Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, Некоторые свойства трехмерных полиэдров Клейна, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 4, 35–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 03:48:03

УДК 511.36+511.9

А. А. Илларионов

Некоторые свойства трехмерных полиэдров Клейна

Изучаются свойства трехмерных полиэдров Клейна. Основным результатом заключается в следующем. Пусть $\mathcal{L}_s(N)$ – множество целочисленных s -мерных решеток определителя N , а $f'(\Gamma, k)$ – количество таких ребер E многогранников Клейна решетки Γ , что $\#(\Gamma \cap E) = k + 1$ (целочисленная длина отрезка E равна k). Тогда для любого целого $k > 1$

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_s(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} f'(\Gamma, k) = C'_3(k) \cdot \ln^2 N + O_k(\ln N \cdot \ln \ln N), \quad N \rightarrow \infty,$$

где $C'_3(k)$ – положительная постоянная, зависящая только от k , причем

$$C'_3(k) = \frac{6}{\zeta(2)\zeta(3)} \cdot \frac{1}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: решетка, многогранник Клейна, многомерная непрерывная дробь.

DOI: 10.4213/sm8373

Введение

Общие сведения. Любое вещественное α единственным образом разлагается в непрерывную (цепную) дробь

$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, \dots] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n + \dots}}},$$

где $q_0 = [\alpha]$ (целая часть) и $q_n = q_n(\alpha) \in \mathbb{N}$ (неполные частные). Дробь конечна только для рационального $P/Q = [q_0; q_1, \dots, q_l]$, и в этом случае мы накладываем дополнительное условие $q_l \geq 2$. Дробь $P_n/Q_n = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ называется n -й подходящей для α . Следующая известная оценка

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1}Q_n^2} \quad (0.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-9002 Бел_а) и комплексной программы фундаментальных исследований ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 15-I-4-047).

указывает на важность классического вопроса о распределении неполных частных (частота встречаемости заданного натурального в качестве неполного частного) в теории диофантовых приближений.

Рассмотрим следующее геометрическое обобщение конструкции непрерывных дробей, предложенное Ф. Клейном [1]. Пусть Γ – s -мерная (полная) решетка, т.е.

$$\Gamma = \{k_1 a^{(1)} + \dots + k_s a^{(s)} : k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, s\},$$

где $a^{(i)}$, $i = 1, \dots, s$, – линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ).

Многогранниками (полиэдрами) Клейна решетки Γ будем называть множества вида $K_\theta(\Gamma)$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$, которые определяются, как выпуклая оболочка ненулевых узлов Γ , содержащихся в s -гранном угле

$$\{x \in \mathbb{R}^s : x_i \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, s\}.$$

Многогранники Клейна изучались многими математиками. Х. Цутихаси (см. [2]) установил соответствие между периодическими многогранниками Клейна и многомерными касповыми особенностями, которое обобщает известное ранее соответствие между периодическими непрерывными дробями и двумерными касповыми особенностями. Б. Ф. Скубенко (см. [3], [4]) обнаружил связь между минимумами произведений линейных форм и многогранниками Клейна. Исходно исследуя A -градуированные алгебры (см. [5]), В. И. Арнольд столкнулся с теорией многомерных непрерывных дробей. Начиная с 1989 г., он сформулировал множество задач о геометрических и статистических свойствах многогранников Клейна (см. [5]–[8]), возобновляя тем самым интерес к этим вопросам. Различные свойства полиэдров Клейна изучали Г. Лапо (см. [9], [10]), Е. И. Коркина (см. [11]–[13]), А. Д. Брюно и В. И. Парусников (см. [14]–[16]), Ж. О. Муссафир (см. [17]), О. Н. Герман (см. [18]–[22]), О. Н. Карпенков (см. [23]–[25]), А. В. Быковская (см. [26], [27]) и другие авторы. Более подробный обзор можно найти в монографии [28]. Однако, несмотря на значительный интерес, мало исследованными остаются поставленные Арнольдом задачи о статистических свойствах многогранников Клейна. В двумерном случае соответствующие результаты вытекают из теории непрерывных дробей. Для размерности три и выше известно немного. В известной работе М. Л. Концевича и Ю. М. Сухова [29] анонсированы некоторые результаты о существовании статистик для многогранников Клейна и предложена схема их доказательства. В диссертации [30] некоторые из этих статистик вычислены приближенно. В статье [31] сформулированы гипотезы о частоте появления многогранника заданного целочисленно-линейного типа в качестве грани полиэдра Клейна. В [32] получены двусторонние оценки для среднего количества вершин многогранников Клейна целочисленных s -мерных решеток определителя N . В работе автора [33] получены асимптотические формулы для средних значений количества граней фиксированного целочисленно-линейного типа и вершин полиэдров Клейна целочисленных трехмерных решеток определителя N .

Конструкция Клейна мотивирована следующими соображениями. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ определим решетку Γ_α , состоящую из узлов $\gamma = (Q, \alpha \cdot Q - P)$,

$Q, P \in \mathbb{Z}$. По классической теореме Лагранжа о наилучших приближениях множество вершин многоугольников Клейна решетки Γ_α состоит из узлов

$$\pm(0, 1), \quad \pm(Q_n, \alpha Q_n - P_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где P_n/Q_n – n -я подходящая дробь для α . Кроме того, пусть

$$a = (Q_{n-1}, \alpha Q_{n-1} - P_{n-1}) \quad \text{и} \quad \tilde{a} = (Q_{n+1}, \alpha Q_{n+1} - P_{n+1})$$

– две соседние вершины, т.е. отрезок $[a, \tilde{a}]$ является стороной многоугольника Клейна решетки Γ_α . Пусть далее $(a + b)$ – ближайший к a узел Γ_α , лежащий на $[a, \tilde{a}]$ (т.е. $[a, \tilde{a}] \cap \Gamma$ состоит из узлов вида $\gamma = a + mb$, $m \in \mathbb{Z}_+$). Тогда $b = (Q_n, \alpha Q_n - P_n)$, причем

$$q_{n+1}(\alpha) = \#(\Gamma \cap (a, \tilde{a}]), \quad (0.2)$$

т.е. “целочисленная” длина отрезка $[a, \tilde{a}]$ равна соответствующему неполному частному. Здесь и далее $\#X$ – количество элементов конечного множества X . Поэтому оценку (0.1) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$|b_1 \cdot b_2| < \frac{1}{k}, \quad k = \#(\Gamma \cap (a, \tilde{a}]).$$

Последнее неравенство нетрудно обобщить на случай произвольных двумерных решеток. А именно, для любого вектора $x \in \mathbb{R}^s$ с координатами x_i определим

$$\mathcal{N}(x) = \prod_{i=1}^s |x_i|.$$

Тогда если $[a, \tilde{a}]$ – сторона многоугольника Клейна некоторой двумерной решетки Γ , а $(a + b)$ – ближайший к a узел Γ , лежащий на $[a, \tilde{a}]$, то

$$\mathcal{N}(b) < \frac{\det \Gamma}{k}, \quad k = \#(\Gamma \cap (a, \tilde{a}]). \quad (0.3)$$

Ряд задач теории чисел (гипотезы Оппенгейма, Литтлвуда, оценки погрешности теоретико-числовых квадратурных формул [34] и отклонений сеток от равномерного распределения [35]) приводят к вопросу о распределении значений $\mathcal{N}(\gamma)$ узлов γ некоторых s -мерных решеток. При $s = 2$ он сводится к изучению распределения неполных частных непрерывных дробей. Судя по всему, роль неполных частных в конструкции Клейна играют так называемые детерминанты гиперграней (см. [19]). Однако вопрос о распределении целочисленных длин ребер трехмерных полиэдров Клейна также представляет интерес, например, ввиду следующего факта.

ЛЕММА 0.1. Пусть $[a, \tilde{a}]$ – одномерная грань (ребро) многогранника Клейна некоторой трехмерной решетки Γ , и пусть $(a + b)$ – ближайший к a узел Γ , лежащий на $[a, \tilde{a}]$. Положим $k = \#(\Gamma \cap (a, \tilde{a}])$. Если $k \geq 2$, то

$$\mathcal{N}(b) \leq 2 \frac{\det \Gamma}{k^2}.$$

Лемма будет доказана в § 3. Отметим, что при $k = 1$ величина $\mathcal{N}(b)/\det \Gamma$ может быть сколь угодно большой (см. замечание 3.4).

Основным результатом настоящей работы является асимптотическая формула для среднего числа ребер фиксированной целочисленной длины трехмерных многогранников Клейна. В идейном плане доказательство проводится по схеме из работы [33]: ребра параметризуются базисами решеток специального вида.

Формулировка основных результатов. Введем необходимые определения и обозначения. Одномерные грани полиэдров будем называть ребрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Если отрезок E является ребром полиэдра Клейна решетки Γ , то величину $(\#(\Gamma \cap E) - 1)$ будем называть *целочисленной длиной* E .

Пусть Γ – целочисленная решетка. Для любого натурального k определим $f'(\Gamma, k)$ как суммарное количество таких ребер E многогранников Клейна $K_\theta(\Gamma)$ решетки Γ , что целочисленная длина E равна k . Кроме того,

$$f(\Gamma, k) = \sum_{n \geq k} f'(\Gamma, n)$$

– количество одномерных граней с целочисленной длиной, не меньшей чем k .

Пусть $\mathcal{L}_s(N)$ – множество целочисленных s -мерных решеток Γ таких, что $\det \Gamma = N$. Это множество конечно (см., например, [37; § 3]).

Г. Хейльбронн [36] доказал следующую асимптотическую формулу для частоты появления заданного натурального k в качестве неполного частного:

$$\frac{1}{\#\Phi(Q)} \sum_{P \in \Phi(Q)} \# \left\{ n : q_n \left(\frac{P}{Q} \right) = k \right\} = \frac{2}{\zeta(2)} \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) \ln Q + O_k((\ln \ln Q)^4),$$

где $\Phi(Q)$ – множество целых $P \in [1, Q]$, которые взаимно просты с Q . Используя эту оценку и формулу (0.2), нетрудно вывести следующее соотношение для среднего числа сторон фиксированной целочисленной длины двумерных многоугольников Клейна:

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_2(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_2(N)} f'(\Gamma, k) \sim C'_2(k) \cdot \ln N, \quad N \rightarrow \infty,$$

где

$$C'_2(k) = \frac{4}{\zeta(2)} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) = \frac{4}{\zeta(2)k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Основной результат настоящей работы заключается в доказательстве следующего результата для трехмерных многогранников Клейна: *при любом $k \geq 2$ справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f(\Gamma, k) = C_3(k) \cdot \ln^2 N + O_k(\ln N \cdot \ln \ln N), \quad N \rightarrow \infty, \quad (0.4)$$

где $C_3(k)$ – положительная постоянная, зависящая только от k . Формула для $C_3(k)$ довольно громоздкая и приводится ниже (соотношение (4.3)). Однако существует такое натуральное k_0 , что для любого целого $k > k_0$

$$C_3(k) = \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{k^j},$$

где α_j – абсолютные постоянные, причем

$$\alpha_0 = \frac{3}{\zeta(2) \cdot \zeta(3)}.$$

Отсюда, в частности, вытекает следующая асимптотическая формула для среднего количества ребер заданной целочисленной длины $k \geq 2$:

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f'(\Gamma, k) = C'_3(k) \cdot \ln^2 N + O_k(\ln N \cdot \ln \ln N),$$

$$C'_3(k) = C_3(k) - C_3(k+1) = \frac{6}{\zeta(2)\zeta(3)} \cdot \frac{1}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Интересным является вопрос о среднем числе всех ребер, так как соответствующая формула вместе с результатами [33] и формулой Эйлера привели бы к асимптотической формуле для типичного f -вектора (число вершин, ребер и граней) трехмерных полиэдров Клейна. Однако решение этой задачи требует дополнительных громоздких вычислений (см. замечание 4.1), и в этой работе рассматриваться не будет.

Статья организована следующим образом. В § 1 формулируется результат из работы [37] о количестве целочисленных матриц фиксированного определителя, лежащих в заданном множестве. В § 2 рассматриваются некоторые свойства ребер трехмерных многогранников Клейна. Эти свойства применяются в § 3 для построения и изучения отображения, которое каждому ребру ставит в соответствие некоторый базис решетки (параметризация ребер матрицами). В результате вычисление $\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f(\Gamma, k)$ сводится к нахождению количества соответствующих базисов, т.е. к вычислению количества целочисленных матриц фиксированного определителя, лежащих в заданном множестве. Этот вопрос рассматривается в § 4, который завершает доказательство (0.1).

§ 1. О количестве целочисленных матриц в заданной области

Конусом в $\mathbb{R}^s$ будем называть множество $V \subset \mathbb{R}^s$, удовлетворяющее условию: $\lambda x \in V$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $x \in V$. Гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^s$ называем кусочно-дифференцируемой, если она состоит из фиксированного числа гиперповерхностей класса C^1 . Элемент матрицы X , лежащий в i -й строке и j -м столбце, обозначаем через x_{ij} .

Пусть множество $\Omega \subset \text{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

- (А) $\Omega = \{X : (x_{i1}, \dots, x_{is}) \in V_i, i = 1, \dots, s\}$, где $V_1, \dots, V_s$ – конусы из $\mathbb{R}^s$ с кусочно-дифференцируемыми границами;

(Б) существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $X \in \Omega$

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |x_{ij}| \leq C \cdot \det X.$$

Из условия (А) следует, что множество Ω инвариантно относительно левого действия группы $D_s(\mathbb{R}_+)$, состоящей из диагональных матриц размера $s \times s$ с положительными вещественными числами на главной диагонали.

Рассмотрим $s(s-1)$ -мерное многообразие $P_s(\mathbb{R}) = D_s(\mathbb{R}_+) \setminus GL_s(\mathbb{R})$ – проективизацию группы $GL_s(\mathbb{R})$ относительно левого действия группы $D_s(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\mathcal{P}(\Omega)$ – образ множества $\Omega \subset GL_s(\mathbb{R})$ при проективизации $GL_s(\mathbb{R}) \rightarrow P_s(\mathbb{R})$. Для любых наборов $k = (k_1, \dots, k_s)$, $k_i \in \{1, \dots, s\}$, и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$, определим

$$GL_s(\mathbb{R}, k, \theta) = \{X \in GL_s(\mathbb{R}) : x_{ik_i} = \theta_i, i = 1, \dots, s\},$$

$$P_s(\mathbb{R}, k, \theta) = \mathcal{P}(GL_s(\mathbb{R}, k, \theta)).$$

Тогда $P_s(\mathbb{R})$ содержится в объединении всех $P_s(\mathbb{R}, k, \theta)$, причем каждый элемент из $P_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ имеет единственный прообраз при проективизации

$$GL_s(\mathbb{R}, k, \theta) \rightarrow P_s(\mathbb{R}, k, \theta).$$

Значит, множество всех $P_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ образуют атлас многообразия $P_s(\mathbb{R})$, а матрицы из $GL_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ являются координатами соответствующих элементов $P_s(\mathbb{R}, k, \theta)$.

Определим меру $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_{k, \theta}$ на поверхности $GL_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}(W) = \int_W \frac{dX}{|\det X|^s} \quad \text{при } W \subset GL_s(\mathbb{R}, k, \theta),$$

где dX – дифференциал $s(s-1)$ -мерной меры Лебега поверхности $GL_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ в точке X (т.е. $dX = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq s, \\ j \neq k_i}} dx_{ij}$). Она естественным образом порождает меру μ на карте $P_s(\mathbb{R}, k, \theta)$:

$$\mu(w) = \tilde{\mu}(W),$$

где W – прообраз $w \subset P_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ при проективизации $GL_s(\mathbb{R}, k, \theta) \rightarrow P_s(\mathbb{R})$. Нетрудно проверить (см. [38]), что мера μ не зависит от выбора карты и поэтому корректно определена на всем многообразии $P_s(\mathbb{R})$. Если Ω измеримо по Лебегу и удовлетворяет условию (Б), то множество $\mathcal{P}(\Omega)$ является μ -измеримым.

Для любого натурального N определим

$$\chi(N) = 1 + \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p},$$

где p – простые делители N . Стандартным образом доказывается, что

$$\forall N > 2 \quad \chi(N) \ll \ln \omega(N) \ll \ln \ln N,$$

где $\omega(N)$ – количество простых делителей N .

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [37]). Пусть множество $\Omega \subset \text{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (А), (Б). Тогда для любого целого $N > 1$ количество целочисленных матриц $M \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\det M = N$, равно

$$\#\mathcal{L}_s(N) \cdot \left(\frac{\nu(\Omega)}{\zeta(2) \cdot \zeta(3) \cdots \zeta(s)} \cdot \frac{\ln^{s-1} N}{(s-1)!} + O_\Omega(\chi(N) \cdot \ln^{s-2} N) \right), \quad (1.1)$$

где $\nu(\Omega) = \mu(\mathcal{P}(\Omega))$.

§ 2. Некоторые свойства трехмерных полиэдров Клейна

Всюду в этом параграфе считаем, что Γ – трехмерная решетка, Γ_+ – множество ненулевых узлов Γ с неотрицательными координатами, а

$$K(\Gamma) = \text{Conv } \Gamma_+$$

– полиэдр Клейна решетки Γ , лежащий в угле $[0, +\infty)^3$. Здесь и далее Conv – выпуклая оболочка.

Элементарные и известные свойства. Следующие свойства вытекают из определений.

1. Любая вершина $K(\Gamma)$ не может принадлежать интервалу с концами в точках из Γ_+ . В частности, если a – вершина $K(\Gamma)$, то

$$\forall u \in \Gamma_+ \quad (2a - u) \notin \Gamma_+. \quad (2.1)$$

Условие (2.1) эквивалентно следующему:

$$\forall w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a\} \quad \exists k \in \{1, 2, 3\} : \quad |w_k| > a_k.$$

Отметим, что из (2.1) не вытекает, что a – вершина (см. лемму 2.1).

2. Если $x, y \in \Gamma$, причем отрезок $[x, y]$ лежит на некотором ребре $K(\Gamma)$, то не существует $u, v \in \Gamma_+$ таких, что x, y, u, v лежат в одной плоскости, причем u, v находятся по разные стороны от прямой l_{xy} , проходящей через x, y .

(Мы говорим, что u, v находятся по разные стороны от прямой l , если u, v, l лежат в одной плоскости, причем $u, v \notin l$ и $(u, v) \cap l \neq \emptyset$.)

3. Любую точку x , лежащую внутри $K(\Gamma)$, можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i u^{(i)}, \quad (2.2)$$

где $\lambda_i \in [0, +\infty)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 1$, а $u^{(i)}$ – линейно независимые узлы Γ , лежащие на некоторой грани полиэдра $K(\Gamma)$.

4. Если $u^{(i)}$ – линейно независимые узлы Γ , лежащие на некоторой грани полиэдра $K(\Gamma)$, то не существует узла $x \in \Gamma_+$ вида (2.2), где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 1$.

5. Если $x \in \partial K(\Gamma)$ ($\partial K(\Gamma)$ – граница $K(\Gamma)$), то

$$\forall u \in \Gamma_+ \quad (x - u) \notin \Gamma_+.$$

Следующее свойство является нетривиальным.

ЛЕММА 2.1. Пусть узел $a \in \Gamma_+$ удовлетворяет условию (2.1) и не является вершиной многогранника Клейна $K(\Gamma)$. Тогда существуют такие $u, v \in \Gamma_+$, $n \in \mathbb{N}$, что $a \in F$, где F – треугольная грань $K(\Gamma)$ с вершинами в точках

$$u, \quad v, \quad w = (2n + 1)a - nu - nv,$$

причем

$$F \cap \Gamma = \{u, v, (2k + 1)a - ku - kv\}_{k=0}^n, \quad (2.3)$$

т.е. F из узлов Γ содержит только свои вершины и точки, принадлежащие отрезку $[a, w]$, который лежит на медиане, выходящей из w (см. рис. 1).

Лемма доказана в [20; теорема 2]. Для полноты изложения ниже приводится упрощенный вариант доказательства.

Рис. 1. $\bullet$ — точки $u^{(i)}$; $\circ$ — точки $y^{(i)}$; $\times$ — точки $z^{(i)}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Предположим сначала, что a лежит внутри многогранника $K(\Gamma)$. Тогда a можно представить в виде

$$a = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)}, \quad (2.4)$$

где $\lambda_i \in [0, +\infty)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 1$, а $u^{(i)}$ — линейно независимые узлы Γ , лежащие на некоторой грани F многогранника $K(\Gamma)$. Если, например, $\lambda_1 \geq 1/2$, то

$$2a - u^{(1)} = (2\lambda_1 - 1)u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)} \in \Gamma_+,$$

что противоречит условию (2.1). Поэтому $\lambda_i < 1/2$, $i = 1, 2, 3$. Но тогда

$$u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} - 2a = \sum_{i=1}^3 (1 - 2\lambda_i)u^{(i)} \in \Gamma_+, \quad \sum_{i=1}^3 (1 - 2\lambda_i) = 3 - 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i < 1.$$

Это противоречит тому, что $u^{(i)}$ лежат на грани F .

Таким образом, точка a лежит на некоторой грани F . Кроме того, она не может лежать на ∂F , так как иначе приходим к противоречию с (2.1). Значит, a можно представить в виде (2.4), где $\lambda_i \in (0, +\infty)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, а $u^{(i)}$ линейно независимые узлы Γ , лежащие на F . Очевидно, что $u^{(i)}$ всегда можно выбрать так, что треугольник $\text{Conv}\{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\}$ из точек Γ содержит только свои вершины и узел a . В этом случае

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3} \implies 3a = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}.$$

Согласно (2.1) точки

$$z^{(i)} = (2a - u^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3,$$

не принадлежат Γ_+ , и поэтому $z^{(i)} \notin F$ (см. рис. 1). Кроме того, из трех точек

$$y^{(i)} = 2u^{(i)} - a, \quad i = 1, 2, 3,$$

только одна может принадлежать Γ_+ . Действительно, рассмотрим, например, $y^{(1)}, y^{(2)} \in \Gamma_+$, тогда $z^{(3)} = 2a - u^{(3)} = (y^{(1)} + y^{(2)})/2 \in \Gamma_+$.

Пусть, например, $y^{(2)}, y^{(3)} \notin \Gamma_+$. Докажем, что тогда выполняется условие (2.3), где $u = u^{(2)}$, $v = u^{(3)}$, а n – такое наибольшее натуральное, что

$$w = (2n + 1)a - nu^{(2)} - nu^{(3)} \in \Gamma_+.$$

Действительно, предположим, что (2.3) не выполняется, т.е. существует точка $y \in F \cap \Gamma$, не принадлежащая множеству в правой части (2.3). Рассмотрим следующую выпуклую оболочку:

$$\tilde{F} = \text{Conv}\{y, u, v, w\}.$$

Нетрудно заметить, что $\tilde{F}$ содержит хотя бы одну из следующих точек:

$$z^{(1)}, \quad z^{(2)}, \quad z^{(3)}, \quad y^{(2)}, \quad y^{(3)}, \quad w_{n+1} = (2n + 3)a - (n + 1)(u^{(2)} + u^{(3)}).$$

Однако ни одна из них не принадлежит $[0, +\infty)^3$. Так как $\tilde{F} \subset [0, +\infty)^3$, то пришли к противоречию. Значит, условие (2.4) выполнено.

Новые свойства. Возьмем любое компактное ребро $E = [x, \tilde{x}]$ полиэдра Клейна $K(\Gamma)$. Тогда хотя бы одна координата вектора $(\tilde{x} - x)$ отрицательная и хотя бы одна положительная. Не умаляя общности, можно считать, что оставшаяся координата не положительная (в противном случае меняем местами x и $\tilde{x}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть x – вершина компактного ребра E полиэдра $K(\Gamma)$, а y – ближайший к x узел Γ , лежащий на ребре E , т.е. $y \in \Gamma \cap E$ и $(y - x)$ – примитивный узел Γ . Если вектор $(y - x)$ имеет ровно одну положительную координату, то узел x называем *началом*, а $(y - x)$ – *направляющим вектором* ребра E .

Таким образом, у направляющего вектора одна координата положительная, одна отрицательная, а оставшаяся – неположительная. Любое ребро имеет одно начало и один направляющий вектор.

Возьмем любое компактное ребро полиэдра Клейна $K(\Gamma)$. Пусть x является его началом, $(y - x)$ – направляющим вектором. Тогда

$$\forall u \in \Gamma_+ \setminus \{x, y\} \quad (x + y - u) \notin \Gamma_+, \quad (2.5)$$

$$\forall u \in \Gamma_+ \quad (3x - y - u) \notin \Gamma_+, \quad (2.6)$$

$$\forall u \in \Gamma_+ \setminus \{x\} \quad (2x - u) \notin \Gamma_+. \quad (2.7)$$

Соотношения (2.5), (2.6) следуют из свойства 2, а (2.7) – из 1. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $x, y \in \Gamma_+$, причем точка $(y - x)$ является примитивным узлом Γ и имеет ровно одну положительную координату. Тогда если выполняются условия (2.5)–(2.7), то x является началом, $(y - x)$ – направляющим вектором некоторого ребра полиэдра Клейна $K(\Gamma)$.

Доказательство этой теоремы является основной целью настоящего параграфа. Мы начнем со следующего результата.

ЛЕММА 2.2. Пусть $x, y \in \Gamma_+$, причем $x \in \partial K(\Gamma)$, а вектор $(y - x)$ имеет ровно одну положительную координату. Тогда если выполняется условие (2.5), то отрезок $[x, y]$ лежит на некоторой грани полиэдра $K(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Это означает, что интервал (x, y) лежит внутри $K(\Gamma)$. В частности, точка $(x + y)/2$ лежит внутри $K(\Gamma)$ и, значит, ее можно представить в виде (см. свойство 3)

$$\frac{x + y}{2} = \lambda'_1 u^{(1)} + \lambda'_2 u^{(2)} + \lambda'_3 u^{(3)},$$

где $\lambda'_i \geq 0$, $\lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 > 1$, а $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ – линейно независимые узлы Γ , лежащие на некоторой грани полиэдра $K(\Gamma)$. Поэтому

$$x + y = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)},$$

где

$$\lambda_i = 2\lambda'_i \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 2.$$

Далее числа λ_i будем называть коэффициентами.

Два коэффициента не могут быть равными нулю. Действительно, если, например, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то $(a - u^{(1)}) = (\lambda_1 - 1)u^{(1)} \in \Gamma_+$, что противоречит условию $a \in \partial K(\Gamma)$.

Отметим далее следующий факт. Если некоторый $\lambda_k \geq 1$, то

$$x + y - u^{(k)} = \sum_{i \neq k} \lambda_i u^{(i)} + (\lambda_k - 1)u^{(k)} \in \Gamma_+.$$

Согласно (2.5) это возможно только при $u^{(k)} = x$ или $u^{(k)} = y$, т.е.

$$\lambda_k \geq 1 \implies u^{(k)} \in \{x, y\}. \quad (2.8)$$

Предположим, что $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$. Тогда согласно (2.8) $u^{(1)} = x$, $u^{(2)} = y$ либо $u^{(1)} = y$, $u^{(2)} = x$ и в силу линейной независимости $u^{(i)}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Получили противоречие с условием $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 2$. Значит, только один коэффициент может быть не меньше 1. Рассмотрим узел

$$u = \sum_{i=1}^3 u^{(i)} - (x + y) = \sum_{i=1}^3 (1 - \lambda_i)u^{(i)}.$$

Так как $\sum_{i=1}^3 (1 - \lambda_i) = 3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i < 1$, то $u \notin \Gamma_+$. Поэтому ровно один коэффициент больше 1, а оставшиеся меньше 1. Пусть, например,

$$\lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 < 1, \quad \lambda_3 < 1.$$

Тогда согласно (2.8) $u^{(1)} = x$ либо $u^{(1)} = y$. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $u^{(1)} = y$. Тогда

$$x = \lambda u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)},$$

где $\lambda = \lambda_1 - 1 > 0$. Так как $\lambda + \lambda_2 + \lambda_3 > 1$, то точка x лежит внутри $K(\Gamma)$. Получили противоречие с условием $x \in \partial K(\Gamma)$.

2. Пусть $u^{(1)} = x$. Тогда

$$y = \lambda x + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)}, \quad (2.9)$$

где

$$\lambda = \lambda_1 - 1 > 0, \quad \lambda + \lambda_2 + \lambda_3 > 1.$$

Ввиду (2.5) выполняется $(y - x) \notin [0, +\infty)^3$. Значит, $\lambda < 1$. Кроме того, $u^{(i)} \notin \{x, y\}$, $i = 2, 3$.

Далее, для определенности, считаем, что

$$y_1 \leq x_1, \quad y_3 \leq x_3. \quad (2.10)$$

Узел

$$x + u^{(2)} - y = (1 - \lambda)x + (1 - \lambda_2)u^{(2)} - \lambda_3 u^{(3)}$$

не может принадлежать Γ_+ , так как x , $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ лежат на одной грани, причем

$$(1 - \lambda) + (1 - \lambda_2) - \lambda_3 < 1.$$

Согласно (2.10) выполняется $(x + u^{(2)} - y)_i \geq 0$, $i = 1, 3$. Поэтому

$$x_2 + u_2^{(2)} < y_2. \quad (2.11)$$

Ввиду (2.11), (2.9) выполняется $x_2 + u_2^{(2)} < \lambda x_2 + \lambda_2 u_2^{(2)} + \lambda_3 u_2^{(3)}$, а поскольку $\lambda < 1$, то

$$(1 - \lambda_2)u_2^{(2)} < \lambda_3 u_2^{(3)}.$$

Аналогичным образом, рассматривая узел $(x + u^{(3)} - y)$, получаем

$$(1 - \lambda_3)u_2^{(3)} < \lambda_2 u_2^{(2)}.$$

Следовательно, $(1 - \lambda_2) \cdot (1 - \lambda_3) < \lambda_2 \cdot \lambda_3$, т.е. $1 < \lambda_2 + \lambda_3$. Значит, $\lambda_2 > 1/2$ либо $\lambda_3 > 1/2$. Пусть, например, $\lambda_2 > 1/2$. Рассмотрим $v = x + y - u^{(2)}$. Согласно (2.11) выполняется $v_2 > 2x_2 \geq 0$, а в силу (2.10), (2.9)

$$v_i = x_i + y_i - u_i^{(2)} \geq 2y_i - u_i^{(2)} \geq (2\lambda_2 - 1)u_i^{(2)} \geq 0, \quad i = 1, 3.$$

Таким образом, $(x + y - u^{(2)}) \in \Gamma_+$, что противоречит (2.5). Лемма доказана.

Согласно лемме 2.1 условие (2.7) влечет $x \in \partial K(\Gamma)$. Поэтому из леммы 2.2 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $x, y \in \Gamma_+$, причем вектор $(y - x)$ имеет ровно одну положительную координату. Тогда если выполняются условия (2.5), (2.7), то отрезок $[x, y]$ лежит на некоторой грани многогранника $K(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Достаточно показать, что отрезок $[x, y]$ лежит на некотором ребре многогранника Клейна $K(\Gamma)$, так как в этом случае x является вершиной $K(\Gamma)$ согласно условию (2.1).

1. Предположим противное. Тогда согласно следствию 2.1 интервал (x, y) лежит внутри некоторой грани многогранника $K(\Gamma)$. Поэтому найдутся такие узлы $u, v \in \Gamma_+$, что

$$\begin{aligned} x, y, u, v \text{ находятся в одной плоскости } \pi, \text{ причем } u, v \text{ лежат} \\ \text{по разные стороны от прямой } l_{xy}, \text{ проходящей через } x, y. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Более того, u и v всегда можно выбрать так, что

$$\text{треугольники } \text{Conv}\{x, y, u\}, \text{Conv}\{x, y, v\} \text{ примитивны.} \quad (2.13)$$

Треугольник с вершинами в узлах решетки Γ мы называем *примитивным*, если он не содержит точек решетки, кроме своих вершин.

2. Докажем, что для любой пары $u, v \in \Gamma_+$, удовлетворяющей (2.12), (2.13), найдется такое $n \in \mathbb{Z}_+$, что (см. рис. 2)

$$\frac{u + v}{2} = y + \frac{n}{2}(y - x). \quad (2.14)$$

Действительно, согласно (2.12) существуют такие $t \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$tu + (1 - t)v = y + \lambda(y - x),$$

Тогда

$$t(u - y) + (1 - t)(v - y) + \lambda(x - y) = 0$$

и, используя (2.13), получаем, что числа $(1-t)/t$, λ/t , $t/(1-t)$ целые. Значит, $t = 1/2$, $\lambda = \pm n/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е.

$$\frac{u+v}{2} = y + \lambda(y-x), \quad \lambda = \pm \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Предположим, что $\lambda = -n/2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $u+v = 2y+n(x-y)$. Следовательно, если $n = 1$, то $x+y-u = v \in \Gamma_+$ – противоречие с (2.5); если $n = 2$, то $(2x-u) = v \in \Gamma_+$ – противоречие с (2.7); если $n = 3$, то $(3x-y-u) = v \in \Gamma_+$ – противоречие с (2.6); если $n \geq 4$, то $x = (u+v)/n + (1-2/n)y$ и

$$2x-y = \frac{2}{n} \cdot (u+v) + \left(1 - \frac{4}{n}\right) \cdot y \in \Gamma_+$$

– противоречие с (2.7). Случай $\lambda = -n/2$ невозможен.

Поэтому $\lambda = n/2$. Соотношение (2.14) доказано.

3. Возьмем такую пару $\{u, v\}$, удовлетворяющую (2.12), (2.13), что целое n в формуле (2.14) является наименьшим среди всех возможных. Прямая l_{uv} , проходящая через u , v , делит π на две замкнутые полуплоскости. Согласно (2.14) одна из этих полуплоскостей содержит x и y . Обозначим ее через π^+ (см. рис. 2).

Рис. 2

Докажем, что полуплоскость π^+ из узлов Γ_+ содержит только u , v и некоторые точки, лежащие на прямой l_{xy} , т.е.

$$\Gamma_+ \cap \pi^+ \subset \{u, v\} \cup l_{xy}. \quad (2.15)$$

Действительно, пусть существует узел $\hat{v} \in \Gamma_+ \cap \pi^+$, $\hat{v} \notin \{u, v\} \cup l_{xy}$. Очевидно, что $\hat{v}$ всегда можно выбрать так, что треугольник $\text{Conv}\{\hat{v}, x, y\}$ примитивный. Пусть, например, $\hat{v}$ и u лежат по разные стороны от прямой l_{xy} . Тогда

$$\frac{u + \hat{v}}{2} = y + \frac{\hat{n}}{2}(x - y),$$

причем $\hat{n} < n$, что противоречит выбору $\{u, v\}$. Значит, имеет место (2.15).

4. Рассмотрим точки $\beta = u + (x - y)$ и $\gamma = v + (x - y)$. Ввиду (2.15) $\beta, \gamma \notin \Gamma_+$. По условиям леммы вектор $(x - y)$ имеет только одну отрицательную координату. Пусть ее номер равен k . Поскольку $u, v \in \Gamma_+$, то $\beta_k, \gamma_k < 0$. Но тогда $\alpha = (\beta + \gamma)/2 \notin [0, +\infty)^3$. Однако $\alpha \in [(u + v)/2, x] \subset [0, +\infty)^3$. Получили противоречие. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть $x, y \in \Gamma_+$. Если вектор $(y - x)$ имеет две положительные координаты, то из условий (2.5)–(2.7) не вытекает, что $[x, y]$ лежит на ребре полиэдра $K(\Gamma)$. Пример: x – вершина треугольной грани (грань F из леммы 2.1), которая из узлов Γ содержит только свои вершины и точки, лежащие на медиане, выходящей из x , а y – ближайшая к x точка Γ , находящаяся на этой медиане.

Для облегчения проверки условий (2.5) и (2.6) будем использовать следующие результаты.

ЛЕММА 2.3. Пусть $x, y \in \Gamma_+$, $z \in \Gamma$, причем $\{x, y, z\}$ – базис Γ . Тогда если условие (2.5) не выполняется, то найдется узел вида

$$u = nx + m(y - x) + kz, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

такой, что $u \in \Gamma_+ \setminus \{x, y\}$, $(x + y - u) \in \Gamma_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как условие (2.5) не выполняется, то существует такой $u \in \Gamma_+$, что $v = (x + y - u) \in \Gamma_+$. Так как $(x + y - v) = u$, то либо u , либо v удовлетворяют требуемым условиям. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть $x, y \in \Gamma_+$, $z \in \Gamma$, причем $\{x, y, z\}$ – базис Γ , а вектор $(y - x)$ имеет ровно одну положительную координату. Пусть выполняются условия (2.5), (2.7). Предположим, что условие (2.6) не выполняется. Тогда найдется узел u следующего вида:

$$u = kx + m(y - x) + z \quad \text{либо} \quad u = 3kx + (3m + 1)(y - x) \pm 3z, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

такой, что $u \in \Gamma_+$, $(3x - y - u) \in \Gamma_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку (2.6) не выполняется, то x не является вершиной многогранника $K(\Gamma)$. В силу (2.7) $x \in F$, где F – грань из леммы 2.1, т.е. F – треугольник с вершинами в точках u' , v' и $w = (2n + 1)x - nu' - nv'$, $n \in \mathbb{N}$, причем $F \cap \Gamma \subset \{u', v', [x, w]\}$. Положим $w' = 3x - u' - v'$. Согласно следствию 2.1 $[x, y] \subset F$ и поэтому y совпадает с одной из точек u' , v' , w' . Две оставшиеся обозначим через u и v . Тогда

$$u, v \in \Gamma_+, \quad v = 3x - y - u.$$

Осталось доказать, что либо u , либо v имеет вид (2.16).

Треугольники $\text{Conv}\{x, y, u\}$, $\text{Conv}\{x, y, v\}$ являются примитивными. Пусть d – индекс подрешетки, порожденной $\{x, y, u\}$.

Если $d = 1$, то $\{x, y, u\}$ – базис Γ и поэтому

$$u = k'x + my \pm z, \quad k', m \in \mathbb{Z}.$$

Значит, либо u , либо v определяется формулой первого типа из (2.16).

Пусть $d > 1$. Тогда согласно [24; теорема В] $d = 3$ и $n = 1$ (т.е. $F \cap \Gamma = \{u, v, y, x\}$ и u, v, y – вершины F), причем существует такой базис решетки Γ , что координаты вершин F в этом базисе имеют вид

$$(1, 1, 3), \quad (0, 2, 3), \quad (2, 3, 3).$$

Значит, либо $(x - y + u)/3 \in \Gamma$, либо $(x - y + v)/3 \in \Gamma$. Пусть, например, $(x - y + u)/3 \in \Gamma$. Тогда $\{x, y, (x - y + u)/3\}$ – базис Γ . Следовательно,

$$\frac{x - y + u}{3} = k'x + my \pm z \implies u = (3k' - 1)x + (3m + 1)y \pm 3z.$$

Точка u определяется формулой второго типа из (2.16). Лемма доказана.

§ 3. Параметризация ребер

Пусть Γ – трехмерная решетка. Будем рассматривать ребра полиэдров Клейна $K(\Gamma)$, не лежащие на координатных плоскостях. Возьмем любое такое ребро с началом в точке a и направляющим вектором b . Не умаляя общности, будем считать, что 2-я координата b положительная. Тогда

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3), & b &= (-b_1, b_2, -b_3), \\ 0 < a_j, & \quad 0 \leq b_j \leq a_j, & \quad j = 1, 3, & \quad 0 \leq a_2 < b_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношения (2.5)–(2.7) принимают вид

$$\forall u \in \Gamma_+ \setminus \{a, a + b\} \quad (2a + b - u) \notin \Gamma_+, \quad (3.2)$$

$$\forall u \in \Gamma_+ \quad (2a - b - u) \notin \Gamma_+, \quad (3.3)$$

$$\forall u \in \Gamma_+ \setminus \{a\} \quad (2a - u) \notin \Gamma_+.$$

Последнее условие эквивалентно следующему:

$$\forall w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a\} \quad \exists k : |w_k| > a_k. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть Γ – трехмерная решетка, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Gamma_+$, $b = (-b_1, b_2, \pm b_3) \in \Gamma$, причем

$$0 \leq b_1 \leq a_1 \neq 0, \quad 0 < b_2.$$

Предположим, что треугольник $\text{Conv}\{0, a, b\}$ является примитивным. Тогда существует узел $c = (c_1, c_2, c_3) \in \Gamma$ такой, что $\{a, b, c\}$ – базис Γ , причем $|c_1| \leq a_1$, $|c_2| < b_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как треугольник $\text{Conv}\{0, a, b\}$ примитивный, то a, b можно дополнить до базиса некоторым узлом c . Далее, c всегда можно выбрать так, что $|c_1| \leq a_1$, $0 \leq c_2$. Пусть вторая координата c неотрицательная и наименьшая среди всех возможных, т.е. $0 \leq c_2 \leq |c'_2|$ для любого c' , удовлетворяющего условиям: $\{a, b, c'\}$ – базис Γ , $|c'_1| \leq a_1$. Предположим, что $c_2 \geq b_2$. Тогда, рассматривая узлы

$$(c - b) \quad \text{при } c_1 \leq 0, \quad (c - a) \quad \text{при } c_1 > 0,$$

получаем противоречие с выбором c . Значит, $c_2 < b_2$. Лемма доказана.

Ниже везде a_i, b_i, c_i – неотрицательные вещественные, $i = 1, 2, 3$, причем

$$\begin{aligned} 0 < a_1 = \max\{a_1, b_1, c_1\}, \quad 0 < c_1, \\ a_2 < b_2, \quad c_2 \leq b_2, \quad b_3 \leq a_3 \neq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Определим следующие матричные множества:

$$\begin{aligned} \Omega_I &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{если } a_2 \leq c_2, \text{ то } b_1 < c_1, \ a_3 < b_3 + c_3, \\ \text{если } a_2 \geq c_2, \text{ то } a_3 < c_3 \end{array} \right\}, \\ \tilde{\Omega}_{II} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a_1 < b_1 + c_1, \\ \text{если } a_2 \geq c_2, \text{ то выполняется (3.6),} \\ \text{если } a_2 \leq c_2, \text{ то выполняется (3.7)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$a_3 + b_3 < c_3 \quad \text{либо} \quad a_2 + c_2 < b_2, \quad a_3 < c_3; \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} a_1 < \frac{b_1}{3} + c_1 \quad \text{либо} \quad c_2 < \frac{a_2}{3} + \frac{2b_2}{3}, \\ \text{либо} \quad a_2 + \frac{b_2}{3} < c_2, \quad \text{либо} \quad b_3 < \frac{a_3}{2} + \frac{3c_3}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть в дополнение к (3.1), (3.5) верно $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, причем $a_1 < b_1 + c_1$. Положим $u = (3a + b + 3c)$. Тогда условие (3.7) эквивалентно тому, что либо $u \notin [0, +\infty)^3 \setminus \{0\}$, либо $(2a - b - u) \notin [0, +\infty)^3 \setminus \{0\}$.

Определим множество Ω_{II} , состоящее из таких матриц $M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}_{II}$, что

$$\begin{aligned} &\text{для любых } n, k \in \mathbb{N}, \text{ удовлетворяющих условию } n < k, \\ &\text{существует такой } j \in \{1, 2, 3\}, \text{ что } |(n(a + b) + kc)_j| > a_j. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (-b_1, b_2, -b_3)$, $c = (-c_1, -c_2, c_3)$ – столбцы матрицы $M(a, b, c)$. Условие (3.8) означает, что для любых $k, n \in \mathbb{N}$, $n < k$, выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$nb_1 + kc_1 > (n + 1)a_1, \quad |n(a_2 + b_2) - kc_2| > a_2, \quad (n - 1)a_3 + kc_3 > nb_3.$$

ЛЕММА 3.2. Пусть Γ – трехмерная решетка, узел a является началом, $b = (-b_1, b_2, -b_3)$ – направляющий вектор некоторого ребра E многогранника Клейна $K(\Gamma)$, причем E не лежит на координатных плоскостях. Определим множество $C(a, b)$, состоящее из таких $c = (\pm c_1, \pm c_2, \pm c_3) \in \Gamma$, что

$$|c_1| \leq a_1, \quad |c_2| \leq b_2, \quad \{a, b, c\} \text{ – базис } \Gamma.$$

Тогда существует $c = (\pm c_1, \pm c_2, c_3)$, удовлетворяющий условиям

$$c \in C(a, b), \quad 0 \leq c_3 = \min_{\tilde{c} \in C(a, b)} |\tilde{c}_3|, \quad (3.9)$$

причем

$$M(a, b, c) \in \Omega_I \cup \Omega_{II}, \quad (3.10)$$

где $M(a, b, c)$ – матрица со столбцами a, b, c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как a – начало, b – направляющий вектор некоторого ребра, то выполняются условия (3.2)–(3.4).

Согласно лемме 3.1 множество $C(a, b)$ непусто. Значит, существует (хотя бы один) узел c , удовлетворяющий (3.9). Докажем, что c всегда можно выбрать так, чтобы

$$c = (-c_1, \pm c_2, c_3), \quad c_1 > 0.$$

Действительно, возьмем любой c , удовлетворяющий (3.9). Предположим, что $c = (c_1, \pm c_2, c_3)$, $c_1 \geq 0$. Отдельно рассмотрим два варианта.

1. Пусть $c = (c_1, c_2, c_3)$. Согласно (3.2)

$$(2a + b - c) \notin \Gamma_+ \implies c_3 > a_3.$$

Но тогда узел $\tilde{c} = (c - a) \in C(a, b)$ и $|\tilde{c}_3| < c_3$. Получили противоречие с (3.9).

2. Пусть $c = (c_1, -c_2, c_3)$. Так как $u = (a + b + c) \in \Gamma_+$, то ввиду (3.2) $(2a + b - u) = (a - c) \notin \Gamma_+$, т.е. $c_3 > a_3$. Рассмотрим $\hat{c} = c + b$. Поскольку $\hat{c} \in C(a, b)$, то согласно (3.9) $\hat{c}_3 \geq c_3$. Это возможно только при $b_3 = 0$. Если $c_1 < b_1$, то узел $\hat{c}$ удовлетворяет требуемым условиям. Если $c_1 \geq b_1$, то $\hat{c} \in \Gamma_+$ и приходим к предыдущему случаю (в котором заменяем c на $\hat{c}$).

Таким образом, существует $c = (-c_1, \pm c_2, c_3)$, удовлетворяющий (3.9). Далее также отдельно рассмотрим два варианта.

1. Пусть $c = (-c_1, c_2, c_3)$, причем не существует $c = (-c_1, -c_2, c_3)$, удовлетворяющего (3.9). Если $a_2 \geq c_2$, то согласно (3.4) $c_3 > a_3$ и $M(a, b, c) \in \Omega_I$. Пусть

$$a_2 \leq c_2.$$

Так как $(a + c) \in \Gamma_+$, то ввиду (3.2)

$$2a + b - (a + c) = (a + b - c) \notin \Gamma_+ \implies a_3 < b_3 + c_3.$$

Если $b_1 < c_1$, то $M(a, b, c) \in \Omega_I$. Предположим, что

$$b_1 \geq c_1.$$

Рассмотрим узел $\tilde{c} = -a - b + c$. Имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{c}_1| &= a_1 - b_1 + c_1 \leq a_1, & |\tilde{c}_2| &= a_2 + b_2 - c_2 \leq b_2, \\ \tilde{c}_3 &= -a_3 + b_3 + c_3 \leq c_3. \end{aligned}$$

Значит, ввиду (3.9) $\tilde{c}_3 = c_3$. Однако тогда $\tilde{c} = (-\tilde{c}_1, -\tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ удовлетворяет (3.9), что невозможно по условию.

2. Пусть $c = (-c_1, -c_2, c_3)$. Из (3.4) вытекает условие (3.8). Рассмотрим сначала случай, когда

$$a_1 < b_1 + c_1.$$

Пусть $a_2 \leq c_2$. Тогда из (3.3) вытекает (3.7) (см. замечание 3.1). Поэтому $M(a, b, c) \in \Omega_{II}$.

Пусть $a_2 \geq c_2$. Тогда ввиду (3.4) $a_3 < c_3$. Кроме того,

$$(a + c) \in \Gamma_+ \implies 2a - b - (a + c) = (a - b - c) \notin \Gamma_+.$$

Следовательно, $c_3 > a_3 + b_3$ либо $b_2 > a_2 + c_2$. Значит, $M(a, b, c) \in \Omega_{II}$.

Осталось рассмотреть случай

$$a_1 \geq b_1 + c_1.$$

Имеем

$$(a + b + c) \in \Gamma_+ \implies 2a + b - (a + b + c) = (a - c) \notin \Gamma_+ \implies c_3 > a_3.$$

Рассмотрим $\tilde{c} = (b + c) \in C(a, b)$. Согласно (3.9) $\tilde{c}_3 = c_3$, т.е. $b_3 = 0$. Поэтому $\tilde{c}$ удовлетворяет требуемым условиям, причем $M(a, b, \tilde{c}) \in \Omega_I$. Лемма доказана.

Через Ω'_i обозначим внутренность множества Ω_i , $i = I, II$. Нетрудно проверить, что матрицы из Ω'_i имеют положительные определители.

ЛЕММА 3.3. Пусть $M(a, b, c) \in \Omega'_I \cup \Omega'_{II}$, причем $c_3 > a_3$. Определим решетку Γ с базисом $\{a, b, c\}$. Тогда не существует узла $u \in \Gamma \setminus \{0, \pm a, \pm b, \pm c\}$, удовлетворяющего неравенствам

$$|u_i| \leq \max\{a_i, b_i, c_i\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Этот результат вытекает из [39; доказательство леммы 13] (в [39; лемма 13] дополнительно предполагалось, что векторы a, b, c целочисленные, однако этот факт не используется при обосновании необходимого результата).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Возьмем матрицу $M(a, b, c) \in \Omega'_I \cup \Omega'_{II}$ и определим решетку Γ с базисом a, b, c . Предположим, что существует такой $u \in \Gamma_+$, что $(2a + b - u) \in \Gamma_+$. Тогда узел $w = u - a$ удовлетворяет неравенствам

$$-a_1 \leq w_1 \leq a_1 - b_1, \quad -a_2 \leq w_2 \leq a_2 + b_2, \quad -a_1 \leq w_1 \leq a_1 - b_1$$

и, следовательно,

$$|w_i| \leq a_i, \quad i = 1, 3, \quad |w_2| \leq a_2 + b_2. \quad (3.12)$$

Предположим, что существует $u \in \Gamma_+$ такой, что $(2a - b - u) \in \Gamma_+$. Тогда узел $w = u - a$ удовлетворяет неравенствам

$$-a_1 \leq w_1 \leq a_1 + b_1, \quad -a_2 \leq w_2 \leq a_2 - b_2, \quad -a_1 \leq w_1 \leq a_1 + b_1$$

и, следовательно,

$$|w_i| \leq a_i + b_i, \quad i = 1, 3, \quad |w_2| \leq a_2. \quad (3.13)$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $M(a, b, c) \in \Omega'_I$ и Γ – решетка с базисом $\{a, b, c\}$. Справедливы следующие свойства.

а) Любой $w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a\}$, удовлетворяющий (3.12), равен одному из следующих векторов:

$$\pm b, \quad \pm(a + b), \quad \pm(b + c), \quad \pm(a + b - c), \quad \pm kc. \quad (3.14)$$

Любой $w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a\}$, удовлетворяющий (3.13), равен одному из следующих векторов:

$$\pm c, \quad \pm(a - b), \quad \pm(a - c), \quad \pm(a - 2c), \quad \pm(b - kc). \quad (3.15)$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$.

- б) Точка s является единственным узлом Γ , удовлетворяющим (3.9).
 в) Точка a является началом, а вектор b – направляющим вектором некоторого ребра многогранника Клейна $K(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Пусть $w = n'a + m'b + k'c$, где $(n', m', k') \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. Случай, когда два коэффициента из (n', m', k') равны нулю, является тривиальным. Пусть не более одного коэффициента обращается в нуль. Не умаляя общности, считаем, что первая ненулевая координата вектора (n', m', k') является положительной. Ниже n, m, k – натуральные.

Рассмотрим сначала случаи, когда один из коэффициентов равен нулю.

1. $(n', m', k') = (n, m, 0) \implies w_2 = na_2 + mb_2$. Условие (3.13) не выполняется, а (3.12) может выполняться только при $n = m = 1$.
2. $(n', m', k') = (n, 0, k) \implies w_i = na_i + kc_i > a_i, i = 2, 3$. Ни (3.12), ни (3.13) не выполняются.
3. $(n', m', k') = (0, m, k) \implies w_2 = mb_2 + kc_2 > mb_2$. Условие (3.13) не выполняется. Далее, если $m > 1$, то $w_2 > a_2 + b_2$, а если $m = 1$, то

$$\begin{aligned} w_2 &\geq b_2 + c_2 > b_2 + a_2 && \text{при } c_2 > a_2, \\ |w_3| &\geq kc_3 - b_3 > c_3 > a_3 && \text{при } c_2 \leq a_2, k > 1. \end{aligned}$$

Условие (3.12) может выполняться только при $m = k = 1$.

4. $(n', m', k') = (n, -m, 0) \implies w_1 = na_1 + mb_1$. Условие (3.12) не выполняется, а (3.13), возможно, выполняется только при $n = m = 1$.

5. $(n', m', k') = (n, 0, -k) \implies w_1 = na_1 + kc_1 > a_1$ и (3.12) не выполняется. Кроме того,

$$\begin{aligned} |w_1| &= na_1 + kc_1 > 2a_1 > a_1 + b_1 && \text{при } n > 1, \\ |w_1| &= a_1 + kc_1 > a_1 + b_1 && \text{при } a_2 < c_2, n = 1, \\ |w_3| &= kc_3 - a_3 > 2c_3 > a_3 + b_3 && \text{при } a_2 \geq c_2, n = 1, k > 2. \end{aligned}$$

Условие (3.13) может выполняться только при $n = k = 1$ или $n = 1, k = 2$.

6. $(n', m', k') = (0, m, -k) \implies |w_3| = mb_3 + kc_3 > a_3 + (m-1)b_3$. Условие (3.12) не выполняется, а (3.13) (возможно) выполняется при $m = 1$.

Пусть теперь все коэффициенты отличны от нуля. Имеем

$$\begin{aligned} \text{если } (n', m', k') &= (n, m, k), && \text{то } w_2 = na_2 + mb_2 + kc_2 > a_2 + b_2, \\ \text{если } (n', m', k') &= (n, -m, k), && \text{то } w_3 = na_3 + mb_3 + kc_3 > a_3 + b_3, \\ \text{если } (n', m', k') &= (n, -m, -k), && \text{то } w_1 = na_1 + mb_1 + kc_1 > a_1 + b_1. \end{aligned}$$

Во всех этих случаях ни условие (3.12), ни (3.13) не выполняются.

Осталось рассмотреть последний вариант: $(n', m', k') = (n, m, -k)$. Пусть $a_2 > c_2$. Тогда $c_3 > a_3$ и

$$\begin{aligned} w_2 &= na_2 + mb_2 - kc_2 > b_2 + a_2 && \text{при } k < n, \\ |w_3| &= -na_3 + mb_3 + kc_3 > a_3 + b_3 && \text{при } k > n, \\ w_2 &= ka_2 + mb_2 - kc_2 > b_2 + a_2 && \text{при } k = n, m > 1, \\ w_2 &= ka_2 + b_2 - kc_2 > b_2 && \text{при } k = n, m = 1, \\ w_1 &= ka_1 - b_1 + kc_1 > a_1 && \text{при } k = n > 1, m = 1. \end{aligned}$$

Случай (3.13) невозможен, а (3.12) может выполняться только при $k = n = m = 1$, т.е. $w = a + b - c$. Пусть $a_2 \leq c_2$. Тогда $c_1 > b_1$ и

$$\begin{aligned} w_1 &= na_1 - mb_1 + kc_1 > a_1 + b_1 \quad \text{при } m < k, \\ w_2 &= ka_2 + mb_2 - kc_2 > b_2 + a_2 \quad \text{при } m > k. \end{aligned}$$

Если $m = k$, то $w_i > a_i$, $i = 1, 2$, т.е. не выполняются ни (3.12), ни (3.13).

Утверждение а) доказано.

Докажем б). Не существует узла $w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a, \pm b, \pm c\}$ такого, что

$$|w_1| \leq a_1, \quad |w_2| \leq b_2, \quad |w_3| \leq c_3.$$

Это следует из леммы 3.3 при $c_3 > a_3$ и легко проверяется с помощью утверждения а) (достаточно рассмотреть узлы w вида (3.14)) в противном случае. Поэтому узел c определяется единственным образом.

Докажем в). Для этого по теореме 2.1 достаточно доказать (3.2)–(3.4). Если $c_3 > a_3$, то выполнение (3.4) следует из леммы 3.3. Если $c_3 \leq a_3$, то условие (3.4) легко проверяется с помощью утверждения а) (достаточно ограничиться рассмотрением узлов w вида (3.14)).

Докажем (3.2). Предположим, что (3.2) не выполняется. Тогда по лемме 2.3 найдется такой $u \in \Gamma_+ \setminus \{a, a + b\}$, что $(2a + b - u) \in \Gamma_+$, причем

$$u = na + mb + kc, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Согласно замечанию 3.2 $u = a + w$, где w удовлетворяет (3.12). Применяя утверждение а), мы видим, что u совпадает с одной из следующих точек:

$$(a - b), \quad (2a + b), \quad (a + b + c), \quad (-b + c), \quad (a + kc), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Однако в этом случае $u \notin \Gamma_+$ либо $(2a + b - u) \notin \Gamma_+$ по определению Ω'_1 .

Осталось доказать (3.3). Предположим, что (3.3) не выполняется. Тогда по лемме 2.4 найдется такой $u \in \Gamma_+$, что $(3a - b - u) \in \Gamma_+$, причем

$$u = na + mb + c \quad \text{либо} \quad u = 3na + (3m + 1)b \pm 3c.$$

Ввиду замечания 3.2 $u = a + w$, где w удовлетворяет (3.13). Применяя а), мы видим, что $u \in \{a - b + c, a + c\}$. Однако в этом случае $u \notin \Gamma_+$ либо $(2a + b - u) \notin \Gamma_+$ по определению Ω'_1 . Утверждение в) доказано. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Возьмем любую матрицу $M(a, b, c) \in \Omega'_\Pi$ и определим решетку Γ с базисом $\{a, b, c\}$. Справедливы следующие свойства.

а) Любой $w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a\}$, удовлетворяющий (3.12), равен одному из следующих векторов:

$$\pm b, \quad \pm(a + b), \quad \pm(n(a + b) + kc), \quad 0 \leq n \leq k. \quad (3.16)$$

Любой $w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a\}$, удовлетворяющий (3.13), равен одному из следующих векторов:

$$\begin{aligned} \pm kc, \quad \pm(a + kc), \quad \pm(a - b), \quad \pm(b + c), \quad k > 0, \\ \pm(na + mb + kc), \quad 0 < m < k, \quad n \in \{m, m \pm 1\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

б) Точка s является единственным узлом Γ , удовлетворяющим (3.9).

в) Точка a является началом, b – направляющим вектором некоторого ребра многогранника Клейна $K(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Пусть $w = n'a + m'b + k'c$, где $(n', m', k') \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. Случай, когда два коэффициента из (n', m', k') равны нулю, является тривиальным. Пусть не более одного коэффициента обращается в нуль. Не умаляя общности, считаем, что первая ненулевая координата вектора (n', m', k') является положительной. Всюду ниже n, m, k – натуральные.

Рассмотрим сначала случаи, когда один из коэффициентов равен нулю.

1. $(n', m', k') = (n, m, 0) \implies w_2 = na_2 + mb_2$. Условие (3.13) не выполняется, а (3.12) может выполняться только при $n = m = 1$.

2. $(n', m', k') = (n, 0, k) \implies w_3 = na_3 + kc_3$. Условие (3.12) не выполняется, а (3.13) может выполняться только при $n = 1$.

3. $(n', m', k') = (0, m, k) \implies |w_1| = mb_1 + kc_1 > a_1 + (m-1)b_1$. Условие (3.12) не выполняется, а (3.13) (возможно) выполняется при $m = 1$.

4. $(n', m', k') = (n, -m, 0) \implies w_1 = na_1 + mb_1$. Условие (3.12) не выполняется, а (3.13) (возможно) выполняется при $n = m = 1$.

5. $(n', m', k') = (n, 0, -k) \implies w_i = na_i + kc_i > a_i, i = 1, 2$. Ни (3.12), ни (3.13) не выполняются.

6. $(n', m', k') = (0, m, -k) \implies |w_i| = mb_i + kc_i \geq b_i + c_i, i = 2, 3$. Значит,

$$|w_2| > a_2 + b_2 \quad \text{при } c_2 \geq a_2,$$

$$|w_3| > a_3 + b_3 \quad \text{при } c_2 < a_2.$$

Ни (3.12), ни (3.13) не выполняются.

Пусть теперь все коэффициенты отличны от нуля. Имеем

$$\text{если } (n', m', k') = (n, m, -k), \quad \text{то } w_2 = na_2 + mb_2 + kc_2 > a_2 + b_2,$$

$$\text{если } (n', m', k') = (n, -m, k), \quad \text{то } w_3 = na_3 + mb_3 + kc_3 > a_3 + b_3,$$

$$\text{если } (n', m', k') = (n, -m, -k), \quad \text{то } w_1 = na_1 + mb_1 + kc_1 > a_1 + b_1.$$

В этих случаях не выполняются ни (3.12), ни (3.13).

Осталось рассмотреть последний вариант: $(n', m', k') = (n, m, k)$. Тогда

$$w_2 = na_2 + mb_2 - kc_2 > a_2 + b_2 \quad \text{при } m > k,$$

$$w_3 = na_3 - mb_3 + kc_3 > a_3 \quad \text{при } n > m,$$

$$|w_1| = -na_1 + mb_1 + kc_2 > a_1 \quad \text{при } n < m \leq k.$$

Поэтому (3.12) может выполняться только при $n = m \leq k$. Далее,

$$w_2 = na_2 + mb_2 - kc_2 > a_2 \quad \text{при } m \geq k,$$

$$w_3 = na_3 - mb_3 + kc_3 > a_3 + b_3 \quad \text{при } n > m + 1,$$

$$|w_1| = -na_1 + mb_1 + kc_1 > a_1 + b_1 \quad \text{при } k > m > n + 1.$$

Поэтому (3.13) может выполняться только в случае $m < k, n \in \{m, m \pm 1\}$.

Утверждение а) доказано.

Докажем б). Не существует узла $w \in \Gamma \setminus \{0, \pm a, \pm b, \pm c\}$ такого, что

$$|w_1| \leq a_1, \quad |w_2| \leq b_2, \quad |w_3| \leq c_3.$$

Это следует из леммы 3.3 при $c_3 > a_3$ и легко проверяется с помощью утверждения а) (достаточно рассмотреть узлы w вида (3.16)) в противном случае. Поэтому узел c определяется единственным образом.

Докажем в). Для этого по теореме 2.1 достаточно обосновать соотношения (3.2)–(3.4). Они доказываются по такой же схеме, как и соответствующие результаты из леммы 3.4. Если $c_3 > a_3$, то выполнение (3.4) следует из леммы 3.3. Если $c_3 \leq a_3$, то условие (3.4) легко проверяется с помощью утверждения а) (достаточно ограничиться рассмотрением узлов w вида (3.16)).

Если (3.2) не выполняется, то применяя лемму 2.3, замечание 3.2 и утверждение а), получаем, что существует $u \in \Gamma_+ \setminus \{a, a+b\}$, равный одному из следующих узлов:

$$(2a+b), \quad (a+n(a+b)+kc), \quad 0 \leq n \leq k \neq 0,$$

такой, что $v = (2a+b-u) \in \Gamma_+$. Однако, если $u = 2a$, то $v = b \notin \Gamma_+$; если $u = 2a+b$, то $v = 0 \notin \Gamma_+$; если $u = a+n(a+b)+kc$, то

$$\begin{aligned} u_2 = a_2 - kc_2 &< 0 && \text{при } c_2 > a_2, \quad n = 0, \\ v_3 = -(n-1)a_3 + (n-1)b_3 - kc_3 &< 0 && \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Условие (3.2) выполнено.

Осталось доказать (3.3). Если (3.3) не выполняется, то, применяя лемму 2.4, замечание 3.2 и утверждение а), получаем, что существует u , равный одному из следующих узлов:

$$(a+c), \quad (2a+c), \quad (a+b+c), \quad (3a+b+3c),$$

такой, что $u \in \Gamma_+$ и $v = (2a-b-u) \in \Gamma_+$. Рассмотрим эти узлы, используя определение Ω'_{Π} .

Если $u = a+c$, то $v = a-b-c$ и

$$\begin{aligned} u_2 = a_2 - c_2 &< 0 && \text{при } a_2 < c_2, \\ v_3 = a_3 + b_3 - c_3 &< 0 && \text{при } a_2 \geq c_2, \quad c_3 > a_3 + b_3, \\ v_2 = a_3 - b_2 + c_2 &< 0 && \text{при } a_2 \geq c_2, \quad b_2 > a_2 + c_2. \end{aligned}$$

Если $u = 2a+c$, то $v = -b-c$, $v_2 = -b_2 + c_2 < 0$.

Если $u = a+b+c$, то $u_1 = a_1 - b_1 - c_1 < 0$.

Если $u = 3a+b+3c$, то $u \notin \Gamma_+$ либо $(2a-b-u) \notin \Gamma_+$ согласно (3.7) (см. замечание 3.1). Таким образом, условие (3.3) выполняется. Утверждение в) доказано. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Возьмем любую $M = M(a, b, c) \in \Omega'_I \cup \Omega'_{\Pi}$ и определим решетку Γ с базисом $\{a, b, c\}$. Пусть $c_3 < a_3$. Тогда любой ненулевой узел

$u \in \Gamma \setminus \{\pm a, \pm b, \pm c\}$, удовлетворяющий (3.11), имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \pm kc & \text{при } M \in \Omega'_I, \\ u &= \pm(n(a+b) + kc) & \text{при } M \in \Omega'_{II}, \end{aligned}$$

где $0 \leq n \leq k$.

Доказательство вытекает из лемм 3.4 а), 3.5 а) и определений Ω'_I , Ω'_{II} .

Для любого натурального k определим

$$\Omega_{i,k} = \{M(a, b, c) \in \Omega_i : (a + kb) \in [0, +\infty)^3\}, \quad i = I, II,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Omega_{I,k} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \Omega_I : a_j \geq kb_j, j = 1, 3 \right\}, \\ \Omega_{II,k} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \Omega_{II} : a_j \geq kb_j, j = 1, 3 \right\}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что

$$\Omega_{i,1} = \Omega_i, \quad \Omega_{i,k+1} \subset \Omega_{i,k}, \quad i = I, II.$$

Пусть $\Omega'_{i,k} = \Omega'_i \cap \Omega_{i,k}$, $i = I, II$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любого целого $k \geq 1$ справедливы свойства.

а) Пусть Γ – трехмерная решетка, узел a является началом, $b = (-b_1, b_2, -b_3)$ – направляющий вектор некоторого ребра E многогранника Клейна $K(\Gamma)$, причем E не лежит на координатных плоскостях и, кроме того, $\#(E \cap \Gamma) > k$. Тогда существует узел $c \in \Gamma$, удовлетворяющий (3.9), причем

$$M(a, b, c) \in \Omega_{I,k} \cup \Omega_{II,k}.$$

б) Возьмем любую матрицу $M(a, b, c) \in \Omega'_{I,k} \cup \Omega'_{II,k}$ и определим решетку Γ с базисом $\{a, b, c\}$. Тогда:

- 1) c является единственным узлом, удовлетворяющим (3.9);
- 2) a является началом, b – направляющим вектором некоторого ребра E многогранника $K(\Gamma)$, причем $\#(\Gamma \cap E) > k$.

Утверждение а) вытекает из леммы 3.2, б) – из лемм 3.4 б), в) и 3.5 б), в).

Отметим еще несколько важных свойств.

Если $k \geq 2$, то множество $\Omega'_{II,k}$ описывается конечным числом линейных неравенств (в условии (3.3) можно ограничиться случаем $n = 1, k = 2$). А именно, пусть $\tilde{\Omega}'_{II}$ – внутренность $\tilde{\Omega}_{II}$ и

$$\tilde{\Omega}'_{II,k} = \{M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}'_{II} : (a + kb) \in [0, +\infty)^3\}.$$

ЛЕММА 3.6. Если $k \geq 2$, то множество $\Omega'_{\Pi,k}$ состоит из таких матриц $M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}'_{\Pi,k}$, что

$$a_1 < \frac{b_1}{2} + c_1 \quad \text{либо} \quad 2c_2 < b_2, \quad \text{либо} \quad a_2 + \frac{b_2}{2} < c_2, \quad \text{либо} \quad b_3 < 2c_3. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (3.18) эквивалентно следующему: существует такой номер j , что $|w_j| > a_j$, где $w = a + b + 2c$. Поэтому достаточно доказать, что для любой матрицы $M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}'_{\Pi,2}$ выполняется условие (3.8), в котором $(n, k) \neq (1, 2)$. Пусть $M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}'_{\Pi,2}$. Тогда

$$2b_1 \leq a_1, \quad 2b_3 \leq a_3.$$

Поэтому из условия $a_1 < b_1 + c_1$ следует, что

$$b_1 < c_1, \quad a_1 < 2c_1.$$

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n < k$, $w = n(a + b) + kc$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{если } n > 1, \quad & \text{то } w_3 = n(a_3 - b_3) + kc_3 > n(a_3 - b_3) \geq \frac{na_3}{2} \geq a_3, \\ \text{если } n = 1, \quad k > 2, \quad & \text{то } |w_1| = -a_1 + b_1 + kc_1 > (k-1)c_1 \geq 2c_1 > a_1. \end{aligned}$$

Условие (3.8) выполнено. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $M = M(a, b, c) \in \Omega'_{I,2} \cap \Omega'_{\Pi,2}$, Γ – решетка с базисом $\{a, b, c\}$. Тогда не существует узла $u \in \Gamma \setminus \{0, \pm a, \pm b, \pm c\}$, удовлетворяющего неравенствам

$$\begin{aligned} |u_i| &\leq \max\{a_i, b_i, c_i\}, \quad i = 1, 2, \quad |u_3| \leq \frac{\max\{a_3, b_3, c_3\}}{2} \quad \text{при } M \in \Omega'_I, \\ |u_1| &\leq \frac{\max\{a_1, b_1, c_1\}}{2}, \quad |u_i| \leq \max\{a_i, b_i, c_i\}, \quad i = 2, 3, \quad \text{при } M \in \Omega'_{\Pi}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $c_3 > a_3$ требуемый результат следует из леммы 3.3. Если $c_3 < a_3$, то для доказательства достаточно учесть, что

$$\begin{aligned} b_3 &< \frac{a_3}{2} < c_3 \quad \text{при } M(a, b, c) \in \Omega'_{I,2}, \\ b_1 &< \frac{a_1}{2} < c_1 \quad \text{при } M(a, b, c) \in \Omega'_{\Pi,2}, \end{aligned}$$

и воспользоваться следствием 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $M = M(a, b, c) \in \Omega_{I,2} \cup \Omega_{\Pi,2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^3 \max\{a_i, b_i, c_i\} &\leq \det M, \quad \text{если } a_3 \leq c_3, \\ \prod_{i=1}^3 \max\{a_i, b_i, c_i\} &\leq 2 \cdot \det M, \quad \text{если } a_3 > c_3. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно использовать лемму 3.3, следствие 3.3 и применить теорему Минковского о линейных формах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Согласно следствию 3.4 множества $\Omega = \Omega_{I,k}, \Omega_{II,k}$ удовлетворяют условию (Б) теоремы 1.1, если $k \geq 2$. К сожалению, для множеств Ω_I, Ω_{II} это условие не выполняется. Контрпримерами являются матрицы вида

$$M_{I,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & -2\varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 2\varepsilon \\ 1 & -(1-\varepsilon) & 2\varepsilon \end{pmatrix} \in \Omega'_I, \quad M_{II,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -(1-\varepsilon) & -2\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 & -2\varepsilon^2 \\ 1 & -(1-\varepsilon) & \varepsilon \end{pmatrix} \in \Omega'_{II},$$

где ε – малое положительное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 0.1. Не умаляя общности, считаем, что a – начало, b – направляющий вектор ребра $[a, \tilde{a}]$, причем $b = (-b_1, b_2, -b_3)$, $b_i > 0$. Тогда по следствию 3.2, а) найдется такой $c \in \Gamma$, что $\{a, b, c\}$ – базис Γ и $M(a, b, c) \in \Omega_{I,k} \cup \Omega_{II,k}$. По определению

$$b_i \leq \frac{a_i}{k}, \quad i = 1, 3.$$

Согласно следствию 3.4

$$\prod_{i=1}^3 \max\{a_i, b_i, c_i\} \leq 2 \cdot \det \Gamma.$$

Значит,

$$\mathcal{N}(b) = b_1 b_2 b_3 \leq \frac{a_1 b_2 a_3}{k^2} \leq \frac{2}{k^2} \cdot \det \Gamma.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если b – направляющий вектор ребра E полиэдра Клейна трехмерной решетки Γ , причем целочисленная длина E равна 1, то величина $\mathcal{N}(b)/\det \Gamma$ может быть сколь угодно большой. Например, пусть Γ – решетка, базисом которой являются столбцы матрицы $M_{II,\varepsilon}$ из замечания 3.3, и пусть $b = (-(1-\varepsilon), 1, -(1-\varepsilon))$ (2-й столбец $M_{II,\varepsilon}$). Тогда $M_{II,\varepsilon} \in \Omega'_{II}$, поэтому b является направляющим вектором некоторого ребра многогранника $K(\Gamma)$, причем

$$\det \Gamma = O(\varepsilon), \quad \mathcal{N}(b) = (1-\varepsilon)^2.$$

§ 4. Доказательство основного результата

Обозначения $\chi(N)$ и $\nu(\Omega)$ определены в § 1, а $\mathcal{L}_3(N)$ и $f(\Gamma, k)$ – во введении. Далее, если $\Omega \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, то $\Omega(N)$ – множество целочисленных матриц $M \in \Omega$ таких, что $\det M = N$.

ЛЕММА 4.1. Для любых натуральных k, N выполняется

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f(\Gamma, k) = 24(\#\Omega'_{I,k}(N) + \#\Omega'_{II,k}(N)) + R(N), \quad (4.1)$$

где

$$R(N) \ll \#\partial\Omega_{I,k}(N) + \#\partial\Omega_{II,k}(N) + \#\mathcal{L}_3(N) \cdot \ln(N+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – множество пар (Γ, E) , где Γ – трехмерная решетка, E – ребро многогранника Клейна $K(\Gamma)$, не лежащее на координатных плоскостях, причем $\#(E \cap \Gamma) > k$. Определим подмножество $U(N) \subset U$, состоящее из таких пар $(\Gamma, E) \in U$, что $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$. Не умаляя общности, считаем, что $N > 1$.

Рассмотрим ребра, лежащие на координатных плоскостях. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$ и $\pi_j = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_j = 0\}$. Множество $\Gamma_j = \Gamma \cap \pi_j$ является целочисленной решеткой, которую можно рассматривать как двумерную (если у всех узлов Γ_j вычеркнуть j -ю координату, которая равна нулю). Хорошо известно, что $N_j = \det \Gamma_j$ является делителем $N = \det \Gamma$. Множество $K(\Gamma) \cap \pi_j$ является полиэдром Клейна решетки Γ_j . Количество вершин (и сторон) многоугольника Клейна целочисленной двумерной решетки определителя N_j оценивается величиной $O(\ln N_j + 1)$. Значит, количество ребер $K(\Gamma)$, лежащих на π_j , не больше чем $O(\ln N)$.

Таким образом, справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f(\Gamma, k) = 2^3 \cdot \#U(N) + O(\#\mathcal{L}_3(N) \cdot \ln N).$$

Определим множество $U^{(n)}$, состоящее из таких пар $(\Gamma, E) \in U$, что n -я координата направляющего вектора E является положительной. Множества $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}$ попарно не пересекаются и $U = U^{(1)} \cup U^{(2)} \cup U^{(3)}$. Пусть

$$U^{(n)}(N) = U^{(n)} \cap U(N).$$

Тогда

$$\#U^{(1)}(N) = \#U^{(2)}(N) = \#U^{(3)}(N), \quad \#U(N) = 3 \cdot \#U^{(2)}(N).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f(\Gamma, k) = 8 \cdot \frac{\#U(N)}{\#\mathcal{L}_3(N)} + O(\ln N) = 24 \cdot \frac{\#U^{(2)}(N)}{\#\mathcal{L}_3(N)} + O(\ln N). \quad (4.2)$$

Согласно следствию 3.2, а) мы можем ввести отображение

$$\Phi: U^{(2)} \rightarrow \Omega_{I,k} \cup \Omega_{II,k},$$

по формуле $\Phi(\Gamma, E) = M(a, b, c)$, где a – начало, b – направляющий вектор ребра E , c – узел Γ , удовлетворяющий (3.9), (3.10). Если таких c больше одного, то в качестве c возьмем точку с наименьшей первой координатой; если и таких c несколько, то среди них в качестве c выберем узел с наименьшей второй координатой. Пусть $\Omega = \Phi(U^{(2)})$ – образ Φ . Очевидно, что отображение $\Phi: U^{(2)} \rightarrow \Omega$ взаимно однозначное. Кроме того, ввиду следствия 3.2, б)

$$(\Omega'_{I,k} \cup \Omega'_{II,k}) \subset \Omega.$$

Следовательно,

$$(\Omega'_{I,k}(N) \cup \Omega'_{II,k}(N)) \subset \Omega(N) \subset (\Omega_{I,k}(N) \cup \Omega_{II,k}(N)),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\#U^{(2)}(N) &= \#\Phi(U^{(2)}(N)) = \#\Omega(N) \\ &= \#\Omega'_{I,k}(N) + \#\Omega'_{II,k}(N) + O(\#\partial\Omega_{I,k}(N) + \#\partial\Omega_{II,k}(N)).\end{aligned}$$

Осталось подставить последнее соотношение в (4.2).

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любых целых $N, k \geq 2$ справедлива следующая асимптотическая формула для среднего числа ребер многогранников Клейна целочисленной длины не меньше k :*

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} f(\Gamma, k) = C_3(k) \cdot \ln^2 N + O_k(\chi(N) \cdot \ln N),$$

где

$$C_3(k) = \frac{12}{\zeta(2) \cdot \zeta(3)} \cdot (\nu(\Omega_{I,k}) + \nu(\Omega_{II,k})). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $\Omega'_{I,k}$, $\Omega'_{II,k}$, $\partial\Omega_{I,k}$, $\partial\Omega_{II,k}$ можно разбить на фиксированное число частей, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Выполнение (А) вытекает из определений множеств и леммы 3.6, а (Б) – из следствия 3.4. Поэтому, применяя теорему 1.1, получаем

$$\begin{aligned}\#\Omega'_{i,k}(N) &= \frac{\#\mathcal{L}_3(N)}{2\zeta(2)\zeta(3)} \cdot (\nu(\Omega'_{i,k}) \cdot \ln^2 N + O_k(\chi(N) \cdot \ln N)), \\ \#\partial\Omega'_{i,k}(N) &= O_k(\#\mathcal{L}_3(N) \cdot \chi(N) \cdot \ln N), \quad i = I, II.\end{aligned}$$

Осталось подставить эти соотношения в (4.1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Вычисление среднего количества всех ребер сводится к нахождению $\#\Omega_I(N)$ и $\#\Omega_{II}(N)$. Однако к $\Omega = \Omega_I$ и $\Omega = \Omega_{II}$ нельзя применить теорему 1.1, так как, во-первых, оба множества не удовлетворяют условию (Б) (см. замечание 3.3), а во-вторых, вследствие условия (3.8) границу Ω_{II} нельзя представить в виде объединения конечного числа дифференцируемых поверхностей. Возникает довольно сложная аналитическая задача об ослаблении условий теоремы 1.1. Ввиду громоздкости вычислений этот вопрос (возможно) будет рассмотрен в другой статье.

Исследуем теперь поведение постоянной $C_3(k)$ при $k \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4.2. *Существует такое натуральное k_0 , что для любого $k > k_0$*

$$C_3(k) = \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j}{k^j},$$

где α_j – абсолютные постоянные, причем

$$\alpha_0 = \frac{3}{\zeta(2) \cdot \zeta(3)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $t > 0$ определим

$$\Omega_i^t = \{M(a, b, c) \in \Omega'_i : (ta + b) \in (0, +\infty)^3\}, \quad i = \text{I, II}.$$

Тогда $\Omega'_{i,k} = \Omega_i^{1/k}$. Выведем сначала формулу для $\nu(\Omega_1^t)$. По определению

$$\nu(\Omega_1^t) = \int_{W^t} \frac{dy_1 dz_1 dx_2 dz_2 dx_3 dy_3}{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & -y_1 & -z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & -y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|^3},$$

где многогранник W^t состоит из точек

$$(y_1, z_1, x_2, z_2, x_3, y_3) \in (0, 1)^4 \times (0, +\infty)^2,$$

удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y_1 &< t, & y_3 &< tx_3, \\ y_1 &< z_1, & x_3 &< 1 + y_3 \quad \text{при } x_2 \leq z_2, \\ x_3 &< 1 & \text{при } x_2 \geq z_2. \end{aligned}$$

Сделаем замену $y_i = ty'_i$, $i = 1, 3$. Остальные переменные оставляем без изменений и сохраняем для них старые обозначения. Тогда

$$\nu(\Omega_1^t) = t^2 \cdot g(t), \quad g(t) = \int_{\widehat{W}^t} \frac{dy'_1 dz_1 dx_2 dz_2 dx_3 dy'_3}{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & -ty'_1 & -z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & -ty'_3 & 1 \end{pmatrix} \right|^3},$$

где $\widehat{W}^t$ состоит из точек

$$(y'_1, z_1, x_2, z_2, x_3, y'_3) \in (0, 1)^4 \times (0, +\infty)^2,$$

удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y'_3 &< x_3, \\ ty'_1 &< z_1, & x_3 &< 1 + ty'_3 \quad \text{при } x_2 \leq z_2, \\ x_3 &< 1 & \text{при } x_2 \geq z_2. \end{aligned}$$

Если $t = 0$, то

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -ty'_1 & -z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & -ty'_3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + x_3 z_1 \geq 1.$$

Поэтому функция $g(t)$ определена в некоторой окрестности точки $t = 0$. Более того, она является аналитической в этой окрестности. Значит, в некоторой окрестности нуля g раскладывается в ряд $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \cdot t^j$. Вычислим

коэффициент β_0 . Имеем

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \int_{\widehat{W}^0} \frac{dy_1 dz_1 dx_2 dz_2 dx_3 dy_3}{(1 + z_1 x_3)^3}, \\ \widehat{W}^0 &= \{(y'_1, z_1, x_2, z_2, x_3, y'_3) \in (0, 1)^6 : y'_3 < x_3\}, \\ \beta_0 &= \int_{(0,1)^2} \frac{x_3}{(1 + z_1 x_3)^3} dz_1 dx_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{(1 + x_3)^2}\right) dx_3 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Таким образом, существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\begin{aligned}\nu(\Omega_{\text{I}}^t) &= t^2 \cdot g(t) = t^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j t^j\right) \quad \text{при } 0 < t < \varepsilon, \\ \nu(\Omega_{\text{I},k}) &= \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j}{k^j}\right) \quad \text{при } k > \varepsilon^{-1}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Формула для $\nu(\Omega_{\text{II}}^t)$ выводится аналогичным образом. Единственное отличие заключается в следующем:

$$\nu(\Omega_{\text{II}}^t) \asymp t^3 \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Эти оценки нетрудно проверить, учитывая, что для любой матрицы $M(a, b, c) \in \Omega_{\text{II}}^t$, $0 < t \leq 1/2$,

$$b_1 < ta_1, \quad b_3 < ta_3, \quad (1-t)a_1 < c_1 < a_1, \quad \det M(a, b, c) \asymp \prod_{i=1}^3 \max\{a_i, b_i, c_i\},$$

и разбивая Ω_{II}^t на два подмножества, для которых $a_2 \geq c_2$ и $a_2 \leq c_2$ соответственно. В результате получаем, что для некоторой постоянной $\varepsilon' > 0$

$$\begin{aligned}\nu(\Omega_{\text{II}}^t) &= t^3 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \beta'_j t^j \quad \text{при } t < \varepsilon', \\ \nu(\Omega_{\text{II},k}) &= \frac{1}{k^3} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta'_j}{k^j} \quad \text{при } k > \varepsilon'^{-1},\end{aligned}$$

где β_j – абсолютные постоянные. Подставляя последнюю формулу и (4.4) в определение $C_3(k)$, приходим к требуемому соотношению. Лемма доказана.

Список литературы

- [1] F. Klein, “Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, **3** (1895), 357–359.
- [2] H. Tsuchihashi, “Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities”, *Tohoku Math. J.* (2), **35**:4 (1983), 607–639.
- [3] Б. Ф. Скубенко, “Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 9, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1988, 125–139; англ. пер.: B. F. Skubenko, “Minimum of a decomposable cubic form of three variables”, *J. Soviet Math.*, **53**:3 (1991), 302–310.

- [4] Б. Ф. Скубенко, “Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$ ”, *Модулярные функции и квадратичные формы*. 1, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **183**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1990, 142–154; англ. пер.: B. F. Skubenko, “Minima of decomposable forms of degree n in n variables for $n \geq 3$ ”, *J. Soviet Math.*, **62**:4 (1992), 2928–2935.
- [5] V. I. Arnold, “Higher dimensional continued fractions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **3**:3 (1998), 10–17.
- [6] V. I. Arnold, “Preface”, *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, ix–xii.
- [7] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000, x+452 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Moscow; PHASIS, 2004, xvi+639 pp.
- [8] В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, МЦМО, М., 2001, 40 с.
- [9] G. Lachaud, “Polyèdre d’Arnol’d et voile d’un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **317**:8 (1993), 711–716.
- [10] G. Lachaud, “Sails and Klein polyhedra”, *Number theory* (Tiruchirapalli, 1996), *Contemp. Math.*, **210**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 373–385.
- [11] E. Korkina, “La périodicité des fractions continues multidimensionnelles”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319**:8 (1994), 777–780.
- [12] Е. И. Коркина, “Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры”, *Особенности гладких отображений с дополнительными структурами*, Сборник статей, Тр. МИАН, **209**, Наука, Физматлит, М., 1995, 143–166; англ. пер.: E. I. Korkina, “Two-dimensional continued fractions. The simplest examples”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **209** (1995), 124–144.
- [13] E. I. Korkina, “The simplest 2-dimensional continued fraction”, *J. Math. Sci.*, **82**:5 (1996), 3680–3685.
- [14] А. Д. Брюно, В. И. Парусников, “Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта”, *Матем. заметки*, **56**:4 (1994), 9–27; англ. пер.: A. D. Bruno, V. I. Parusnikov, “Klein polyhedra for two cubic Davenport forms”, *Math. Notes*, **56**:4 (1994), 994–1007.
- [15] В. И. Парусников, “Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы”, *Матем. заметки*, **67**:1 (2000), 110–128; англ. пер.: V. I. Parusnikov, “Klein polyhedra for the fourth extremal cubic form”, *Math. Notes*, **67**:1 (2000), 87–102.
- [16] В. И. Парусников, “Многогранники Клейна для трех экстремальных кубических форм”, *Матем. заметки*, **77**:4 (2005), 566–583; англ. пер.: V. I. Parusnikov, “Klein polyhedra for three extremal cubic forms”, *Math. Notes*, **77**:4 (2005), 523–538.
- [17] Ж. О. Муссафир, “Паруса и базисы Гильберта”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:2 (2000), 43–49; англ. пер.: J. Moussafir, “Sails and Hilbert bases”, *Funct. Anal. Appl.*, **34**:2 (2000), 114–118.
- [18] О. Н. Герман, “Паруса и базисы Гильберта”, *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 98–105; англ. пер.: O. N. German, “Sails and Hilbert bases”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **239** (2002), 88–95.
- [19] О. Н. Герман, “Паруса и норменные минимумы решеток”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 31–60; англ. пер.: O. N. German, “Sails and norm minima of lattices”, *Sb. Math.*, **196**:3 (2005), 337–365.
- [20] О. Н. Герман, “Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток”, *Матем. заметки*, **79**:4 (2006), 546–552; англ. пер.: O. N. German, “Klein polyhedra and relative minima of lattices”, *Math. Notes*, **79**:4 (2006), 505–510.
- [21] O. N. German, “Klein polyhedra and lattices with positive norm minima”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **19**:1 (2007), 175–190.

- [22] О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов, “О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 51–66; англ. пер.: O. N. German, E. L. Lakshtanov, “On a multidimensional generalization of Lagrange’s theorem on continued fractions”, *Izv. Math.*, **72**:1 (2008), 47–61.
- [23] О. Н. Карпенков, “О триангуляциях торов, связанных с двумерными цепными дробями кубических иррациональностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 28–37; англ. пер.: O. N. Karpenkov, “On tori triangulations associated with two-dimensional continued fractions of cubic irrationalities”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 102–110.
- [24] O. N. Karpenkov, “Completely empty pyramids on integer lattices and two-dimensional faces of multidimensional continued fractions”, *Monatsh. Math.*, **152**:3 (2007), 217–249.
- [25] O. N. Karpenkov, “Constructing multidimensional periodic continued fractions in the sense of Klein”, *Math. Comp.*, **78**:267 (2009), 1687–1711.
- [26] А. В. Быковская, “О многомерном обобщении теоремы Лагранжа о цепных дробях”, *Матем. заметки*, **92**:3 (2012), 343–360; англ. пер.: A. V. Bykovskaya, “A multidimensional generalization of Lagrange’s theorem on continued fractions”, *Math. Notes*, **92**:3 (2012), 312–326.
- [27] А. В. Быковская, “Критерий целочисленной эквивалентности двух обобщенных выпуклых целочисленных многогранников”, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 648–660; англ. пер.: A. V. Bykovskaya, “A criterion for the integral equivalence of two generalized convex integer polyhedra”, *Math. Notes*, **94**:5 (2013), 609–618.
- [28] O. N. Karpenkov, *Geometry of continued fractions*, Algorithms Comput. Math., **26**, Springer, Heidelberg, 2013, xviii+405 pp.
- [29] M. L. Kontsevich, Yu. M. Suhov, “Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions”, *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 9–27.
- [30] J.-O. Moussafir, *Voiles et polyèdres de Klein: Géométrie, algorithmes et statistiques*, Doc. Sci. Thèse, Univ. Paris IX–Dauphine, Paris, 2000.
- [31] О. Н. Карпенков, “Об инвариантной мере Мёбиуса и распределении граней Гаусса–Кузьмина”, *Анализ и особенности. Часть 1*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, **258**, Наука, М., 2007, 79–92; англ. пер.: O. N. Karpenkov, “On an invariant Möbius measure and the Gauss–Kuzmin face distribution”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **258**:1 (2007), 74–86.
- [32] А. А. Илларионов, Д. А. Слинкин, “О количестве вершин многогранников Клейна целочисленных решеток в среднем”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 48–55.
- [33] А. А. Илларионов, “О статистических свойствах многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток”, *Матем. сб.*, **204**:6 (2013), 23–46; англ. пер.: A. A. Illarionov, “On the statistical properties of Klein polyhedra in three-dimensional lattices”, *Sb. Math.*, **204**:6 (2013), 801–823.
- [34] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Докл. РАН*, **389**:2 (2003), 154–155; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Dokl. Math.*, **67**:2 (2003), 175–176.
- [35] В. А. Быковский, “Отклонения сеток Коробова”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 19–38; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “The discrepancy of the Korobov lattice points”, *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 446–465.
- [36] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number theory and analysis*, Papers in honor of Edmund Landau, Plenum, New York, 1969, 87–96.

- [37] A. A. Illarionov, “On the asymptotic distribution of integer matrices”, *Moscow J. Combin. Number Theory*, **1**:4 (2011), 13–57.
- [38] А. А. Илларионов, “Многомерное обобщение теоремы Хейльбронна о средней длине конечной непрерывной дроби”, *Матем. сб.*, **205**:3 (2014), 119–132; англ. пер.: A. A. Illarionov, “A multidimensional generalization of Heilbronn’s theorem on the average length of a finite continued fraction”, *Sb. Math.*, **205**:3 (2014), 419–431.
- [39] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **23**:3 (2011), 189–215; англ. пер.: A. A. Illarionov, “Average number of local minima of three-dimensional integer lattices”, *St. Petersburg Math. J.*, **23**:3 (2012), 551–570.

Андрей Анатольевич Илларионов
(**Andrey A. Illarionov**)

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: illar_a@list.ru

Поступила в редакцию
08.04.2014