Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Воробьев, К проблеме Фробениуса с тремя аргументами, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 6, 53–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:18:03

УДК 511.335+517.524

И. С. Воробьев

К проблеме Фробениуса с тремя аргументами

В работе теоретически получены асимптотические формулы для средних значений различных характеристик аддитивной полугруппы, порожденной тремя натуральными числами, прежде всего – для количества элементов, не принадлежащих данной полугруппе. Кроме того, проведен численный эксперимент, подтверждающий полученные результаты.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: цепные дроби, числа Фробениуса, суммы Клостермана, двухконтурные сети.

DOI: 10.4213/sm8370

§ 1. Введение

Пусть дан набор $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Числом Фробениуса $g(a_1, a_2, \dots, a_k)$ называется наибольшее целое, непредставимое в виде линейной формы

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k, \quad (1.1)$$

где $x_1, \dots, x_k$ – неотрицательные целые. Модифицированным числом Фробениуса называют

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k) = g(a_1, a_2, \dots, a_k) + a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

– наибольшее целое число, непредставимое формой (1.1) с натуральными $x_1, \dots, x_k$.

Задача о нахождении величины f называется задачей Фробениуса (см. [1]). Наиболее полно сведения о числах Фробениуса изложены в книге [2]. Одним из направлений исследования в этой области является изучение поведения чисел Фробениуса в среднем. В работе [3] для случая $k = 3$ было сформулировано предположение о том, что число Фробениуса для “случайного” набора a имеет порядок $\sqrt{a_1 a_2 a_3}$. Это было выражено в виде двух гипотез, первая из которых утверждала, что

$$\sup_N \frac{1}{|X_N|} \sum_{(a_1, a_2, a_3) \in X_N} \frac{f(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}} < \infty,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-90002 Бел_а).

а вторая – что существует конечный предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|X_N|} \sum_{(a_1, a_2, a_3) \in X_N} \frac{f(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}},$$

где $X_N = \{(a_1, a_2, a_3) : 1 \leq a_i \leq N, i = 1, 2, 3; (a_1, a_2, a_3) = 1\}$. В работе “Задачи Арнольда” (см. [1; задача 1999-8]) было высказано предположение, что при $k \geq 2$ для больших векторов a справедлив асимптотический закон $f(a_1, a_2, \dots, a_k) \sim C k^{-\sqrt{a_1 \cdots a_k}}$, где C – константа, зависящая только от k . В работе [4] в рамках одного естественного предположения было доказано, что при $k = 3$ существует предельное распределение величины $f(a_1, a_2, a_3)/N^{3/2}$ (полное доказательство см. в [5]), а при больших значениях k возникающие распределения для значений $f(a_1, a_2, \dots, a_k)/N^{1+1/(k-1)}$ образуют слабо компактное множество (в обоих случаях $\max_i a_i \leq N$). В частности, при $k = 3$ естественно рассматривать нормирование числа Фробениуса $f(a_1, a_2, a_3)/\sqrt{a_1 a_2 a_3}$. Существование предельной плотности распределения нормированных чисел Фробениуса было доказано Й. Марклофом в работе [6; теорема 1]. Для случая $k = 3$ константа пропорциональности при усреднении по двум параметрам, равная $8/\pi$, была найдена А. В. Устиновым в работе [7], им же явно получена соответствующая плотность распределения (см. [8]). Д. А. Фроленковым в [9] была получена асимптотическая формула для среднего значения чисел Фробениуса для $k = 3$ при усреднении по трем параметрам с более точным остаточным членом, чем в работе [7]. В статье [10] показано, что порядок числа Фробениуса от “случайного” большого набора a с точностью до константы, зависящей только от размерности k , задается нижней гранью числа Фробениуса. А. Штрембергссон в работе [11] для произвольной размерности k описал поведение предельной плотности распределения в бесконечности.

Другим объектом исследования, связанным с проблемой Фробениуса, является величина $n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ – количество целых неотрицательных чисел, непроставимых формой (1.1), и соответствующее модифицированное значение

$$N(a_1, a_2, \dots, a_k) = n(a_1, a_2, \dots, a_k) + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_k}{2} - \frac{1}{2}.$$

Модифицированные функции f и N мало отличаются от исходных функций g и n , но обладают свойством мультипликативности (см. равенства (2.3) ниже).

Так как далее в статье будет рассматриваться случай $k = 3$, вместо a_1, a_2, a_3 будем писать a, b, c . Для натурального числа a и действительных положительных чисел x_1, x_2 определим множество

$$M_a(x_1, x_2) = \{(b, c) : 1 \leq b \leq x_1 a, 1 \leq c \leq x_2 a, (a, b, c) = 1\}.$$

Главным результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{a^{3/2} |M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b, c) \in M_a(x_1, x_2)} \left(N(a, b, c) - \frac{64}{5\pi^2} \sqrt{abc} \right) = O_{\varepsilon, x_1, x_2}(a^{-1/6+\varepsilon}).$$

Доказательство использует схему рассуждений, предложенную в [7]. Кроме этого результата, в статье доказываются аналогичные асимптотические формулы для других функций, связанных с проблемой Фробениуса (см. § 7).

§ 2. Формулы Рёдсета

Задача о вычислении $f(a, b, c)$ и $N(a, b, c)$ решена Рёдсетом с помощью цепных дробей в работе [12] (геометрическую интерпретацию см. в [13]). Пусть $(a, b) = 1$, $bl \equiv c \pmod{a}$, $1 \leq l \leq a$, $(l, a) = 1$, и $l\bar{l} \equiv 1 \pmod{a}$, $1 \leq \bar{l} \leq a$. Рассмотрим разложение отношения a/l в приведенную регулярную цепную дробь:

$$\frac{a}{l} = \langle q_1, \dots, q_m \rangle = q_1 - \frac{1}{q_2 - \frac{1}{q_3 - \dots - \frac{1}{q_m}}}, \quad q_1, \dots, q_m \geq 2.$$

Последовательность $\{p_n\}$, $-1 \leq n \leq m+1$, состоит из числителей подходящих дробей для $\frac{a}{l}$: $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, а для остальных n справедливо $p_n = p_{n-1}q_n - p_{n-2}$. Значения $\{s_n\}$ определим равенством вида

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1} - \frac{1}{q_{n-2} - \dots}}.$$

Пусть $s_{-1} = a$, $s_0 = l$, а остальные s_n определяются из формулы $s_{n-2} = s_{n-1}q_n - s_n$. Из этих последовательностей возможно выбрать четверку чисел $p_v, p_{v+1}, s_v, s_{v+1}$, удовлетворяющую двойному неравенству

$$\frac{s_{v+1}}{p_{v+1}} \leq \frac{c}{b} < \frac{s_v}{p_v}, \quad -1 \leq v \leq m.$$

Тогда, как было доказано Рёдсетом,

$$f(a, b, c) = bs_v + cp_{v+1} - \min\{bs_{v+1}, cp_v\},$$

$$N(a, b, c) = \frac{1}{2} \left(b(s_v - s_{v+1}) + cp_{v+1} + \frac{1}{a} s_{v+1} (p_{v+1} - p_v) (bs_v - cp_v) \right). \quad (2.1)$$

Известно (см. [7; свойство 5°]), что четверки $(p_n, s_{n-1}, p_{n-1}, s_n)$ при $1 \leq l < a$, $(l, a) = 1$, $0 \leq n \leq m+1$, находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями (u_1, u_2, v_1, v_2) уравнения

$$u_1 u_2 - v_1 v_2 = a,$$

для которых

$$0 \leq v_1 < u_1 \leq a, \quad (u_1, v_1) = 1, \quad 0 \leq v_2 < u_2 \leq a, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

Для неотрицательных t_1, t_2 таких, что

$$\frac{s_{n+1}}{p_{n+1}} \leq \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_n}{p_n},$$

введем функцию

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \left(t_1(s_n - s_{n+1}) + t_2 p_{n+1} + \frac{1}{a} s_{n+1}(p_{n+1} - p_n)(t_1 s_n - t_2 p_n) \right). \quad (2.2)$$

Сравнение равенств (2.1) и (2.2) показывает, что при $l \equiv \bar{b}c \pmod{a}$ справедливо равенство $\rho_{l,a}(b, c) = N(a, b, c)$.

Отметим, что задача вычисления $f(a, b, c)$ и $N(a, b, c)$ всегда может быть сведена к случаю попарно взаимно простых аргументов с помощью формул Джонсона (см. [14]):

$$f(a, b, c) = df\left(a, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right), \quad N(a, b, c) = dN\left(a, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right). \quad (2.3)$$

§ 3. Выделение плотности

Здесь и далее знак звездочки в суммах вида $\sum^*$ означает, что суммирование происходит по приведенным системам вычетов. Обозначим

$$\rho_a(t_1, t_2) = \sum_{l=1}^a \rho_{l,a}(t_1, t_2).$$

ЛЕММА 1. Пусть x_1, x_2 – положительные действительные числа, $b = b_1 d_1$, $c = c_1 d_2$ и $a = d_1 d_2 a_1$. Тогда для суммы

$$R_a(x_1, x_2) = \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \rho_a(b, c)$$

справедлива формула

$$\begin{aligned} R_a(x_1, x_2) &= a^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \\ &\quad \times \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \rho_{a_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^{3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы аналогично доказательству, приведенному в § 5 работы А. В. Устинова [7]. Требуется только показать, что функция $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ ограничена, для чего воспользуемся свойствами 6°, 5° и 2° из [7]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} s_{n+1}(p_{n+1} - p_n)(t_1 s_n - t_2 p_n) &< \frac{s_{n+1}}{s_n} (t_1 s_n - t_2 p_n) \\ &< t_1 s_{n+1} + t_2 p_n \frac{s_{n+1}}{s_n} < t_1 s_n + t_2 p_{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем такую же оценку, как и в [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (см. [7; замечание 3]). Для суммы

$$G_a(x_1, x_2) = \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \sqrt{abc}$$

справедлива формула

$$\begin{aligned} G_a(x_1, x_2) &= a^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \varphi(a_1) \\ &\times a_1^{1/2} \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \sqrt{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + O(x_1 x_2 a^{3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть

$$\rho_{l,a}(t) = \rho_{l,a}(1, t).$$

В силу однородности

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 \rho_{l,a}\left(\frac{t_2}{t_1}\right) = t_1 \rho_{l,a}(\xi),$$

зная функцию

$$\rho_a(\xi) = \sum_{l=1}^a \rho_{l,a}(\xi),$$

легко можно найти нужную плотность

$$\rho_a(t_1, t_2) = t_1 \rho_a\left(\frac{t_2}{t_1}\right) = t_1 \rho_a(\xi).$$

§ 4. Преобразование плотности

Введем обозначение (см. [15]): если A – некоторое утверждение, то $[A] = 1$, если A истинно, и $[A] = 0$ – в противном случае. Для $q \in \mathbb{N}$ через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости a на q :

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{q}] = \begin{cases} 1, & a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

В силу свойства четверок (u_1, u_2, v_1, v_2) , приведенного в первом разделе, получаем

$$\rho_a^*(\xi) = \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1} \right] h(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi),$$

где

$$h(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = \frac{1}{2} \left((u_2 - v_2) + \xi u_1 + \frac{1}{a} v_2 (u_1 - v_1) (u_2 - \xi v_1) \right).$$

Рассматривая отдельно случаи $v_2 > \xi v_1$ и $v_2 \leq \xi v_1$, разложим $\rho_a^*(\xi)$ на две соответствующие подсуммы

$$\rho_a^*(\xi) = \lambda^*(a; \xi) + \eta^*(a; \xi), \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^*(a; \xi) &= \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{v_2}{v_1} \right] h_1(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi), \\ h_1(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= \frac{1}{2} \left(u_2 + \xi(u_1 - v_1) + \frac{1}{a} v_1(v_2 - u_2)(v_2 - \xi u_1) \right), \\ \eta^*(a; \xi) &= \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{v_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1} \right] h_2(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi), \\ h_2(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= \frac{1}{2} \left(u_2 - v_2 + \xi u_1 + \frac{1}{a} v_2(u_1 - v_1)(u_2 - \xi v_1) \right). \end{aligned}$$

Замена переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$ приводит к тому, что $\eta^*(a; \xi) = \xi \lambda^*(a; 1/\xi)$. Таким образом, значение $\rho_a^*(\xi)$ может быть найдено при условии, что известно $\lambda^*(a; \xi)$.

Введем переменные $x = u_1$, $y = u_2 - v_2$, $z = u_1 - v_1$, $w = v_2$. Тогда h_1 будет выглядеть как

$$h_1(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = \frac{1}{2} \left(y + w + \xi z + \frac{1}{a} y(x - z)(\xi x - w) \right), \quad (4.2)$$

а сумма $\lambda^*(a; \xi)$ – как

$$\lambda^*(a; \xi) = \sum_{x=1}^a \sum_{z=1}^x \sum_{y=1}^a \sum_{w=0}^{a-1} \left[xy + zw = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] h_1(x, y, z, w; \xi).$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем

$$\lambda^*(a; \xi) = \sum_{d_1 d_2 | a} \mu(d_1) \mu(d_2) d_2 \lambda \left(\frac{a}{d_1 d_2}; \frac{d_1 \xi}{d_2} \right), \quad (4.3)$$

где

$$\lambda(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + zw = a, \frac{w}{x} \leq \xi < \frac{w}{x-z} \right] h_1(x, y, z, w; \xi). \quad (4.4)$$

§ 5. Применение оценок сумм Клостермана

Пусть q – натуральное число, a – целое и f – неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$, лежащих в области $P_1 < x \leq P_2$, $0 < y \leq f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{0 < y \leq f(x)} \delta_q(xy - a).$$

В работе В. А. Быковского [16] вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leq P_2} \mu_{q,a}(x) f(x),$$

где $\mu_{q,a}(x)$ – число решений сравнений $xy \equiv a \pmod{q}$ относительно переменной y , лежащей в пределах $1 \leq y \leq q$.

Приведем упрощенный результат работы [17], уточняющий соответствующую теорему из [16]. Он основан на оценках сумм Клостермана

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x, y=1}^q \delta_q(xy - l) \exp \left\{ 2\pi i \frac{mx + ny}{q} \right\}$$

и методе Ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм.

ЛЕММА 2. Пусть P_1, P_2 – действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geq 2$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0, w \geq 1$

$$\frac{1}{A} \leq \|f''(x)\| \leq \frac{w}{A},$$

где $\|t\|$ – расстояние от t до ближайшего целого числа. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2} \delta_q(a) + R[f],$$

где

$$R[f] \ll_{w, \varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2}D + q^{1/2})P^\varepsilon$$

и $D = (a, q)$.

Следующие три леммы приведены из работы [7].

ЛЕММА 3. Пусть P_1, P_2 – действительные числа, $P = P_2 - P_1 > 0$, и вещественная неотрицательная функция $f(x)$ на отрезке $[P_1, P_2]$ постоянна. Тогда

$$T[f] = S[f] + O\left(\left(q^{1/2} + \left(\frac{P}{q} + 1\right)D\right)q^\varepsilon\right),$$

где $D = (a, q)$.

ЛЕММА 4. Пусть f – убывающая на отрезке $[P_1, P_2]$ функция и $f(P_1) - f(P_2) = Q$. Тогда в обозначениях леммы 2

$$S[f] = \psi(a, q) \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(DQq^{-1+\varepsilon}),$$

где

$$\psi(a, q) = \frac{1}{q} \sum_{k|(a, q)} \sum_{\delta|q/k} \frac{\mu(\delta)}{\delta} = \frac{K_q(a, 0, 0)}{q^2}.$$

ЛЕММА 5. Пусть функция $I(r)/r \in C([0, 1])$ имеет конечное число участков монотонности, $|I(r)/r| \leq B$ для всех $r \in [0, 1]$, $\psi(a, q)$ определено равенством из предыдущей леммы, $1 \leq U \leq a$, и $0 \leq \theta \leq 1$. Тогда

$$\sum_{q \leq \theta U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{U}\right) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^\theta \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}a^\varepsilon).$$

ЛЕММА 6. Пусть справедливы условия леммы 5 и $h \asymp U$. Тогда

$$\sum_{q \leq \theta U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{h}\right) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^\theta \frac{I(r)}{r} dr + O(BU^{-1}a^\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что $h \leq U$. Тогда

$$\sum_{q \leq \theta U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{h}\right) = \sum_{q \leq \theta h} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{h}\right) + \sum_{\theta h \leq q \leq \theta U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{h}\right).$$

К первой сумме применима лемма 4. Порядок второй суммы совпадает с порядком остатка $O(BU^{-1}a^\varepsilon)$. Для доказательства этого факта воспользуемся оценкой $\psi(a, q) \ll q^{-1+\varepsilon}$:

$$\sum_{\theta h \leq q \leq \theta U} \psi(a, q) I\left(\frac{q}{h}\right) \ll q^{-1+\varepsilon} \sum_{\theta h \leq q \leq \theta U} I\left(\frac{q}{h}\right) h h^{-1}.$$

Пусть $r = q/h$, тогда по условиям леммы

$$q^\varepsilon \sum_{r \leq \theta U/h} \frac{I(r)}{r} h^{-1} \leq q^\varepsilon \sum_{r \leq \theta U/h} B h^{-1} = q^\varepsilon B h^{-1} \theta \frac{U}{h} \asymp q^\varepsilon B U^{-1}.$$

§ 6. Доказательство основного результата

Разложим сумму $\lambda(a; \xi)$ на несколько подсумм, каждая из которых составлена относительно одного слагаемого из выражения для h_1 (см. (4.2), (4.4)):

$$2\lambda = Y + W + Z + H, \quad (6.1)$$

где Y , W , Z отвечают y , w , ξz соответственно, а H — произведению $\frac{1}{a}y(x-z)(\xi x-w)$.

Доказательству теоремы 1 предположим две леммы, одна из которых касается сумм относительно всех возможных линейных членов (Y , W и Z , а также суммы X относительно ξx , необходимой для доказательства теоремы 2), а другая — суммы H .

ЛЕММА 7. Для суммы

$$X(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + zw = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right] \xi x$$

справедлива асимптотическая формула

$$X(a; \xi) = \frac{8}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O_\varepsilon((a^{4/3}(\xi + 1) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}))a^\varepsilon).$$

Аналогичные формулы справедливы и для сумм W , Z и Y с константами $4(\pi - 2)/\pi^2$, $4(\pi - 2)/\pi^2$ и $4(4 - \pi)/\pi^2$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для сумм Y , W и Z результат был доказан в работе А. В. Устинова [7; леммы 8–10]. Таким образом, осталось только провести аналогичное доказательство для суммы X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Перепишем сумму $X(a; \xi)$ в виде

$$X(a; \xi) = \sum_{t=1}^a X(a, t; \xi),$$

где

$$X(a, t; \xi) = \xi \sum_{x \geq t} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right].$$

Введем параметры $U_1 \asymp \sqrt{a\xi}$, $U_2 = a/U_1 \asymp \sqrt{a/\xi}$. Будем считать, что $a \geq 9$ и $9/a \leq \xi \leq a/9$, поскольку в противном случае дальнейшие утверждения будут тривиальны. При $\xi \leq 1$ положим $n = [\sqrt{a\xi}] - 2 \geq 1$. Тогда для $U_1 \in [n + 1/4, n + 3/4]$ параметр $U_2 = a/U_1$ меняется внутри отрезка

$$\left[\frac{a}{n + 3/4}, \frac{a}{n + 1/4} \right],$$

длина которого больше $1/2$. Поэтому можно выбрать $U_1, U_2 \geq 1$ так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} U_1 U_2 &= a, & \|U_1\|, \|U_2\| &\geq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{12} \sqrt{a\xi} &\leq U_1 \leq \sqrt{a\xi}, & \sqrt{\frac{a}{\xi}} &\leq U_2 \leq 12 \sqrt{\frac{a}{\xi}}, \end{aligned}$$

где $\|x\|$ – расстояние от действительного x до ближайшего целого числа. При $\xi > 1$ положим $n = [\sqrt{a/\xi}] - 2 \geq 1$. Меняя U_2 внутри отрезка $[n + 1/4, n + 3/4]$, аналогично получаем, что можно выбрать $U_1, U_2 \geq 1$ так, что

$$\begin{aligned} U_1 U_2 &= a, & \|U_1\|, \|U_2\| &\geq \frac{1}{4}, \\ \sqrt{a\xi} &\leq U_1 \leq 12 \sqrt{a\xi}, & \frac{1}{12} \sqrt{\frac{a}{\xi}} &\leq U_2 \leq \sqrt{\frac{a}{\xi}}. \end{aligned}$$

Разобьем сумму $X(a, t; \xi)$ на две

$$X(a, t; \xi) = X_1(a, t; \xi) + X_2(a, t; \xi).$$

К первой отнесем те слагаемые, для которых $w \leq U_1$, а ко второй – все остальные. При таком разбиении во второй сумме всегда будет выполняться неравенство $z \leq U_2$.

В сумме

$$X_1(a, t; \xi) = \xi \sum_{w \leq U_1} \sum_{x \geq t} \sum_{y \geq 1}^x \sum_{z=1}^x \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right]$$

при фиксированном значении $w \geq 1$ переменные x и y связаны сравнением $xy \equiv a \pmod{w}$. Для известных w, x и y значение z уже находится однозначно

$$z = \frac{a - xy}{w}.$$

Учитывая ограничение $z \leq x$, сумму $X_1(a, t; \xi)$ можно переписать в виде

$$X_1(a, t; \xi) = \xi \sum_{w \leq U_1} \sum_{(x, y) \in \Omega} \delta_w(xy - a)[x \geq t],$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y) : x \geq \frac{w}{\xi}, y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \right\} = \left\{ (x, y) : y \geq 1, x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \right\}, \\ y_1(x) &= \frac{a}{x} - w, \quad y_2(x) = \frac{a}{x} - w + \frac{w^2}{\xi x}, \\ x_1(y) &= \frac{a}{w + y}, \quad x_2(y) = \frac{1}{w + y} \left(a + \frac{w^2}{\xi} \right). \end{aligned}$$

Выберем параметр $U = \sqrt{a + w^2/\xi}$ и разобьем Ω на подобласти следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= (\Omega_1 \setminus \Omega_2) \cup (\Omega_3 \setminus (\Omega_4 \cup \Omega_5)), \\ \Omega_1 &= \left\{ (x, y) : 1 \leq y \leq U - w, \frac{w}{\xi} < x < x_2(y) \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y) : 1 \leq y \leq U - w, \frac{w}{\xi} < x < x_1(y) \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ (x, y) : \frac{w}{\xi} < x \leq U, 1 < y < y_2(x) \right\}, \\ \Omega_4 &= \left\{ (x, y) : \frac{w}{\xi} < x \leq \frac{a}{U}, 1 < y < y_1(x) \right\}, \\ \Omega_5 &= \left\{ (x, y) : \max \left\{ \frac{w}{\xi}, \frac{a}{U} \right\} < x \leq U, 1 \leq y \leq U - w \right\}. \end{aligned}$$

Прямая $y = U - w$ делит область Ω на две подобласти: $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ и $\Omega_3 \setminus \Omega_4 \cup \Omega_5$, где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ – криволинейные трапеции, а Ω_5 – прямоугольник.

В областях Ω_1 и Ω_2 применим леммы 2 и 4 к функциям $x_1(y)$ и $x_2(y)$. Для этого разобьем интервал изменения переменной y на промежутки вида

$$(Y, 2Y] = (P_1, P_2], \quad Y = \frac{U - w}{2}, \frac{U - w}{4}, \frac{U - w}{8}, \dots,$$

на каждом из которых

$$x_1''(y) \asymp x_2''(y) \asymp \frac{a}{(w+Y)^3}, \quad A \asymp \frac{(w+Y)^3}{a}.$$

Так как

$$S[x_2] - S[x_1] = S[x_2 - x_1], \quad x_2(y) - x_1(y) \leq \frac{w^2}{\xi(w+1)} = Q,$$

при суммировании по таким промежуткам приходим к главному члену

$$\psi(a, w) \iint_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} [x \geq t] dx dy + O\left(\delta_w(a) \min\left\{U, \frac{a}{t}\right\}\right) + O\left(\frac{D_w w a^\varepsilon}{\xi(w+1)}\right),$$

где $D_w = (a, w)$, и остатку

$$O\left(\left(U\left(\frac{U^3}{a}\right)^{-1/3} + \left(\frac{U^3}{a}\right)^{1/2} D_w + w^{1/2}\right) a^\varepsilon\right) = O((a^{1/3} + a^{1/4} D_w + w^{1/2}) a^\varepsilon). \quad (6.2)$$

Аналогично в областях Ω_3 и Ω_4 применим леммы 2 и 4 к функциям $y_2(x)$ и $y_1(x)$. Для $x \in (X, 2X]$

$$y_1''(x) \asymp y_2''(x) \asymp \frac{a}{X^3}, \quad y_2(x) - y_1(x) \leq \frac{w^2}{\xi x} \leq w.$$

Поэтому при суммировании по промежуткам вида $(X, 2X]$, $X = U/2, U/4, U/8, \dots$, получим главный член

$$\psi(a, w) \iint_{\Omega_3 \setminus \Omega_4} [x \geq t] dx dy + O(\delta_w(a) U[t \leq U]) + O(D_w a^\varepsilon)$$

и остаток (6.2).

В области Ω_5 применим леммы 3 и 4:

$$\psi(a, w) = \int \int_{\Omega_5} [x \geq t] dx dy + O\left(\left(w^{1/2} + D_w + \frac{D_w}{w} U[U \leq t]\right) a^\varepsilon\right).$$

Таким образом,

$$X_1(a, t; \xi) = \xi \sum_{w \leq U_1} \left(\psi(a, w) \int \int_{\Omega} [x \geq t] dx dy + O(R_1(a, t, w; \xi)) \right),$$

где

$$R_1(a, t, w; \xi) = \left(a^{1/3} + a^{1/4} D_w + w^{1/2} + D_w + \frac{D_w w}{\xi(w+1)} \right) a^\varepsilon + \delta_w(a) U[t \leq u] + \delta_w(a) \min\left\{U, \frac{a}{t}\right\}.$$

Слагаемые в сумме X_1 являются ненулевыми только при $tw \leq a$, поэтому из неравенств

$$\sum_{w \leq N} D_w \leq \sum_{D|a} \sum_{\substack{w \leq N \\ D|w}} 1 \leq N \sigma_0(a)$$

для остатка получается оценка

$$\sum_{\substack{tw \leq a \\ w \leq U_1}} R_1(a, t, w; \xi) \ll R_1(a, \xi),$$

где

$$R_1(a, \xi) = (a^{4/3} + a^{5/4}\xi^{1/4} + a\xi^{-1})a^\varepsilon.$$

Для суммы

$$X_1(a; \xi) = \sum_{t=1}^a X_1(a, t; \xi)$$

получаем формулу

$$\begin{aligned} X_1(a; \xi) &= \xi \sum_{t=1}^a \sum_{w \leq U_1} \psi(a, w) \int_{w/\xi}^a [x \geq t] dx \int_1^a [y_1(x) \leq y \leq y_2(x)] dy + O(\xi R_1(a; \xi)) \\ &= \xi \sum_{w \leq U_1} \psi(a, w) \int_{w/\xi}^a x dx \int_1^a [y_1(x) \leq y \leq y_2(x)] dy + O(\xi R_1(a; \xi)) \\ &= \xi \sum_{w \leq U_1} \psi(a, w) \left(\int_{w/\xi}^{a/w+w/\xi} xy_2(x) dx - \int_{w/\xi}^{a/w} xy_1(x) dx \right) + O(\xi R_1(a; \xi)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Возникшие интегралы вычисляются непосредственно, что приводит к равенству

$$X_1(a; \xi) = a^{3/2}\xi^{1/2} \sum_{1 \leq w \leq U_1} \psi(a, w) I_1\left(\frac{w}{U_1}\right) + O(\xi R_1(a; \xi)),$$

где $I_1(r) = -r^3/2 + r$. По лемме 6

$$\begin{aligned} X_1(a; \xi) &= \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 \frac{I_1(r)}{r} dr + O(\xi R_1(a; \xi)) \\ &= \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \frac{5}{6} + O(\xi R_1(a; \xi)). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Теперь рассмотрим сумму

$$X_2(a, t; \xi) = \xi \sum_{z \geq 1} \sum_{x \geq \max\{z, t\}} \sum_{y \geq 1} \sum_{w > U_1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right].$$

При фиксированном $z \geq 1$ переменные x и y удовлетворяют сравнению $xy \equiv a \pmod{z}$, а для известных z , x и y значение w уже находится однозначно:

$$w = \frac{a - xy}{z}.$$

Ограничение $w > U_1$ приводит к тому, что $z < a/U_1 = U_2$, поэтому сумму можно переписать в следующем виде:

$$X_2(a, t; \xi) = \xi \sum_{z \leq U_2} \sum_{(x, y) \in \tilde{\Omega}} \delta_z(xy - a) [x \geq t],$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= \{(x, y) : x \geq z, y_3(x) \leq y \leq y_4(x)\} = \{(x, y) : y \geq 1, x_3(y) \leq x \leq x_4(y)\}, \\ y_3(x) &= \frac{a}{x} - \xi z, \quad y_4(x) = \min \left\{ \frac{a - U_1 z}{x}, \frac{a}{x} - \xi z + \frac{\xi z^2}{x} \right\}, \\ x_3(y) &= \frac{a}{\xi z + y}, \quad x_4(y) = \min \left\{ \frac{a - U_1 z}{y}, \frac{a + \xi z^2}{\xi z + y} \right\}.\end{aligned}$$

Далее выбираем $U = \sqrt{a + \xi z^2}$ и повторяем для суммы X_2 доказательство, аналогичное таковому для суммы X_1 . Получаем

$$X_2(a; \xi) = \frac{a^{3/2} \xi^{1/2}}{2\zeta(2)} + O((a^{4/3} + a^{5/4} \xi^{-1/4} + a\xi) a^\varepsilon). \quad (6.5)$$

После подстановки равенств (6.4), (6.5) в формулу

$$X(a; \xi) = X_1(a; \xi) + X_2(a; \xi)$$

приходим к утверждению леммы. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Для суммы*

$$H(a; \xi) = \sum_{x \geq 1} \sum_{z=1}^x \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq 0} \left[xy + zw = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right] \frac{1}{a} y(x-z)(\xi x - w),$$

справедлива асимптотическая формула

$$H(a; \xi) = \frac{64 - 20\pi}{5\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O_\varepsilon((a^{4/3}(\xi + 1) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}) + a\xi^{1/2}) a^\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующие рассуждения, по сути, повторяют доказательство предыдущей леммы. Мы разбиваем сумму на две подсуммы:

$$H = H_1 + H_2, \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned}H_1(a, t; \xi) &= \sum_{w \leq U_1} \sum_{x \geq 1} \sum_{y \geq 1} \sum_{z=1}^x \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right] \frac{1}{a} y(x-z)(\xi x - w), \\ H_2(a, t; \xi) &= \sum_{z \leq U_2} \sum_{x \geq 1} \sum_{y \geq 1} \sum_{w \geq U_1} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leq \xi \leq \frac{w}{x-z} \right] \frac{1}{a} y(x-z)(\xi x - w).\end{aligned}$$

В сумме $H_1(a, t; \xi)$ заменим z на $(a - xy)/w$:

$$H_1(a, t; \xi) = \sum_{w \leq U_1} \sum_{(x, y) \in \Omega} \frac{1}{a} \left(\xi y x^2 - \frac{\xi a}{w} y x + \frac{\xi}{w} y^2 x^2 - w y x + a y - x y^2 \right) \delta_w(x y - a),$$

где область Ω совпадает с таковой из предыдущей леммы.

Просуммируем отдельно каждое слагаемое. В качестве примера рассмотрим $(\xi/w)y^2x^2$. Представив y^2 в виде суммы $2\sum_{t_1=1}^y t_1 + O(y)$, а x^2 – в виде $2\sum_{t_2=1}^x t_2 + O(x)$, имеем:

$$S(a; \xi) = 4 \sum_{t_2 \geq 1} \sum_{t_1 \geq 1} t_1 t_2 S(a, t_1, t_2; \xi) + O_\varepsilon(a^{1+\varepsilon}),$$

где

$$S(a, t_1, t_2; \xi) = \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{\substack{(x,y) \in \Omega \\ x \geq t_2 \\ y \geq t_1}} \delta_w(xy - a).$$

Остаток оценивается следующим образом:

$$\frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{(x,y) \in \Omega} \delta_w(xy - a)(xy^2 + x^2y) \leq \xi \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{(x,y) \in \Omega} \delta_w(xy - a)(x + y).$$

Оценим отдельно суммы, содержащие x и y . Рассмотрим первую из них:

$$\xi \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{(x,y) \in \Omega} \delta_w(xy - a)x = \sum_{t \geq 1} \xi \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{\substack{(x,y) \in \Omega \\ x \geq t}} \delta_w(xy - a).$$

Эта сумма аналогична сумме X_1 из леммы 7, за исключением того, что в суммируемом выражении присутствует сомножитель $1/w$. Поэтому воспользуемся формулой (6.3) и вычислим входящие в нее интегралы непосредственно:

$$\xi \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \psi(a, w) \left(\frac{aw}{\xi} - \frac{w^3}{2\xi^2} \right) \ll \sum_{w \leq U_1} w^\varepsilon \left(\frac{a}{w} - \frac{w}{2\xi} \right) \ll a^{1+\varepsilon}.$$

Аналогично оценивается вторая сумма.

Разобьем область Ω на подобласти так же, как и в лемме 7. В областях Ω_1 и Ω_2 применим леммы 2 и 4 к функциям $x_1(y)$ и $x_2(y)$. Для этого разобьем интервал изменения переменной y на промежутки вида

$$(Y, 2Y] = (P_1, P_2], \quad Y = \frac{U-w}{2}, \frac{U-w}{4}, \frac{U-w}{8}, \dots,$$

на каждом из которых

$$x_1''(y) \asymp x_2''(y) \asymp \frac{a}{(w+Y)^3}, \quad A \asymp \frac{(w+Y)^3}{a}.$$

Так как

$$S[x_2] - S[x_1] = S[x_2 - x_1], \quad x_2(y) - x_1(y) \leq \frac{w^2}{\xi t_1} = Q,$$

при суммировании по таким промежуткам приходим к главному члену

$$\begin{aligned} & \psi(a, w) \iint_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} [x \geq t_2][y \geq t_1] dx dy \\ & + O(\delta_w(a)(U - w - t_1)[t_1 \leq U - w][a \leq (t_1 + w)t_2 \leq U^2]) + O\left(\frac{D_w w a^\varepsilon}{\xi t_1}\right), \end{aligned}$$

где $D_w = (a, w)$, и остатку

$$O\left(\left(U\left(\frac{U^3}{a}\right)^{-1/3} + \left(\frac{U^3}{a}\right)^{1/2} D_w + w^{1/2}\right)a^\varepsilon\right) = O((a^{1/3} + a^{1/4}D_w + w^{1/2})a^\varepsilon). \quad (6.7)$$

Аналогично в областях Ω_3 и Ω_4 применим леммы 2 и 4 к функциям $y_2(x)$ и $y_1(x)$. Для $x \in (X, 2X]$

$$y_1''(x) \asymp y_2''(x) \asymp \frac{a}{X^3}, \quad y_2(x) - y_1(x) \leq \frac{w^2}{\xi t_2}.$$

Поэтому при суммировании по промежуткам вида $(X, 2X]$, $X = U/2, U/4, U/8, \dots$, получим главный член

$$\begin{aligned} \psi(a, w) & \iint_{\Omega_3 \setminus \Omega_4} [x \geq t_2][y \geq t_1] dx dy \\ & + O(\delta_w(a)(U - t_2)[t_2 \leq U][a \leq (t_1 + w)t_2 \leq U^2]) + O\left(\frac{D_w w}{\xi t_2} a^\varepsilon\right) \end{aligned}$$

и остаток (6.7).

В области Ω_5 применим леммы 3 и 4:

$$\begin{aligned} \psi(a, w) & = \iint_{\Omega_5} [x \geq t_2][y \geq t_1] dx dy \\ & + O\left(\left(w^{1/2} + D_w + \frac{D_w}{w}(U - t_2)[t_2 \leq U][a \leq (t_1 + w)t_2 \leq U^2]\right)a^\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(a, t_1, t_2; \xi) = \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \left(\psi(a, w) \iint_{\Omega} [x \geq t_2][y \geq t_1] dx dy + O(R_1(a, t_1, t_2, w; \xi)) \right),$$

где

$$\begin{aligned} R_1(a, t_1, t_2, w; \xi) & = \left(a^{1/3} + a^{1/4}D_w + w^{1/2} + \frac{D_w w}{\xi t_2} + \frac{D_w w}{\xi t_1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{D_w}{w}(U - t_2)[t_2 \leq U, a \leq (t_1 + w)t_2 \leq U^2] \right) a^\varepsilon \\ & \quad + \delta_w(a)(U - w - t_1)[t_1 \leq U - w, a \leq (t_1 + w)t_2 \leq U^2] \\ & \quad + \delta_w(a)(U - w - t_1)[t_2 \leq U, a \leq (t_1 + w)t_2 \leq U^2]. \end{aligned}$$

Этот остаток оценивается следующим образом:

$$\frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{t_2 \leq a/w} \sum_{t_1 \leq a/t_2} t_1 t_2 R_1(a, t_1, t_2, w; \xi) \ll R_1(a, \xi),$$

где

$$R_1(a, \xi) = (a^{4/3}\xi + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi) + a\xi^{1/2} + a)a^\varepsilon.$$

Для доказательства просуммируем каждое из слагаемых, входящих в $R_1(a, t_1, t_2, w; \xi)$. Для первых четырех слагаемых имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{t_2 \leq a/w} \sum_{t_1 \leq a/t_2} t_1 t_2 a^{1/3+\varepsilon} \leq \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{t_2 \leq a/w} a^{7/3+\varepsilon} \frac{1}{t_2} \\
& \leq a^{4/3+\varepsilon} \xi \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \log \frac{a}{w} \ll a^{4/3+\varepsilon} \xi, \\
& \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \sum_{t_2 \leq a/w} \sum_{t_1 \leq a/t_2} t_1 t_2 a^{1/4+\varepsilon} D_w \leq \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{D_w}{w} \sum_{t_2 \leq a/w} a^{9/4+\varepsilon} \frac{1}{t_2} \\
& \leq a^{5/4+\varepsilon} \xi \sum_{w \leq U_1} \frac{D_w}{w} \log \frac{a}{w} \ll a^{5/4+\varepsilon} \xi, \\
& \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w^{1/2}} \sum_{t_2 \leq a/w} \sum_{t_1 \leq a/t_2} t_1 t_2 a^\varepsilon \leq \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w^{1/2}} \sum_{t_2 \leq a/w} a^{2+\varepsilon} \frac{1}{t_2} \\
& \leq a^{1+\varepsilon} \xi \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w^{1/2}} \log \frac{a}{w} \ll a^{5/4+\varepsilon} \xi^{5/4}, \\
& \frac{1}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{\xi}{w} \frac{w}{\xi} D_w \sum_{t_2 \leq a/w} \sum_{t_1 \leq a/t_2} \left(t_1 \frac{1}{t_1} t_2 + t_1 \frac{1}{t_2} t_2 \right) a^\varepsilon \\
& \leq a^{-1+\varepsilon} \sum_{w \leq U_1} D_w \sum_{t_2 \leq a/w} \left(a t_2 \frac{1}{t_2} + a^2 \frac{1}{t_2^2} \right) \\
& \leq a^\varepsilon \sum_{w \leq U_1} \left(a \frac{D_w}{w} + D_w w \right) \ll (a + a\xi) a^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Для оставшихся трех слагаемых получаются следующие оценки:

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{D_w}{w^2} \sum_{\substack{t_1, t_2 \\ t_2 \leq U \\ a \leq t_2(t_1+w) \leq U^2}} t_1 t_2 (U - t_2) a^\varepsilon \leq \frac{\xi a^\varepsilon}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{D_w}{w^2} \frac{w^2}{\xi} \sum_{t_2 \leq U} \left(\frac{a + U^2}{t_2} - 2w \right) (U - t_2) \\
& \leq \frac{a^\varepsilon}{a} \sum_{w \leq U_1} D_w (a + U^2) U \log U \ll a^{1+\varepsilon} \xi^{1/2}, \\
& \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{\delta_w}{w} \sum_{\substack{t_1, t_2 \\ t_2 \leq U \\ a \leq t_2(t_1+w) \leq U^2}} t_1 t_2 (U - t_2) \leq \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{\delta_w}{w} \frac{w^2}{\xi} \sum_{t_2 \leq U} \left(\frac{a + U^2}{t_2} - 2w \right) (U - t_2) \\
& \leq \frac{1}{a} \sum_{w \leq U_1} \delta_w w (a + U^2) U \log U \ll a^{1+\varepsilon} \xi^{1/2}, \\
& \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{\delta_w}{w} \sum_{\substack{t_1, t_2 \\ t_1 \leq U-w \\ a \leq t_2(t_1+w) \leq U^2}} t_1 t_2 ((U - w) - t_1) \\
& \leq \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{\delta_w}{w} \frac{w^2}{\xi} \sum_{t_1+w \leq U} \left((U - (t_1 + w)) \frac{a + U^2}{t_1 + w} - w(U - (t_1 + w)) \frac{a + U^2}{(t_1 + w)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{a} \sum_{w \leq U_1} \delta_w w (U(a + U^2) \log(U + w) + w(a + U^2) \log(U + w)) \ll (a\xi + a\xi^{1/2})a^\varepsilon.$$

Для суммы $S(a; \xi)$ получаем формулу

$$\begin{aligned} S(a; \xi) &= 4 \frac{\xi}{a} \sum_{t_2, t_1} t_1 t_2 \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \psi(a, w) \int_{w/\xi}^a [x \geq t_2] dx \int_1^a [y \geq t_1] \\ &\quad \times [y_1(x) \leq y \leq y_2(x)] dy + O(R_1(a; \xi)) \\ &= \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \psi(a, w) \int_{w/\xi}^a x^2 dx \int_1^a y^2 [y_1(x) \leq y \leq y_2(x)] dy + O(R_1(a; \xi)) \\ &= \frac{\xi}{a} \sum_{w \leq U_1} \frac{1}{w} \psi(a, w) \left(\int_{w/\xi}^{a/w+w/\xi} x^2 dx \int_0^{U^2/x-w} y^2 dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{w/\xi}^{a/w} x^2 dx \int_0^{a/x-w} y^2 dy \right) + O(R_1(a; \xi)). \end{aligned}$$

Возникшие интегралы вычисляются непосредственно, что приводит к равенству

$$S(a; \xi) = a^{3/2} \xi^{1/2} \sum_{1 \leq w \leq U_1} \psi(a, w) I_1 \left(\frac{w}{U_1} \right) + O(R_1(a; \xi)),$$

где

$$I_1(r) = \frac{1}{18r} (-33r^2 + 3r^4 - 2r^6 - 6r^2(3 + 3r^2 + r^4) \log r^2 + 6(1 + r^2)^3 \log(1 + r^2)).$$

По лемме 5

$$\begin{aligned} S(a; \xi) &= \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 \psi(a, w) \frac{I_1(r)}{r} dr + O(R_1(a; \xi)) \\ &= \frac{a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \frac{(-55 + 24\pi + 48 \log 2)}{45} + O(R_1(a; \xi)) \\ &= a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a) \frac{2(-55 + 24\pi + 48 \log 2)}{15\pi^2} + O(R_1(a; \xi)). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Для оставшихся слагаемых плучаются аналогичные асимптотические формулы с соответствующими константами и остатками (см. табл. 1).

Таким образом,

$$H_1(a, t; \xi) = a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a) \frac{97 - 30\pi}{15\pi^2} + O_\varepsilon((a^{4/3} \xi + a^{5/4} \xi^{5/4} + a \xi^{1/2} + a) a^\varepsilon).$$

Аналогично (с помощью подстановки $w = (a - xy)/z$) находим, что

$$H_2(a, t; \xi) = a^{3/2} \xi^{1/2} \sigma_{-1}(a) \frac{19 - 6\pi}{3\pi^2} + O_\varepsilon((a^{4/3} + a^{5/4} \xi^{-1/4} + a \xi^{1/2} + a \xi) a^\varepsilon).$$

Подставляя асимптотические формулы для H_1 и H_2 в формулу (6.6), приходим к утверждению леммы. Лемма 8 доказана.

ТАБЛИЦА 1. Слагаемые, соответствующие им константы и остатки

$\xi x^2 y$	$\frac{11}{5\pi^2}$	$O((a^{4/3}\xi + a^{5/4}\xi + a^{5/4}\xi^{5/4} + a\xi + a\xi^{1/2})a^\varepsilon)$
$-\frac{\xi a}{w}xy$	$\frac{13 - 8\pi - 8\log 2}{2\pi^2}$	$O((a^{4/3}\xi + a^{5/4}\xi + a^{5/4}\xi^{5/4} + a + a\xi + a\xi^{1/2})a^\varepsilon)$
$-wxy$	$\frac{55 - 8\pi - 56\log 2}{10\pi^2}$	$O((a^{4/3}\xi + a^{5/4}\xi + a^{5/4}\xi^{5/4} + a\xi + a + a\xi^{1/2})a^\varepsilon)$
ay	$\frac{15 - 2\pi + 56\log 2}{\pi^2}$	$O((a^{4/3}\xi + a^{5/4}\xi + a^{5/4}\xi^{5/4} + a)a^\varepsilon)$
$-xy^2$	$\frac{-77 + 8\pi + 56\log 2}{5\pi^2}$	$O((a^{4/3}\xi + a^{5/4}\xi + a^{5/4}\xi^{5/4} + a\xi + a\xi^{1/2} + a)a^\varepsilon)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применяя леммы 7 и 8, находим $\lambda(a, \xi)$ при помощи формулы (6.1):

$$\begin{aligned}
\lambda(a, \xi) &= \frac{1}{2} (Y(a; \xi) + W(a; \xi) + \xi Z(a; \xi) + H(a; \xi)) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{4(\pi - 4)}{\pi^2} + \frac{4(\pi - 2)}{\pi^2} + \frac{4(\pi - 2)}{\pi^2} + \frac{64 - 20\pi}{5\pi^2} \right) \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} \\
&\quad + O_\varepsilon((a^{4/3}(\xi + 1) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}) + a\xi^{1/2})a^\varepsilon) \\
&= \frac{32}{5\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O_\varepsilon((a^{4/3}(\xi + 1) + a^{5/4}(\xi^{5/4} + \xi^{-1/4}) + a\xi^{1/2})a^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Выражение $\lambda^*(a, \xi)$ определяется по формуле (4.3), а $\eta^*(a, \xi)$ – из равенства $\eta^*(a, \xi) = \xi \lambda^*(a, 1/\xi)$. Таким образом, согласно формуле (4.1) асимптотическая формула плотности $\rho_a(t_1, t_2)$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\rho_a(t_1, t_2) &= \frac{64}{5\pi^2} \varphi(a) \sqrt{t_1 t_2 a} \\
&\quad + O_\varepsilon(a^{4/3}(t_2 + t_1) + a^{5/4}(t_2^{5/4} t_1^{-1/4} + t_2^{-1/4} t_1^{5/4}) + a t_1^{1/2} t_2^{1/2}) a^\varepsilon). \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Применяя лемму 1 к плотности (6.9), находим

$$\begin{aligned}
\sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} N(a, b, c) &= \frac{64}{5\pi^2} a^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \\
&\quad \times \varphi(a_1) \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \sqrt{t_1 t_2 a_1} dt_1 dt_2 + O(|M_a(x_1, x_2)| a^{4/3+\varepsilon}) + O(x_1 x_2 a^{3+\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Воспользуемся замечанием 1. Правая часть равенства примет вид

$$\sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} N(a, b, c) = \frac{64}{5\pi^2} \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \sqrt{abc} + O(|M_a(x_1, x_2)| a^{4/3+\varepsilon}).$$

С помощью элементарных преобразований приходим к утверждению теоремы.

§ 7. Двухконтурные сети

Двухконтурные сети впервые были описаны в работе [18]. Двухконтурная сеть – это ориентированный граф с N вершинами, пронумерованными от 0 до $N - 1$. Выберем два натуральных числа b и c . Ребра графа, связывающие каждый узел $i = \overline{0, N-1}$ с узлами с номерами $(i + b) \bmod N$ и $(i + c) \bmod N$, имеют вес (длину) b и c соответственно. Движение в обратном направлении запрещено. Добраться из одной вершины в другую можно несколькими способами, поэтому расстоянием между ними считают наименьшую из соответствующих сумм длин пройденных ребер $bx + cy$, где x – количество пройденных ребер длины b , y – длины c . Пример двухконтурной сети приведен на рис. 1.

Рис. 1. Двухконтурная сеть, $N = 12$, $b = 1$, $c = 7$

Если двигаться из нулевого узла, то при пройденном расстоянии $bx + cy$ мы окажемся в вершине $(bx + cy) \bmod N$. Нанося номера таких узлов на координатную плоскость xoy , мы целиком замостим ее числами из полной системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю N . При этом, вычеты, образующие полную систему, будут сгруппированы в одинаковые по форме L-образные области таким образом, что их взаимное расположение внутри каждой такой области будет одинаковым (см. рис. 2). Одна из этих областей обязательно будет нижним левым углом лежать в точке $(0, 0)$: она называется L-диаграммой (см. [19]).

В своей работе [12] О. Рёдсет определил координаты точек, отвечающих за размеры L-диаграмм при заданных a (примем $a = N$), b , c . Они представлены на рис. 3. Параметры L-образных диаграмм являются значениями линейной формы $bx + cy$, и эти параметры, двухконтурные сети и проблема Фробениуса тесно взаимосвязаны между собой. Например, число Фробениуса $g(a, b, c)$ и

Рис. 2. Замощение плоскости L-образными областями при $N = 11$, $b = 4$, $c = 5$

Рис. 3. Параметры и координаты определяющих точек L-диаграммы

диаметр соответствующей двухконтурной сети связаны равенством

$$g(a, b, c) = -a + \max_{(x, y) \in L} (bx + cy)$$

(см. [19]), а число $N(a, b, c)$ и средняя длина пути орграфа – равенством

$$n(a, b, c) = -\frac{1}{2}(a - 1) + \frac{1}{a} \sum_{(x, y) \in L} (bx + cy)$$

(см. [20]). В обоих выражениях L – множество точек с координатами (x, y) , входящих в L-диаграмму. Вместе с тем значение $f(a, b, c)$ равно значению линейной формы в точке L-диаграммы, в которой эта форма достигает максимума. Эта точка расположена в одном из правых верхних углов в зависимости от направления градиента (c ; b). Длина кратчайшего цикла $C_s(a, b, c)$ представляет собой расстояние, при помощи которого можно вернуться в ту же точку за

наименьшее (ненулевое) время. Псевдочисло Фробениуса $\tilde{f}(a, b, c)$ связано со значением функции $bx + cy$ в точке ее возможного максимума на L-диаграмме, в которой не оказалось числа Фробениуса. Кроме того, можно выделить шесть параметров $f^{(1)}, \dots, f^{(6)}$, являющихся значениями линейной формы в точках, характеризующих L-диаграммы.

Часть перечисленных выше величин уже упоминалась ранее. Формулы остальных можно легко получить при помощи алгоритма Рёдсета:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a, b, c) &= bs_v + cp_{v+1} - \max\{bs_{v+1}, cp_v\}, & f^{(3)}(a, b, c) &= bs_{v+1} + c(p_{v+1} - p_v), \\ C_s(a, b, c) &= b(s_v - s_{v+1}) + c(p_{v+1} - p_v), & f^{(4)}(a, b, c) &= b(s_v - s_{v+1}) + cp_{v+1}, \\ f^{(1)}(a, b, c) &= b(s_v - s_{v+1}), & f^{(5)}(a, b, c) &= cp_{v+1}, \\ f^{(2)}(a, b, c) &= bs_v, & f^{(6)}(a, b, c) &= c(p_{v+1} - p_v).\end{aligned}$$

Для каждого из этих параметров можно доказать результаты, аналогичные теореме 1 для N и теореме из статьи [7] для f .

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда

$$\frac{1}{a^{3/2}|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \left(f^{(i)}(a, b, c) - P_i \sqrt{abc} \right) = O_\varepsilon(a^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$P = \left(\frac{8}{\pi^2}, \frac{16}{\pi^2}, \frac{24}{\pi^2}, \frac{24}{\pi^2}, \frac{16}{\pi^2}, \frac{8}{\pi^2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно найти константы асимптотического усреднения для $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(5)}$ и $f^{(6)}$, так как значение линейной формы $f^{(3)} = f^{(2)} + f^{(6)}$, а значение линейной формы $f^{(4)} = f^{(1)} + f^{(5)}$.

Ход рассуждений при доказательстве теоремы совпадает с ходом доказательства основного результата. Исследуемые параметры обладают следующими функциями плотностей распределения:

$$\begin{aligned}\rho_{l,a}^{(1)}(t_1, t_2) &= t_1(s_n - s_{n+1}), & \rho_{l,a}^{(5)}(t_1, t_2) &= t_2 p_{n+1}, \\ \rho_{l,a}^{(2)}(t_1, t_2) &= t_1 s_n, & \rho_{l,a}^{(6)}(t_1, t_2) &= t_2(p_{n+1} - p_n).\end{aligned}$$

Для $\rho_a^{(i)}(\xi)$, так же как и для $\rho_a(\xi)$, справедливо равенство

$$\rho_a^{(i)}(\xi) = \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1} \right] h^{(i)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi),$$

в котором под $h^{(i)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi)$ понимается одна из следующих функций:

$$\begin{aligned}h^{(1)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= u_2 - v_2, & h^{(5)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= \xi u_1, \\ h^{(2)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= u_2, & h^{(6)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= \xi(u_1 - v_1).\end{aligned}$$

Сумму $\rho_a^{*(i)}(\xi)$ можно разбить на две подсуммы относительно случаев $v_2 > \xi v_1$ и $v_2 \leq \xi v_1$:

$$\rho_a^{*(i)}(\xi) = \lambda^{*(i)}(a; \xi) + \eta^{*(i)}(a; \xi),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^{*(i)}(a; \xi) &= \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leq \xi < \frac{v_2}{v_1} \right] h^{(i)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi), \\ \eta^{*(i)}(a; \xi) &= \sum_{u_1=1}^a \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^a \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{v_1} \leq \xi < \frac{u_2}{v_1} \right] h^{(i)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi). \end{aligned}$$

Замена переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$ приводит к тому, что $\eta^{*(i)}(a; \xi) = \xi \lambda^{*(7-i)}(a; 1/\xi)$ для всех $i = \{1, 2, 5, 6\}$. Таким образом, значение $\rho_a^{*(i)}(\xi)$ может быть найдено при условии, что известны все суммы $\lambda^{*(i)}(a; \xi)$.

Введем переменные $x = u_1$, $y = u_2 - v_2$, $z = u_1 - v_1$, $w = v_2$. Тогда $h^{(i)}$ примут вид

$$\begin{aligned} h^{(1)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= y, & h^{(5)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= \xi x, \\ h^{(2)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= y + w, & h^{(6)}(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) &= \xi z. \end{aligned}$$

Теперь для вычисления $\lambda^{(i)}$ можно использовать разбиение на подсуммы относительно слагаемых в $h^{(i)}$. Применяя лемму 7, получаем что

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(a; \xi) &= Y(a; \xi) = -\frac{4(\pi - 4)}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(a^{4/3+\varepsilon}), \\ \lambda^{(2)}(a; \xi) &= Y(a; \xi) + W(a; \xi) = \frac{8}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(a^{4/3+\varepsilon}), \\ \lambda^{(5)}(a; \xi) &= X(a; \xi) = \frac{8}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(a^{4/3+\varepsilon}), \\ \lambda^{(6)}(a; \xi) &= Z(a; \xi) = \frac{4(\pi - 2)}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(a^{4/3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией $\eta^{*(i)}(a; \xi) = \xi \lambda^{*(7-i)}(a; 1/\xi)$ и формулой (6.1), получаем

$$\begin{aligned} \rho_a^{(1)}(\xi) &= \rho_a^{(6)}(\xi) = \lambda^{(1)}(a; \xi) + \lambda^{(6)}(a; \xi) = \frac{8}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(a^{4/3+\varepsilon}), \\ \rho_a^{(2)}(\xi) &= \rho_a^{(5)}(\xi) = \lambda^{(2)}(a; \xi) + \lambda^{(5)}(a; \xi) = \frac{16}{\pi^2} \sigma_{-1}(a) a^{3/2} \xi^{1/2} + O(a^{4/3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Далее, используя лемму 1 и замечание 1, приходим к утверждению теоремы относительно $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(5)}$ и $f^{(6)}$ так же, как и в доказательстве теоремы 1. Константы для $f^{(3)}$ и $f^{(4)}$ находим непосредственно:

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} = \frac{24}{\pi^2}.$$

Рис. 4. Типичные значения линейной формы $bx + cy$ в вершинах L-диаграммы

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда

$$\frac{1}{a^{3/2}|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \left(\tilde{f}(a, b, c) - \frac{8(6-\pi)}{\pi^2} \sqrt{abc} \right) = O_\varepsilon(a^{-1/6+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суммы значений линейной формы в противоположных углах прямоугольника равны, поэтому

$$f(a, b, c) + \tilde{f}(a, b, c) = f^{(3)}(a, b, c) + f^{(4)}(a, b, c).$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(a, b, c) = f^{(3)}(a, b, c) + f^{(4)}(a, b, c) - f(a, b, c).$$

Таким образом, константа асимптотического усреднения равна

$$\frac{24}{\pi^2} + \frac{24}{\pi^2} - \frac{8\pi}{\pi^2} = \frac{8(6-\pi)}{\pi^2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда

$$\frac{1}{a^{3/2}|M_a(x_1, x_2)|} \sum_{(b,c) \in M_a(x_1, x_2)} \left(C_s(a, b, c) - \frac{16}{\pi^2} \sqrt{abc} \right) = O_\varepsilon(a^{-1/6+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C_s = f^{(1)} + f^{(6)}$, соответствующая константа равна

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} = \frac{16}{\pi^2}.$$

Графические результаты теоремы 2 и утверждения 2 представлены на рис. 4.

§ 8. Результаты численного эксперимента

Интересно, что для вычисления средних значений форм $f^{(i)}$ и значений N , f , $\tilde{f}$ и C_s для чисел, имеющих одинаковые асимптотики, получаются немного отличающиеся результаты. Как и в работе [21], усреднение проводилось по тройкам (a, b, c) , в которых a – большое простое число,

$$b + c < 2a, \quad (b, c) \in [1, a]^2.$$

Наложенные ограничения обеспечивают выполнение условий $(a, b) = (a, c) = 1$. Для каждого параметра составляется сумма вида

$$\bar{S}(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 - 1} \sum_{\substack{b, c=1 \\ b+c < 2a}}^a \frac{\rho_a(b, c)}{\sqrt{abc}} + \frac{1}{(a-1)^2} \sum_{b, c=1}^{a-1} \frac{\rho_a(b, c)}{\sqrt{abc}} \right),$$

которая ведет себя более регулярно, чем средние значения соответствующих величин по квадратам $(b, c) \in [1, a-1]^2$ и $(b, c) \in [1, a]^2$.

Результаты, посчитанные при $a = 49999$ в сравнении с теоретически полученными величинами, приведенными с точностью до третьего знака после запятой:

Таблица 2. Сравнение значений констант, полученных в явном виде и экспериментальных

Параметр	N	$\tilde{f}$	C_s	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$
Константа	1.297	2.316	1.621	0.811	1.621	2.432	2.432	1.621	0.811
$\bar{S}$	1.294	2.312	1.622	0.838	1.644	2.428	2.423	1.585	0.783

Разница между экспериментальными результатами для функций $f^{(1)}$ и $f^{(6)}$, $f^{(2)}$ и $f^{(5)}$, $f^{(3)}$ и $f^{(4)}$ вызвана несимметричностью полуинтервала $[s_{v+1}/p_{v+1}, s_v/p_v)$ в алгоритме Рёдсета: в случае, если

$$\frac{c}{b} = \frac{s_{v+1}}{p_{v+1}},$$

нарушается симметричность относительно замены $c \leftrightarrow b$.

Автор благодарит А. В. Устинова и Д. А. Фроленкова за полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000, х+452 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold's problems*, 2nd ed., Springer-Verlag, Moscow; Phasis, 2005, xvi+639 pp.
- [2] J. L. Ramírez Alfonsín, *The Diophantine Frobenius problem*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **30**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005, xvi+243 pp.

- [3] J. L. Davison, “On the linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Number Theory*, **48**:3 (1994), 353–363.
- [4] Ж. Бургейн, Я. Г. Синай, “Предельное поведение больших чисел Фробениуса”, *УМН*, **62**:4(376) (2007), 77–90; англ. пер.: J. Bourgain, Ya. G. Sinai, “Limit behaviour of large Frobenius numbers”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 713–725.
- [5] V. Shchur, Ya. Sinai, A. Ustinov, “Limiting distribution of Frobenius numbers for $n = 3$ ”, *J. Number Theory*, **129**:11 (2009), 2778–2789.
- [6] J. Marklof, “The asymptotic distribution of Frobenius numbers”, *Invent. Math.*, **181**:1 (2010), 179–207.
- [7] А. В. Устинов, “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 131–160; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The solution of Arnold’s problem on the weak asymptotics of Frobenius numbers with three arguments”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 597–627.
- [8] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 145–170; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the distribution of Frobenius numbers with three arguments”, *Izv. Math.*, **74**:5 (2010), 1023–1049.
- [9] Д. А. Фроленков, “Среднее значение чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:4 (2012), 125–184; англ. пер.: D. A. Frolenkov, “The mean value of Frobenius numbers with three arguments”, *Izv. Math.*, **76**:4 (2012), 760–819.
- [10] I. Aliev, M. Henk, A. Hinrichs, “Expected Frobenius numbers”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **118**:2 (2011), 525–531.
- [11] A. Strömbergsson, “On the limit distribution of Frobenius numbers”, *Acta Arith.*, **152**:1 (2012), 81–107.
- [12] Ö. J. Rødseth, “On a linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Reine Angew. Math.*, **1978**:301 (1978), 171–178.
- [13] А. В. Устинов, “Геометрическое доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса”, *Теория чисел, алгебра и анализ*, Сб. статей. К 75-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **276**, МАИК, М., 2012, 280–287; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Geometric proof of Rødseth’s formula for Frobenius numbers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **276** (2012), 275–282.
- [14] S. M. Johnson, “A linear diophantine problem”, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 390–398.
- [15] Р. Л. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998, 703 с.; пер. с англ.: R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1994, xiv+657 pp.
- [16] В. А. Быковский, “Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l(q)$ ”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 4, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **112**, Наука, Л., 1981, 5–25; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “Asymptotic properties of integral points (a_1, a_2) , satisfying the congruence $a_1 a_2 \equiv l(q)$ ”, *J. Soviet Math.*, **25**:2 (1984), 975–988.
- [17] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 186–216; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the number of solutions of the congruence $xy \equiv l \pmod{q}$ under the graph of a twice continuously differentiable function”, *St. Petersburg Math. J.*, **20**:5 (2009), 813–836.
- [18] C. K. Wong, D. Coppersmith, “A combinatorial problem related to multimodule memory organizations”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **21**:3 (1974), 392–402.
- [19] V. I. Arnold, “Geometry of continued fractions associated with Frobenius numbers”, *Funct. Anal. Other Math.*, **2**:2-4 (2009), 129–138.

- [20] E.S. Selmer, “On the linear Diophantine problem of Frobenius”, *J. Reine Angew. Math.*, **1977**:293/294 (1977), 1–17.
- [21] И. С. Воробьев, “Экспериментальное исследование проблемы Фробениуса для трех аргументов”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 3–9.

Иван Станиславович Воробьев
(**Ivan S. Vorob'ov**)

Хабаровское отделение
Института прикладной математики
Дальневосточного отделения
Российской академии наук
E-mail: vorobeymc@mail.ru

Поступила в редакцию
31.03.2014 и 16.12.2015