Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. С. Мышаков, А. Ю. Попов, Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточненном порядке целой функции целого порядка, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 12, 119–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:57:09

УДК 517.547.22

Ф. С. Мышаков, А. Ю. Попов

Уточнение теоремы Гольдберга об оценке типа при уточненном порядке целой функции целого порядка

Найдено неупрощаемое второе слагаемое в теореме Гольдберга об асимптотической оценке сверху логарифма максимума модуля целой функции целого порядка.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: целая функция целого порядка, тип целой функции при уточненном порядке, медленно меняющаяся функция, асимптотическая оценка.

DOI: 10.4213/sm8367

§ 1. Введение

В теории целых функций конечного порядка важное место занимает теорема Валирона–Гольдберга. Перед тем как ее сформулировать, напомним несколько определений и введем необходимые обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1; гл. 1, § 12]). *Уточненным порядком* называется функция $\rho(r): (r_0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ (число r_0 – свое для каждой такой функции), дифференцируемая на луче $(r_0, +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty), \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho'(r)r \ln r = 0. \quad (1.1)$$

Типом целой функции f при уточненном порядке $\rho(r)$ называется величина

$$\sigma_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho(r)} \ln M(f, r), \quad \text{где } M(f, r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

Через $n_f(r)$ обозначим количество корней целой функции f в круге $|z| \leq r$. Каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [1; гл. 1, §§ 5, 13]). *Верхней плотностью множества корней функции f при уточненном порядке $\rho(r)$* называется величина

$$D_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho(r)} n_f(r). \quad (1.2)$$

Ж. Валирон [2] ввел функцию

$$S(\rho) = \int_0^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_\rho(r), \quad p = [\rho], \quad \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad \mathcal{M}_0(r) = \ln(1 + r),$$

$$\mathcal{F}_\rho(r, \theta) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) + \sum_{k=1}^p \frac{r^k}{k} \cos k\theta, \quad \mathcal{M}_p(r) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathcal{F}_\rho(r, \theta). \quad (1.3)$$

В работе [2] на основании теоремы А. Данжуа (см. [3]) о поведении $d\mathcal{M}_\rho(r)/dr$ была доказана сходимость интеграла $S(\rho)$ при любом $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА А (Ж. Валирон [2], А. А. Гольдберг [4]). Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, f – произвольная целая функция порядка ρ . Тогда справедливо неравенство

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq S(\rho) D_{\rho(r)}(f).$$

Существует функция f , имеющая конечный и положительный тип при уточненном порядке $\rho(r)$, для которой это неравенство обращается в равенство.

При любом $\rho \in \mathbb{N}$ существует целая функция порядка ρ нормального типа, например $\exp(z^\rho)$, не имеющая корней. Поэтому поиск аналога теоремы А в случае $\rho \in \mathbb{N}$ разумно вести для функций либо нулевого, либо бесконечного типа при порядке ρ . Такой аналог был найден А. А. Гольдбергом (см. [5]). Гольдберг обнаружил, что каков бы ни был уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = p \in \mathbb{N}$, всегда существует функция F (либо нулевого, либо бесконечного типа при порядке p), для которой справедливы соотношения

$$D_{\rho(r)}(F) < +\infty, \quad \sigma_{\rho(r)}(F) = +\infty,$$

и нашел в определенном смысле минимальный уточненный порядок $\tilde{\rho}(r)$, гарантирующий справедливость импликации

$$D_{\rho(r)}(f) < +\infty \implies \sigma_{\tilde{\rho}(r)}(f) < +\infty,$$

для любой целой функции f порядка p нулевого и бесконечного типа при порядке p . Уточненный порядок $\tilde{\rho}$ Гольдберг определил формулой

$$\tilde{\rho}(r) = p + \frac{\ln V(r)}{\ln r}, \quad (1.4)$$

где

$$V(r) = \int_r^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1} dt, \quad \text{если} \quad \int_{r_0}^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1} dt < +\infty, \quad (1.5)$$

$$V(r) = \int_{r_0}^r t^{\rho(t)-p-1} dt, \quad \text{если} \quad \int_{r_0}^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1} dt = +\infty. \quad (1.6)$$

ТЕОРЕМА В (А. А. Гольдберг [5]). Пусть $p \in \mathbb{N}$, $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = p$. Пусть далее f – произвольная целая функция порядка p (при условии (1.5) предполагается также, что она не является функцией нормального типа при порядке p), $D_{\rho(r)}(f) < +\infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\sigma_{\tilde{\rho}(r)}(f) \leq D_{\rho(r)}(f), \quad (1.7)$$

и существует функция, имеющая конечную и положительную плотность множества корней относительно $\rho(r)$, для которой это неравенство обращается в равенство.

Гольдберг также доказал, что построенный уточненный порядок обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{\rho(r) - \tilde{\rho}(r)} = 0, \quad (1.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{\tilde{\rho}(r) - p} = 0 \quad \text{в случае (1.5)}, \quad (1.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{p - \tilde{\rho}(r)} = 0 \quad \text{в случае (1.6)}. \quad (1.10)$$

В этой работе мы дополняем теорему В в следующем направлении. Пусть $p \in \mathbb{N}$, f – целая функция порядка p нулевого или бесконечного типа, множество корней которой имеет конечную положительную верхнюю плотность $D_{\rho(r)}(f)$ при некотором уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = p \in \mathbb{N}$. Обозначим, как обычно, $a^+ = \max(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, и рассмотрим разность

$$\Delta(f, r) = n_f(r) - D_{\rho(r)}(f)r^{\rho(r)}. \quad (1.11)$$

Согласно определению 2 имеем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho(r)} \Delta^+(f, r) = 0. \quad (1.12)$$

Мы обнаружили, что если в (1.12) стремление к нулю идет “не слишком медленно”, то справедлива асимптотическая оценка $\ln M(f, r)$ сверху с двумя неуклучшаемыми слагаемыми:

$$\ln M(f, r) \leq D_{\rho(r)}(f)r^{\tilde{\rho}(r)} + S_p D_{\rho(r)}(f)r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (1.13)$$

в которой S_p – некоторая постоянная (своя для каждого p). Нами показано, что эта оценка, вообще говоря, неуклучшаема даже в случае $\Delta(f, r) \leq 0$.

Числовая последовательность S_p определена и исследована в § 2. Основные результаты нашей работы изложены в § 3.

§ 2. Регуляризованные интегралы Валирона

В этом параграфе нам потребуется теорема Данжуа (см. [3]) о явном виде $\mathcal{M}'_p(r) = d\mathcal{M}_p(r)/dr$ в случае $p \geq 1$. А. Данжуа доказал равенства

$$\mathcal{M}'_p(r) = \frac{r^p}{r-1} \quad \forall r \geq 1 + \frac{1}{p}, \quad \mathcal{M}'_p(r) = r^p U_p(r), \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad (2.1)$$

где

$$U_p(r) = \frac{\sin(p\alpha_p(r))}{\sin(\alpha_p(r))},$$

$\alpha_p(r) = \alpha$ – единственный корень уравнения

$$\frac{\sin((p+1)\alpha)}{\sin(p\alpha)} = r, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{p+1}. \quad (2.2)$$

В [6] на основании (2.1), (2.2) были доказаны неравенства для любого $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} U_p(r) < p, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad 1 < U_p(r) < \frac{1}{1-r} \quad \forall r \in (0, 1), \\ U_p(r) > \left(1 + \frac{2}{p} - r\right)^{-1}, \quad \frac{2}{p} < r < 1 + \frac{1}{p}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В частности, имеем

$$\alpha_p(1) = \frac{\pi}{2p+1}, \quad U_p(1) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4p+2}} > \frac{2p+1}{\pi} \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Из (2.1), (2.2) непосредственно следуют тождества

$$U_1(r) = 1, \quad 0 < r < 2, \quad U_2(r) = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4}}{2}, \quad 0 < r < \frac{3}{2}. \quad (2.5)$$

Функция Валирона $S(\rho)$ (см. (1.3)) в целых точках не определена и при стремлении (как справа, так и слева) ρ к целому числу стремится к бесконечности. Это видно из расходимости интегралов $\int_1^{+\infty} r^{-p} d\mathcal{M}_p(r)$ и $\int_0^1 r^{-p-1} d\mathcal{M}_p(r)$, которая следует из соотношений (2.1), (2.3). Из этих же соотношений следует сходимость интегралов

$$S_p^0 = \int_0^1 \left(r^{-p} \mathcal{M}'_{p-1}(r) - \frac{1}{r} \right) dr + \int_1^{+\infty} r^{-p} \mathcal{M}'_{p-1}(r) dr, \quad (2.6)$$

$$S_p^\infty = \int_0^1 r^{-p} \mathcal{M}'_p(r) dr + \int_1^{+\infty} \left(r^{-p} \mathcal{M}'_p(r) - \frac{1}{r} \right) dr, \quad (2.7)$$

которые мы назовем регуляризованными интегралами Валирона. Эти интегралы встретятся в теоремах 1, 3. В этом параграфе мы дадим их двусторонние оценки, вычислим значения при небольших p и найдем асимптотику при $p \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 1 (А. Ю. Попов). *Справедливы равенства*

$$S_1^0 = 0, \quad S_2^0 = \ln 4, \quad S_3^0 = 1 + \ln 4, \quad (2.8)$$

двусторонние оценки

$$2 \ln(p-1) < S_p^0 < 2 \ln(p-1) + 2 \quad \forall p \geq 4 \quad (2.9)$$

и асимптотика

$$S_p^0 = 2 \ln p + A + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

где $A = \ln(4/\pi) + \gamma - ci(\pi)$, γ – постоянная Эйлера, $ci(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, $A = 0,7451\dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\mathcal{M}'_0(r) = (1+r)^{-1}$ находим

$$S_1^0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{r(1+r)} - \frac{1}{r} \right) dr + \int_1^{+\infty} \frac{dr}{(1+r)r} = \int_1^{+\infty} \frac{dr}{(1+r)r} - \int_0^1 \frac{dr}{1+r} = 0.$$

Согласно (2.1) при $p \geq 2$ имеем

$$S_p^0 = \int_0^1 \frac{U_{p-1}(r) - 1}{r} dr + \int_1^{p/(p-1)} \frac{U_{p-1}(r)}{r} dr + \int_{p/(p-1)}^{+\infty} \frac{dr}{r(r-1)}. \quad (2.11)$$

Из (2.11), (2.5) сразу же следуют равенства (2.8):

$$S_2^0 = \int_1^2 \frac{dr}{r} + \int_2^{+\infty} \frac{dr}{r(r-1)} = \ln 4,$$

$$S_3^0 = \int_0^1 \frac{r + \sqrt{r^2 + 4} - 2}{2r} dr + \int_1^{3/2} \frac{r + \sqrt{r^2 + 4}}{2r} dr + \int_{3/2}^{+\infty} \frac{dr}{r(r-1)} = 1 + \ln 4.$$

Для вывода двусторонних оценок (2.9) применим к интегралам (2.11) неравенства (2.3). Имеем

$$\begin{aligned}
 S_p^0 &< \int_0^{(p-2)/(p-1)} \frac{\frac{1}{1-r} - 1}{r} dr + \int_{(p-2)/(p-1)}^1 \frac{p-2}{r} dr \\
 &\quad + \int_1^{p/(p-1)} \frac{p-1}{r} dr + \int_{p/(p-1)}^{+\infty} \frac{dr}{r(r-1)} \\
 &= \ln p + \ln(p-1) + (p-2) \ln \frac{p-1}{p-2} + (p-1) \ln \frac{p}{p-1} = 2 \ln(p-1) + a_p,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$a_p = (p-2) \ln \left(1 + \frac{1}{p-2} \right) + p \ln \left(1 + \frac{1}{p-1} \right).$$

Несложно проверяется, что последовательность a_p возрастает и $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p = 2$. Следовательно, $a_p < 2$ для любого $p \in \mathbb{N}$, и мы получаем оценку сверху (2.9).

Аналогичным методом из (2.11), возрастания $U_{p-1}(r)$ и неравенств (2.3), (2.4) выводится оценка снизу

$$\begin{aligned}
 S_p^0 &= \int_0^{p/(p-1)} \frac{U_{p-1}(r) - 1}{r} dr + \int_1^{p/(p-1)} U_{p-1}(r) \frac{dr}{r} + \ln p \\
 &> \int_{2/(p-1)}^{p/(p-1)} \frac{(1 + \frac{2}{p} - r)^{-1} - 1}{r} dr + U_{p-1}(1) \ln \frac{p}{p-1} + \ln p \\
 &= \frac{p-1}{p+1} \ln(p-1) - \frac{2}{p+1} \ln \frac{p}{2} + U_{p-1}(1) \ln \frac{p}{p-1} + \ln p \\
 &= 2 \ln(p-1) - \frac{2}{p+1} \ln \frac{p(p-1)}{2} + (U_{p-1}(1) + 1) \ln \frac{p}{p-1} \\
 &> 2 \ln(p-1) + \left(\frac{2p-1}{\pi} + 1 \right) \ln \frac{p}{p-1} - \frac{2}{p+1} \ln \frac{p(p-1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством

$$\ln \frac{p}{p-1} > \frac{1}{p-0.5} \quad \forall p > 1,$$

находим

$$S_p^0 > 2 \ln(p-1) + b_p, \quad b_p = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{p-0.5} - \frac{2}{p+1} \ln \frac{p(p-1)}{2}.$$

Нетрудно проверить, что числа b_p при $4 \leq p \leq 7$ убывают, а при $p \geq 7$ возрастают. Следовательно, $b_p \geq b_7 > 0.02$. Этим оценка снизу в (2.9) доказана.

Найдем асимптотику интеграла

$$I_p = \int_0^{p/(p-1)} \frac{U_{p-1}(r) - 1}{r} dr = \int_0^{p/(p-1)} (U_{p-1}(r) - 1) d \ln r,$$

воспользовавшись выражениями (2.1), (2.2) функции $U_{p-1}(r)$ и r через угловой параметр α . Имеем

$$\begin{aligned} I_p &= - \int_0^{\pi/p} \left(\frac{\sin((p-1)\alpha)}{\sin \alpha} - 1 \right) d(\ln \sin(p\alpha) - \ln \sin((p-1)\alpha)) \\ &= \int_0^{\pi/p} \frac{\sin \frac{(p-2)\alpha}{2}}{\sin \frac{p\alpha}{2} \sin((p-1)\alpha)} \left(p - \frac{\sin(p\alpha) \cos((p-1)\alpha)}{\sin \alpha} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\left| \frac{\sin \frac{(p-2)\alpha}{2}}{\sin \frac{p\alpha}{2}} - 1 \right| \leq 2 \sin \frac{\pi}{2p}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{p},$$

а также в положительности подынтегральной функции в (2.13). Поэтому

$$I_p = I'_p \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} I'_p &= \int_0^{\pi/p} \left(p - \frac{\sin(p\alpha) \cos((p-1)\alpha)}{\sin \alpha} \right) \frac{d\alpha}{\sin((p-1)\alpha)} = I_{p,1} + I_{p,2}, \\ I_{p,1} &= \int_0^{\pi/p} \left(p - \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \right) \frac{d\alpha}{\sin((p-1)\alpha)}, \\ I_{p,2} &= \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 - \cos((p-1)\alpha)}{\sin((p-1)\alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

Докажем асимптотику

$$I_{p,2} = \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \frac{(p-1)\alpha}{2} d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Сначала оценим погрешность, которая получается в результате замены $\operatorname{tg}((p-1)\alpha/2)$ на $\operatorname{tg}(p\alpha/2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \left(\operatorname{tg} \frac{p\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{(p-1)\alpha}{2} \right) d\alpha &= \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\cos \frac{p\alpha}{2} \cos \frac{(p-1)\alpha}{2}} \\ &= \int_0^{\pi/p} \frac{\sin \frac{p\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d\alpha}{\cos \frac{(p-1)\alpha}{2}} = O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{p,2} &= \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \frac{p\alpha}{2} d\alpha + O\left(\frac{\ln p}{p}\right) = \int_0^{\pi/p} \frac{1 - \cos(p\alpha)}{\sin \alpha} d\alpha + O\left(\frac{\ln p}{p}\right) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{p \sin \frac{t}{p}} dt + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.16)$$

А так как

$$p \sin \frac{t}{p} = t(1 + O(p^{-2}t^2)), \quad p \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

то из (2.16) выводим (2.15).

Теперь в интеграле $I_{p,1}$ заменим функцию $\varphi_p(\alpha) = p - \sin(p\alpha)/\sin \alpha$ на $\varphi_{p-1}(\alpha)$. Погрешность такой замены равна

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/p} (\varphi_p(\alpha) - \varphi_{p-1}(\alpha)) \frac{d\alpha}{\sin((p-1)\alpha)} = \int_0^{\pi/p} \frac{\sin \alpha + \sin((p-1)\alpha) - \sin(p\alpha)}{\sin \alpha \sin((p-1)\alpha)} d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/p} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha + \int_0^{\pi/p} \frac{1 - \cos((p-1)\alpha)}{\sin((p-1)\alpha)} d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/p} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} d\alpha + \int_0^{\pi/p} \operatorname{tg} \frac{(p-1)\alpha}{2} d\alpha = O\left(\frac{\ln p}{p}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, обозначив $q = p - 1$, находим

$$\begin{aligned} I_{p,1} &= \int_0^{\pi/(q+1)} \left(q - \frac{\sin(q\alpha)}{\sin \alpha} \right) \frac{d\alpha}{\sin(q\alpha)} + O\left(\frac{\ln p}{p}\right) \\ &= \int_0^{\pi q/(q+1)} \left(1 - \frac{\sin t}{q \sin \frac{t}{q}} \right) \frac{dt}{\sin t} + O\left(\frac{\ln p}{p}\right) \\ &= \int_0^{\pi q/(q+1)} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{q \sin \frac{t}{q}} \right) dt + O\left(\frac{\ln p}{p}\right) \\ &= \int_0^{\pi q/(q+1)} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt + O\left(\frac{\ln p}{p}\right) \\ &= \ln p + 2 \ln \frac{2}{\pi} + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Из (2.14)–(2.17) находим

$$S_p^0 = 2 \ln p + 2 \ln \frac{2}{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt + O\left(\frac{\ln p}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty.$$

Используя выражение интеграла $\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt$ через постоянную Эйлера и интегральный косинус ([7; гл. 2, § 4]), приходим к асимптотике (2.10). Лемма 1 полностью доказана.

ЛЕММА 2 (Ф. С. Мышаков). *Справедливы равенства*

$$S_1^{\infty} = 2, \quad S_2^{\infty} = \frac{3}{2} + \ln 4, \tag{2.18}$$

двусторонние оценки

$$2 \ln p < S_p^{\infty} < 2 \ln p + 2 \quad \forall p \geq 3 \tag{2.19}$$

и асимптотика

$$S_p^{\infty} = 2 \ln p + A + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty, \tag{2.20}$$

где постоянная A определена в лемме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1) и (2.7) находим

$$S_p^\infty = \int_0^{1+1/p} U_p(r) dr - \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \int_{1+1/p}^\infty \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) dr = \int_0^{1+1/p} U_p(r) dr + \ln p. \quad (2.21)$$

Из (2.21), (2.5) находим

$$S_1^\infty = 2, \quad S_2^\infty = \int_0^{3/2} \frac{r + \sqrt{r^2 + 4}}{2} dr + \ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4.$$

Равенства (2.18) доказаны.

Для вывода двусторонних оценок (2.19) применим к интегралу (2.21) неравенства (2.3). Имеем

$$S_p^\infty < \int_0^{1-1/p} \frac{1}{1-r} dr + \ln p + 2 = 2 \ln p + 2.$$

Аналогичным методом получается оценка снизу

$$S_p^\infty > \int_{2/p}^1 \frac{1}{1 + \frac{2}{p} - r} dr + \ln p = 2 \ln p.$$

Чтобы вывести асимптотику (2.20), воспользуемся равенствами (2.1) и (2.2) и подставим их в (2.21). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{1+1/p} U_p(r) dr \\ &= \int_{\pi/(p+1)}^0 \frac{\sin(p\alpha)}{\sin \alpha} \frac{(p+1) \cos((p+1)\alpha) \sin(p\alpha) - p \cos(p\alpha) \sin((p+1)\alpha)}{\sin^2(p\alpha)} d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/(p+1)} \left(\frac{p}{\sin(p\alpha)} - \frac{\cos((p+1)\alpha)}{\sin \alpha} \right) d\alpha \\ &= \int_0^{\pi/(p+1)} \left(\frac{p}{\sin(p\alpha)} - \frac{\cos((p+1)\alpha)}{\alpha} \right) d\alpha + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/(p+1)} \left(\frac{p}{\sin(p\alpha)} - \frac{1}{\alpha} \right) d\alpha &= \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(p+1)} \right) - \ln \pi + \ln(p+1) - \ln p + \ln 2 \\ &= \ln p + 2 \ln 2 - 2 \ln \pi + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из (2.21)–(2.23) получаем асимптотику

$$S_p^\infty = 2 \ln p + \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x} dx - 2 \ln \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty,$$

которая равносильна асимптотике (2.20). Лемма 2 доказана.

§ 3. Основные результаты

В теоремах 1–3 предполагается, что $p \in \mathbb{N}$, $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = p$, множество корней функции f имеет конечную положительную верхнюю плотность (1.2) при уточненном порядке, $\Delta(f, r)$ – функция, заданная формулой (1.11). Через $\tilde{\rho}(r)$ обозначен уточненный порядок Гольдберга, построенный по $\rho(r)$ согласно (1.4)–(1.6).

ТЕОРЕМА 1 (А. Ю. Попов). Пусть интеграл в (1.5) сходится и выполнено условие

$$\int_r^{+\infty} \Delta^+(f, t) t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.1)$$

Тогда, если относительно f известно, что она не является функцией нормального типа при порядке p , справедлива асимптотическая оценка

$$\ln M(f, r) \leq D_{\rho(r)}(f) r^{\tilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f) S_p^0 r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.2)$$

и функция f имеет нулевой тип при порядке p . С другой стороны, каковы бы ни были число $D \in (0, +\infty)$ и возрастающая функция H , для которых справедлива асимптотическая оценка

$$\Delta(r) \equiv H(r) - Dr^{\rho(r)} = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.3)$$

при условии

$$\int_r^{+\infty} |\Delta(t)| t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.4)$$

существуют целая функция G нулевого типа при порядке p и возрастающая последовательность положительных чисел $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что верны соотношения $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$,

$$n_G(r) = H(r) + O(1), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.5)$$

$$\ln M(G, R_k) \geq DR_k^{\tilde{\rho}(R_k)} + DS_p^0 R_k^{\rho(R_k)} + o(R_k^{\rho(R_k)}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $\Delta^+(f, r) = o(r^{\rho(r)})$, $r \rightarrow +\infty$, а интеграл в (1.5) сходится, то сходимость интеграла $\int_{r_0}^{+\infty} \Delta^+(f, t) t^{-p-1} dt$ очевидна. Асимптотическая оценка (3.2) верна при ограничении (3.1) на скорость стремления к нулю остатка этого интеграла.

В связи с требованиями (3.1) и (3.4) теоремы 1 возникает вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять уточненный порядок $\rho(r)$ (в предположении (1.5)) и измеримая локально ограниченная функция $u: [r_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$u(r) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

достаточным для того, чтобы выполнялась асимптотическая оценка

$$\int_r^{+\infty} u(t) t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Если, например, $r^{\rho(r)-p} \searrow 0$, то достаточно того, чтобы

$$u(t) \leq \varepsilon(t)r^{\rho(r)}, \quad r \geq r_0, \quad \text{где} \quad \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt < +\infty.$$

Если никаких условий на регулярность поведения $\rho(r)$ не накладывать, то достаточным является условие $u(r) = O(r^{p_1})$, $r \rightarrow +\infty$, где p_1 – произвольное число, меньшее p .

В случае расходимости несобственного интеграла $\int_{r_0}^{+\infty} t^{\rho(t)-p-1} dt$ в теореме 2 отдельно рассмотрены уточненные порядки, для которых

$$r^{\rho(r)} = O(r^p), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.7)$$

В теореме 3, напротив, требуется, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{\rho(r)-p} = +\infty. \quad (3.8)$$

Этим исключается “нерегулярность” поведения $\rho(r)$, когда $r^{\rho(r)-p}$ имеет бесконечный верхний и конечный нижний пределы.

ТЕОРЕМА 2 (Ф. С. Мышаков). *Если выполняются условия (1.6), (3.7) и сходится интеграл*

$$\int_{r_0}^{+\infty} \Delta^+(f, t) t^{-p-1} dt,$$

то верна асимптотическая оценка

$$\ln M(f, r) \leq D_{\rho(r)}(f) r^{\tilde{\rho}(r)} + O(r^p), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.9)$$

С другой стороны, каковы бы ни были число $D \in (0, +\infty)$, функция H , удовлетворяющая условию (3.3), и стремящаяся к $+\infty$ (вообще говоря, сколь угодно медленно) функция B , существуют целая функция G порядка p и возрастающая последовательность положительных чисел R_k , $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$, такие, что верны соотношения (3.5) и

$$\ln M(G, R_k) \geq D_{\rho(r)}(f) R_k^{\tilde{\rho}(R_k)} - B(R_k) R_k^p \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сделать остаточный член равным $o(R^p)$ в (3.9) вряд ли возможно. Пока неясно, можно ли в (3.10) вместо сколь угодно медленно стремящейся к бесконечности функции B взять константу.

ТЕОРЕМА 3 (Ф. С. Мышаков). *При условиях (1.6), (3.8) и*

$$\int_{r_0}^r \Delta^+(f, t) t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.11)$$

верна асимптотическая оценка

$$\ln M(f, r) \leq D_{\rho(r)}(f) r^{\tilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f) S_p^\infty r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.12)$$

С другой стороны, каковы бы ни были число $D \in (0, +\infty)$ и возрастающая функция H , для которых справедлива асимптотическая оценка

$$\Delta(r) \equiv H(r) - D r^{\rho(r)} = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.13)$$

при условии

$$\int_{r_0}^r |\Delta(t)| t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.14)$$

существуют целая функция G бесконечного типа при порядке p и возрастающая последовательность положительных чисел $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что верны соотношения (3.5), $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$,

$$\ln M(G, R_k) \geqslant DR_k^{\tilde{\rho}(R_k)} + DS_p^\infty R_k^{\rho(R_k)} + o(R_k^{\rho(R_k)}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В связи с требованиями (3.11) и (3.13) теоремы 3 возникает вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять уточненный порядок $\rho(r)$ в предположении (1.6) и измеримая локально ограниченная функция $u: [r_0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$u(r) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

достаточным для того, чтобы выполнялась асимптотическая оценка

$$\int_{r_0}^r u(t) t^{-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Если, например, $r^{\rho(r)-p} \nearrow \infty$, то достаточно того, чтобы

$$u(t) \leqslant \varepsilon(t) r^{\rho(r)}, \quad r \geqslant r_0, \quad \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt < +\infty.$$

Если никаких условий на регулярность поведения $\rho(r)$ не накладывать, то достаточным является условие $u(r) = O(r^{p_1})$, $r \rightarrow +\infty$, где p_1 – произвольное число, меньшее p .

§ 4. Лемма о медленно меняющихся функциях

ЛЕММА 3. Пусть $l: (r_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная положительная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0. \quad (4.1)$$

Тогда, каково бы ни было произвольное число $a \in (0, 1)$, при всех достаточно больших r выполняются двойные неравенства

$$\left(\frac{t}{r}\right)^a \leqslant \frac{l(t)}{l(r)} \leqslant \left(\frac{r}{t}\right)^a, \quad r_0 \leqslant t \leqslant r, \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{r}{t}\right)^a \leqslant \frac{l(t)}{l(r)} \leqslant \left(\frac{t}{r}\right)^a, \quad t > r. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $w_l(r) = rl'(r)/l(r)$. При любом $t > r_0$ верно равенство

$$\frac{l(t)}{l(r)} = \exp\left(-\int_t^r \frac{w_l(x)}{x} dx\right). \quad (4.4)$$

В силу (4.1) для любого $a > 0$ существует такое число x_a , что при любом $x > x_a$ верно неравенство

$$|w_l(x)| < \frac{a}{2}. \quad (4.5)$$

Из (4.4), (4.5) при

$$x_a \leq t \leq r \quad (4.6)$$

находим

$$\left(\frac{t}{r}\right)^{a/2} = \exp\left(-\int_t^r \frac{a}{2x} dx\right) \leq \frac{l(t)}{l(r)} \leq \exp\left(\int_t^r \frac{a}{2x} dx\right) = \left(\frac{r}{t}\right)^{a/2}. \quad (4.7)$$

Тем самым двойное неравенство (4.2) доказано при всех t, r , удовлетворяющих ограничению (4.6). Осталось доказать это неравенство для значений $t \in [r_0, x_a]$, но зато лишь при достаточно больших r . Положим

$$M = M_l(a) = \max_{r_0 \leq t \leq x_a} \left(\max \left(\frac{l(t)}{l(x_a)}, \frac{l(x_a)}{l(t)} \right) \right).$$

Тогда при любом $t \in [r_0, x_a]$, воспользовавшись уже доказанным неравенством (4.7) для значения $t = x_a$, получим оценку сверху

$$\frac{l(t)}{l(r)} = \frac{l(t)}{l(x_a)} \frac{l(x_a)}{l(r)} \leq M \left(\frac{r}{x_a}\right)^{a/2} = M \left(\frac{x_a}{r}\right)^{a/2} \left(\frac{r}{x_a}\right)^a \leq M \left(\frac{x_a}{r}\right)^{a/2} \left(\frac{r}{t}\right)^a. \quad (4.8)$$

И тем же способом выводится оценка снизу

$$\frac{l(t)}{l(r)} \geq \frac{1}{M} \left(\frac{r}{x_a}\right)^{a/2} \left(\frac{t}{r}\right)^a. \quad (4.9)$$

Ясно, что при $r \geq x_a M^{2/a}$ в (4.8) получится оценка $l(t)/l(r) \leq (r/t)^a$, а в (4.9) $l(t)/l(r) \geq (t/r)^a$.

Неравенство (4.3) доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

§ 5. Сведение оценок логарифма максимума модуля канонического произведения к оценкам специального ряда и интеграла

Обозначим

$$E_0(w) = 1 - w, \quad E_q(w) = (1 - w) \exp\left(\sum_{k=1}^q \frac{w^k}{k}\right), \quad q \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Из (5.1) и (1.3) видно, что

$$\ln |E_q(Re^{i\varphi})| = \frac{1}{2} \ln(1 - 2R \cos \varphi + R^2) + \sum_{k=1}^q \frac{R^k}{k} \cos(k\varphi) \equiv \mathcal{F}_q(R, \varphi) \leq \mathcal{M}_q(R). \quad (5.2)$$

ЛЕММА 4. Пусть даны число $q \in \mathbb{N}_0$ и последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условиям

$$r_n \leq r_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-q-1} < +\infty. \quad (5.3)$$

Тогда справедливы два следующих утверждения.

1. Если $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – произвольная последовательность комплексных чисел такая, что $|\lambda_n| = r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то каноническое произведение

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_q\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \quad (5.4)$$

сходится равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, является целой функцией и логарифм максимума модуля этой функции допускает оценку сверху

$$\ln M(F, r) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) \quad \forall r > 0. \quad (5.5)$$

2. Пусть на луче $(r_1, +\infty)$ задана положительная, возрастающая и стремящаяся к бесконечности (вообще говоря, сколь угодно медленно) при $r \rightarrow +\infty$ функция $A(r)$. Тогда существуют такие последовательности действительных чисел $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и натуральных чисел $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что для логарифма максимума модуля канонического произведения

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_q\left(\frac{ze^{i\varphi_n}}{r_n}\right) \quad (5.6)$$

верна асимптотика

$$\ln M(G, r_{n_{2k}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}\right) + O(A(r_{n_{2k}})r_{n_{2k}}^q). \quad (5.7)$$

Если в случае $q = 0$ взять $\varphi_n \equiv \pi$ (тогда $G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/r_n)$), то будет выполняться тождество

$$\ln M(G, r) \equiv \ln G(r) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_0\left(\frac{r}{r_n}\right), \quad r > 0. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (5.2) и разложения в ряд

$$\mathcal{F}_q(R, \varphi) = - \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{R^k}{k} \cos(k\varphi), \quad 0 < R < 1, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

выводим неравенство

$$|\ln |E_q(Re^{i\varphi})|| \leq \frac{2}{q+1} R^{q+1}, \quad 0 \leq R \leq \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (5.3) следует равномерная сходимость произведения (5.4) на любом компакте в $\mathbb{C}$, а значит, и включение $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Из (5.4), (5.2), (1.3) находим

$$\ln |F(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ln M\left(E_p, \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\left|\frac{z}{r_n}\right|\right).$$

Отсюда следует неравенство (5.5).

Второе утверждение будем доказывать в случае $q \in \mathbb{N}$, поскольку при $q = 0$ оно тривиально.

Определим рекуррентно последовательность номеров $\{n_k\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$n_k < A(r_{n_{k+1}}), \quad \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} r_n^{-q-1} < \frac{1}{r_{n_k}}, \quad r_{n_{k+1}} > 2r_{n_k}, \quad (5.9)$$

а в остальном последовательность $\{n_k\}$ может быть произвольной. Последовательность $\{\varphi_n\}$ построим следующим образом. Числа $\varphi_{n_{2k}}$ берутся произвольными, а числа $\{\varphi_n\}$ при $n \in [n_{2k-1}, n_{2k+1})$ определяются равенствами

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_{n_{2k}} & \text{при } n_{2k-1} \leq n, r_n \leq \frac{qr_{n_{2k}}}{q+1}, \\ \varphi_{n_{2k}} - \alpha_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) & \text{при } n < n_{2k+1}, r_n > \frac{qr_{n_{2k}}}{q+1}, \end{cases} \quad (5.10)$$

где $\alpha_q(r)$ – единственный корень уравнения

$$\frac{\sin((q+1)\alpha)}{\sin(q\alpha)} = r, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{q+1}, \quad q \in \mathbb{N},$$

при $r \in (0, 1 + 1/q)$.

А. Данжуа [3] доказал, что

$$\begin{aligned} \ln |E_q(re^{i\alpha_q(r)})| &= \max_{|w| \leq r} \ln |E_q(w)| = \mathcal{M}_q(r), \quad 0 < r < \frac{q+1}{q}, \\ \ln |E_q(r)| &= \max_{|w| \leq r} \ln |E_q(w)| = \mathcal{M}_q(r), \quad r \geq \frac{q+1}{q}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из (5.10), (5.11) находим

$$\ln \left| E_q \left(\frac{r_{n_{2k}} \exp(i\varphi_{n_{2k}} - i\varphi_n)}{r_n} \right) \right| = \mathcal{M}_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right), \quad n_{2k-1} \leq n < n_{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln M(F, r_{n_{2k}}) &\geq \ln |F(r_{n_{2k}} \exp(i\varphi_{n_{2k}}))| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| E_q \left(\frac{r_{n_{2k}} \exp(i\varphi_{n_{2k}} - i\varphi_n)}{r_n} \right) \right| \\ &= \sum_{n \in [1, n_{2k-1}) \cup [n_{2k+1}, +\infty)} \ln \left| E_q \left(\frac{r_{n_{2k}} \exp(i\varphi_{n_{2k}} - i\varphi_n)}{r_n} \right) \right| + \sum_{n=n_{2k-1}}^{n_{2k+1}-1} \mathcal{M}_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, обозначив $m_q(r) = \min_{|w|=r} \ln |E_q(w)|$, выводим оценку снизу

$$\ln M(F, r_{n_{2k}}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) + \sum_{n \in [1, n_{2k-1}) \cup [n_{2k+1}, +\infty)} \left(m_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) - \mathcal{M}_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) \right). \quad (5.12)$$

Из (5.12) и неравенства (5.5) заключаем, что для доказательства асимптотики (5.7) осталось установить справедливость соотношения

$$S_{1,k} + S_{2,k} = O(A(r_{n_{2k}})r_{n_{2k}}^q), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.13)$$

в котором

$$\begin{aligned} S_{1,k} &= \sum_{n=1}^{n_{2k}-1} \left(m_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) - \mathcal{M}_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) \right), \\ S_{2,k} &= \sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} \left(m_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) - \mathcal{M}_q \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из (2.2) и разложения в ряд $\mathcal{F}_q(r, \varphi) = -\sum_{m=q+1}^{\infty} (r^m/m) \cos(m\varphi)$, $0 < r < 1$, следуют неравенства

$$\begin{aligned} -\frac{4}{q+1} r^{q+1} &< m_q(r) - \mathcal{M}_q(r) < 0, & 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{4}{q} r^q &< m_q(r) - \mathcal{M}_q(r) < 0, & r > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Применив (5.15) к оценке сумм (5.14), получим

$$\begin{aligned} S_{1,k} &< 0, & S_{2,k} &< 0, \\ -S_{1,k} &< \frac{4}{q} \sum_{n=1}^{n_{2k}-1} \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right)^q < \frac{4n_{2k}-1}{q} \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_1} \right)^q, \\ -S_{2,k} &< \frac{4}{q+1} \sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right)^{q+1} = \frac{4r_{n_{2k}}^{q+1}}{q+1} \sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} r_n^{-q-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из (5.9), (5.17) находим

$$-S_{1,k} < 4q^{-1} r_1^{-q} A(r_{n_{2k}}) r_{n_{2k}}^q, \quad -S_{2,k} < 4(q+1)^{-1} r_{n_{2k}}^q. \quad (5.18)$$

Соотношения (5.16), (5.18) влекут за собой (5.13), а это, как отмечалось выше, полностью доказывает лемму 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Метод построения последовательности корней произведения (5.6) принадлежит А. А. Гольдбергу (см. [4]).

Лемма 4 позволяет свести оценку логарифма максимума модуля канонического произведения (5.4) к оценке суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q(r/r_n)$ в случае, когда при заданных модулях корней максимум модуля функции (5.4) имеет наибольший возможный рост. Следующая лемма сводит оценку суммы этого ряда к оценке специального интеграла, если считающая функция последовательности $\{r_n\}$ имеет “достаточно регулярную” мажоранту (или миноранту).

ЛЕММА 5. Если выполнено условие (5.3), $n(t)$ – количество элементов последовательности $\{r_n\}$, не превосходящих t , то верно тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q \left(\frac{r}{r_n} \right) = \int_{r_1}^{+\infty} \frac{rn(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q \left(\frac{r}{t} \right) dt, \quad r > 0. \quad (5.19)$$

Если $\varphi \in C[r_1, +\infty)$, $n(t) \leq \varphi(t)$ для любого $t \geq r_1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q \left(\frac{r}{r_n} \right) \leq \int_{r_1}^{+\infty} \frac{r\varphi(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q \left(\frac{r}{t} \right) dt, \quad r > 0, \quad (5.20)$$

а если $\varphi(t) \leq n(t)$ для любого $t \geq r_1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq \int_{r_1}^{+\infty} \frac{r\varphi(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt, \quad r > 0. \quad (5.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-q-1}$ и монотонности r_n следует предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n r_n^{-q-1} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) t^{-q-1} = 0$$

и сходимость этого ряда равносильна сходимости интеграла $\int_{r_1}^{+\infty} n(t) t^{-q-2} dt$. Отсюда и из эквивалентностей (см. [3])

$$\mathcal{M}_q(x) \sim \frac{x^{q+1}}{q+1}, \quad \mathcal{M}'_q(x) \sim x^q, \quad x \rightarrow 0+,$$

вытекают соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{t}\right) = 0, \quad \int_{r_1}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt < +\infty \quad \forall r > 0. \quad (5.22)$$

Согласно определению интеграла Стильтьеса и функции $n(t)$ верно тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{r_n}\right) = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}_q\left(\frac{r}{t}\right) dn(t), \quad r > 0. \quad (5.23)$$

Интегрируя по частям в правой части (5.23), напомним, что $\mathcal{M}_q \in C^1(0, +\infty)$, и учитывая (5.22), приходим к тождеству (5.19). Неравенства (5.20) и (5.21) следуют из (5.19) и положительности $\mathcal{M}'_q(x)$ на луче $0 < x < +\infty$. Лемма 5 доказана.

Неравенства леммы 5 убеждают нас в необходимости изучения асимптотического поведения при $r \rightarrow +\infty$ интеграла

$$J_q(r; h) = \int_{r_1}^{+\infty} \frac{r h(t)}{t^2} \mathcal{M}'_q\left(\frac{r}{t}\right) dt, \quad (5.24)$$

где $h: [r_1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – некоторая правильно меняющаяся на бесконечности функция (см. [8]). Обычно именно такими функциями оценивают сверху или снизу считающие функции последовательностей. Нас будут интересовать функции вида

$$h(t) = t^{\rho(t)} \equiv t^{\rho} l(t), \quad (5.25)$$

где $\rho(t)$ – уточненный порядок, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \rho$.

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_q^0(x) = \begin{cases} x^{-q} \mathcal{M}'_{q-1}(x) - \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ x^{-q} \mathcal{M}'_{q-1}(x), & x \geq 1, \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_q^\infty(x) = \begin{cases} x^{-q} \mathcal{M}'_q(x), & 0 < x < 1, \\ x^{-q} \mathcal{M}'_q(x) - \frac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases} \quad (5.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Имеем

$$\mathcal{M}_1^0(x) = -\frac{1}{1+x}, \quad 0 < x < 1, \quad \mathcal{M}_1^0(x) = \frac{1}{x(1+x)}, \quad x \geq 1, \quad (5.28)$$

при $x \in (0, 1)$ верны соотношения

$$\mathcal{M}_2^0(x) \equiv 0, \quad \sin\left(\frac{q-2}{q} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \leq \mathcal{M}_q^0(x) \leq q-1, \quad q \geq 3, \quad (5.29)$$

$$\mathcal{M}_1^\infty(x) \equiv 1, \quad 1 \leq \mathcal{M}_q^\infty(x) \leq \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4q+2}, \quad q \geq 2, \quad (5.30)$$

а на луче $1 + 1/q \leq x < +\infty$ выполняются тождества

$$\mathcal{M}_{q+1}^0(x) \equiv \mathcal{M}_q^\infty(x) \equiv \frac{1}{x(x-1)} \quad \forall q \in \mathbb{N}. \quad (5.31)$$

Эти соотношения следуют из цитированной в начале §4 теоремы Данжуа. Таким образом, каждая функция $\mathcal{M}_q^0(x)$, $\mathcal{M}_q^\infty(x)$ непрерывна и ограничена на интервале $(0, 1)$, непрерывна на луче $[1, +\infty)$ и монотонно стремится к нулю на луче $[1 + 1/q, +\infty)$. Из сказанного и (5.31) следуют включения $\mathcal{M}_q^0(x)$, $\mathcal{M}_q^\infty(x) \in L(0, +\infty)$ для любого $q \in \mathbb{N}$.

§ 6. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку функция f хотя и имеет целый порядок, но не является функцией нормального типа при этом порядке, то множество ее корней бесконечно. Обозначим $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность корней f (с учетом кратности), отличных от точки $z = 0$, расположенных в порядке неубывания модулей. Тогда согласно лемме 4 (сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-p}$ имеет место в силу конечности верхней плотности $\{\lambda_n\}$ относительно уточненного порядка, удовлетворяющего условию (1.5)) каноническое произведение

$$f_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p-1}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathbb{C}$, является целой функцией и логарифм максимума ее модуля допускает оценку

$$\ln M(f_\Lambda, r) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) \quad \forall r > 0. \quad (6.1)$$

Наша цель – вывести асимптотическую оценку сверху

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) \leq D_{\rho(r)}(f)r^{\tilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f)S_p^0 r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.2)$$

Убедимся в том, что этого достаточно для доказательства теоремы. Действительно, из (1.9) видно, что правая часть неравенства (6.2) есть $o(r^p)$ при $r \rightarrow +\infty$. Следовательно, функция f_Λ имеет нулевой тип при порядке p . Сама же функция f допускает представление

$$f(z) = Az^m f_\Lambda(z) e^{g(z)}, \quad (6.3)$$

в котором $m = 0$, если $f(0) \neq 0$ и m – кратность корня в точке $z = 0$, если $f(0) = 0$, а g – целая функция. Поскольку порядок f равен p , то g – многочлен степени $\leq p$. Тогда тип f при порядке p равен модулю коэффициента при z^p полинома g (ввиду того, что каноническое произведение f_Δ имеет нулевой тип при порядке p). Но так как по условию теоремы верно одно из двух равенств $\sigma_p(f) = 0$ или $\sigma_p(f) = +\infty$, то мы сразу же получаем, что возможна лишь ситуация, в которой $\sigma_p(f) = 0$ и $\deg g \leq p - 1$. Тогда из (6.1)–(6.3) находим

$$\ln M(f, r) \leq D_{\rho(r)}(f)r^{\tilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f)S_p^0 r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}) + O(r^{p-1} + \ln r), \quad r \rightarrow +\infty,$$

а эта асимптотическая оценка влечет за собой (3.2).

Перейдем к выводу оценки (6.2). Согласно обозначению (1.11) верно неравенство

$$n_f(r) \leq D_{\rho(r)}(f)r^{\rho(r)} + \Delta^+(f, r). \quad (6.4)$$

Из неравенств (5.20) и (6.4), положив

$$\varepsilon(r) = r^{-\rho(r)} \Delta^+(f, r)$$

и воспользовавшись обозначением (5.24), находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1} \left(\frac{r}{|\lambda_n|} \right) &\leq D_{\rho(r)}(f) J_{p-1}(r; h_1) + J_{p-1}(r; h_2), \\ h_1(t) &= t^{\rho(t)}, \quad h_2(t) = t^{\rho(t)} \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Преобразуем интеграл $J_{p-1}(r; h_1)$, используя обозначения (5.25)–(5.27) и определение уточненного порядка $\tilde{\rho}(r)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_{p-1}(r; h_1) &= \int_{r_1}^{+\infty} r t^{p-2} l(t) \mathcal{M}'_{p-1} \left(\frac{r}{t} \right) dt = \int_{r/r_1}^0 r \left(\frac{r}{x} \right)^{p-2} l \left(\frac{r}{x} \right) \mathcal{M}'_{p-1}(x) d \left(\frac{r}{x} \right) \\ &= r^p \int_0^{r/r_1} x^{-p} l \left(\frac{r}{x} \right) \mathcal{M}'_{p-1}(x) dx = r^p \int_0^1 \left(x^{-p} \mathcal{M}'_{p-1}(x) - \frac{1}{x} \right) l \left(\frac{r}{x} \right) dx \\ &\quad + r^p \int_1^{r/r_1} x^{-p} \mathcal{M}'_{p-1}(x) l \left(\frac{r}{x} \right) dx + r^p \int_0^1 l \left(\frac{r}{x} \right) \frac{dx}{x} \\ &= r^p \int_0^{r/r_1} \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) l \left(\frac{r}{x} \right) dx + r^p \int_r^{+\infty} \frac{l(t)}{t} dt \\ &= r^{\rho(r)} \int_0^{r/r_1} \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) \frac{l(r/x)}{l(r)} dx + r^{\tilde{\rho}(r)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Оценим сверху интеграл $J_{p-1}(r; h_2)$. В случае $p = 1$ имеем

$$J_0(r; h_2) = \int_{r_1}^{+\infty} \frac{r}{t} l(t) \varepsilon(t) \frac{dt}{1 + r/t} \leq \int_{r_1}^r \varepsilon(t) l(t) dt + r \int_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t) l(t)}{t} dt. \quad (6.7)$$

Согласно (3.1) верна асимптотическая оценка

$$\int_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t) l(t)}{t} dt = o(l(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.8)$$

Первый же интеграл оценим, применив лемму 3, взяв в ней $a = 1/2$ и используя стремление к нулю функции ε . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \varepsilon(t)l(t) dt &= \int_{r_1}^{\sqrt{r}} \varepsilon(t)l(t) dt + \int_{\sqrt{r}}^r \varepsilon(t)l(t) dt = O(\sqrt{r}) + o\left(\int_{\sqrt{r}}^r l(t) dt\right) \\ &= O(\sqrt{r}) + o\left(\int_{\sqrt{r}}^r \left(\frac{r}{t}\right)^{1/2} dt\right) = O(\sqrt{r}) + o(r l(r)). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.6)–(6.9) находим

$$J_0(r; h_2) = o(r l(r)) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

В случае $p \geq 2$ применим оценки производной $\mathcal{M}'_{p-1}$ (см. (2.1), (2.3))

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_{p-1}\left(\frac{r}{t}\right) &< p\left(\frac{r}{t}\right)^{p-2}, \quad 0 < t \leq \frac{p-1}{p}r, \quad \mathcal{M}'_{p-1}\left(\frac{r}{t}\right) < pe, \quad \frac{p-1}{p}r < t < r, \\ \mathcal{M}'_{p-1}\left(\frac{r}{t}\right) &< p\left(\frac{r}{t}\right)^{p-1}, \quad t \geq r. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} J_{p-1}(r; h_2) &< pr^{p-1} \int_{r_1}^{r^{(p-1)/p}} \varepsilon(t)l(t) dt \\ &+ per^{p-1} \int_{r^{(p-1)/p}}^r \varepsilon(t)l(t) dt + pr^p \int_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)l(t)}{t} dt. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Применив к оценке интегралов из (6.11) те же соображения, что и в случае $p = 1$, выводим результат (6.10) при произвольном значении $p \in \mathbb{N}$:

$$J_{p-1}(r; h_2) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.12)$$

Соотношения (6.5), (6.6), (6.12) приводят к следующему асимптотическому неравенству:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) &\leq D_{\rho(r)}(f)r^{\tilde{\rho}(r)} + D_{\rho(r)}(f)r^{\rho(r)} \int_0^{r/r_1} \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) \frac{l(r/x)}{l(r)} dx + o(r^{\rho(r)}), \\ &r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства (6.2) осталось вывести предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{r/r_1} \frac{l(r/x)}{l(r)} \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) dx = \int_0^{+\infty} \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) dx = S_p^0. \quad (6.13)$$

Это соотношение несложно выводится из свойств медленно меняющейся функции и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, состоящей в следующем.

Пусть (X, μ) – пространство с положительной мерой,

$$\varphi: (b, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(r, \cdot) \in L(X, \mu) \quad \forall r > b.$$

Если мажоранта семейства функций $\{\varphi(r, x) \mid r \in (b, +\infty)\}$, равная $\Phi(x) = \sup_{r>b} |\varphi(r, x)|$, лежит в пространстве $L(X, \mu)$ и при почти всех $x \in X$ существует предел $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r, x) = \varphi(x)$, являющийся измеримой функцией, то

$$\varphi \in L(X, \mu), \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_X \varphi(r, x) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x). \quad (6.14)$$

Эта теорема является прямым следствием классической теоремы Лебега о предельном переходе (см. [9; гл. 1, § 12]). Действительно, какова бы ни была последовательность $r_n \rightarrow +\infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(r_n, x) = \varphi(x) \quad \text{при п.в. } x \in X, \quad \sup_n |\varphi(r_n, x)| \leq \Phi(x) \in L(X, \mu).$$

Следовательно, $\varphi \in L(X, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi(r_n, x) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) \quad \forall \{r_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty.$$

Последнее соотношение влечет за собой справедливость (6.14).

В качестве (X, μ) возьмем луч $(0, +\infty)$ с обычной мерой Лебега. Положим

$$\varphi(r, x) = \frac{l(r/x)}{l(r)} \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x), \quad 0 < x \leq \frac{r}{|\lambda_1|}, \quad \varphi(r, x) = 0, \quad x > \frac{r}{|\lambda_1|}. \quad (6.15)$$

Согласно лемме 3 существует такое число b (свое для каждой функции l), что при любом $r > b$ верны неравенства

$$\frac{l(r/x)}{l(r)} \leq x^{-1/2}, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{l(r/x)}{l(r)} \leq x^{1/2}, \quad 1 < x < \frac{r}{|\lambda_1|}. \quad (6.16)$$

В силу медленного изменения функции l имеем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{l(r/x)}{l(r)} = 1 \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (6.17)$$

Из (6.15), (6.17) находим

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r, x) = \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad (6.18)$$

а из (6.15), (6.16) следует оценка

$$\sup_{r>b} |\varphi(r, x)| \leq (x^{-1/2} + x^{1/2}) \widetilde{\mathcal{M}}_p^0(x) \in L(0, +\infty) \quad (6.19)$$

(последнее включение легко выводится из (5.28)–(5.31)).

Соотношения (6.18), (6.19) показывают, что все условия цитированной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла выполнены. Применив эту теорему, получим (6.13). Первая часть теоремы 1 доказана. Докажем вторую.

По данной возрастающей функции H построим возрастающую последовательность положительных чисел r_n как решения уравнения $H(r_n) = n$ (если $H(r_0) > 1$, то несколько первых членов этой последовательности берем произвольными). Тогда при всех значениях r , начиная с того, в котором функция H принимает целое значение, считающая функция $n(r)$ построенной последовательности удовлетворяет двойному неравенству

$$H(r) - 1 < n(r) \leq H(r),$$

а значит, и асимптотике (3.5). Из (3.3), (3.5) следует эквивалентность

$$n(r) \sim Dr^{\rho(r)}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.20)$$

Из (6.20) и (1.5) вытекает сходимость интеграла

$$\int_{r_1}^{+\infty} r^{-p-1} n(r) dr = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-p},$$

а значит, выполняется условие леммы 4 ($q = p-1$). По этой лемме (можно взять $A(r) = \sqrt{r}$) найдутся последовательность действительных чисел φ_n и возрастающая последовательность положительных чисел $R_k = r_{n_{2k}}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$, такие, что

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p-1}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n = r_n e^{i\varphi_n},$$

является целой функцией порядка p , $\sigma_p(f) = 0$, и для логарифма максимума ее модуля на окружностях $|z| = R_k$ верна асимптотика

$$\ln M(G, R_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{R_k}{r_n}\right) + O(R_k^{p-1/2}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.21)$$

Очевидно также, что множество корней функции G есть в точности последовательность $\{r_n e^{i\varphi_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $n(r) = n_G(r)$.

Для доказательства второй части теоремы 1 осталось вывести асимптотическую оценку снизу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq Dr^{\tilde{\rho}(r)} + DS_p^0 r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.22)$$

Ввиду условия, наложенного в теореме на функцию H , и доказанной асимптотики (3.5) считающая функция множества корней функции G допускает оценку снизу

$$n_G(r) \geq Dr^{\rho(r)} - \varepsilon_1(r) r^{\rho(r)}, \quad (6.23)$$

где $\varepsilon_1(r)$ — такая стремящаяся к нулю функция, что

$$\int_r^{+\infty} \varepsilon_1(t) t^{\rho(t)-p-1} dt = o(r^{\rho(r)-p}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.24)$$

Эта оценка следует из условий (3.3), (3.4) теоремы и доказанного выше соотношения (3.5). Из (5.21) и (6.23) следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq DJ_{p-1}(r; h_1) - J_{p-1}(r; h_2), \quad (6.25)$$

где $h_1 = t^{\rho(t)}$, $h_2 = \varepsilon_1(t) t^{\rho(t)}$. Выше было доказано, что условие (6.24) влечет за собой асимптотическую оценку $J_{p-1}(r; h_2) = o(r^{\rho(r)})$, $r \rightarrow +\infty$. Поэтому имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p-1}\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq DJ_{p-1}(r; h_1) + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.26)$$

Соотношения (6.6), (6.13) дают асимптотику

$$J_{p-1}(r; h_1) = r^{\tilde{\rho}(r)} + S_p^0 r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.27)$$

Из (6.26), (6.27) сразу же получаем (6.22), а это доказывает вторую часть теоремы.

Теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если количество корней функции f конечно, то $f(z) = \mathcal{P}(z)e^{g(z)}$, где $\mathcal{P}, g$ – многочлены, $\deg g \leq p$. Следовательно,

$$\ln M(f, R) = O(R^p), \quad R \rightarrow +\infty,$$

а так как в силу (1.10) $R^p = o(R^{\tilde{\rho}(r)})$, то асимптотическое неравенство (3.9) заведомо выполняется.

Если функция f имеет бесконечно много корней, то, расположив все ее ненулевые корни в последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (каждый корень встречается в этой последовательности столько раз, какова его кратность), получим следующее разложение функции f в произведение:

$$f(z) = f_1(z)f_\Lambda(z), \quad f_1(z) = z^m e^{g(z)}, \quad f_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right),$$

g – многочлен степени, не большей p , m – кратность корня f в точке $z = 0$ (если $f(0) \neq 0$, то множитель z^m отсутствует). Поскольку $\ln M(f_1, R) = O(R^p)$, $R \rightarrow +\infty$, то оценку (3.9) достаточно вывести для $\ln M(f_\Lambda, R)$, а согласно лемме 4 – даже для мажоранты логарифма максимума модуля, т.е. для суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/|\lambda_n|)$. Лемма 5 вместе с оценкой сверху (6.4) считающей функции последовательности Λ показывают, что для этой суммы верна оценка сверху

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right) &\leq D_{\rho(r)}(f)J_p(r; h_1) + J_p(r; h_2), \\ h_1(t) &= t^{\rho(t)}, \quad h_2(t) = t^{\rho(t)}\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Следовательно, для доказательства асимптотической оценки (3.9) достаточно установить справедливость соотношений

$$J_p(r; h_1) = r^{\tilde{\rho}(r)} + O(r^p), \quad J_p(r; h_2) = O(r^p), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.29)$$

Приступим к доказательству асимптотических равенств (6.29). Преобразуем интеграл $J_p(r; h_1)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_p(r; h_1) &= \int_{r_1}^{+\infty} \frac{r h_1(t)}{t^2} \mathcal{M}'_p\left(\frac{r}{t}\right) dt = r \int_{r_1}^{+\infty} t^{p-2} l(t) \mathcal{M}'_p\left(\frac{r}{t}\right) dt \\ &= r \int_0^{r/r_1} \left(\frac{r}{x}\right)^{p-2} l\left(\frac{r}{x}\right) \mathcal{M}'_p(x) d\left(-\frac{r}{x}\right) = r^p \int_0^{r/r_1} (x)^{-p} l\left(\frac{r}{x}\right) \mathcal{M}'_p(x) dx \\ &= r^p \left(\int_0^1 (x)^{-p} l\left(\frac{r}{x}\right) \mathcal{M}'_p(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{r/r_1} \left(x^{-p} \mathcal{M}'_p(x) - \frac{1}{x}\right) l\left(\frac{r}{x}\right) dx + \int_1^{r/r_1} l\left(\frac{r}{x}\right) \frac{dx}{x} \right) \\ &= r^p \int_0^{r/r_1} l\left(\frac{r}{x}\right) \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) dx + r^p \int_{r_1}^r \frac{l(t)}{t} dt. \end{aligned} \quad (6.30)$$

В последнем переходе мы использовали определение (5.27) функции $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty$. Из (6.30), определения уточненного порядка $\tilde{\rho}(r)$ и функции l получаем равенство

$$J_p(r; h_1) = r^{\tilde{\rho}(r)} + r^{\rho(r)} \int_0^{r/r_1} \frac{l(r/x)}{l(r)} \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) dx. \quad (6.31)$$

По аналогии с предельным соотношением (6.13) для любой медленно меняющейся функции l , удовлетворяющей условию (4.1), выполняется предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{r/r_1} \frac{l(r/x)}{l(r)} \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) dx = \int_0^{+\infty} \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) dx = S_p^\infty. \quad (6.32)$$

Его доказательство почти дословно совпадает с доказательством (6.13), поскольку функции $\widetilde{\mathcal{M}}_p^0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty$ совпадают между собой на луче $[1 + 1/p, +\infty)$, на интервале $(0, 1 + 1/p)$ ограничены (положительны и меньше p^2), а значит, верно включение $(x^{1/2} + x^{-1/2}) \cdot \widetilde{\mathcal{M}}_p^\infty(x) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$. Из (6.31), (6.32) находим

$$J_p(r; h_1) = r^{\tilde{\rho}(r)} + S_p^\infty r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.33)$$

Из (6.33) и (3.7) получаем первое соотношение (6.29).

Оценим сверху интеграл $J_p(r; h_2)$ (он, очевидно, положителен). Как и в доказательстве теоремы 1, используем оценки

$$\mathcal{M}'_p < px^p, \quad 0 < x \leq 1, \quad \mathcal{M}'_p < ex^{p-1}, \quad x > 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_p(r; h_2) &= r \int_{r_1}^{+\infty} t^{p-2} l(t) \varepsilon(t) \mathcal{M}'_p\left(\frac{r}{t}\right) dt \\ &= O\left(r^p \int_{r_1}^r \frac{l(t) \varepsilon(t)}{t} dt\right) + O\left(r^{p+1} \int_r^{+\infty} \frac{l(t) \varepsilon(t)}{t^2} dt\right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

В условиях теоремы 2 верны асимптотические оценки $l(t) = O(1)$, $\varepsilon(t) = o(1)$, $t \rightarrow +\infty$, интеграл $\int_{r_1}^{+\infty} \frac{l(t) \varepsilon(t)}{t} dt$ сходится. На основании этого из (6.34) находим

$$J_p(r; h_2) = O(r^p) + O\left(r^{p+1} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = O(r^p), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.35)$$

Второе соотношение (6.29) доказано, и тем самым доказательство первой части теоремы 2 завершено.

Докажем вторую часть теоремы. Последовательность r_n строится так же, как и в теореме 1. Условия леммы 4 выполнены (здесь $q = p$), в качестве функции $A(r)$ берем $\sqrt{B(r)}$. По лемме 4 существуют последовательности λ_n , $|\lambda_n| = r_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и R_k , $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$, такие, что для логарифма максимума модуля целой функции

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$$

на окружностях $|z| = R_k$ верна асимптотика

$$\ln M(G, R_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R_k}{r_n} \right) + O \left(R_k^p \sqrt{B(R_k)} \right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.36)$$

Тем же способом, что и в доказательстве теоремы 1, получаем аналог неравенства (6.25), в котором $p - 1$, естественно, заменяется на p :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{r}{r_n} \right) \geqslant D J_p(r; h_1) - J_p(r; h_2) \quad (6.37)$$

(функции h_i те же, что и в (6.25)).

Асимптотика (6.33) вместе с асимптотической оценкой (6.35) позволяют вывести из (6.37) оценку снизу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{r}{r_n} \right) \geqslant D r^{\tilde{\rho}(r)} + O(r^p), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.38)$$

Отсюда и из (6.36) находим

$$\ln M(G, R_k) \geqslant D R_k^{\rho(R_k)} + O \left(\sqrt{B(R_k)} R_k^p \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при всех достаточно больших k выполняется неравенство (3.10), а за счет отбрасывания нескольких первых элементов последовательности $\{R_k\}$ с последующей их перенумерацией можно сделать так, чтобы неравенство (3.10) выполнялось при всех $k \in \mathbb{N}$. Теорема 2 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Первая часть теоремы 3 доказывается почти так же, как и первая часть теоремы 2. Случай, когда функция f имеет конечное число корней, разбирается точно так же, как этот случай разобран в доказательстве теоремы 2. В случае, когда множество корней функции f бесконечно, ввиду того, что в условиях теоремы 3 имеем $r^p = o(r^{\rho(r)})$, $r \rightarrow +\infty$, асимптотическую оценку сверху (3.12) достаточно вывести для суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/|\lambda_n|)$. Ввиду неравенства (6.28) требуемая оценка этой суммы сразу же следует из асимптотики (6.33) и асимптотической оценки

$$J_p(r; h_2) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (6.39)$$

которую нам и осталось вывести. Выше была получена формула (6.34). Поскольку в теореме 3 выполняется условие (3.11), то первое слагаемое в (6.34) есть $o(r^{\rho(r)})$ при $r \rightarrow +\infty$. Оценим второе слагаемое. Ввиду стремления к нулю функции $\varepsilon(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\int_r^{+\infty} \frac{l(t)\varepsilon(t)}{t^2} dt = o \left(\int_r^{+\infty} \frac{l(t)}{t^2} dt \right), \quad r \rightarrow +\infty,$$

и нам осталось доказать, что

$$\int_r^{+\infty} \frac{l(t)}{t^2} dt = O \left(\frac{l(r)}{r} \right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6.40)$$

Обозначим $\varphi(t) = t^{-1/2}l(t)$. Ввиду (4.1) функция φ убывает на некотором луче $[t_0, +\infty)$.

Следовательно,

$$\int_r^{+\infty} t^{-2} l(t) dt = \int_r^{+\infty} t^{-3/2} \varphi(t) dt \leq \varphi(r) \int_r^{+\infty} t^{-3/2} dt = 2\varphi(r)r^{-1/2} = 2\frac{l(r)}{r}.$$

Этим соотношение (6.40) доказано, и доказательство первой части теоремы 3 завершено.

Докажем вторую часть теоремы. Начало доказательства почти полностью совпадает с началом доказательства второй части теоремы 1. Построим последовательность λ_n точно таким же образом, как и в доказательстве теоремы 1, но взяв $q = p$. Применим лемму 4, положив $A(r) = \sqrt{r^{\rho(r)-p}}$. Тогда вместо соотношения (6.21), положив $G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/\lambda_n)$, при $r_n = |\lambda_n|$ получим

$$\ln M(G, R_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R_k}{r_n}\right) + o(r^{\rho(r)}). \quad (6.41)$$

Далее, рассуждая совершенно так же, как и в доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству, аналогичному (6.25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq DJ_p(r; h_1) - J_p(r; h_2),$$

в котором функции h_1, h_2 те же, что и в (6.25). Выше были выведены асимптотика (6.33) интеграла $J_p(r; h_1)$ и асимптотическая оценка (6.39) интеграла $J_p(r; h_2)$. Из этих соотношений и условия (3.8) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \geq Dr^{\tilde{\rho}(r)} + DS_p^{\infty} r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}). \quad (6.42)$$

Из (6.41), (6.42) получаем (3.15). Теорема 3 полностью доказана.

Список литературы

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956, 632 с.; англ. пер.: В. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964, viii+493 pp.
- [2] G. Valiron, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* (3), **5** (1913), 117–257.
- [3] A. Denjoy, “Sur les produits canoniques d’ordre infini”, *J. Math. Pures Appl.* (6), 1910, №6, 1–136.
- [4] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I”, *Матем. сб.*, **58(100)**:3 (1962), 289–334; англ. пер.: A. A. Gol’dberg, “An integral with respect to a semiadditive measure and its application to the theory of entire functions. I”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **88**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 105–162.
- [5] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II”, *Матем. сб.*, **65(107)**:3 (1964), 414–453; англ. пер.: A. A. Gol’dberg, “An integral with respect to a semiadditive measure and its application to the theory of entire functions. III”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **88**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 181–232.

- [6] А. Ю. Попов, “Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней”, *Матем. сб.*, **204**:5 (2013), 67–108; англ. пер.: A. Yu. Popov, “The most rapid possible growth of the maximum modulus of a canonical product of noninteger order with a prescribed majorant of the counting function of zeros”, *Sb. Math.*, **204**:5 (2013), 683–725.
- [7] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981, 799 с.; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series*, v.1: *Elementary functions*, Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1986, 798 pp.
- [8] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985, 142 с.; пер. с англ.: E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, v+112 pp.
- [9] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949, 496 с.; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, 2nd ed., Monogr. Mat., **7**, G. E. Stechert, Warszawa–New York, 1937, vi+347 pp.

Федор Сергеевич Мышаков

(Fedor S. Myshakov)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: mysfed@mail.ru

Поступила в редакцию

27.03.2014 и 04.06.2015

Антон Юрьевич Попов

(Anton Yu. Popov)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: mysfed@rambler.ru