана.

В силу существования и ограниченности оператора $(I + T_5 + T_7(\eta))^{-1}$ с учетом леммы 5.6 имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_2(\Pi_R)} &= \|(I + T_5 + T_7(\eta))^{-1} \tilde{F}\|_{L_2(\Pi_R)} \leq C \|\tilde{F}\|_{L_2(\Pi_R)} \\ &\leq C \left(\|F\|_{L_2(\Pi_R)} + \frac{|(F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}|}{|(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}|} \|T_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_R)} \right) \\ &\leq C \|F\|_{L_2(\Pi_R)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

В силу (5.31), (5.35), (5.39) и лемм 5.5, 5.6 имеем

$$\alpha(\eta) = C_1 \eta^{-n+2} \int_{\Pi_R} F d\xi + O(\eta^{-n+1}), \quad \|g\|_{L_2(\Pi_R)} \leq C \eta^{-n+2} \|F\|_{L_2(\Pi_R)}, \quad (5.40)$$

где $C_1 \neq 0$ – некоторая абсолютная константа.

Напомним, что решение v в (5.9) строится с помощью функций V_1 и V_2 – решений задач (5.4), (5.2) и (5.7), (5.2) соответственно. Легко показать, что первое слагаемое в (5.5) стремится к постоянной при $\xi_n \rightarrow +\infty$. В силу финитности функции g эта постоянная определяется равенством

$$K(\eta) = - \int_0^R t_n \int_{\square} g(t) dt. \quad (5.41)$$

С учетом (5.6), (5.8), (5.9), (5.40) и (5.41) получаем

$$K(\eta) = C \eta^{-n+2} \int_{\Pi_R} F d\xi + O(\eta^{-n+1}), \quad C \neq 0. \quad (5.42)$$

Несложно убедиться, что $v - K(\eta)$ – решение задачи (5.1), (5.2) с однородными граничными условиями на γ_η и Γ_η , асимптотикой (5.3) при $\xi_n \rightarrow +\infty$ и функцией F равной нулю при $\xi_n > R$. Верна оценка

$$\|v - K(\eta)\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \eta^{-(n-2)} \|F\|_{L_2(\Pi_R)}. \quad (5.43)$$

Основной результат настоящего пункта теперь удобно сформулировать в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 5.7. Задача (5.1), (5.2) с однородными граничными условиями на γ_η и Γ_η , асимптотикой (5.3) при $\xi_n \rightarrow +\infty$ и функцией F равной нулю при $\xi_n > R$ имеет единственное решение. Для решения выполнены оценка (5.43) и равенство (5.42).

5.5. Исследование общей модельной задачи для пограничного слоя.

В этом пункте исследуется разрешимость задачи (5.1), (5.2) и доказывается непрерывная зависимость от параметра η ее решения. Решение этой задачи будем строить в виде $v = \tilde{v} + (1 - \chi_2)w + (A + B\xi_n)(1 - \chi_2)$, где функция $\tilde{v}$ – решение задачи (5.1), (5.2) с правой частью

$$F\chi_2 + w \frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2 \frac{d\chi_2}{d\xi_n} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_n} + B \right)$$

и асимптотикой (5.3) при $\xi_n \rightarrow +\infty$. Функция $w \in W_2^1(\Pi)$ вводится как решение задачи

$$\Delta_\xi w = F, \quad \xi \in \Pi, \quad w = 0, \quad \xi \in \square,$$

с периодическими условиями (5.2). Задачу для w можно решить с помощью метода разделения переменных. С учетом леммы 5.1 для решения верна оценка

$$\|w\|_{W_2^2(\Pi)} \leq C \|F\|_{L_2(\Pi)}.$$

Разрешимости задачи для $\tilde{v}$ были посвящены пп. 5.2–5.4. В силу леммы 5.7 справедлива оценка

$$\|\tilde{v} - K(\eta)\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C(\eta^{-(n-2)}\|F\|_{L_2(\Pi)} + |A| + |B|).$$

Далее будет выведено условие, при котором постоянная $K(\eta)$ равна нулю, тем самым получим требуемое экспоненциальное убывание при $\xi_n \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 5.8. Существует гармоническая в Π функция $X \in W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющая граничным условиям $X = -C_0(\eta)$ на γ_η и $\frac{\partial X}{\partial \xi_n} = -1$ на Γ_η , периодическим условиям (5.2), экспоненциально убывающая при $\xi_n \rightarrow +\infty$. Здесь $C_0(\eta)$ – некоторая константа, удовлетворяющая соотношению

$$C_0(\eta) = C\eta^{-n+2} + O(\eta^{-n+1}), \quad C \neq 0. \quad (5.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи будем искать в виде $X = X_1 - C_0(\eta) - (1 - \chi_2)\xi_n$. Получаем задачу

$$\Delta_\xi X_1 = -\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2}\xi_n - 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}, \quad \xi \in \Pi, \quad X_1 = 0, \quad \xi \in \gamma_\eta, \quad \frac{\partial X_1}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \Gamma_\eta,$$

с периодическими условиями (5.2). В силу леммы 5.7 решение такой задачи существует и имеет при $\xi_n \rightarrow +\infty$ асимптотику $X_1 = C_0(\eta) + O(e^{-\alpha\xi_n})$, $\alpha > 0$. Тогда в силу леммы 5.7 следует утверждение леммы для $C_0(\eta)$.

Обозначим $Z(\xi, \eta) = X(\xi, \eta) + \xi_n + C_0(\eta)$. Функция Z гармоническая в Π , удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле на γ_η и Неймана на Γ_η и периодическим условиям (5.2).

ЛЕММА 5.9. Пусть F – функция из $L_2(\Pi)$, экспоненциально убывающая при $\xi_n \rightarrow +\infty$, v – решение задачи (5.1), (5.2). Эта задача имеет решение из $W_2^1(\Pi)$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$A = -C_0(\eta)G + \frac{1}{|\square|} \int_{\Pi} ZF d\xi. \quad (5.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (5.1), (5.2) существует (лемма 5.7) и имеет при $\xi_n \rightarrow +\infty$ асимптотику (5.3). Покажем, что при выполнении равенства (5.45) постоянная K равна нулю, тем самым получаем экспоненциальное убывание при $\xi_n \rightarrow +\infty$.

Отобразим Π вниз относительно гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$. Продолжим затем функции $v - (1 - \chi_2)G\xi_n$ и $F + G\left(\xi_n \frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\right)$ с Π на значения $\xi_n < 0$ четным образом. Функция $v - (1 - \chi_2)G\xi_n$ будет решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}(v - (1 - \chi_2)G\xi_n) &= F + G\left(\xi_n \frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\right), \\ \xi &\in \square \times \mathbb{R}^1, \quad v = A, \quad \xi \in \gamma_{\eta}, \end{aligned}$$

с периодическими условиями (5.2). Отметим, что после указанного продолжения граничное условие Неймана в задаче исчезает. Функция v в окрестности ребра l ведет себя как $O(r(\xi)^{1/2})$, где l – граница γ_{η} , рассматриваемая как $(n - 2)$ -мерная поверхность, $r(\xi)$ – расстояние от точки ξ до границы γ_{η} . Явно асимптотика описана в [39; равенство (5)]. Продолжив функцию Z как выше, получаем, что она имеет такую же особенность в окрестности ребра l .

Интегрируя по частям правые части равенств

$$\int_{\Pi} FZ d\xi = \int_{\Pi} Z\Delta_{\xi}v d\xi, \quad 0 = \int_{\Pi} \Delta_{\xi}Z d\xi, \quad 0 = \int_{\Pi_R} \xi_n \Delta_{\xi}Z d\xi,$$

учитывая особенность в окрестности ребра l и переходя в последнем равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} ZF d\xi &= A \int_{\gamma_{\eta}} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi_n} + 1 \right) d\xi' + G \int_{\Gamma_{\eta}} (X - C_0(\eta)) d\xi', \\ 0 &= - \int_{\gamma_{\eta}} \frac{\partial X}{\partial \xi_n} d\xi' + |\square| - |\gamma_{\eta}|, \quad 0 = - \int_{\Gamma_{\eta}} X d\xi' - C_0(\eta)|\gamma_{\eta}|, \end{aligned}$$

из которых вытекает (5.45).

ЛЕММА 5.10. Пусть для F и v выполнена лемма 5.9. Тогда задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение. Для решения выполнена оценка

$$\|v\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \left(\eta^{-(n-2)}(|B| + \|F\|_{L_2(\Pi)}) + \left| \int_{\Pi} ZF d\xi \right| \right),$$

где константы B, C не зависят от v, η и F .

§ 6. Непрерывная зависимость от η и оценки функций v_m , F_m и u_m

В этом параграфе будет исследована зависимость функций v_m , F_m и u_m от параметра η и получены оценки, характеризующие поведение этих функций при $\eta \rightarrow 0$. Сразу же отметим, что разрешимость задач (4.9), (4.10) следует из леммы 5.10. Всюду далее в этом разделе через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от η , F_m , u_m , v_m и f .

Обозначим $\Omega_{\tau_0} := \{x : 0 < x_n < \tau_0\}$.

ЛЕММА 6.1. Пусть $f \in W_2^k(\Omega_{\tau_0}) \cap L_2(\Omega)$, $\varphi \in W_2^k(\Upsilon)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, функция u – решение задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)u = f, \quad x \in \Omega, \quad u = \varphi, \quad x \in \Upsilon, \quad u = 0, \quad x \in \Xi.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $\delta > 0$ функция u принадлежит $W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta})$ и верна оценка

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta})} \leq C(\|f\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0})} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^k(\Upsilon)}),$$

где константа C не зависит от u , f , φ , но зависит от k и δ .

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1 из [40] с помощью разбиения единицы в области Ω_{τ_0} и теорем о повышении гладкости [30; гл. 4, § 2].

Рассмотрим задачи (4.9), (4.10). Так как $F_1 = 0$, то

$$v_1(\xi, x', \eta) = -\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', 0, \eta)X(\xi, \eta).$$

Последнее равенство в силу граничных условий (4.9) и условия разрешимости (5.44) влечет краевое условие для u_1 :

$$u_1 = C_0(\eta) \frac{\partial u_0}{\partial x_n}, \quad x \in \Upsilon. \quad (6.1)$$

Применяя лемму 5.9 к задачам (4.9), (4.10), выпишем граничные условия для остальных функций u_m :

$$u_m = C_0(\eta) \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n} + \frac{1}{|\square|} \int_{\Pi} Z F_m d\xi, \quad x \in \Upsilon. \quad (6.2)$$

Следовательно, соотношения (4.5)–(4.7), (6.1), (6.2) определяют задачи на u_m при $m \geq 0$. Далее мы доказываем разрешимость задач (4.5)–(4.7), (6.1), (6.2) для $m \geq 0$.

ЛЕММА 6.2. Задачи (4.9), (4.10), (4.5), (4.6), (6.1), (6.2) разрешимы, функции v_m , u_m и F_m представимы в виде сумм

$$\begin{aligned} v_m(\xi, x', \eta) &= \sum_{q=1}^{M_m^1} \varphi_m^q(x') v_m^q(\xi, \eta), & u_m(x, \eta) &= \sum_{q=1}^{M_m^2} a_m^q(\eta) u_m^q(x), \\ F_m(\xi, x', \eta) &= \sum_{q=1}^{M_m^3} \psi_m^q(x') F_m^q(\xi, \eta), \end{aligned}$$

где M_m^j – некоторые числа, $a_m^q(\eta)$ – некоторые функции, $\varphi_m^q, \psi_m^q \in W_2^k(\Upsilon)$, $u_m^q \in W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^1(\Omega)$, $v_m^q(\cdot, \eta) \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^1(\Pi) \cap W_2^k(\Pi \setminus \Pi_1)$, $F_m^q(\cdot, \eta) \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi) \cap W_2^k(\Pi \setminus \Pi_1)$ для всех $k \geq 0$ и всех $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из граничного условия (6.2) для $m = 1$ следует, что $u_1(x, \eta) = C_0(\eta)u_1^1(x)$. Отсюда и из определения функций v_1 и F_1 следует утверждение леммы. Действуя оператором Лапласа на $\xi_n^p X$, $p \geq 1$, и учитывая, что $\xi_n^p X = 0$ при $\xi_n = 0$, индукцией по p можно показать, что

$$\begin{aligned}\xi_n^p X &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{p+1}(\Pi), \\ \xi_n^{l+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_n^p} &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{l+1}(\Pi), \\ \xi_n^p \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_n^p} &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi), \quad l, p \geq 0.\end{aligned}$$

Тогда для F_2 утверждение леммы выполнено, и в силу задач для v_2 и u_2 и леммы 5.7 получаем утверждение леммы для v_2 . Отсюда вытекает, что все интегралы в правой части (6.2) при $m = 2$ определены. Следовательно, в силу леммы 6.1 утверждение леммы для u_2 выполнено. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. При этом можно показать, что

$$\begin{aligned}\xi_n^p v_m^q &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{p+1}(\Pi), \\ \xi_n^{l+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_m^q}{\partial \xi_n^p} &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{l+1}(\Pi), \\ \xi_n^p \nabla_\xi \frac{\partial^p v_m^q}{\partial \xi_n^p} &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi), \quad l, p \geq 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Далее мы получаем оценки, характеризующие поведение функций u_m , v_m и F_m при $\eta \rightarrow 0$. Всюду далее в этом параграфе будем использовать обозначение $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Pi)}$.

ЛЕММА 6.3. При $\eta \rightarrow 0$ имеют место равномерные по η и x' оценки

$$\|u_m\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\eta^{-m(n-2)}\|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u_m\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta})} \leq C\eta^{-m(n-2)}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где $m \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ – любое число,

$$\begin{aligned}\|F_m\| &\leq C\eta^{-(m-3/2)(n-2)}, \quad \|\xi_n^p F_m\| \leq C\eta^{-(m-3/2)(n-2)}, \\ \left\| \xi_n^{p+l+1} \frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l} \right\| &\leq C\eta^{-(m-3/2)(n-2)},\end{aligned}$$

где $l, p \geq 0$, $m \geq 2$,

$$\begin{aligned}\|v_m\|_{W_2^1(\Pi_R)} &\leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)}, \quad \|\xi_n^p v_m\| \leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)}, \\ \left\| \xi_n^{p+l} \nabla_\xi \frac{\partial^l v_m}{\partial \xi_n^l} \right\| &\leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)},\end{aligned}$$

где $l, p \geq 0$, $m \geq 1$. Аналогичные оценки верны и для функций $v_m^q(\xi, \eta)$ и $F_m^q(\xi, \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [41; лемма 3.8] можно доказать, что

$$\|\nabla_\xi X\| = \sqrt{C_0(\eta)|\square|}, \quad \|\xi_n^p \nabla_\xi X\| = \sqrt{p(2p-1)} \|\xi_n^{p-1} X\|, \quad p \geq 1. \quad (6.3)$$

Оценим норму функции X в $W_2^1(\Pi)$. Из последнего равенства для $p = 1$ и неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \|X\|_{W_2^1(\Pi)}^2 &= \|\xi_n \nabla_\xi X\|^2 + \|\nabla_\xi X\|^2 \leq \|\xi_n^2 \nabla_\xi X\| \|\nabla_\xi X\| + \|\nabla_\xi X\|^2 \\ &= \sqrt{6} \|\xi_n X\| \|\nabla_\xi X\| + \|\nabla_\xi X\|^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Действуя оператором Лапласа на $\xi_n X$ и учитывая, что $\xi_n X = 0$ при $\xi_n = 0$, в силу леммы 5.8 имеем $\|\xi_n X\| \leq C \|\nabla_\xi X\|$. Отсюда и из (5.44), (6.3), (6.4) и леммы 5.8 вытекает

$$\|X\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \|\nabla_\xi X\| = C \eta^{-(n-2)/2} + O(\eta^{-(n-1)/2}), \quad C \neq 0. \quad (6.5)$$

Из (6.4) следует

$$\|X\|_{W_2^1(\Pi)}^2 = \|\xi_n \nabla_\xi X\|^2 + \|\nabla_\xi X\|^2 \geq \|\nabla_\xi X\|^2 = C \eta^{-n+2} + O(\eta^{-n+1}), \quad C \neq 0. \quad (6.6)$$

Тогда в силу (5.45), леммы 5.10 и последнего неравенства выводим:

$$\|v_1\|_{W_2^1(\Pi_R)} = \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_n} X \right\|_{W_2^1(\Pi_R)} = C \eta^{-(n-2)/2} + O(\eta^{-(n-1)/2}). \quad (6.7)$$

Так как $\Delta_\xi v_m = F_m$, $m \geq 2$, то, интегрируя по частям, получаем ($l + p \geq 1$)

$$\int_\Pi \xi_n^{2(l+p)} \frac{\partial^l v_m}{\partial \xi_n^l} \frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l} d\xi = - \left\| \xi_n^{l+p} \nabla_\xi \frac{\partial^l v_m}{\partial \xi_n^l} \right\|^2 + (l+p)(2(l+p)-1) \left\| \xi_n^{l+p-1} \frac{\partial^l v_m}{\partial \xi_n^l} \right\|^2,$$

откуда, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \xi_n^{l+p} \nabla_\xi \frac{\partial^l v_m}{\partial \xi_n^l} \right\| &\leq C \left(\left\| \xi_n^{l+p-1} \nabla_\xi \frac{\partial^{l-1} v_m}{\partial \xi_n^{l-1}} \right\| + \left\| \xi_n^{l+p+1} \frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l} \right\| \right), \quad l \geq 1, \quad p \geq 0, \\ \|\xi_n^p \nabla_\xi v_m\| &\leq C (\|\xi_n^{p-1} v_m\| + \|\xi_n^{p+1} F_m\|), \quad l = 0, \quad p \geq 1. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Аналогично лемме 6.2 можно показать, что

$$\begin{aligned} \xi_n^p v_m &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{p+1}(\Pi), \\ \xi_n^{l+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_m}{\partial \xi_n^p} &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{l+1}(\Pi), \\ \xi_n^p \nabla_\xi \frac{\partial^p v_m}{\partial \xi_n^p} &\in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi), \quad l, p \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, все интегралы в (6.8) определены.

Действуя оператором Лапласа на $\xi_n^p v_m$, $p \geq 1$, и учитывая, что $\xi_n^p v_m = 0$ при $\xi_n = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \|\xi_n^p v_m\| &\leq C (\|\xi_n^p F_m\| + \|\xi_n^{p-2} v_m\| + \|\xi_n^{p-1} \nabla_\xi v_m\|), \quad p \geq 2, \\ \|\xi_n v_m\| &\leq C (\|\xi_n F_m\| + \|\nabla_\xi v_m\|). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Оценки (6.8), (6.9) аналогично можно получить и для функций $v_m^q(\xi, \eta)$. При этом в правых частях вместо F_m будут функции $F_m^q(\xi, \eta)$. В силу леммы 5.10 при $m = 2$ получаем

$$\begin{aligned} \|v_2\|_{W_2^1(\Pi_R)} &\leq C(\eta^{-(n-2)}(\|F_2\| + |B_2|) + \|ZF_2\|), \\ \|ZF_2\| &\leq C(\|X\| \|F_2\| + |C_0| \|F_2\| + \|\xi_n F_2\|). \end{aligned}$$

Оценим норму функции F_2 . Так как коэффициенты возмущенного оператора, функция $a(x')$ и все их производные равномерно ограничены, то

$$\begin{aligned} \|F_2\| &= \left\| \sum_{i,j=1}^n \left(\xi_n \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_n}(x', 0) \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + (D + A_{1,j}^1(x', 0)) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) v_1 \right\| \\ &\leq C \sum_{i,j=1}^n \left(\left\| \xi_n \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| + \left\| \frac{\partial v_1}{\partial \xi_j} \right\| \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Умножим обе части равенства $\Delta_\xi \left(\xi_n \frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} \right) = 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_i \partial \xi_n}$ на $\xi_n \frac{\partial v_1}{\partial \xi_i}$, проинтегрируем по частям по Π и, учитывая, что $\xi_n \frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} = 0$ при $\xi_n = 0$, получим

$$\left\| \nabla_\xi \left(\xi_n \frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} \right) \right\|^2 = \left\| \frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} \right\|^2.$$

Тогда в силу (6.8)–(6.10)

$$\begin{aligned} \left\| \xi_n^p \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| &\leq C \|\xi_n^{p-1} \nabla v_1\| \leq C \eta^{-(n-2)/2}, \\ \|F_2\| &\leq C \|\nabla_\xi v_1\| \leq C \eta^{-(n-2)/2}, \quad \|\xi_n^p F_2\| \leq C \|\xi_n^p \nabla_\xi v_1\| \leq C \eta^{-(n-2)/2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

В итоге получаем окончательную оценку функции v_2 :

$$\|v_2\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \eta^{-3(n-2)/2}. \quad (6.12)$$

В силу (6.11) при $m = 2$ и (6.8), (6.9) при $m = 3$ соответственно имеем

$$\left\| \xi_n^{p+2} \nabla_\xi \frac{\partial v_1}{\partial \xi_n} \right\| \leq C \|\xi_n^{p+1} \nabla_\xi v_1\| \leq C \eta^{-(n-2)/2}, \quad \left\| \xi_n^{p+2} \nabla_\xi \frac{\partial v_2}{\partial \xi_n} \right\| \leq C \eta^{-3(n-2)/2}.$$

Индукцией по p теперь можно доказать, что

$$\begin{aligned} \left\| \xi_n^p \frac{\partial^2 v_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| &\leq C \|\xi_n^{p-1} \nabla_\xi v_m\|, \quad \|F_m\| \leq C \|\nabla_\xi v_{m-1}\|, \\ \|\xi_n^p F_m\| &\leq C \|\xi_n^p \nabla_\xi v_{m-1}\|. \end{aligned} \quad (6.13)$$

При $m = 3$ в силу (6.8), (6.9) и (6.13) верно $\|\xi_n^p F_3\| \leq C \eta^{-3(n-2)/2}$. Продолжая по индукции для $m \geq 4$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \xi_n^p \frac{\partial^2 v_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| &\leq C \eta^{-(m-1/2)(n-2)}, \\ \|\xi_n^p F_m\| &\leq C \|\xi_n^p \nabla_\xi v_{m-1}\| \leq C \eta^{-(m-3/2)(n-2)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Таким образом, с учетом (6.9), (6.14) и леммы 5.10 получаем оценки для $m \geq 3$:

$$\begin{aligned} \|v_m\| &\leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)}, & \|\xi_n^p v_m\| &\leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)}, \\ \|F_m\| &\leq C\eta^{-(m-3/2)(n-2)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Аналогично вычислениям, проделанным для функции F_2 , имеем

$$\left\| \xi_n^{p+2} \frac{\partial F_m}{\partial \xi_n} \right\| \leq C \left\| \xi_n^{p+3} \frac{\partial^3 v_{m-1}}{\partial \xi_n \partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| \leq C \left\| \xi_n^{p+2} \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial \xi_n \partial \xi_i} \right\|.$$

Из (6.13) вытекает

$$C \left\| \xi_n^{p+2} \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial \xi_n \partial \xi_i} \right\| \leq C \left\| \xi_n^{p+2} \nabla_\xi \frac{\partial v_{m-1}}{\partial \xi_n} \right\|.$$

Продолжая по индукции для $m \geq 4$ и $l \geq 2$, выводим

$$\left\| \xi_n^{p+l} \nabla_\xi \frac{\partial^l v_m}{\partial \xi_n^l} \right\| \leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)}, \quad \left\| \xi_n^{p+l+1} \frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l} \right\| \leq C\eta^{-(m-3/2)(n-2)}. \quad (6.16)$$

Оценки (6.15), (6.16) аналогично можно получить и для функций $v_m^q(\xi, \eta)$ и $F_m^q(\xi, \eta)$. В силу оценки (6.14), краевых задач (4.5)–(4.7), (6.2) получаем

$$|a_m^q(\eta)| \leq C\eta^{-(m-1/2)(n-2)}.$$

Оценим норму функций u_m . В силу уравнения (4.6) и (6.2) при $m = 0$ определим граничное условие $u_0 = 0$, $x \in \Upsilon$. Следовательно, верна оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Далее, рассмотрим задачу (4.6), (6.2) в случае $m = 1$. В силу (5.44), (6.2) и последнего неравенства получаем

$$\|u_1\|_{W_2^1(\Omega)} = \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_n} C_0(\eta) \right\|_{W_2^1(\Omega)} = C\eta^{-n+2} + O(\eta^{-n+1}). \quad (6.17)$$

Продолжая по индукции для $m \geq 2$, имеем

$$\|u_m\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\eta^{-m(n-2)}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

В силу леммы 6.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ выводятся оценки для функций u_m , $m \geq 0$, в пространстве $W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta})$. Лемма доказана.

§ 7. Обоснование асимптотики

В этом параграфе мы завершаем доказательство теоремы 2 и проводим обоснование асимптотики функции u_ε . Обозначим

$$u_{\varepsilon, M}(x) = u_{\varepsilon, M}^{\text{ex}}(x, \eta) + \chi(x_n) u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}}(\xi, x', \eta), \quad (7.1)$$

$$u_{\varepsilon, M}^{\text{ex}}(x, \eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M \varepsilon^m u_m(x, \eta), \quad u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}}(\xi, x', \eta) = e^{\rho(x')x_n} \sum_{m=1}^M \varepsilon^m v_m(\xi, x', \eta),$$

где $M \geq 1$ – фиксированное натуральное число. Напомним, что функция $\chi(x_n)$ была введена в теореме 2.

ЛЕММА 7.1. Функция $u_{\varepsilon, M}(x)$ является решением задачи

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon, M} = f + f_{\varepsilon, M}, \quad x \in \Omega, \quad (7.2)$$

$$u_{\varepsilon, M} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \Xi, \quad \frac{\partial u_{\varepsilon, M}}{\partial \mu} = \varepsilon^M \frac{\partial u_M}{\partial \mu}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (7.3)$$

и верны следующие оценки:

$$\|f_{\varepsilon, M}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \frac{\varepsilon^{M-1/2}}{\eta^{(M-1/2)(n-2)}}, \quad \left\| \varepsilon^M \frac{\partial u_M}{\partial \mu} \right\|_{W_2^2(\Gamma)} \leq C \frac{\varepsilon^M}{\eta^{M(n-2)}}.$$

Для доказательства леммы 7.1 нам понадобится вспомогательная лемма.

ЛЕММА 7.2. Пусть δ – некоторое фиксированное число, v – $\square$ -периодическая функция из $W_2^1(\Pi)$, $u \in W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta/(k+1)})$ для некоторого $k \geq [n/2] + 1$. Тогда верна оценка

$$\left| \int_{\Omega_{\tau_0-\delta}} u^2(x') v^2\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) dx \right| \leq C \varepsilon \|u\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta/(k+1)})}^2 \|v\|_{L_2(\Pi)}^2,$$

где константа C не зависит от u, v, ε , но зависит от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ выберем разбиение единицы $1 = \sum_p \chi_p^2(x')$ такое, что для каждой из функций χ_p выполнено неравенство $0 \leq \|\chi_p\|_{C^k(\text{supp } \chi_p)} \leq C_k$, где константа C не зависит от p . Будем предполагать, что сдвигом носитель каждой из срезающих функций можно поместить в некоторую ограниченную область Q , не зависящую от p . Каждая точка x' пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ попадает в конечное число носителей, причем это число ограничено равномерно по x' .

Обозначим $u_p = \chi_p u$. Согласно стандартным теоремам вложения [30; гл. 3, § 8]

$$\sup_{\text{supp } \chi_p \times [0, \tau_0 - \delta]} |u_p|^2 \leq C \|u_p\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta/(k+1)})}^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_{\tau_0-\delta}} u^2(x') v^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| &= \left| \int_0^{\tau_0-\delta} \sum_p \int_{\text{supp } \chi_p} \chi_p^2 u^2(x') v^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| \\ &\leq \int_0^{\tau_0-\delta} \sum_p \int_{\text{supp } \chi_p} \left| u_p^2(x') v^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \\ &\leq C \int_0^{\tau_0-\delta} \sum_p \max_{\text{supp } \chi_p} |u_p|^2 \int_{\text{supp } \chi_p} \left| v^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \\ &\leq C \|u\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta/(k+1)})}^2 \int_0^{\tau_0-\delta} \left\| v\left(\cdot, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) \right\|_{L_2(Q)}^2 dx_n. \end{aligned}$$

Переходя к переменным ξ и учитывая, что множество Q содержит $O(\varepsilon^{-n+1})$ ячеек периодичности, выводим требуемую оценку. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.1. Выполнение граничных условий на γ_ε и Γ_ε следует из (4.9). Оценка для $\varepsilon^M \frac{\partial u_M}{\partial \mu}$ следует из леммы 6.3. Подставив (7.1) в уравнение (7.2), получаем

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon, M} = (\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon, M}^{\text{ex}} + (\mathcal{L} - \lambda)(\chi u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}}) = f + f_{\varepsilon, M}^{(1)} + f_{\varepsilon, M}^{(2)} = f + f_{\varepsilon, M}, \quad x \in \Omega.$$

Функции $f_{\varepsilon, M}^{(1)}$ и $f_{\varepsilon, M}^{(2)}$ имеют вид

$$f_{\varepsilon, M}^{(1)} := \sum_{i=1}^n \left(A_{i, n} \left(u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}} \frac{d\chi}{dx_n} - u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}} \frac{d^2\chi}{dx_n^2} - \frac{d\chi}{dx_n} \frac{\partial u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}}}{\partial x_i} \right) - A_{n, i} \frac{d\chi}{dx_n} \frac{\partial u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}}}{\partial x_i} \right), \quad (7.4)$$

$$f_{\varepsilon, M}^{(2)} = \chi(\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon, M}^{\text{mid}}, \quad (7.5)$$

где $A_{i, j} := A_j - \bar{A}_j - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}$. В силу уравнений (4.5), (4.6) имеем

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_{\varepsilon, M}^{\text{ex}} = f, \quad x \in \Omega. \quad (7.6)$$

Из задач (4.9), (4.10), лемм 6.1, 7.2 и равенств (7.4), (7.5) вытекает

$$\|f_{\varepsilon, M}^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \frac{\varepsilon^{M-1/2}}{\eta^{(M-1/2)(n-2)}}, \quad \|f_{\varepsilon, M}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \frac{\varepsilon^{M-1/2}}{\eta^{(M-1/2)(n-2)}}. \quad (7.7)$$

Из этих неравенств в силу (2.1) и (7.7) следует утверждение леммы для функций $f_{\varepsilon, M}$ и $u_{\varepsilon, M}$.

Обозначим $\tilde{u}_{\varepsilon, M} = u_{\varepsilon, M} - \varepsilon^M \frac{\partial u_M}{\partial \mu} \chi x_n$, $\hat{u}_{\varepsilon, M} = \tilde{u}_{\varepsilon, M} - u_\varepsilon$. Подставляя $\tilde{u}_{\varepsilon, M}$ в (7.2), взяв разность полученного уравнения и (4.1), получим уравнение $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)\hat{u}_{\varepsilon, M} = \hat{f}_{\varepsilon, M}$. В соответствии с определением функция $\hat{u}_{\varepsilon, M}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\hat{u}_{\varepsilon, M}, \hat{u}_{\varepsilon, M}) - \lambda \|\hat{u}_{\varepsilon, M}\|_{L_2(\Omega)}^2 = (\hat{f}_{\varepsilon, M}, \hat{u}_{\varepsilon, M})_{L_2(\Omega)}.$$

Так как $\hat{u}_{\varepsilon, M} \in \dot{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$, то аналогично неравенству (3.9) получаем

$$\|\hat{u}_{\varepsilon, M}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\hat{f}_{\varepsilon, M}\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u_{\varepsilon, M} - u_\varepsilon - B_{\varepsilon, M} \chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\hat{f}_{\varepsilon, M}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon, M} - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} &= \|u_{\varepsilon, M} - u_\varepsilon - B_{\varepsilon, M} \chi x_n + B_{\varepsilon, M} \chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_{\varepsilon, M} - u_\varepsilon - B_{\varepsilon, M} \chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} + \|B_{\varepsilon, M} \chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} \\ &\leq C \frac{\varepsilon^{M-1/2}}{\eta^{(M-1/2)(n-2)}}. \end{aligned}$$

Тогда в силу (2.1) получаем, что асимптотика функции u_ε есть ряд (2.10). Теорема 2 полностью доказана.

Автор благодарен Д. И. Борисову за постановку задачи и многочисленные полезные консультации. Автор также выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить первоначальную версию статьи.

Список литературы

- [1] Г. А. Чечкин, “Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий”, *Матем. сб.*, **184**:6 (1993), 99–150; англ. пер.: G. A. Chechkin, “Averaging of boundary value problems with a singular perturbation of the boundary conditions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **79**:1 (1994), 191–222.
- [2] Р. Р. Гадильшин, Г. А. Чечкин, “Краевая задача для лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:2 (1999), 271–287; англ. пер.: R. R. Gadyl’shin, G. A. Chechkin, “A boundary value problem for the Laplacian with rapidly changing type of boundary conditions in a multi-dimensional domain”, *Siberian Math. J.*, **40**:2 (1999), 229–244.
- [3] A. Friedman, Chaocheng Huang, Jiongmin Yong, “Effective permeability of the boundary of a domain”, *Comm. Partial Differential Equations*, **20**:1-2 (1995), 59–102.
- [4] А. Ю. Беляев, Г. А. Чечкин, “Усреднение операторов с мелкокомасштабной структурой граничных условий”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 496–510; англ. пер.: A. Yu. Belyaev, G. A. Chechkin, “Averaging operators with boundary conditions of fine-scaled structure”, *Math. Notes*, **65**:4 (1999), 418–429.
- [5] A. Damlamian, Ta-Tsien Li, “Boundary homogenization for elliptic problems”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **66**:4 (1987), 351–361.
- [6] M. Lobo, E. Perez, “Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **22**:4 (1988), 609–624.
- [7] G. A. Chechkin, E. I. Doronina, “On the asymptotics of the spectrum of a boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions”, *Funct. Differ. Equ.*, **8**:1-2 (2001), 111–122.
- [8] O. A. Oleinik, G. Chechkin, “On asymptotics of solutions and eigenvalues of the boundary value problem with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, **7**:1 (1996), 5–15.
- [9] Д. И. Борисов, “Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 23–70; англ. пер.: D. I. Borisov, “Asymptotics and estimates for the eigenelements of the Laplacian with frequently alternating non-periodic boundary conditions”, *Izv. Math.*, **67**:6 (2003), 1101–1148.
- [10] Д. И. Борисов, “О задаче с частым непериодическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 284–294; англ. пер.: D. I. Borisov, “On a problem with nonperiodic frequent alternation of boundary conditions imposed on fast oscillating sets”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 271–281.
- [11] Г. А. Чечкин, “Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе “легких” концентрированных масс. Двумерный случай”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 161–204; англ. пер.: G. A. Chechkin, “Asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions of an elliptic operator in a domain with many “light” concentrated masses situated on the boundary. Two-dimensional case”, *Izv. Math.*, **69**:4 (2005), 805–846.
- [12] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, “Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора”, *Алгебра и анализ*, **17**:6 (2005),

- 1–104; англ. пер.: M. Sh. Birman, T. A. Suslina, “Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:6 (2006), 897–973.
- [13] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, “Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ ”, *Алгебра и анализ*, **18**:6 (2006), 1–130; англ. пер.: M. Sh. Birman, T. A. Suslina, “Homogenization with corrector for periodic differential operators. Approximation of solutions in the Sobolev class $H^1(\mathbb{R}^d)$ ”, *St. Petersburg Math. J.*, **18**:6 (2007), 857–955.
- [14] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, С. В. Тихомирова, “Об усреднении вырождающихся эллиптических уравнений”, *Докл. РАН*, **410**:5 (2006), 587–591; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, S. V. Tikhomirova, “On the homogenization of degenerate elliptic equations”, *Dokl. Math.*, **74**:2 (2006), 716–720.
- [15] В. В. Жиков, “О спектральном методе в теории усреднения”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 95–104; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Spectral method in homogenization theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 85–94.
- [16] D. Borisov, G. Cardone, “Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions”, *J. Phys. A*, **42**:36 (2009), 365205, 21 pp.
- [17] D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone, “On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition”, *Ann. Henri Poincaré*, **11**:8 (2010), 1591–1627.
- [18] D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone, “Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows”, *Проблемы математического анализа*, **58**, 2011, 59–68; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **176**:6 (2011), 774–785.
- [19] D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone, “Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **64**:3 (2013), 439–472.
- [20] Р. Р. Гадильшин, “Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны”, *Алгебра и анализ*, **10**:1 (1998), 3–19; англ. пер.: R. R. Gadyl’shin, “On the asymptotics of eigenvalues for a periodically fixed membrane”, *St. Petersburg Math. J.*, **10**:1 (1999), 1–14.
- [21] Р. Р. Гадильшин, “Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **35**:4 (1999), 540–551; англ. пер.: R. R. Gadyl’shin, “Asymptotics of the eigenvalues of a boundary value problem with rapidly oscillating boundary conditions”, *Differential Equations*, **35**:4 (1999), 540–551.
- [22] Д. И. Борисов, “О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задаче для лапласиана”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 520–534; англ. пер.: D. I. Borisov, “Two-parameter asymptotics in a boundary-value problem for the Laplacian”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 471–485.
- [23] Г. А. Чечкин, “Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **19**, 1996, 323–337; англ. пер.: G. A. Chechkin, “Asymptotic expansion of the solution of a boundary value problem with rapidly changing type of boundary conditions”, *J. Math. Sci. (New York)*, **85**:6 (1997), 2440–2449.
- [24] Д. И. Борисов, “О сингулярно возмущенной краевой задаче для Лапласиана в цилиндре”, *Дифференц. уравнения*, **38**:8 (2002), 1071–1078; англ. пер.: D. I. Borisov, “On a singularly perturbed boundary value problem for the Laplacian in a cylinder”, *Differ. Equ.*, **38**:8 (2002), 1140–1148.
- [25] Д. И. Борисов, “О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий”, *Матем. сб.*, **193**:7 (2002), 37–68; англ. пер.: D. I. Borisov,

- “Boundary-value problem in a cylinder with frequently changing type of boundary”, *Sb. Math.*, **193**:7 (2002), 977–1008.
- [26] Г. А. Чечкин, “Асимптотическое разложение собственных элементов оператора Лапласа в области с большим количеством “легких” концентрированных масс, редко расположенных на границе. Двумерный случай”, *Тр. ММО*, **70** (2009), 102–182; англ. пер.: G. A. Chechkin, “Asymptotic expansion of the eigenelements of the Laplace operator in a domain with a large number of “light” concentrated masses sparsely situated on the boundary. Two-dimensional case”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **70** (2009), 71–134.
- [27] Е. И. Доронина, Г. А. Чечкин, “О собственных колебаниях тела с большим количеством концентрированных масс, расположенных непериодически вдоль границы”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 158–166; англ. пер.: E. I. Doronina, G. A. Chechkin, “On eigenvibrations of a body with many concentrated masses located nonperiodically along the boundary”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 148–156.
- [28] D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, C. Perugia, “Uniform resolvent convergence for strip with fast oscillating boundary”, *J. Differential Equations*, **255**:12 (2013), 4378–4402.
- [29] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966, xix+592 pp.
- [30] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976, 391 с.; англ. пер.: V. P. Mikhaĭlov, *Partial differential equations*, Mir, Moscow, 1978, 397 pp.
- [31] Д. И. Борисов, “Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами”, *Алгебра и анализ*, **20**:2 (2008), 19–42; англ. пер.: D. I. Borisov, “Asymptotics for the solutions of elliptic systems with rapidly oscillating coefficients”, *St. Petersburg Math. J.*, **20**:2 (2009), 175–191.
- [32] Р. Р. Гадильшин, “Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях”, *Дифференц. уравнения*, **22**:4 (1986), 640–652; англ. пер.: R. R. Gadyĭshin, “Asymptotic properties of an eigenvalue of a problem for a singularly perturbed self-adjoint elliptic equation with a small parameter in the boundary conditions”, *Differential Equations*, **22** (1986), 474–483.
- [33] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5(77) (1957), 3–122.
- [34] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, 4-е изд., Наука, М., 1974, 503 с.; нем. пер. 3-го изд.: N. N. Bogolyubow, Yu. A. Mitropolski, *Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen*, Math. Lehrbücher und Monogr., **XVIII**, Akademie-Verlag, Berlin, 1965, xii+453 pp.
- [35] A. Majda, “Outgoing solutions for perturbation of $-\Delta$ with applications to spectral and scattering theory”, *J. Differential Equations*, **16**:3 (1974), 515–547.
- [36] Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984, 472 с.; пер. с англ.: E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980, ix+398 pp.
- [37] Д. И. Борисов, “Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 3–32; англ. пер.: D. I. Borisov, “Discrete spectrum of an asymmetric pair of waveguides coupled through a window”, *Sb. Math.*, **197**:4 (2006), 475–504.

- [38] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во МГУ, М., 1990, 312 с.; англ. пер.: О. А. Oleĭnik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, Stud. Math. Appl., **26**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992, xiv+398 pp.
- [39] В. А. Кондратьев, “Особенности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра”, *Дифференц. уравнения*, **13**:11 (1977), 2026–2032; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “Singularities of a solution of Dirichlet’s problem for a second-order elliptic equation in the neighborhood of an edge”, *Differential Equations*, **13**:11 (1977), 1411–1415.
- [40] А. М. Golovina, “On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space”, *Russ. J. Math. Phys.*, **19**:2 (2012), 182–192.
- [41] Д. И. Борисов, “Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий”, *Вестник молодых ученых. Сер. Прикл. матем. и мех.*, 2002, № 1, 36–52.

Тимур Фархатович Шарапов
(Timur F. Sharapov)

Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: stf0804@mail.ru

Поступила в редакцию
22.03.2014 и 26.07.2014