Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, О наибольшей критической точке в k -законе нуля или единицы, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 4, 13–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:07:14

УДК 519.179.4

М. Е. Жуковский

О наибольшей критической точке в k -законе нуля или единицы

Для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ получено наибольшее значение $\alpha < 1$, при котором не выполнен k -закон нуля или единицы для свойств первого порядка. Ранее было известно, что k -закон выполнен при всех $\alpha > 1 - 1/(2^k - 2)$ кроме $1 - 1/(2^k - 1)$, $1 - 1/2^k$. При $\alpha = 1 - 1/(2^k - 2)$ закон нарушается. В работе доказана справедливость закона при $\alpha \in \{1 - 1/(2^k - 1), 1 - 1/2^k\}$.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: закон нуля или единицы, случайный граф, свойства первого порядка, игра Эренфойхта, ограниченная кванторная глупина.

DOI: 10.4213/sm8368

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются предельные вероятности свойств первого порядка случайного графа в модели Эрдёша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1]$. Ранее для произвольного натурального числа $k \geq 3$ нами были установлены k -законы нуля или единицы, которые описывают поведение вероятностей свойств первого порядка, выраженных формулами с ограниченной числом k кванторной глубиной при α из интервалов $(0, 1/(k - 2)]$ (см. [1]–[3]) и $(1 - 1/2^{k-1}, 1)$ (см. [4]). К сожалению, в работе [4] нам не удалось получить исчерпывающий результат для всех α из упомянутых интервалов. В настоящей работе мы улучшили этот результат. А именно нашли наибольшее значение α , меньшее 1 (и лежащее в интервале $(1 - 1/2^{k-1}, 1)$), при котором k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$ не выполнен. В этом параграфе мы сформулируем основной результат, но прежде дадим все необходимые определения, а также кратко опишем историю исследуемой задачи.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p = p(n) \in (0, 1)$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$. Случайный граф в модели Эрдёша–Реньи (см. [5]–[10]) – это случайный элемент $G(n, p)$ со значениями во множестве Ω_n и распределением $P_{n,p}$ на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1 - p)^{C_n^2 - |E|}, \quad G \in \Omega_n.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-00612 и № 12-01-00683-а), гранта Президента МД-6277.2013.1 и гранта Президента МК-2184.2014.1.

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы* для класса свойств $\mathcal{C}$, если вероятность выполнения каждого свойства из этого класса стремится либо к нулю, либо к единице при $n \rightarrow \infty$.

Пожалуй, самым изученным в этом направлении является класс свойств, выражаемых формулами первого порядка (см. [11], [12]). Эти формулы строятся с помощью символов отношений $\sim$, $=$; логических связок $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$; переменных $x, y, x_1, \dots$; кванторов $\forall$, $\exists$. Символы переменных в языке первого порядка обозначают вершины графа. Символ отношения $\sim$ выражает свойство двух вершин быть соединенными ребром, символ отношения $=$ выражает свойство двух вершин “совпадать”. Так, например, свойства “содержать треугольник” и “быть полным” являются свойствами первого порядка, так как выражаются соответственно формулами

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \quad ((x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \sim x_3))$$

и

$$\forall x \forall y \quad ((\neg(x = y)) \Rightarrow (x \sim y)).$$

Свойство связности не может быть выражено формулой первого порядка.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество функций $p = p(n)$, для которых выполнен закон нуля или единицы для класса свойств первого порядка. Класс свойств первого порядка обозначим через $\mathcal{L}$. В 1988 г. Дж. Спенсер и С. Шела (см. [13], [14]) установили, что все функции $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha \in (0, 1)$, принадлежат $\mathcal{P}$.

Заметим, что если α – рациональное число, $0 < \alpha \leq 1$ и $p = n^{-\alpha}$, то несложно показать, что случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы (см. [9]).

Помимо класса $\mathcal{L}$ рассматривается класс свойств $\mathcal{L}^\infty \supset \mathcal{L}$, выражаемых формулами, которые могут содержать бесконечное количество конъюнкций или дизъюнкций (предложения в таком языке, вообще говоря, бесконечны, в отличие от предложений, выражающих свойства из класса $\mathcal{L}$). В 1997 г. М. МакАртуром (см. [15]) были установлены некоторые законы нуля или единицы для класса свойств $\mathcal{L}_k^\infty \subset \mathcal{L}^\infty$, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k . А именно были получены законы для случайного графа $G(n, p)$ при $p = n^{-\alpha}$ и некоторых рациональных α из $(0, 1]$. Рассмотрим теперь класс $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ свойств, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k (предложения конечны, в отличие от предложений, задающих свойства из класса $\mathcal{L}_k^\infty$). В 2012 г. мы доказали, что при $k \geq 3$ и $\alpha \in (0, 1/(k-2))$ (см. [1], [2]) случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для класса $\mathcal{L}_k$ (если случайный граф подчиняется закону нуля или единицы для класса $\mathcal{L}_k$, то мы говорим, что он *подчиняется k -закону нуля или единицы*). Кроме того, в упомянутой работе мы доказали, что при $\alpha = 1/(k-2)$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы. В [3] установлено, что существуют пределы вероятностей $P_{n, n^{-1/(k-2)}}$ выполнения всех свойств, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k .

Далее, в 2013 г. мы рассмотрели другой диапазон значений α . Пусть $k > 3$ (в работе [1] доказано, что при $k = 3$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы для всех $\alpha \in (0, 1)$).

ТЕОРЕМА 1 (см. [4]). Пусть $\mathcal{Q}$ – множество положительных дробей с числителем, не превосходящим 2^{k-1} . Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$.

Итак, мы рассмотрели интервал $(1 - 2^{1-k}, 1)$ и получили множество рациональных чисел α из этого интервала, при которых k -закон справедлив. Кроме того, в той же работе мы опровергли k -закон нуля или единицы для $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$ для некоторых β из множества $\mathcal{Q}$, определенного в теореме 1.

ТЕОРЕМА 2 (см. [4]). Пусть $\tilde{\mathcal{Q}}$ – множество натуральных чисел, не превосходящих $2^{k-1} - 2$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\alpha = 1 - 1/(2^{k-1} + \beta)$, $\beta \in \tilde{\mathcal{Q}}$.

Таким, образом k -закон нуля или единицы справедлив для всех

$$\alpha \in \left(1 - \frac{1}{2^k - 2}, 1 - \frac{1}{2^k - 1}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{2^k - 1}, 1 - \frac{1}{2^k}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{2^k}, 1\right).$$

Кроме того, при

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^k - 2}$$

закон нарушается. В настоящей работе мы доказываем, что k -закон выполнен и при

$$\alpha \in \left\{1 - \frac{1}{2^k - 1}, 1 - \frac{1}{2^k}\right\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\alpha \in \{1 - 1/(2^k - 1), 1 - 1/2^k\}$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Итак, $1 - 1/(2^k - 2)$ есть наибольшее значение α , меньшее 1, при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

Доказательство теоремы 3 будет построено по следующей схеме: в § 3 мы сформулируем теорему Эренфойхта, связывающую законы нуля или единицы и существование выигрышной стратегии второго игрока в игре Эренфойхта. В § 4 мы определим стратегию второго игрока, которая с вероятностью, стремящейся к 1 (при стремлении количеств вершин графов к бесконечности), приведет его к победе, и, тем самым, докажем теорему 3. Параграф 2 посвящен построению конструкций, свойства которых позволяют нам доказать, что второй игрок “почти всегда” сможет играть в соответствии с определенной нами стратегией.

§ 2. Конструкции

Этот параграф мы начнем с описания известных результатов о распределении малых подграфов в случайном графе Эрдёша-Реньи. Для простоты изложения мы приводим в этом параграфе все утверждения, которые будут

использованы для доказательства основных результатов работы. В п. 2.2 будет введено понятие, играющее ключевую роль при доказательстве теоремы 3.

2.1. Малые подграфы и расширения. Для произвольного графа G обозначим: $v(G)$ – число вершин, $e(G)$ – число ребер, $a(G)$ – число автоморфизмов. Плотность графа $e(G)/v(G)$ обозначим через $\rho(G)$. Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G называется *строго сбалансированным*, если для любого $H \subset G$ справедливо строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$. Сформулируем теорему (см. [5]–[7], [9]) о количестве копий строго сбалансированного графа. Пусть N_G – количество копий G в случайном графе $G(n, p)$. Положим

$$\rho^{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}.$$

ТЕОРЕМА 4 (см. [5]). Пусть G – произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho^{\max}(G)})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho^{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G – строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{n,p}(|N_G - E_{n,p}N_G| \leq \varepsilon E_{n,p}N_G) = 1,$$

где $E_{n,p}$ – математическое ожидание по мере $P_{n,p}$ (здесь и далее в подобных ситуациях мы будем говорить, что с асимптотической вероятностью единица выполнено $N_G \sim E_{n,p}N_G$). Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G = 0) = e^{-1/a(G)}.$$

Обратимся к задаче, поставленной Дж. Спенсером в 1990 г. (см. [9], [16]). Рассмотрим такие графы H , G , $\tilde{H}$, $\tilde{G}$, что

$$\begin{aligned} V(H) &= \{x_1, \dots, x_k\}, & V(G) &= \{x_1, \dots, x_l\}, \\ V(\tilde{H}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, & V(\tilde{G}) &= \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}, \end{aligned}$$

причем $H \subset G$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ (и, тем самым, $k < l$). Граф $\tilde{G}$ называется (G, H) -расширением графа $\tilde{H}$, когда

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Rightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}).$$

Если выполняется соотношение

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Leftrightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то $\tilde{G}$ назовем *точным расширением*, а пары (G, H) и $(\tilde{G}, \tilde{H})$ – *изоморфными*. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$v(G, H) = |V(G) \setminus V(H)|, \quad e(G, H) = |E(G) \setminus E(H)|, \\ f_\alpha(G, H) = v(G, H) - \alpha e(G, H).$$

Если для любого графа S такого, что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, то пара (G, H) называется α -*надежной* (см. [6], [9], [16]). Если же для любого S такого, что $H \subseteq S \subset G$, выполнено неравенство $f_\alpha(G, S) < 0$, то пара (G, H) называется α -*жесткой* (см. [6], [9]). Если любая вершина графа H соединена с некоторой вершиной из $V(G) \setminus V(H)$ и для любого графа S такого, что $H \subset S \subset G$, справедливо неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, но $f_\alpha(G, H) = 0$, то пару (G, H) назовем α -*нейтральной*. Введем, наконец, понятие максимальной пары. Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leq |V(\tilde{G})|$. Пару $(\tilde{G}, \tilde{H})$ назовем (K, T) -*максимальной* в Γ , если у любого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$ такого, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$ и $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$, не существует точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$ такого, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$. Граф $\tilde{G}$ назовем (K, T) -*максимальным* в Γ , если у любого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$ такого, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$, не существует точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$ такого, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$.

Обратимся теперь к случайному графу $G(n, p)$. Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $p = n^{-\alpha}$. Пусть, кроме того, пара (G, H) является α -надежной и $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$. Рассмотрим произвольные вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in V_n$ и случайную величину $N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, заданную на вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n, p})$, которая каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_n ставит в соответствие количество (G, H) -расширений подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ (граф X является *подграфом графа Y , индуцированным на множество $S \subset V(Y)$* , и обозначается $Y|_S$, если $V(X) = S$ и для любых вершин $x, y \in S$ справедливо $\{x, y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(Y)$). Иными словами, пусть $W \subset V_n \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ – множество, мощность $|W|$ которого равна $l - k$. Если можно так занумеровать элементы множества W числами $k+1, k+2, \dots, l$, что граф $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}}$ является (G, H) -расширением графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, то положим $I_W(\mathcal{G}) = 1$. В противном случае $I_W(\mathcal{G}) = 0$. Случайная величина $N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ определяется следующим равенством:

$$N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \sum_{W \subset V_n \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, |W|=l-k} I_W.$$

ТЕОРЕМА 5 (см. [16]). *С асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо соотношение*

$$N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim E_{n, p} N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

При этом

$$E_{n, p} N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(n^{f_\alpha(G, H)}).$$

Для двух функций $f(n)$ и $g(n)$, стремящихся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, мы пишем $f = \Theta(g)$, если существуют такие положительные числа c, C , что при достаточно больших n выполнены неравенства $cg(n) < f(n) < Cg(n)$.

Помимо этой теоремы Дж. Спенсер и С. Шела (см. [9], [13]) для исследования законов нуля или единицы доказали теорему о количестве максимальных расширений подграфов в случайном графе (для случая “запрещенных” жестких пар).

Более формально, пусть случайная величина $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_n количество таких точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной в $\mathcal{G}$. Сформулируем теорему, доказанную в работе Дж. Спенсера и С. Шела (см. [13]), об асимптотическом поведении этой случайной величины.

ТЕОРЕМА 6 (см. [13]). *Пусть пара (K, T) является α -жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено*

$$N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim E_{n,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(n^{f_\alpha(G,H)}).$$

Если пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$, где $\tilde{H} = (\emptyset, \emptyset)$, является (K, T) -максимальной в Γ , то граф $\tilde{G}$ является (K, T) -максимальным в Γ . Поэтому частным случаем теоремы 6 является аналогичный результат для количества (K, T) -максимальных графов. Пусть случайная величина $N_G^{(K,T)}$ ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_n количество копий графа G в нем, которые являются (K, T) -максимальными в $\mathcal{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G – строго сбалансированный граф с $\rho(G) < 1/\alpha$, а пара (K, T) является α -жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью 1 выполнено*

$$N_G^{(K,T)} \sim N_G \sim E_{n,p} N_G^{(K,T)} = \Theta(n^{v(G) - \alpha e(G)}).$$

2.2. Специфические графы. Пусть $m \geq 2$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим такую пару графов (G, H) , что $G \supset H$. Будем говорить, что граф G является *циклическим m -расширением графа H* , если выполнено одно из следующих условий.

- Справедливо неравенство $m \geq 3$, а также существует такая вершина x_1 графа G , что

$$\begin{aligned} V(G) \setminus V(H) &= \{y_1^1, \dots, y_{t_1}^1, y_1^2, \dots, y_{t_2}^2\}, \\ E(G) \setminus E(H) &= \{\{x_1, y_1^1\}, \{y_1^1, y_2^1\}, \dots, \{y_{t_1-1}^1, y_{t_1}^1\}, \{y_{t_1}^1, y_1^2\}, \\ &\quad \{y_1^2, y_2^2\}, \dots, \{y_{t_2-1}^2, y_{t_2}^2\}, \{y_{t_2}^2, y_{t_1}^1\}\}, \end{aligned}$$

где $t_1 + t_2 \leq m - 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 2$ (при $t_1 = 0$ вершина x_1 является смежной с вершинами $y_1^2, y_{t_2}^2$).

- Справедливо неравенство $m \geq 2$, а также существуют две такие различные вершины x_1, x_2 графа G , что для некоторого $t \leq m - 1$ выполнено

$$\begin{aligned} G &= (V(H) \sqcup \{y_1, \dots, y_t\}, \\ E(H) \sqcup \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \dots, \{y_{t-1}, y_t\}, \{y_t, x_2\}\}). \end{aligned}$$

§ 3. Игра Эренфойхта

Основным средством в доказательстве законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных графов, как мы заметили выше, служит теорема Эренфойхта, доказанная в 1960 г. (см. [17]). В этом параграфе мы сформулируем ее частный случай для графов. Прежде всего определим игру Эренфойхта $\text{EHR}(G, H, i)$ на двух графах G, H с количеством раундов, равным i (см., например, [6], [9]). Пусть $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $V(H) = \{y_1, \dots, y_m\}$. В ν -м раунде ($1 \leq \nu \leq i$) Новатор выбирает вершину из любого графа (т.е. либо $x_{j_\nu} \in V(G)$, либо $y_{j'_\nu} \in V(H)$). Заметим, что мы нумеруем вершины, выбранные в графе G , индексом без штриха, а в H – со штрихом. Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает в μ -м раунде, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\nu} \in V(H)$. Если же в этом раунде Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1}, \dots, x_{j_i} \in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1}, \dots, y_{j'_i} \in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $x_{h_1}, \dots, x_{h_l}$; $y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}$, $l \leq i$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда соответствующие подграфы изоморфны с точностью до порядка вершин:

$$G|_{\{x_{h_1}, \dots, x_{h_l}\}} \cong H|_{\{y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}\}}.$$

ТЕОРЕМА 7 (см. [17]). *Для любых двух графов G, H и любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено следующее утверждение. Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\text{EHR}(G, H, i)$ тогда и только тогда, когда для любого свойства L первого порядка, выражаемого формулой, кванторная глубина которой не превышает i , либо оба графа обладают этим свойством, либо оба не обладают.*

Несложно показать, что из этой теоремы вытекает следующее следствие о законах нуля или единицы (см., например, [6], [9]). Пусть $\mathbb{P}_{N,p(N)} \times \mathbb{P}_{M,p(M)}$ – прямое произведение мер $\mathbb{P}_{N,p(N)}, \mathbb{P}_{M,p(M)}$.

ТЕОРЕМА 8. *Случайный граф $G(N, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{N,p(N)} \times \mathbb{P}_{M,p(M)},$$

т.е. у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре

$$\text{EHR}(G(N, p(N)), G(M, p(M)), k) = 1.$$

§ 4. Доказательство теоремы

Пусть $k > 3$ – произвольное натуральное число,

$$\alpha \in \left\{ 1 - \frac{1}{2^k - 1}, 1 - \frac{1}{2^k} \right\}, \quad p = n^{-\alpha}.$$

Определим множество графов $\mathcal{S}$. Граф G принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами.

- 1) В графе G нет строго сбалансированных подграфов, количество вершин которых не превосходит 2^{k+1} , а плотность больше, чем $1/\alpha$.
- 2) Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких α -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq k2^k$; тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ у любого подграфа $G_2 \subset G$ на $V(H_2)$ вершинах найдется точное (H_1, H_2) -расширение в G .
- 3) Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких α -жестких пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) \leq 2$. Тогда для любого строго сбалансированного графа H с $\rho(H) < 1/\alpha$, количество вершин которого не превосходит 2^k , в графе G найдется копия H , являющаяся (H_1, H_2) -максимальной в G для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$.
- 4) Пусть $\mathcal{H}$ – множество таких α -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq k2^k$. Пусть $\mathcal{K}$ – множество таких α -жестких пар (K_1, K_2) , что $v(K_1) \leq 2^k$, $v(K_2) \leq 2$. Тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах в графе G найдется такое точное (H_1, H_2) -расширение G_1 подграфа G_2 , что (G_1, G_2) является (K_1, K_2) -максимальной парой в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

В силу теорем 4–6 и следствия 1 справедливо $P_{n,p}(\mathcal{S}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу теоремы 8 для доказательства теоремы 3 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, k)$ для всех таких пар графов (G, H) , что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$, а X_r, Y_r – графы, из которых в r -м раунде выбирали вершины Новатор и Консерватор соответственно. Таким образом, множества $\{X_r, Y_r\}$ и $\{G, H\}$ совпадают для всех $r \in \{1, \dots, k\}$. Вершины, выбранные в первых r раундах в графе X_r , мы будем обозначать через $x_r^1, \dots, x_r^r$, а в графе Y_r – через $y_r^1, \dots, y_r^r$. Стратегию Консерватора будем описывать по индукции, причем это описание разобьем на два этапа, первый из которых назовем S , второй – SF . В первом раунде Консерватор всегда пользуется стратегией S и продолжает руководствоваться ею до тех пор, пока в некотором раунде не совершит построения, позволяющие воспользоваться стратегией SF .

Введем ряд обозначений, которые нам потребуются в дальнейшем. Пусть X – произвольный граф, x, y – две его вершины, A, B – два его подграфа. Тогда обозначим через $d_X(x, y)$ длину наименьшей цепи в X , соединяющей вершины x и y . *Длиной* цепи мы называем количество ребер в ней, *наименьшей цепью* мы называем цепь, имеющую наименьшую длину среди рассматриваемых. Пусть $d_X(x, A) = d_X(A, x) = \min_{v \in V(A)} d_X(x, v)$, $d_X(A, B) = \min_{v \in V(A)} d_X(v, B)$.

Прежде чем перейти к описанию стратегий, введем еще одно важное понятие. Пусть сыграно r раундов, где $r \in \{1, \dots, k\}$. Пусть $l \in \{1, \dots, r\}$ – некоторое число, а непересекающиеся по вершинам графы $\tilde{X}_r^1, \dots, \tilde{X}_r^l \subset X_r$, $\tilde{Y}_r^1, \dots, \tilde{Y}_r^l \subset Y_r$ обладают следующими свойствами.

- I) Вершины $x_r^1, \dots, x_r^r$ принадлежат множеству $V(\tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l)$, а вершины $y_r^1, \dots, y_r^r$ принадлежат множеству $V(\tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^l)$.
- II) Для любых различных $j_1, j_2 \in \{1, \dots, l\}$ справедливы неравенства

$$d_{X_r}(\tilde{X}_r^{j_1}, \tilde{X}_r^{j_2}) > 2^{k-r}, \quad d_{Y_r}(\tilde{Y}_r^{j_1}, \tilde{Y}_r^{j_2}) > 2^{k-r}.$$

- III) Для любого $j \in \{1, \dots, l\}$ в графе X_r (в графе Y_r) не существует циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{X}_r^j$ (графа $\tilde{Y}_r^j$).
- IV) Мощности множеств $V(\tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l)$, $V(\tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^l)$ не превосходят 2^{kr} .
- V) Графы $\tilde{X}_r^j$ и $\tilde{Y}_r^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1, \dots, l\}$ и при некотором соответствующем изоморфизме (общем для всех графов, так как они не имеют общих вершин) вершины x_r^i переходят в вершины y_r^i при каждом $i \in \{1, \dots, r\}$.

Два набора графов $\tilde{X}_r^1, \dots, \tilde{X}_r^l$ и $\tilde{Y}_r^1, \dots, \tilde{Y}_r^l$, обладающих описанными свойствами, мы будем называть (k, r, l) -регулярно эквивалентными в (X_r, Y_r) . Кроме того, изоморфизм, упомянутый в условии V), мы будем обозначать через $\varphi(k, r, l)$ (так как такой изоморфизм, вообще говоря, не является единственным, то мы рассматриваем произвольный изоморфизм, упомянутый в условии V).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Свойство $(k, 1, 1)$ -регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ определяется условиями I), III), IV) и V). Свойство (k, k, l) -регулярной эквивалентности наборов графов $\tilde{X}_k^1, \dots, \tilde{X}_k^l$ и $\tilde{Y}_k^1, \dots, \tilde{Y}_k^l$ определяется условиями I), II), IV) и V).

Основная идея стратегии Консерватора состоит в следующем. Консерватор должен за некоторое количество раундов r , где $r \in \{1, \dots, k\}$, выбирать вершины так, что к концу раунда с номером r в графах X_r , Y_r образуются (k, r, l) -регулярно эквивалентные наборы подграфов в (X_r, Y_r) для некоторого $l \in \{1, \dots, r\}$. В первом раунде Новатор должен воспользоваться стратегией S1, описанной в следующем пункте. К концу первого раунда, если Консерватору еще не удалось построить $(k, 1, 1)$ -регулярно эквивалентные графы, он должен воспользоваться во втором раунде стратегией S2, описанной в п. 4.2. Если и к концу второго раунда регулярно эквивалентные наборы графов не построены, то в каждом из последующих раундов с номером r , вплоть до k -го, Консерватор будет пользоваться одной из стратегий S_{r1} , S_{r2} , S_{r3} , S_{r4} и S_{r5} (см. пп. 4.3–4.7) до тех пор, пока эти наборы построены не будут. Стратегией SF, описанной в п. 4.8, Консерватор начинает пользоваться в некотором раунде $r \geq 2$ после того, как в раунде с номером $r - 1$ ему удалось найти $(k, r - 1, l)$ -регулярно эквивалентные наборы графов в (X_{r-1}, Y_{r-1}) для некоторого $l \in \{1, \dots, r - 1\}$.

4.1. Стратегия S1. Рассмотрим первый раунд и три возможности для выбора Новатором первой вершины. Докажем, что в двух случаях из трех, после того как Новатор выбирает вершину x_1^1 , Консерватор сможет подобрать такую вершину y_1^1 , что найдутся графы $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$, являющиеся $(k, 1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_1, Y_1) .

1. Пусть в графе X_1 не существует циклического 2^{k-1} -расширения графа $(\{x_1^1\}, \emptyset)$. В этом случае Консерватор выберет вершину $y_1^1 \in V(Y_1)$, обладающую следующим свойством (такая вершина найдется, так как $Y_1 \in \mathcal{S}$, а, следовательно, Y_1 обладает свойством 3)). Граф $(\{y_1^1\}, \emptyset)$ является (H_1, H_2) -максимальным в Y_1 для любой такой α -жесткой пары (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) = 1$. Положим $\tilde{X}_1^1 = (\{x_1^1\}, \emptyset)$, $\tilde{Y}_1^1 = (\{y_1^1\}, \emptyset)$. Условие III) свойства $(k, 1, 1)$ -регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ в (X_1, Y_1) мы только что доказали. Условия же I), IV) и V) выполнены очевидно.

2. Пусть в графе X_1 существует циклическое 2^{k-1} -расширение $\tilde{X}_1^1$ графа $(\{x_1^1\}, \emptyset)$, но не существует циклического 2^{k-1} -расширения графа $\tilde{X}_1^1$. В этом случае Консерватор выберет вершину $y_1^1 \in V(Y_1)$, обладающую следующим свойством (такая вершина найдется, так как Y_1 обладает свойством 3)). Существует точное $(\tilde{X}_1^1, (\{x_1^1\}, \emptyset))$ -расширение $\tilde{Y}_1^1$ графа $(\{y_1^1\}, \emptyset)$ в Y_1 , являющееся (H_1, H_2) -максимальным в Y_1 для всех таких α -жестких пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) \leq 2$. Таким образом, $\tilde{Y}_1^1$ – единственное циклическое 2^{k-1} -расширение графа $(\{y_1^1\}, \emptyset)$ в Y_1 . Тем самым, $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ являются $(k, 1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_1, Y_1) .

Итак, в рассмотренных случаях регулярно эквивалентные графы удается построить уже по окончании первого раунда, поэтому во втором раунде Консерватор должен воспользоваться стратегией SF (см. п. 4.8). Обратимся к третьему случаю.

3. Пусть у циклического 2^{k-1} -расширения, которое мы обозначим через G_1 , графа $(\{x_1^1\}, \emptyset)$ существует хотя бы одно циклическое 2^{k-1} -расширение в X_1 . Заметим, что таких расширений не может быть более одного, так как в противном случае объединение этих расширений с графом G_1 образует граф, который содержит строго сбалансированный подграф на не более чем 2^{k+1} вершинах с плотностью, превосходящей $1/\alpha$. Кроме того, по той же причине в графе X_1 существует такой граф G_2 , что циклическое 2^{k-1} -расширение графа G_1 есть $G_1 \cup G_2$ причем у графов G_1 и G_2 ровно одна общая вершина. Заметим, что если хотя бы один из графов G_1 , G_2 содержит менее $2^{k-1} - 1$ вершин, то плотность $G_1 \cup G_2$ превосходит $1/\alpha$, что невозможно, так как граф X_1 обладает свойством 1). Более того, если $\max\{v(G_1), v(G_2)\} < 2^{k-1}$, то плотность $G_1 \cup G_2$ снова превосходит $1/\alpha$. Следовательно, возможны четыре случая:

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_1^1\} \text{ и } v(G_1) = v(G_2) = 2^{k-1};$$

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_1^1\}$$

$$\text{и } \min\{v(G_1), v(G_2)\} = 2^{k-1} - 1, \max\{v(G_1), v(G_2)\} = 2^{k-1};$$

$$V(G_1) \cap V(G_2) \neq \{x_1^1\} \text{ и } v(G_1) = 2^{k-1};$$

$$V(G_1) \cap V(G_2) \neq \{x_1^1\} \text{ и } v(G_1) = 2^{k-1} - 1.$$

В первом и третьем случаях Консерватор выберет вершину $y_1^1 \in V(Y_1)$, обладающую следующим свойством (такая вершина найдется, так как $Y_1 \in \mathcal{S}$). Граф $(\{y_1^1\}, \emptyset)$ является (H_1, H_2) -максимальным в Y_1 для любой такой α -жесткой пары (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) = 1$. Следовательно, у графа $(\{y_1^1\}, \emptyset)$ не существует циклического 2^{k-1} -расширения в Y_1 .

Во втором случае (обозначим через $j \in \{1, 2\}$ такое число, что $v(G_j) = 2^{k-1} - 1$) и четвертом случае (положим $j = 1$) Консерватор выберет вершину $y_1^1 \in V(Y_1)$, обладающую следующим свойством (такая вершина найдется, так как Y_1 удовлетворяет свойству 3)). У графа $(\{y_1^1\}, \emptyset)$ существует точное $(G_j, (\{x_1^1\}, \emptyset))$ -расширение $H^\sim$, которое является (H_1, H_2) -максимальным в Y_1 для любой такой α -жесткой пары (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) = 1$. Следовательно, у графа $H^\sim$ не существует циклического 2^{k-1} -расширения в Y_1 .

4.2. Стратегия S2. Во втором раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_2^2 .

Пусть выполнено одно из следующих условий:

- $x_2^2 \in V(G_1)$, $V(G_1) = 2^{k-1} - 1$;
- $x_2^2 \in V(G_2)$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_1^1\}$, $V(G_2) = 2^{k-1} - 1$;
- $x_2^2 \in V(H^\sim)$.

Тогда обозначим через y_2^j образ вершины x_2^2 при изоморфизме графов G^j , $H^\sim$, где $j \in \{1, 2\}$ – такое число, что $v(G_j) = 2^{k-1} - 1$, переводящем вершину x_2^1 в y_2^1 . Кроме того, введем обозначения $\tilde{X}_2^1 = G^j$, $\tilde{Y}_2^1 = H^\sim$, если $X_2 = X_1$, и $\tilde{X}_2^1 = H^\sim$, $\tilde{Y}_2^1 = G^j$, если $X_2 = Y_1$. В силу того, что графы X_2 , Y_2 удовлетворяют свойству 1), у графов $\tilde{X}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^1$ нет циклических 2^{k-2} -расширений в X_2 и Y_2 соответственно. Следовательно, графы $\tilde{X}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^1$ являются $(k, 2, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) .

Предположим теперь, что не выполнено ни одно из перечисленных условий.

Если $x_2^2 \in V(Y_1)$, то обозначим через L_X наименьшую цепь, соединяющую x_1^2 и x_2^2 в X_2 . Если $d_{X_2}(x_1^2, x_2^2) \leq 2^{k-2}$, то по построению в графе X_2 не существует ни одного циклического 2^{k-2} -расширения графа L_X . В силу свойства 2) графа Y_2 найдется точное $(L_X, (\{x_1^1\}, \emptyset))$ -расширение L_Y графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ в графе $Y_2|_{V(Y_2) \setminus (V(G_1 \cup G_2) \setminus \{y_2^1\})}$. Обозначим через $\tilde{X}_2^1$, $\tilde{Y}_2^1$ графы L_X , L_Y соответственно. Условия I), IV) и V) свойства $(k, 2, 1)$ -регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^1$ в (X_2, Y_2) выполнены по построению. Граф L_X был выбран таким образом, что у него не существует циклического 2^{k-2} -расширения в X_2 . В свою очередь, у графа L_Y нет циклического 2^{k-2} -расширения в Y_2 , так как иначе у графа G_1 существовало бы два различных циклических 2^{k-1} -расширения в X_1 . Таким образом, доказано условие III), и, следовательно, графы $\tilde{X}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^1$ являются $(k, 2, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) . Если $d_{X_2}(x_1^2, x_2^2) > 2^{k-2}$, то найдем (если оно существует) в графе X_2 циклическое 2^{k-2} -расширение графа $(\{x_2^2\}, \emptyset)$ (таких расширений может быть не более одного, иначе в X_2 существует подграф на не более 2^{k-1} вершинах, плотность которого превосходит $1/\alpha$, что противоречит свойству 1)). Обозначим это расширение через $\tilde{X}_2^2$ (если его не существует, то $\tilde{X}_2^2 := (\{x_2^2\}, \emptyset)$). Положим также $\tilde{X}_2^1 := (\{x_1^2\}, \emptyset)$. В силу свойства 4) графа Y_2 найдется такое точное $(L_X \cup \tilde{X}_2^2, \tilde{X}_2^1)$ -расширение $L_Y \cup \tilde{Y}_2^2$ графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ в графе $Y_2|_{V(Y_2) \setminus (V(G_1 \cup G_2) \setminus \{y_2^1\})}$ (здесь $L_Y \cong L_X$, $\tilde{X}_2^2 \cong \tilde{Y}_2^2$, $V(L_Y) \cap V(\tilde{Y}_2^2) = \{y_2^2\}$), что граф $L_Y \cup \tilde{Y}_2^2$ является (H_1, H_2) -максимальным в Y_2 для любой α -жесткой пары (H_1, H_2) с $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) = 1$. Таким образом, у графа $\tilde{Y}_2^2$ не существует циклических 2^{k-2} -расширений в Y_2 . Обозначим через $\tilde{Y}_2^1$ граф $(\{y_2^1\}, \emptyset)$. Наборы графов $\tilde{X}_2^1, \tilde{X}_2^2$ и $\tilde{Y}_2^1, \tilde{Y}_2^2$ являются $(k, 2, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) по построению.

Если $x_2^2 \in V(X_1)$ и либо $V(G_1 \cap G_2) = \{x_1^1\}$ и $x_2^2 \notin V(G_1 \cup G_2)$, либо $V(G_1 \cap G_2) \neq \{x_1^1\}$ и $x_2^2 \notin V(G_1)$, то снова обозначим L_X наименьшую цепь, соединяющую x_1^1 и x_2^2 в X_2 . Если $d_{X_2}(x_1^1, x_2^2) \leq 2^{k-2}$, то в графе X_2 не существует циклическое 2^{k-2} -расширение графа L_X (так как по построению у графа G_1 существует ровно одно циклическое 2^{k-1} -расширение в X_1). В силу свойства 2) графа Y_2 найдется точное $(L_X, (\{x_2^1\}, \emptyset))$ -расширение L_Y графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ либо в графе Y_2 , если в нем нет подграфа $H^\sim$, либо в графе $Y_2|_{V(Y_2) \setminus V(H^\sim) \cup \{y_2^1\}}$

в противном случае. Обозначим через $\tilde{X}_2^1, \tilde{Y}_2^1$ графы L_X, L_Y соответственно. Кроме того, обозначим y_2^2 концевую вершину цепи L_Y , отличную от y_2^1 . Графы $\tilde{X}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^1$ являются $(k, 2, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) . Если $d_{X_2}(x_2^1, x_2^2) > 2^{k-2}$, то найдем (если оно существует) в графе X_2 циклическое 2^{k-2} -расширение графа $(\{x_2^2\}, \emptyset)$ (таких расширений может быть не более одного, иначе в X_2 существует подграф на не более 2^{k-1} вершинах, плотность которого превосходит $1/\alpha$, что противоречит свойству 1)). Обозначим через это расширение $\tilde{X}_2^2$ (если его не существует, то $\tilde{X}_2^2 := (\{x_2^2\}, \emptyset)$). Положим также $\tilde{X}_2^1 := (\{x_2^1\}, \emptyset)$. В силу свойства 4) графа Y_2 найдется такое точное $(\mathcal{X} \cup \tilde{X}_2^2, X_2^1)$ -расширение $L_Y \cup \tilde{Y}_2^2$ графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ в графе Y_2 (здесь $\mathcal{X}$ – некоторая произвольная (необязательно из графа X_2) цепь длины, превосходящей 2^k , соединяющая вершины x_2^1 и x_2^2 , $L_Y \cong \mathcal{X}$, $\tilde{X}_2^2 \cong \tilde{Y}_2^2$, $V(\tilde{Y}_2^2) \cap V(L_Y) = \{y_2^2\}$), что в графе Y_2 не существует циклических 2^{k-2} -расширений графа $L_Y \cup \tilde{Y}_2^2$. Обозначим через $\tilde{Y}_2^1$ граф $(\{y_2^1\}, \emptyset)$. Наборы графов $\tilde{X}_2^1, \tilde{X}_2^2$ и $\tilde{Y}_2^1, \tilde{Y}_2^2$ являются $(k, 2, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) по построению.

Если $x_2^2 \in V(G_1 \cup G_2)$ и либо $V(G_1 \cap G_2) = \{x_1^1\}$, либо $x_2^2 \in V(G_1)$, то без ограничения общности будем считать, что $x_2^2 \in V(G_1)$. Заметим, что граф G_1 представляется в виде $G_1 = L \cup C$, где L – цепь, одна из концевых вершин которой равна x_1^1 , а вторая, x , принадлежит простому циклу C ; при этом графы C и L пересекаются только по одной вершине. Вообще, граф L может состоять только из одной вершины (в этом случае $x = x_1^1$). Заметим, кроме того, что $e(C) + e(L) = 2^{k-1}$. Положим $e(C) = e$.

Рассмотрим вектор (d_2^1, d_2^2) , где $d_2^1 = d_{C \cup L}(x_2^1, x_2^2)$, а d_2^2 – такое число, что граф $C \cup L$ содержит циклическое d_2^2 -расширение графа $(\{x_2^2\}, \emptyset)$, но ни при каком $d < d_2^2$ он не содержит циклического d -расширения графа $(\{x_2^2\}, \emptyset)$.

Если $d_2^1 > 2^{k-2}$, $d_2^2 > 2^{k-2}$, то положим $\tilde{X}_2^1 = (\{x_2^1\}, \emptyset)$, $\tilde{X}_2^2 = (\{x_2^2\}, \emptyset)$. Пусть L_X – наименьшая цепь, соединяющая вершины x_2^1 и x_2^2 в графе X_2 . Очевидно, $e(L_X) > 2^{k-2}$. В силу свойства 4) графа Y_2 найдется точное $(L_X, \tilde{X}_2^1)$ -расширение L_Y графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ в графе Y_2 , являющееся (H_1, H_2) -максимальным в Y_2 для любой такой α -жесткой пары (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) = 1$. Обозначим через $\tilde{Y}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^2$ графы $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ и $(\{y_2^2\}, \emptyset)$ соответственно, где y_2^2 – вторая концевая вершина графа L_Y (отличная от y_2^1). Наборы графов $\tilde{X}_2^1, \tilde{X}_2^2$ и $\tilde{Y}_2^1, \tilde{Y}_2^2$ являются $(k, 2, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) по построению.

Если $d_2^1 \leq 2^{k-2}$, $d_2^2 > 2^{k-2}$, то обозначим через $\tilde{X}_2^1$ наименьшую цепь, соединяющую вершины x_2^1 и x_2^2 в графе X_2 . В силу свойства 4) графа Y_2 найдется такое точное $(\tilde{X}_2^1, (\{x_2^1\}, \emptyset))$ -расширение $\tilde{Y}_2^1$ графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$ в графе Y_2 , что граф $\tilde{Y}_2^1$ является (H_1, H_2) -максимальным в Y_2 для любой α -жесткой пары (H_1, H_2) с $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) = 1$. Очевидно, в графе Y_2 не существует циклического 2^{k-2} -расширения графа $\tilde{Y}_2^1$. Обозначим через y_2^2 концевую вершину цепи $\tilde{Y}_2^1$, отличную от y_2^1 . Если $x_2^2 \notin V(C)$, то у графа $\tilde{X}_2^1$ нет циклического 2^{k-2} -расширения в X_2 , так как $d_2^2 > 2^{k-2}$. Кроме того, если $d_2^1 < 2^{k-2}$ и $x_2^2 \in V(C) \setminus \{x\}$, то

$$d_{C|_{V(C \setminus \tilde{X}_2^1) \cup \{x, x_2^2\}}}(x, x_2^2) > 2^{k-2}.$$

Следовательно, и в этом случае у графа $\tilde{X}_2^1$ нет циклического 2^{k-2} -расширения в X_2 . Поэтому в рассмотренных ситуациях графы $\tilde{X}_2^1$ и $\tilde{Y}_2^1$ являются $(k, 2, 1)$ -

регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) . Если же $x_2^2 \in V(C) \setminus \{x\}$ и $d_2^1 = 2^{k-2}$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{24} .

Если $d_2^1 > 2^{k-2}$, $d_2^2 \leq 2^{k-2}$, то положим $\tilde{X}_2^1 = (\{x_2^1\}, \emptyset)$, $\tilde{Y}_2^1 = (\{y_2^1\}, \emptyset)$. Кроме того, обозначим через $\tilde{X}_2^2$ циклическое d_2^2 -расширение графа $(\{x_2^2\}, \emptyset)$ в X_2 , и через $\tilde{Y}_2^2$ такой подграф в Y_2 , изоморфный $\tilde{X}_2^2$, что $d_{Y_2}(\tilde{Y}_2^1, \tilde{Y}_2^2) > 2^{k-2}$ (такой подграф найдется в силу свойства 2) графа Y_2). Пусть при соответствующем изоморфизме вершина x_2^2 переходит в вершину y_2^2 . В силу свойства 1) графов X_2, Y_2 у графа $\tilde{Y}_2^2$ не существует циклических 2^{k-2} -расширений в Y_2 , а у графа $\tilde{X}_2^2$ не существует циклических 2^{k-2} -расширений в X_2 . Кроме того, $d_{Y_2}(\tilde{Y}_2^1, \tilde{Y}_2^2) > 2^{k-2}$, так как граф Y_2 не содержит циклических 2^{k-1} -расширений графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$. Если $e < 2^{k-2}$, то и $d_{X_2}(\tilde{X}_2^1, \tilde{X}_2^2) > 2^{k-2}$, а, следовательно, наборы графов $\tilde{X}_2^1, \tilde{X}_2^2$ и $\tilde{Y}_2^1, \tilde{Y}_2^2$ являются $(k, 2, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_2, Y_2) . Если же $e = 2^{k-2}$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{25} .

Если, наконец, $d_2^1 \leq 2^{k-2}$ и $d_2^2 \leq 2^{k-2}$, то, очевидно, $d_2^1 = d_2^2 = 2^{k-2}$. Кроме того, $x_2^2 \in V(L)$. Обозначим через L_X наименьшую цепь, соединяющую вершины x_2^1 и x_2^2 в графе X_2 . В силу того, что граф Y_2 обладает свойством 4), в нем найдется такое точное $(L_X, (\{x_2^1\}, \emptyset))$ -расширение L_Y графа $(\{y_2^1\}, \emptyset)$, что у графа L_Y не существует циклического 2^{k-2} -расширения в Y_2 . Обозначим через y_2^2 концевую вершину цепи L_Y , отличную от y_2^1 . Если в третьем раунде Новатор выбирает вершину из графа Y_1 , то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{21} . Если Новатор выбирает вершину из графа X_1 , не принадлежащую множеству $V(G_1)$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{22} . Если, наконец, $x_3^3 \in V(G_1)$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{23} .

Введем общие обозначения для стратегий S_r1, S_r2 и S_r3 , $r \in \{2, \dots, k-1\}$. Пусть сыграно r раундов и Новатором выбраны вершины $x_r^1, \dots, x_r^r$ в графе X_1 , а Консерватором выбраны вершины $y_r^1, \dots, y_r^r$. Объединим все наименьшие цепи в Y_1 , соединяющие между собой вершины $y_r^1, \dots, y_r^r$, в цепь $\tilde{Y}_r^1$. Объединим все наименьшие цепи в X_1 , соединяющие между собой вершины $x_r^1, \dots, x_r^r$, в цепь $\tilde{X}_r^1$ (если между какой-либо парой вершин таких цепей две, то выберем из них одну любую). Пусть у графа $\tilde{X}_r^1$ существует циклическое 2^{k-r} -расширение в X_1 , но не существует циклического 2^{k-r-1} -расширения в X_1 . Пусть, кроме того, у графа $\tilde{Y}_r^1$ нет циклического 2^{k-r} -расширения в Y_1 .

4.3. Стратегия S_r1 . Вершина x_{r+1}^{r+1} выбрана Новатором в графе Y_1 . Если $d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, \tilde{Y}_r^1) \leq 2^{k-r-1}$, то обозначим через L_X наименьшую цепь, соединяющую вершину x_{r+1}^{r+1} с одной из вершин графа $\tilde{Y}_r^1$. По построению в графе X_{r+1} не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{Y}_r^1 \cup L_X$. Так как граф Y_{r+1} обладает свойством 4), то в нем найдется такое точное $(\tilde{Y}_r^1 \cup L_X, \tilde{Y}_r^1)$ -расширение $\tilde{X}_r^1 \cup L_Y$ графа $\tilde{X}_r^1$, где $L_Y \cong L_X$, что граф Y_{r+1} не содержит циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{X}_r^1 \cup L_Y$ (при соответствующем изоморфизме графов $(V(\tilde{Y}_r^1 \cup L_X), E(\tilde{Y}_r^1 \cup L_X) \setminus E(\tilde{Y}_r^1))$ и $(V(\tilde{X}_r^1 \cup L_Y), E(\tilde{X}_r^1 \cup L_Y) \setminus E(\tilde{X}_r^1))$ вершины x_{r+1}^i переходят в вершины y_{r+1}^i , $i \in \{1, \dots, r\}$). Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи L_Y , не принадлежащую графу $\tilde{X}_r^1$, $\tilde{X}_{r+1}^1 := \tilde{Y}_r^1 \cup L_X$,

$\tilde{Y}_{r+1}^1 := \tilde{X}_r^1 \cup L_Y$. По построению графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

Если же $d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, \tilde{Y}_r^1) > 2^{k-r-1}$, то найдем (если оно существует) в графе X_{r+1} циклическое 2^{k-r-1} -расширение графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$ (таких расширений может быть не более одного, иначе в X_{r+1} существует подграф на не более чем 2^{k-2} вершинах, плотность которого превосходит $1/\alpha$, что противоречит свойству 1)). Обозначим это расширение через $\tilde{X}_{r+1}^2$ (если его не существует, то $\tilde{X}_{r+1}^2 := (\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$). Положим также $\tilde{X}_{r+1}^1 := \tilde{Y}_r^1$. В силу свойства 4) графа Y_{r+1} найдется такое точное $(\mathcal{X} \cup \tilde{X}_{r+1}^2, (\{x_{r+1}^1\}, \emptyset))$ -расширение $L_Y \cup \tilde{Y}_{r+1}^2$ графа $(\{y_{r+1}^1\}, \emptyset)$ в графе Y_{r+1} (здесь $\mathcal{X}$ – некоторая произвольная (необязательно из графа X_{r+1}) цепь длины, превосходящей 2^k , соединяющая вершины x_{r+1}^1 и x_{r+1}^{r+1} , $L_Y \cong \mathcal{X}$, $\tilde{X}_{r+1}^2 \cong \tilde{Y}_{r+1}^2$, $V(L_Y) \cap V(\tilde{Y}_{r+1}^2) = \{y_{r+1}^{r+1}\}$), что в графе Y_{r+1} не существует циклического 2^{k-r-1} -расширения графа $L_Y \cup \tilde{Y}_{r+1}^2$. Обозначим через $\tilde{Y}_{r+1}^1$ граф $\tilde{X}_r^1$. Наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) по построению.

4.4. Стратегия S_r2. Вершина x_{r+1}^{r+1} выбрана Новатором в графе $X_1 \setminus G_1$. Если $d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, \tilde{X}_r^1) \leq 2^{k-r-1}$, то обозначим через L_X наименьшую цепь, соединяющую вершину x_{r+1}^{r+1} с одной из вершин графа $\tilde{X}_r^1$. По построению в графе X_{r+1} не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{X}_r^1 \cup L_X$. Так как граф Y_{r+1} обладает свойством 4), то в нем найдется такое точное $(\tilde{X}_r^1 \cup L_X, \tilde{X}_r^1)$ -расширение $\tilde{Y}_r^1 \cup L_Y$ графа $\tilde{Y}_r^1$, где $L_Y \cong L_X$, что граф Y_{r+1} не содержит циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{Y}_r^1 \cup L_Y$ (при соответствующем изоморфизме графов $(V(\tilde{X}_r^1 \cup L_X), E(\tilde{X}_r^1 \cup L_X) \setminus E(\tilde{X}_r^1))$ и $(V(\tilde{Y}_r^1 \cup L_Y), E(\tilde{Y}_r^1 \cup L_Y) \setminus E(\tilde{Y}_r^1))$ вершины x_{r+1}^i переходят в вершины y_{r+1}^i , $i \in \{1, \dots, r\}$). Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи L_Y , не принадлежащую графу $\tilde{Y}_r^1$, $\tilde{X}_{r+1}^1 := \tilde{X}_r^1 \cup L_X$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 := \tilde{Y}_r^1 \cup L_Y$. По построению графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

Если же $d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, \tilde{X}_r^1) > 2^{k-r-1}$, то найдем (если оно существует) в графе X_{r+1} циклическое 2^{k-r-1} -расширение графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$ (таких расширений может быть не более одного, иначе в X_{r+1} существует подграф на не более чем 2^{k-2} вершинах, плотность которого превосходит $1/\alpha$, что противоречит свойству 1)). Обозначим это расширение $\tilde{X}_{r+1}^2$ (если его не существует, то $\tilde{X}_{r+1}^2 := (\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$). Положим также $\tilde{X}_{r+1}^1 := \tilde{X}_r^1$. В силу свойства 4) графа Y_{r+1} найдется такое точное $(\mathcal{X} \cup \tilde{X}_{r+1}^2, (\{x_{r+1}^1\}, \emptyset))$ -расширение $L_Y \cup \tilde{Y}_{r+1}^2$ графа $(\{y_{r+1}^1\}, \emptyset)$ в графе Y_{r+1} (здесь $\mathcal{X}$ – некоторая произвольная (необязательно из графа X_{r+1}) цепь длины, превосходящей 2^k , соединяющая вершины x_{r+1}^1 и x_{r+1}^{r+1} , $L_Y \cong \mathcal{X}$, $\tilde{X}_{r+1}^2 \cong \tilde{Y}_{r+1}^2$, $V(L_Y) \cap V(\tilde{Y}_{r+1}^2) = \{y_{r+1}^{r+1}\}$), что в графе Y_{r+1} не существует циклического 2^{k-r-1} -расширения графа $L_Y \cup \tilde{Y}_{r+1}^2$. Обозначим через $\tilde{Y}_{r+1}^1$ граф $\tilde{Y}_r^1$. Наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) по построению.

4.5. Стратегия S_r3. Пусть $x_r^1, \dots, x_r^r \in V(L)$. Пусть, кроме того, все различные числа $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, r\}$ упорядочены таким образом, что вершины $x_r^{i_1}, \dots, x_r^{i_r}$ в цепи L идут в порядке их следования начиная от x_r^1 . Пусть, кроме

того, $d_L(x_r^{ij}, x_r^{i_{j+1}}) = 2^{k-1-j}$ для всех $j \in \{1, \dots, r-1\}$ и $d_{Y_1}(y_r^{ij}, y_r^{i_{j+1}}) = 2^{k-1-j}$ для всех $j \in \{1, \dots, r-1\}$.

Новатор выбирает вершину $x_{r+1}^{r+1} \in V(G_1)$. Пусть все различные числа $\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{r+1} \in \{1, \dots, r+1\}$ упорядочены таким образом, что в цепи L вершины $x_{r+1}^{\tilde{i}_1}, \dots, x_{r+1}^{\tilde{i}_{r+1}}$ идут в порядке их следования начиная от x_{r+1}^1 .

Рассмотрим такой вектор $(d_{r+1}^r, d_{r+1}^{r+1})$, где $d_{r+1}^r = d_{L \cup C}(x_{r+1}^{\tilde{i}_r}, x_{r+1}^{\tilde{i}_{r+1}})$, а d_{r+1}^{r+1} – такое число, что граф $C \cup L$ содержит циклическое d_{r+1}^{r+1} -расширение графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$, но ни при каком $d < d_{r+1}^{r+1}$ он не содержит циклического d -расширения графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$.

Если $d_{r+1}^r > 2^{k-1-r}$, $d_{r+1}^{r+1} > 2^{k-1-r}$, то, очевидно, $x_{r+1}^{\tilde{i}_j} = x_r^{ij}$ при всех $j \in \{1, \dots, r\}$. Положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2 = (\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$. Пусть L_X – наименьшая цепь, соединяющая вершины x_r^{ir} и x_{r+1}^{r+1} в графе $L \cup C$. Очевидно, что $e(L_X) = d_{r+1}^r > 2^{k-1-r}$. В силу свойства 4) графа Y_{r+1} найдется такое точное $(L_X, (\{x_r^{ir}\}, \emptyset))$ -расширение L_Y графа $(\{y_r^{ir}\}, \emptyset)$ в $Y_{r+1}|_{V(Y_{r+1}) \setminus V(\tilde{Y}_r^1) \cup \{y_r^{ir}\}}$, что у графа $(\{y_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$ нет циклических 2^{k-1-r} -расширений в Y_{r+1} , где y_{r+1}^{r+1} – вторая концевая вершина цепи L_Y (отличная от y_r^{ir}). Обозначим через $\tilde{Y}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^2$ графы $\tilde{Y}_r^1$ и $(\{y_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$ соответственно. Наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) по построению.

Если $d_{r+1}^r \leq 2^{k-1-r}$, $d_{r+1}^{r+1} > 2^{k-1-r}$, то рассмотрим две ситуации: $x_{r+1}^{ir} \neq x_r^{ir}$ и $x_{r+1}^{ir} = x_r^{ir}$. В первом случае положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$. Очевидно, в цепи $\tilde{Y}_{r+1}^1$ найдется такая вершина y_{r+1}^{r+1} , что графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) . Если $x_{r+1}^{ir} = x_r^{ir}$, то обозначим через $\tilde{X}_{r+1}^1$ наименьшую цепь, соединяющую вершины x_{r+1}^1 и x_{r+1}^{r+1} в графе X_{r+1} . Случай $r = k-1$ не может иметь место, так как иначе граф G_1 не содержал бы простого цикла C . Предположим, что в графе X_{r+1} существует циклическое 2^{k-1-r} -расширение графа $\tilde{X}_{r+1}^1$. Тогда, так как $d_{r+1}^{r+1} > 2^{k-1-r}$, вершина x_{r+1}^{r+1} принадлежит простому циклу C . Следовательно, количество ребер в $E(C) \setminus E(\tilde{X}_{r+1}^1)$ не превосходит 2^{k-1-r} . Из определения цепи $\tilde{X}_{r+1}^1$ следует, что

$$d_{r+1}^r = 2^{k-1} - 2^{k-1-r}, \quad |E(C \cup L) \setminus E(\tilde{X}_{r+1}^1)| = 2^{k-1-r}.$$

В силу свойства 2) графа Y_{r+1} найдется точное $(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_r^1)$ -расширение $\tilde{Y}_{r+1}^1$ графа $\tilde{Y}_r^1$ в графе Y_{r+1} . Так как в графе Y_{r+1} не существует циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{Y}_r^1$, то не существует также и циклического 2^{k-r-1} -расширения графа $\tilde{Y}_{r+1}^1$. Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи $\tilde{Y}_{r+1}^1$, отличную от y_1^1 . Далее Консерватор переходит к стратегии $S_{r+1}4$. Если же в графе X_{r+1} не существует циклического 2^{k-1-r} -расширения графа $\tilde{X}_{r+1}^1$, то в силу свойства 2) графа Y_{r+1} найдется точное $(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_r^1)$ -расширение $\tilde{Y}_{r+1}^1$ графа $\tilde{Y}_r^1$ в графе Y_{r+1} . Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи $\tilde{Y}_{r+1}^1$, отличную от y_1^1 . Так как в графе Y_{r+1} не существует циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{Y}_r^1$, то не существует также и циклического 2^{k-r-1} -расширения

графа $\tilde{Y}_{r+1}^1$. Следовательно, графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

Оставшиеся две ситуации также невозможны при $r = k - 1$.

Если $d_{r+1}^r > 2^{k-1-r}$, $d_{r+1}^{r+1} \leq 2^{k-1-r}$, то, очевидно, $x_{r+1}^{ij} = x_r^{ij}$ при всех $j \in \{1, \dots, r\}$. Положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$. Обозначим, кроме того, через $\tilde{X}_{r+1}^2$ циклическое d_{r+1}^{r+1} -расширение графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \emptyset)$ в X_{r+1} , и через $\tilde{Y}_{r+1}^2$ подграф в Y_{r+1} , изоморфный $\tilde{X}_{r+1}^2$ (такой подграф найдется в силу свойства 3) графа Y_{r+1}). В силу свойства 1) графов X_{r+1} , Y_{r+1} у графа $\tilde{Y}_{r+1}^2$ не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений в Y_{r+1} , а у графа $\tilde{X}_{r+1}^2$ не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений в X_{r+1} . Кроме того, $d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2) > 2^{k-r-1}$, так как граф Y_{r+1} не содержит циклических 2^{k-r} -расширений графа $\tilde{Y}_r^1$. Если $e < 2^{k-r-1}$, то и $d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) > 2^{k-r-1}$, а, следовательно, наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) . Если же $e = 2^{k-r-1}$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией $S_{r+1}5$.

Если, наконец, $d_{r+1}^r \leq 2^{k-1-r}$ и $d_{r+1}^{r+1} \leq 2^{k-1-r}$, то, очевидно, $x_{r+1}^{ij} = x_r^{ij}$ при всех $j \in \{1, \dots, r\}$ и $d_{r+1}^r = d_{r+1}^{r+1} = 2^{k-1-r}$. Кроме того, $x_{r+1}^{r+1} \in V(L)$. Обозначим через L_X часть цепи L , соединяющую вершины x_{r+1}^1 и x_{r+1}^{r+1} . В силу того, что граф Y_{r+1} обладает свойством 3), в нем найдется точное $(L_X, \tilde{X}_r^1)$ -расширение L_Y графа $\tilde{Y}_r^1$. Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи L_Y , отличную от y_{r+1}^1 . У графа L_Y не существует циклического 2^{k-r-1} -расширения в Y_1 , так как у графа $\tilde{Y}_r^1$ не существует циклического 2^{k-r} -расширения в Y_1 . Если в следующем раунде Новатор выбирает вершину из графа Y_1 , то Консерватор должен воспользоваться стратегией $S_{r+1}1$. Если Новатор выбирает вершину из графа X_1 , не принадлежащую множеству $V(G_1)$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией $S_{r+1}2$. Если, наконец, $x_{r+2}^{r+2} \in V(G_1)$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией $S_{r+1}3$.

Обратимся к описанию стратегий S_r4 и S_r5 , где $r \in \{2, \dots, k-1\}$. Пусть сыграно r раундов и Новатором выбраны вершины $x_r^1, \dots, x_r^r$ в графе X_1 , а Консерватором выбраны вершины $y_r^1, \dots, y_r^r$. Пусть $x_r^1, \dots, x_r^{r-1} \in V(L)$, $x_r^r \in V(C)$, $x_r^r \neq x$. Пусть все различные числа $i_1, \dots, i_{r-1} \in \{1, \dots, r-1\}$ упорядочены таким образом, что вершины $x_r^{i_1}, \dots, x_r^{i_{r-1}}$ в цепи L идут в порядке их следования, начиная от x_r^1 . Пусть, кроме того,

$$d_{Y_1}(y_r^{i_j}, y_r^{i_{j+1}}) = d_L(x_r^{i_j}, x_r^{i_{j+1}}) = 2^{k-1-j}$$

для всех $j \in \{1, \dots, r-2\}$.

4.6. Стратегия S_r4 . Перечислим сначала условия, при выполнении которых Консерватор пользуется именно этой стратегией.

Пусть $d_{L \cup C}(x_r^{i_{r-1}}, x_r^r) = 2^{k-r}$, $d_{Y_1}(y_r^{i_{r-1}}, y_r^r) = 2^{k-r}$. Объединим все наименьшие цепи, соединяющие вершины $y_r^{i_j}$ с вершинами $y_r^{i_{j+1}}$ при $j \in \{1, \dots, r-2\}$ и вершину $y_r^{i_{r-1}}$ с вершиной y_r^r , в цепь $\tilde{Y}_r^1$. Обозначим через $\tilde{X}_r^1$ наименьшую цепь, являющуюся подграфом в $L \cup C$ и соединяющую вершины $x_r^{i_1}$ и x_r^r . Пусть граф $C \cup L$ содержит циклическое 2^{k-r} -расширение графа $\tilde{X}_r^1$, но ни при каком

$d < 2^{k-r}$ он не содержит циклического d -расширения графа $\tilde{X}_r^1$. Пусть граф Y_1 не содержит циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{Y}_r^1$.

Опишем теперь саму стратегию.

Если выбранная Новатором вершина x_{r+1}^{r+1} принадлежит графу Y_1 , то Консерватор должен воспользоваться стратегией $S_{r+1}1$. Если $x_{r+1}^{r+1} \in V(X_1 \setminus G_1)$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией $S_{r+1}2$.

Пусть Новатор выбирает $x_{r+1}^{r+1} \in V(G_1)$. Если $x_{r+1}^{r+1} \in V(\tilde{X}_r^1)$, то обозначим через y_{r+1}^{r+1} вершину, являющуюся образом x_{r+1}^{r+1} при изоморфизме, переводящем цепь $\tilde{X}_r^1$ в цепь $\tilde{Y}_r^1$ так, что вершина x_{r+1}^1 переходит в вершину y_{r+1}^1 . Положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$. По построению графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) . Если же $x_{r+1}^{r+1} \in V(G_1 \setminus \tilde{X}_r^1)$, то обозначим через L_X^1 наименьшую цепь, соединяющую x с x_{r+1}^{r+1} в $C|_{V(C) \setminus (V(\tilde{X}_r^1) \setminus \{x, x_r^r\})}$, и через L_X^2 наименьшую цепь, соединяющую x_r^r с x_{r+1}^{r+1} в том же графе. Если $e(L_X^1) \neq e(L_X^2)$, то введем обозначение $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1 \cup L_X^j$, где $e(L_X^j) = \min\{e(L_X^1), e(L_X^2)\}$. По построению в графе X_{r+1} не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{X}_{r+1}^1$. Так как граф Y_{r+1} обладает свойством 2), в нем найдется такое точное $(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_r^1)$ -расширение $\tilde{Y}_{r+1}^1$ графа $\tilde{Y}_r^1$, что при изоморфизме $\tilde{X}_{r+1}^1 \rightarrow \tilde{Y}_{r+1}^1$ вершина x_{r+1}^1 переходит в вершину y_{r+1}^1 . Так как в графе Y_{r+1} нет циклических 2^{k-r} -расширений графа $\tilde{Y}_r^1$, то граф Y_{r+1} не содержит и циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{Y}_{r+1}^1$. Обозначим через y_{r+1}^{r+1} вершину степени один дерева $\tilde{Y}_{r+1}^1$, отличную от y_{r+1}^1 и y_{r+1}^r . Графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) . Пусть $e(L_X^1) = e(L_X^2)$. Если $x_r^{i_{r-1}} \neq x$, то обозначим через $\tilde{X}_{r+1}^1$ цепь, являющуюся подграфом в L и соединяющую вершины x_r^1 и $x_r^{i_{r-1}}$. Введем, кроме того, обозначение $\tilde{X}_{r+1}^2 = L_X^2$. По построению в графе X_{r+1} не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{X}_{r+1}^1$. Кроме того, простой цикл C не содержит циклических 2^{k-2} -расширений в X_{r+1} , $e > 2^{k-r}$, $e(\tilde{X}_{r+1}^2) = 2^{k-r-1}$. Поэтому у графа $\tilde{X}_{r+1}^2$ не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений в графе X_{r+1} . Наконец,

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) = \min\{2^{k-r}, 2^{k-r-1} + d_{L \cup C}(x_r^{i_{r-1}}, x)\} > 2^{k-r-1}.$$

Так как граф Y_{r+1} обладает свойством 2), то в нем найдется точное $(L_X^2 \cup \tilde{X}_r^1, \tilde{X}_r^1)$ -расширение $\tilde{Y}_{r+1}^2 \cup \tilde{Y}_r^1$ графа $\tilde{Y}_r^1$, где $L_X^2 \cong \tilde{Y}_{r+1}^2$. Так как в графе Y_{r+1} нет циклических 2^{k-r} -расширений графа $\tilde{Y}_r^1$, то граф Y_{r+1} не содержит циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{Y}_{r+1}^2 \cup \tilde{Y}_r^1$. Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи $\tilde{Y}_{r+1}^2$, отличную от y_r^r . Обозначим, кроме того, через $\tilde{Y}_{r+1}^1$ цепь, являющуюся подграфом в $\tilde{Y}_r^1$ и соединяющую вершины y_r^1 и $y_r^{i_{r-1}}$. Наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) . Пусть, наконец, $e(L_X^1) = e(L_X^2)$ и $x_r^{i_{r-1}} = x$. Тогда найдем в графе $\tilde{Y}_r^1$ вершину y_{r+1}^{r+1} , находящуюся на одинаковом расстоянии 2^{k-r-1} от вершин $y_r^{i_{r-1}}$ и y_r^r . Это возможно, так как в рассматриваемом случае цикл C содержит 2^{k-r+1} ребер, причем x_r^r и $x_r^{i_{r-1}}$ — его противоположные вершины.

Переобозначим

$$\tilde{X}_{r+1}^1 := (C \cup L)|_{V(L) \cup (V(C) \setminus V(\tilde{X}_r^1)) \cup \{x, x_r^r\}}, \quad \tilde{Y}_{r+1}^1 := \tilde{Y}_r^1.$$

Очевидно, графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

4.7. Стратегия S_{r5} . Снова начнем с условий, при выполнении которых Консерватор пользуется описанной ниже стратегией. Пусть справедливо равенство $e = 2^{k-r}$ и неравенство $d_{L \cup C}(x_r^{i_{r-1}}, x_r^r) > 2^{k-r}$. Пусть, кроме того, в графе Y_1 существует простой цикл, содержащий 2^{k-r} вершин, одна из которых равна y_r^r . Обозначим этот цикл через C_Y , через $\tilde{Y}_r^1$ – наименьшую цепь, соединяющую вершину $y_r^{i_1}$ с вершинами $y_r^{i_{r-1}}$, а через $\tilde{X}_r^1$ – наименьшую цепь, являющуюся подграфом в L и соединяющую вершины $x_r^{i_1}$ и $x_r^{i_{r-1}}$. Пусть $d_{Y_1}(C_Y, \tilde{Y}_r^1) > 2^{k-r}$. Пусть, кроме того, у графа $\tilde{Y}_r^1$ нет циклических 2^{k-r} -расширений в Y_1 .

Перейдем к описанию стратегии.

Если выбранная Новатором вершина x_{r+1}^{r+1} принадлежит графу Y_1 , то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{r+11} . Если $x_{r+1}^{r+1} \in V(X_1 \setminus G_1)$, то Консерватор должен воспользоваться стратегией S_{r+12} .

Пусть Новатор выбирает $x_{r+1}^{r+1} \in V(G_1)$. Если $x_{r+1}^{r+1} \in V(\tilde{X}_r^1)$, то обозначим через y_{r+1}^{r+1} вершину, являющуюся образом x_{r+1}^{r+1} при изоморфизме, переводящем цепь $\tilde{X}_r^1$ в цепь $\tilde{Y}_r^1$ так, что вершина x_{r+1}^1 переходит в вершину y_{r+1}^1 . Положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2 = (\{x_{r+1}^r\}, \emptyset)$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^2 = (\{y_{r+1}^r\}, \emptyset)$. По построению наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) . Если $x_{r+1}^{r+1} \in V(C)$, то обозначим через y_{r+1}^{r+1} вершину, являющуюся образом x_{r+1}^{r+1} при изоморфизме, переводящем цикл C в цикл C_Y так, что вершина x_{r+1}^r переходит в вершину y_{r+1}^r . Положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2 = C$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^2 = C_Y$. В силу свойства 1) у графов $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^2$ не содержится циклических 2^{k-r-1} -расширений в X_{r+1} и Y_{r+1} соответственно. По построению у графов $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ не содержится циклических 2^{k-r-1} -расширений в X_{r+1} и Y_{r+1} соответственно. Кроме того, $d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) = 2^{k-r}$, $d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2) > 2^{k-r}$. Поэтому наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

Если, наконец, $x_{r+1}^{r+1} \in V(L \setminus \{x\}) \setminus V(\tilde{X}_r^1)$, то обозначим через L_X^1 цепь, являющуюся подграфом в L и соединяющую x с x_{r+1}^{r+1} , и через L_X^2 цепь, являющуюся подграфом в L и соединяющую $x_r^{i_{r-1}}$ с x_{r+1}^{r+1} . Если $e(L_X^1) \geq e(L_X^2)$, то введем обозначение $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1 \cup L_X^2$. По построению в графе X_{r+1} не существует циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{X}_{r+1}^1$. Так как граф Y_{r+1} обладает свойством 2), в нем найдется точное $(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_r^1)$ -расширение $\tilde{Y}_{r+1}^1$ графа $\tilde{Y}_r^1$. Так как в графе Y_{r+1} нет циклических 2^{k-r} -расширений графа $\tilde{Y}_r^1$, то граф Y_{r+1} не содержит и циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{Y}_{r+1}^1$. Обозначим через y_{r+1}^{r+1} концевую вершину цепи $\tilde{Y}_{r+1}^1$, отличную от y_{r+1}^1 . Положим $\tilde{X}_{r+1}^2 = (\{x_{r+1}^r\}, \emptyset)$, $\tilde{Y}_{r+1}^2 = (\{y_{r+1}^r\}, \emptyset)$. В силу свойства 1) у графов $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^2$ не содержится

циклических 2^{k-r-1} -расширений в X_{r+1} и Y_{r+1} соответственно. Наконец,

$$\begin{aligned} d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) &> d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, x) = e(L_X^1) \geq 2^{k-r-1}, \\ d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2) &\geq d_{Y_{r+1}}(y_{r+1}^{r+1}, C_Y) > \frac{2^{k-r}}{2} = 2^{k-r-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

Если $e(L_X^1) < e(L_X^2)$, то введем обозначение $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2 = L_X^1 \cup C$. Так как граф Y_{r+1} обладает свойством 2), в нем найдется точное $(\tilde{X}_{r+1}^2, C)$ -расширение $\tilde{Y}_{r+1}^2$ графа C_Y , а так как граф Y_{r+1} обладает свойством 1), то в нем нет циклических 2^{k-r-1} -расширений графа $\tilde{Y}_{r+1}^2$. Обозначим через y_{r+1}^{r+1} единственную вершину степени 1 графа $\tilde{Y}_{r+1}^2$. Так как

$$\begin{aligned} d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) &= e(L_X^2) > 2^{k-r-1}, \\ d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2) &= d_{Y_{r+1}}(y_{r+1}^{r-1}, y_{r+1}^{r+1}) > \frac{2^{k-r}}{2} = 2^{k-r-1}, \end{aligned}$$

то наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1$, $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}) .

4.8. Стратегия SF. Пусть $r \in \{2, \dots, k\}$. Пусть, кроме того, Новатором и Консерватором выбраны вершины $x_{r-1}^1, \dots, x_{r-1}^{r-1}$, $y_{r-1}^1, \dots, y_{r-1}^{r-1}$, а также наборы графов $\tilde{X}_{r-1}^1, \dots, \tilde{X}_{r-1}^l \subset X_{r-1}$ и $\tilde{Y}_{r-1}^1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}^l \subset Y_{r-1}$, являющиеся $(k, r-1, l)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r-1}, Y_{r-1}) для некоторого $l \in \{1, \dots, r-1\}$. При всех $j \in \{1, \dots, l\}$ введем обозначение $\tilde{X}_r^j = \tilde{X}_{r-1}^j$, $\tilde{Y}_r^j = \tilde{Y}_{r-1}^j$, если $X_r = X_{r-1}$, и $\tilde{X}_r^j = \tilde{Y}_{r-1}^j$, $\tilde{Y}_r^j = \tilde{X}_{r-1}^j$, если $X_r = Y_{r-1}$.

Предположим, что Новатор в r -м раунде выбирает вершину x_r^r , принадлежащую графу $\tilde{X}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{r-1}^l$ (или графу $\tilde{Y}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{r-1}^l$). Тогда так как наборы графов $\tilde{X}_{r-1}^1, \dots, \tilde{X}_{r-1}^l$ и $\tilde{Y}_{r-1}^1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}^l$ являются $(k, r-1, l)$ -регулярно эквивалентными в (X_{r-1}, Y_{r-1}) , то Консерватор сможет выбрать такую вершину y_r^r (образ вершины x_r^r при изоморфизме графов $\tilde{X}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{r-1}^l$, $\tilde{Y}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{r-1}^l$), что наборы графов $\tilde{X}_r^1, \dots, \tilde{X}_r^l$ и $\tilde{Y}_r^1, \dots, \tilde{Y}_r^l$ являются (k, r, l) -регулярно эквивалентными в (X_r, Y_r) .

Пусть вершина x_r^r не принадлежит ни графу $\tilde{X}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{r-1}^l$, ни графу $\tilde{Y}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{r-1}^l$. Пусть, кроме того, $d_{X_r}(x_r^r, \tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l) > 2^{k-r}$. В силу свойства 1) графа X_r существует не более одного циклического 2^{k-r} -расширения графа $(\{x_r^r\}, \emptyset)$. Обозначим это 2^{k-r} -расширение через $\tilde{X}_r^{l+1}$, если оно существует. В противном случае положим $\tilde{X}_r^{l+1} = (\{x_r^r\}, \emptyset)$. Заметим теперь, что в силу свойства 4) в графе Y_r найдется такой граф, изоморфный $\tilde{X}_r^{l+1}$, что $d_{Y_r}(y_r^r, \tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^l) > 2^{k-r}$, где y_r^r – образ вершины x_r^r при этом изоморфизме, причем у этого графа нет циклического 2^{k-r} -расширения в Y_r . Обозначим этот граф через $\tilde{Y}_r^{l+1}$.

Докажем теперь, что наборы графов $\tilde{X}_r^1, \dots, \tilde{X}_r^{l+1}$ и $\tilde{Y}_r^1, \dots, \tilde{Y}_r^{l+1}$ являются $(k, r, l+1)$ -регулярно эквивалентными в (X_r, Y_r) . Условия I) и V), очевидно, выполнены. Обратимся к условию II). Пусть у графа $\tilde{X}_r^{l+1}$ (графа $\tilde{Y}_r^{l+1}$) существует такая вершина z , что $d_{X_r}(z, \tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l) \leq 2^{k-r}$ ($d_{Y_r}(z, \tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^l) \leq$

2^{k-r}). Тогда граф $\tilde{X}_r^{l+1}$ (граф $\tilde{Y}_r^{l+1}$) содержит более одной вершины. Следовательно, граф X_r (граф Y_r) содержит циклическое 2^{k-r+1} -расширение графа $\tilde{X}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{r-1}^l$ (графа $\tilde{Y}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_{r-1}^l$), что противоречит условию III) свойства $(k, r-1, l)$ -регулярной эквивалентности наборов графов $\tilde{X}_{r-1}^1, \dots, \tilde{X}_{r-1}^l$ и $\tilde{Y}_{r-1}^1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}^l$ в (X_{r-1}, Y_{r-1}) . В графе X_r (в графе Y_r) не существует циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{X}_r^j$ (графа $\tilde{Y}_r^j$) для любого $j \in \{1, \dots, l+1\}$ по построению графа $\tilde{X}_r^{l+1}$ (графа $\tilde{Y}_r^{l+1}$), а также в силу условия III) свойства $(k, r-1, l)$ -регулярной эквивалентности наборов $\tilde{X}_{r-1}^1, \dots, \tilde{X}_{r-1}^l$ и $\tilde{Y}_{r-1}^1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}^l$ в (X_{r-1}, Y_{r-1}) . Тем самым, выполнено условие III). Наконец, условие IV) доказывают соотношения

$$\begin{aligned} |V(\tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^{l+1})| &= |V(\tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^{l+1})| = |V(\tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l)| + |V(\tilde{X}_r^{l+1})| \\ &\leq 2^k(r-1) + 2^{k-r} < 2^k r. \end{aligned}$$

Пусть

$$d_{X_r}(x_r^r, \tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l) \leq 2^{k-r}.$$

Пусть, кроме того, L_X – наименьшая цепь, соединяющая x_r^r с некоторой вершиной x графа $\tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l$ (пусть, например, $x \in V(\tilde{X}_r^h)$). Тогда в силу условия III) свойства $(k, r-1, l)$ -регулярной эквивалентности наборов графов $\tilde{X}_{r-1}^1, \dots, \tilde{X}_{r-1}^l$ и $\tilde{Y}_{r-1}^1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}^l$ в (X_{r-1}, Y_{r-1}) в графе X_r не существует ни одного циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{X}_r^h \cup L_X$. Положим

$$y = \begin{cases} \varphi(k, r-1, l)(x), & \text{если } x_r^r \in X_{r-1}, \\ \varphi^{-1}(k, r-1, l)(x) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда в силу свойства 2) графа Y_r в графе $Y_r|_{V(Y_r) \setminus V(\tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^l) \cup \{y\}}$ найдется точное $(L_X, (\{x\}, \emptyset))$ -расширение L_Y графа $(\{y\}, \emptyset)$, которое является цепью длины $e(L_X)$. Обозначим через y_r^r концевую вершину этой цепи, отличную от y . В силу условия III) свойства $(k, r-1, l)$ -регулярной эквивалентности наборов графов $\tilde{X}_{r-1}^1, \dots, \tilde{X}_{r-1}^l$ и $\tilde{Y}_{r-1}^1, \dots, \tilde{Y}_{r-1}^l$ в (X_{r-1}, Y_{r-1}) в графе Y_r не существует ни одного циклического 2^{k-r} -расширения графа $\tilde{Y}_r^h \cup L_Y$. Переобозначим $\tilde{X}_r^h := \tilde{X}_r^h \cup L_X$, $\tilde{Y}_r^h := \tilde{Y}_r^h \cup L_Y$. Итак, условие III) свойства (k, r, l) -регулярной эквивалентности наборов графов $\tilde{X}_r^1, \dots, \tilde{X}_r^l$ и $\tilde{Y}_r^1, \dots, \tilde{Y}_r^l$ в (X_r, Y_r) уже доказано. Условия I) и V) выполнены по построению. Условие II), очевидно, выполнено для любых $j_1, j_2 \in \{1, \dots, l\} \setminus \{h\}$. Если $j \in \{1, \dots, l\} \setminus \{h\}$, то

$$d_{X_r}(\tilde{X}_r^j, \tilde{X}_r^h) \geq d_{X_r}(\tilde{X}_r^j, \tilde{X}_r^h \setminus (L_X)|_{V(L_X) \setminus \{x\}}) - 2^{k-r} > 2^{k-r+1} - 2^{k-r} = 2^{k-r}.$$

Неравенство $d_{Y_r}(\tilde{Y}_r^j, \tilde{Y}_r^h) > 2^{k-r}$ доказывается аналогично. Условие IV) выполнено, так как

$$\begin{aligned} |V(\tilde{Y}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{Y}_r^l)| &= |V(\tilde{X}_r^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_r^l)| = |V(\tilde{X}_{r-1}^1 \cup \dots \cup \tilde{X}_{r-1}^l)| + e(L_X) \\ &\leq 2^k(r-1) + 2^{k-r} < 2^k r. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали существование такой стратегии Консерватора, что к концу игры выбраны вершины $x_k^1, \dots, x_k^k \in V(G)$, $y_k^1, \dots, y_k^k \in V(H)$, для которых

существуют наборы графов $\tilde{X}_k^1, \dots, \tilde{X}_k^l$ и $\tilde{Y}_k^1, \dots, \tilde{Y}_k^l$, являющиеся (k, k, l) -регулярно эквивалентными для некоторого $l \in \{1, \dots, k\}$. В силу условий I) и V) этих наборов найдутся натуральные числа $j(1), \dots, j(l)$, а также для каждого $s \in \{1, \dots, l\}$ попарно различные числа $i_1^s, \dots, i_{j(s)}^s \in \{1, \dots, k\}$ такие, что

$$\{x_k^1, \dots, x_k^k\} = \bigcup_{s=1}^l \{x_k^{i_1^s}, \dots, x_k^{i_{j(s)}^s}\}, \quad \{y_k^1, \dots, y_k^k\} = \bigcup_{s=1}^l \{y_k^{i_1^s}, \dots, y_k^{i_{j(s)}^s}\},$$

где $x_k^{i_1^s}, \dots, x_k^{i_{j(s)}^s} \in V(\tilde{X}_k^s)$, $y_k^{i_1^s}, \dots, y_k^{i_{j(s)}^s} \in V(\tilde{Y}_k^s)$ для всех $s \in \{1, \dots, l\}$. Кроме того, для каждого $s \in \{1, \dots, l\}$ графы $\tilde{X}_k^s$ и $\tilde{Y}_k^s$ изоморфны, и в силу условия II) неравенства $d_{X_k}(\tilde{X}_k^{s_1}, \tilde{X}_k^{s_2}) > 1$, $d_{Y_k}(\tilde{Y}_k^{s_1}, \tilde{Y}_k^{s_2}) > 1$ выполнены для всех различных $s_1, s_2 \in \{1, \dots, l\}$. Следовательно,

$$X_k|_{\{x_k^1, \dots, x_k^k\}} \cong Y_k|_{\{y_k^1, \dots, y_k^k\}},$$

и Консерватор выигрывает, что и требовалось доказать.

Список литературы

- [1] М. Е. Жуковский, “Zero-one k ”=law”, *Discrete Math.*, **312**:10 (2012), 1670–1688.
- [2] М. Е. Жуковский, “Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной”, *Докл. РАН*, **436**:1 (2011), 14–18; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “Zero-one laws for first-order formulas with a bounded quantifier depth”, *Dokl. Math.*, **83**:1 (2011), 8–11.
- [3] М. Жуковский, “On the convergence of probabilities of the random graph properties expressed by first-order formulae with a bounded quantifier depth”, *Moscow J. Combin. Number Theory*, **4**:2 (2014), 119–155.
- [4] М. Е. Жуковский, “On the zero-one k ”=law extensions”, *Proc. of RS&A* (2013) (to appear).
- [5] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
- [6] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000, xii+333 pp.
- [7] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pp.
- [8] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, 2-е изд., Физматлит, М., 2004, 256 с.; англ. пер.: V. F. Kolchin, *Random graphs*, Encyclopedia Math. Appl., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, xii+252 pp.
- [9] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2007, 320 с.; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, xviii+301 pp.
- [10] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.
- [11] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000, 286 с.
- [12] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, М., 2007, 128 с.
- [13] S. Shelah, J. Spencer, “Zero-one laws for sparse random graphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 97–115.

- [14] J. Spencer, *The strange logic of random graphs*, Algorithms Combin., **22**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, x+168 pp.
- [15] M. McArthur, “The asymptotic behavior of $L_{\infty, \omega}^k$ on sparse random graphs”, *Logic and random structures* (New Brunswick, NJ, 1995), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 53–63.
- [16] J. Spencer, “Counting extensions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **55**:2 (1990), 247–255.
- [17] A. Ehrenfeucht, “An application of games to the completeness problem for formalized theories”, *Fund. Math.*, **49** (1960/1961), 129–141.

Максим Евгеньевич Жуковский
(Maksim E. Zhukovskii)

Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный
Московской обл.

E-mail: zhukmax@gmail.com

Поступила в редакцию
29.03.2014 и 25.09.2014