Общероссийский математический портал

А. И. Козко, А. В. Рождественский, О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 8, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:10:05

УДК 517.518.8

А. И. Козко, А. В. Рождественский

О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности

В пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$ исследуется значение точной константы $\varkappa$ в неравенстве типа Джексона

$$E_{n-1}(f) \leq \varkappa \overline{\omega}_\psi(f, T) \quad (1)$$

с обобщенным модулем непрерывности

$$\overline{\omega}_\psi(f, T) = \max_{t \in T} \left(\sum_s \psi(st) |\widehat{f}_s|^2 \right)^{1/2}.$$

Находится минимальная точная константа $\varkappa^*$ в неравенстве (1).

Для введенного нами класса обобщенных модулей непрерывности, содержащего при четных a модули $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) := \sup_{0 \leq t \leq \delta} \|\Delta_{a^{r-1}t} \cdots \Delta_{at} f\|_2$, доказывается соотношение $\varkappa = \varkappa^*$ при всех $\delta \geq \pi/n$.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

В теории приближений *неравенством Джексона* обычно называют следующее соотношение между величиной $d(f, L, X)$ наилучшего приближения функции f из нормированного пространства функций X элементами его подпространства L и структурной характеристикой функции f , задаваемой некоторой полунормой (или квази-полунормой) $|\cdot|_X$:

$$d(f, L, X) \leq K(L, X) |f|_X \quad \forall f \in X.$$

Минимально возможную величину постоянной $K(L, X)$ называют *точной константой в неравенстве Джексона*.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением оценок для точной константы в неравенстве Джексона в случае, когда в качестве X берется пространство $L_2(\mathbb{T}^d)$, а в качестве L — пространство функций $g \in L_2(\mathbb{T}^d)$, спектр которых сосредоточен в заданном множестве $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. При этом в качестве структурной характеристики функции мы рассматриваем определяемые ниже обобщенные θ - и ψ -модули непрерывности. В § 2 для неравенств Джексона такого типа нам удалось найти значение минимальной точной константы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00248) и фонда INTAS (грант № 99-01080) (А.И. Козко); Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 00-15-96109, 02-01-00248) (А.В. Рождественский).

В § 4 в одномерном случае для введенного нами подмножества класса обобщенных модулей непрерывности ω_ψ , содержащего, в частности, при четных значениях параметра a модули вида $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) := \sup_{0 \leq t \leq \delta} \|\Delta_{a^{r-1}t} \cdots \Delta_{at} \Delta_t f\|_2$, найдено значение точной константы в неравенстве Джексона

$$E_{n-1}(f) \leq K \omega_\psi(f, \delta) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$$

при всех $\delta \geq \pi/n$.

1.1. Пусть 2π -периодическая функция $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ от d переменных принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T}^d)$, где d -мерный тор $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ будем представлять как d -мерный куб $[0, 2\pi]^d$ с отождествленными противоположными гранями,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx.$$

Для $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ обозначим¹

$$e_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{s}\mathbf{x} = (\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d s_k x_k.$$

Аналогично, $e_k(y) := e^{iky}$ для $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{T}$.

Пусть $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – заданная последовательность комплексных чисел, для которых абсолютно сходится ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k$.

Фиксируя вектор $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^d$, определим на множестве тригонометрических полиномов $\mathcal{T} = \text{lin}\{e_{\mathbf{s}}(\cdot) : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d\}$ разностный оператор $\Delta_{\mathbf{t}}^\theta$ по формуле

$$\Delta_{\mathbf{t}}^\theta f(\mathbf{x}) \equiv \Delta_{\mathbf{t}}^\theta(f, \mathbf{x}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k f(\mathbf{x} + k\mathbf{t}) \quad \forall f \in \mathcal{T}.$$

Из этой формулы, в частности, получаем, что

$$\Delta_{\mathbf{t}}^\theta e_{\mathbf{s}}(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_{\mathbf{s}}(k\mathbf{t}) e_{\mathbf{s}}(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\mathbf{s}\mathbf{t}) e_{\mathbf{s}}(\cdot) \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$$

и при этом

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\mathbf{s}\mathbf{t}) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\theta_k| \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d.$$

Это означает, что оператор $\Delta_{\mathbf{t}}^\theta$ можно продолжить с линейного многообразия $\mathcal{T}$ до линейного ограниченного оператора в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$ с нормой [1; § 16.1]

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\mathbf{s}\mathbf{t}) \right|.$$

Представляется естественным потребовать, чтобы введенный обобщенный оператор разности обращался в нуль на “константах”. Такое требование, очевидно, эквивалентно равенству $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k = 0$.

¹ Для обозначения скалярных величин будем употреблять “обычный” (неполужирный) шрифт.

Введем 2π -периодическую функцию $\theta^\vee(\cdot)$, коэффициенты ряда Фурье которой равны θ_k . Из условия $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\theta_k| < \infty$ следует, что ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(y)$ сходится равномерно, следовательно, $\theta^\vee(\cdot) \in C(\mathbb{T})$ и

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\mathbf{s}\mathbf{t}) \right| = \sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} |\theta^\vee(\mathbf{s}\mathbf{t})| \leq \|\theta^\vee(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \quad \forall \mathbf{t}. \quad (1.1)$$

Обозначим $\psi_\theta(\cdot) = |\theta^\vee(\cdot)|^2$.

Из представления $f(x+k) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}_{\mathbf{s}} e(x+k)$ и определения оператора Δ^θ получаем

$$\begin{aligned} \Delta^\theta f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k \left(\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}_{\mathbf{s}} e(x+k) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(x) \right) \widehat{f}_{\mathbf{s}} e(x) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \theta^\vee(x) \widehat{f}_{\mathbf{s}} e(x), \end{aligned}$$

где все перечисленные равенства выполнены для почти всех x .

В силу чего из равенства Парсеваля имеем

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta f(\cdot)\|_2^2 = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} |\theta^\vee(\mathbf{s}\mathbf{t})|^2 |\widehat{f}_{\mathbf{s}}|^2 = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \psi_\theta(\mathbf{s}\mathbf{t}) |\widehat{f}_{\mathbf{s}}|^2 \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d). \quad (1.2)$$

Функцию $\theta^\vee(\cdot)$ можно интерпретировать как ограничение на окружность радиуса единица так называемой *характеристической функции разностного оператора* Δ_t^θ , определяемой формулой

$$\chi_\theta(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $\theta^\vee(t) = \chi_\theta(e_1(t))$.

Заметим также, что если хотя бы одна из координат вектора $\mathbf{t}/\pi$ – иррациональное число, то

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \|\theta^\vee(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}. \quad (1.3)$$

В самом деле, без ограничения общности можно полагать, что иррациональна первая координата вектора $\mathbf{t}/\pi$. Тогда последовательность $\{st_1\}_{s \in \mathbb{Z}}$, взятая по модулю 2π , всюду плотна на $\mathbb{T}$ и, следовательно,

$$\|\theta^\vee(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \geq \sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} |\theta^\vee(\mathbf{s}\mathbf{t})| \geq \sup_{s \in \mathbb{Z}} |\theta^\vee(st_1)| = \|\theta^\vee(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})},$$

а значит, из (1.1) получаем

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} |\theta^\vee(\mathbf{s}\mathbf{t})| = \|\theta^\vee(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}. \quad (1.4)$$

Для дальнейшего необходимо также отметить следующий факт: если все числа θ_k вещественные, то из следующей цепочки равенств

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\tau) \right|^2 &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\tau) \right) \left(\overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(\tau)} \right) = \sum_{k, s \in \mathbb{Z}} \theta_k \theta_s e_k(\tau) e_s(-\tau) \\ &= \sum_{s, k \in \mathbb{Z}} \theta_s \theta_k e_s(-\tau) e_k(-(-\tau)) = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(-\tau) \right|^2 \end{aligned}$$

вытекает, что функция $\psi(\cdot) = \psi_\theta(\cdot) = |\theta^\vee(\cdot)|^2$ четная.

По последовательности θ и замкнутому множеству $T \subset [0, 2\pi]^d$ определим *обобщенный θ -модуль непрерывности*

$$\omega_\theta(f, T) := \max_{\mathbf{t} \in T} \|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta f(\cdot)\|_2 \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Аналогично, для заданной неотрицательной непрерывной 2π -периодической функции $\psi(\cdot)$ и замкнутого множества $T \subset [0, 2\pi]^d$ введем *обобщенный ψ -модуль непрерывности* по формуле

$$\bar{\omega}_\psi(f, T) := \max_{\mathbf{t} \in T} \sqrt{\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{s}\mathbf{t}) |\hat{f}_{\mathbf{s}}|^2}.$$

Из (1.2) получаем, что $\omega_\theta(f, T) = \bar{\omega}_\psi(f, T)$, если ψ и θ связаны равенством $\psi(\cdot) = |\theta^\vee(\cdot)|^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условия $\sum_k |\theta_k| < \infty$, используя критерий Коши, заключаем существование конечной борелевской меры $\sigma_t^\theta(\cdot)$ на $\mathbb{T}^d$, являющейся $*$ -слабым пределом частичных сумм ряда $\sum_k \theta_k \delta_{k\mathbf{t}}(\cdot)$. Здесь $\delta_{k\mathbf{t}}(\cdot)$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке $k\mathbf{t} \pmod{(2\pi)^d}$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\delta_{k\mathbf{t}} = f(k\mathbf{t} \pmod{(2\pi)^d}) \quad \forall f \in C(\mathbb{T}^d).$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\Delta_{\mathbf{t}}^\theta f(\mathbf{x}) = \sigma_t^\theta * f(\mathbf{x}) \quad \text{п.в. } \mathbf{x}$$

для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ и, следовательно,

$$\omega_\theta(f, T) \equiv \sup_{\mathbf{t} \in T} \|\Delta_{\mathbf{t}}^\theta\|_2 = \sup_{\mathbf{t} \in T} \|\sigma_t^\theta * f\|_2, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Поэтому, полагая $\sigma_{(t)}(\cdot) := \sigma_t^\theta(\cdot)$, получаем, что в случае $d = 1$ величина $\omega_\theta(f, [0, \delta])$ совпадает (при $p = 2$) с величиной (σ, p) -модуля непрерывности

$$\omega_{\sigma, p}(f, \delta) := \sup_{0 \leq t \leq \delta} \|\sigma_{(t)} * f\|_p,$$

предложенного Г. Шапиро в работе [2] (см. также [3], [4]).

1.2. Пусть Λ – собственное подмножество $\mathbb{Z}^d$, содержащее точку $\mathbf{0}$. Через $E_\Lambda(f) = E_\Lambda(f)_2$ обозначим величину наилучшего приближения элемента $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ функциями, спектр которых сосредоточен на множестве Λ ,

$$E_\Lambda(f)_2 = \sqrt{\sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} |\widehat{f}_{\mathbf{k}}|^2}.$$

Пусть $T \subset \mathbb{T}^d$ – замкнутое множество. Обозначим через $\varkappa_\theta^{(d)}(\Lambda, T)$ *точную константу* в неравенстве Джексона в $L_2(\mathbb{T}^d)$ с обобщенным θ -модулем непрерывности

$$E_\Lambda(f) \leq C \omega_\theta(f, T) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

То есть²

$$\varkappa_\theta^{(d)}(\Lambda, T) = \sup \left\{ \frac{E_\Lambda(f)}{\omega_\theta(f, T)} : f \in L_2(\mathbb{T}^d) \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что уже в случае $d = 1$ и классической разности можно предъявить последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ стремящихся к нулю положительных чисел такую, что ни для какого k отрезок $T_k = [0, \delta_k]$ не является экстремальным множеством в следующей задаче минимизации точной константы:

$$\sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega(f, T)} : f \in L_2(\mathbb{T}^d) \right\} \rightarrow \inf,$$

mes $T = \delta_k$, T – замкнутое подмножество $\mathbb{T}$ (см. [5]).

Аналогично, в случае, когда обобщенный модуль непрерывности задается функцией ψ , определим

$$\overline{\varkappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, T) := \sup \left\{ \frac{E_\Lambda(f)}{\overline{\omega}_\psi(f, T)} : f \in L_2(\mathbb{T}^d) \right\}.$$

Функция $\overline{\varkappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, \cdot)$ обладает монотонностью в следующем смысле:

$$A \subset B \implies \overline{\varkappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, A) \geq \overline{\varkappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, B). \quad (1.5)$$

Отметим, что если неотрицательная 2π -периодическая функция $\psi(t)$ непрерывна и обращается в нуль в точке $t = 0$, множество Λ конечно, то $\overline{\varkappa}_\psi^{(d)}(\Lambda, T) = +\infty$ для любого счетного замкнутого множества T (доказательство – см. лемму 3).

В случае $d = 1$ обозначим $\omega_\theta(f, \delta) := \omega_\theta(f, [0, \delta])$ и $\overline{\omega}_\psi(f, \delta) := \overline{\omega}_\psi(f, [0, \delta])$. Соответственно $\varkappa_\theta(n, \delta) := \varkappa_\theta^{(1)}(\{-n+1, \dots, n-1\}, [0, \delta])$ и $\overline{\varkappa}_\psi(n, \delta) := \overline{\varkappa}_\psi^{(1)}(\{-n+1, \dots, n-1\}, [0, \delta])$, $n \in \mathbb{N}$.

В случае, когда $d \in \mathbb{N}$ произвольно, но последовательность θ соответствует классической разности порядка r , вместо $\varkappa_\theta^{(d)}(\Lambda, T)$ будем писать $\varkappa_r^{(d)}(\Lambda, T)$.

²Здесь и далее будем считать, что $0/0 = 0$; $c/0 = +\infty$, если $c > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Минимальной константой в неравенстве Джексона в $L_2(\mathbb{T}^d)$ с обобщенным ψ -модулем непрерывности* назовем величину

$$\mathcal{J}_\psi^{*(d)}(\Lambda) := \min\{\mathcal{J}_\psi^{(d)}(\Lambda, T) : T \subset \mathbb{T}^d, T \text{ замкнуто}\}.$$

Из свойства (1.5) немедленно следует, что $\mathcal{J}_\psi^{*(d)}(\Lambda) = \mathcal{J}_\psi^{(d)}(\Lambda, [0, 2\pi]^d)$. В случае неравенства Джексона с классическим модулем непрерывности r -го порядка эту константу будем обозначать через $\mathcal{J}_r^{*(d)}(\Lambda)$.

1.3. Всюду в этом пункте $d = 1$. Пусть $i(n)$ обозначает количество единиц в двоичном представлении числа $n \in \mathbb{N}$ и

$$\gamma_n := \begin{cases} 0, & \text{если } i(n) \equiv 0 \pmod{2}; \\ 1, & \text{если } i(n) \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ известна под названием *последовательности Туэ–Морса*³ [7], [8]. Отметим некоторые ее свойства. Во-первых, по индукции нетрудно вывести, что

$$\prod_{k=0}^{r-1} (1 - z^{2^k}) = 1 + \sum_{k=1}^{2^r-1} (-1)^{\gamma_k} z^k \quad (1.6)$$

при всех $r \in \mathbb{N}$. С другой стороны, числа γ_k можно получить с помощью следующей процедуры.

Будем последовательно строить слова u_i, v_i из алфавита, состоящего из двух букв: “0” и “1”, $u_0 := (0)$, $v_0 := (1)$, $u_{i+1} := (u_i, v_i)$, $v_{i+1} := (v_i, u_i)$. Тогда $u_r = (0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2^r-1})$.

Конечно-разностный оператор

$$\tilde{\Delta}_t^r f(x) = \tilde{\Delta}_t^r(f, x) := f(x) + \sum_{k=1}^{2^r-1} (-1)^{\gamma_k} f(x + kt)$$

назовем *разностью Туэ–Морса порядка r* . Очевидно, что $\tilde{\Delta}_t^r f = \Delta_t^{\tilde{\theta}} f \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$, где

$$\tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_k(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \notin \{0, \dots, 2^r - 1\}; \\ (-1)^{\gamma_k}, & \text{если } k \in \{0, \dots, 2^r - 1\}. \end{cases}$$

(Здесь $\gamma_0 := 0$.) При этом из формулы (1.6) получим, что характеристическая функция для $\tilde{\Delta}_t^r$ есть многочлен $\prod_{k=0}^{r-1} (1 - z^{2^k})$, и, значит,

$$\tilde{\theta}^\vee(x) = \chi_{\tilde{\theta}}(e_1(x)) = 1 + \sum_{k=1}^{2^r-1} (-1)^{\gamma_k} e_k(x) = \prod_{k=0}^{r-1} (1 - e_{2^k}(x)),$$

а следовательно,

$$\psi_r(x) := |\tilde{\theta}^\vee(x)|^2 = 2^{2r} \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2(2^{k-1}x) = 2^r \prod_{k=0}^{r-1} (1 - \cos(2^k x)). \quad (1.7)$$

³ Иногда эту последовательность называют *последовательностью Пруэ–Туэ–Морса*, или даже *последовательностью Пруэ*, принимая во внимание тот факт, что некоторые ее свойства были изучены еще в работе [6].

Отметим одно важное свойство оператора $\tilde{\Delta}_t^r$: его L_2 -норма не превосходит $(2/\sqrt{3}) \cdot 3^{r/2}$ (см. лемму 7). Для сравнения “сосчитаем” при t , не соизмеримых с π , L_2 -норму оператора “классической” разности Ньютона–Грегори порядка r

$$\Delta_t^r f(\cdot) = (\Delta_t)^r f(\cdot) = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k f(\cdot + kt),$$

характеристическая функция которой, очевидно, совпадает с многочленом $\chi(z) := (1-z)^r$. Имеем $\theta^\vee(t) = \chi(e_1(t)) = (1 - e_1(t))^r$. Поэтому $|\theta^\vee(t)| = 2^r |\sin^r(t/2)|$ и в силу (1.4)

$$\|\Delta_t^r\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \|\theta^\vee(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = \|2^r \sin^r(\cdot/2)\|_{C(\mathbb{T})} = 2^r.$$

Выведем теперь формулу, связывающую разность Туэ–Морса порядка r с классической разностью Δ_t^r .

Для этого введем в рассмотрение оператор сдвига $E_t[f(\cdot)] := f(\cdot + t)$. Ясно, что оператор E_t линейный и $E_{kt} = (E_t)^k$. Из формулы (1.6) получим представление

$$\tilde{\Delta}_t^r = \prod_{k=0}^{r-1} \Delta_{2^k t} = \prod_{k=0}^{r-1} (I - (E_t)^{2^k}),$$

где I – тождественный оператор. При этом $I - (E_t)^{2^k} = (\sum_{s=0}^{2^k-1} (E_t)^s)(I - E_t)$ и, значит,

$$\tilde{\Delta}_t^r f = \left(\prod_{k=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{2^k-1} (E_t)^s \right) (I - E_t)^r f = \left(\prod_{k=0}^{r-1} \sum_{s=0}^{2^k-1} (E_t)^s \right) \Delta_t^r f. \quad (1.8)$$

Из последней формулы заключаем, что разность Туэ–Морса порядка r обращается в нуль на алгебраических многочленах степени не выше $r-1$.

Для удобства записи θ -модуль непрерывности функции f , отвечающий разности Туэ–Морса порядка r и множеству $[0, \delta]$, $\delta > 0$, будем обозначать $\tilde{\omega}_r(f, \delta)$.

Кратко перечислим некоторые важные свойства разностей Туэ–Морса, имеющие свои аналоги для “классических” разностей (см. леммы 6 и 8):

- a) $\tilde{\Delta}_h^r f(x) = (-1)^r \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+2h} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+2^2 h} dt_3 \cdots \int_{t_{r-1}}^{t_{r-1}+2^{r-1} h} f^{(r)}(t_r) dt_r,$
 $f \in W_1^r(\mathbb{T}), h > 0;$ ⁴
- b) $\int_{\mathbb{T}} f(x) \tilde{\Delta}_{-h}^r \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{T}} \tilde{\Delta}_h^r f(x) \varphi(x) dx, f, \varphi \in L_2(\mathbb{T});$
- c) пусть $f \in L_p([t_1, t_2])$ и $[\alpha, \beta] \subset (t_1, t_2)$, тогда $\|\tilde{\Delta}_h^r(f, \cdot)\|_{L_p([\alpha, \beta])} = o(h^r),$
 $h \rightarrow +0, \iff f(x) = P(x)$ при п.в. $x \in [\alpha, \beta]$, где $P \in \mathcal{P}_{r-1}$ – алгебраический многочлен степени не выше $r-1;$ ⁵

⁴Здесь и далее $W_p^r(\mathbb{T})$ обозначает пространство Соболева 2π -периодических функций, $(r-1)$ -я производная которых абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$.

⁵Норму в пространстве $L_p(I)$, где I – конечный интервал, мы определяем по формуле $\|f\|_{L_p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$

- d) $\tilde{\omega}_r(f, t) \leq 2^{r(r-1)/2} t^r \|f^{(r)}\|_2$, $f \in W_2^r(\mathbb{T})$, $t > 0$;
 e) $\tilde{\omega}_r(f, n\delta) \leq n^r \tilde{\omega}_r(f, \delta)$, $f \in L_2(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$;
 f) $\tilde{\omega}_r(f, \delta) \stackrel{\delta \rightarrow 0^+}{\sim} o(\delta^r) \implies \tilde{\omega}_r(f, \cdot) \equiv 0$, $f \in L_2(\mathbb{T})$;
 g) если $f \in W_2^r(\mathbb{T})$, $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, число $t/(2\pi)$ иррационально и имеет ограниченные неполные частные,⁶ то существует функция $g \in L_2(\mathbb{T})$ такая, что

$$f(x) = \tilde{\Delta}_t^r g(x), \quad \text{п.в. } x.$$

Отметим, наконец, что разность Туэ–Морса есть частный случай (при $a = 2$) конечно-разностного оператора $\tilde{\Delta}_t^{a,r}$ (который будем называть *обобщенной разностью Туэ–Морса*), задаваемого формулой

$$\tilde{\Delta}_t^{a,r} f(x) = \tilde{\Delta}_t^{a,r}(f, x) := \left(\prod_{k=0}^{r-1} \Delta_{a^k t} \right) f(x).$$

В другом частном случае, $a = 1$, разность $\tilde{\Delta}_t^{a,r} f(x)$ совпадает с классической разностью $\Delta_t^r f(x)$.

Для простоты будем рассматривать лишь натуральные a . Тогда характеристическая функция введенного разностного оператора есть алгебраический многочлен $\chi_{a,r}(z) = \prod_{k=0}^{r-1} (1 - z^{a^k})$ и соответственно

$$\begin{aligned} \psi_{a,r}(t) &:= |\chi_{a,r}(e_1(t))|^2 = \left| \prod_{k=0}^{r-1} (1 - e_{a^k}(t)) \right|^2 \\ &= 2^{2r} \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2 \left(\frac{a^k}{2} t \right) = 2^r \prod_{k=0}^{r-1} (1 - \cos(a^k t)). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Через $\tilde{\omega}_{a,r}(\cdot, \cdot)$ обозначим модуль непрерывности, соответствующий обобщенной разности Туэ–Морса, а также введем обозначение для точной константы в неравенстве Джексона с обобщенным модулем Туэ–Морса

$$\tilde{\mathcal{K}}_{a,r}(n, \delta) := \sup \left\{ \frac{E_n(f)_2}{\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)} : f \in L_2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Приведем некоторые известные результаты о точных константах в неравенстве Джексона в $L_2(\mathbb{T})$ с классическими модулями непрерывности, близкие к теме исследований настоящей работы.

⁶ Напомним, что ограниченность неполных частных числа $\alpha > 0$ означает равномерную ограниченность коэффициентов a_k разложения числа α в непрерывную дробь,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

ТЕОРЕМА А [9]. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\delta \geq \pi/n$. Тогда

$$\kappa_1(n, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [10] доказана неулучшаемость оценки точной константы в теореме А в следующем смысле: $\kappa_1(n, \delta) > 1/\sqrt{2}$, если $\delta \in (0, \pi/n)$ и $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА В [11]. Если $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, то

$$\kappa_r\left(n, \frac{2\pi}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2r}^r}};$$

если при этом $n > r$, то

$$\kappa_r\left(n, \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{C_{2r}^r}}.$$

ТЕОРЕМА С [12]. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда

$$\kappa_r(1, 2\pi) = \frac{1}{\sqrt{C_{2r}^r}}.$$

Отметим здесь, что

$$C_{2r}^r = \sum_{k=0}^r (C_r^k)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4^r \sin^{2r}\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{1,r}(x) dx. \quad (1.10)$$

ТЕОРЕМА D [13].⁷ Пусть $V \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное выпуклое замкнутое центрально-симметричное тело, $\bar{V} = V \cap \mathbb{Z}^d$. Тогда

$$\kappa_1^{*(d)}(\bar{V}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Укажем теоремы об оценках снизу точных констант в неравенстве Джексона в $L_2(\mathbb{T})$ с обобщенным модулем непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Через $C^+(\mathbb{T})$ обозначим класс непрерывных неотрицательных 2π -периодических функций, не всюду равных нулю, а через $C_0^+(\mathbb{T})$ — множество функций из $C^+(\mathbb{T})$, обращающихся в нуль в точке $x = 0$, т.е.

$$C_0^+(\mathbb{T}) := \{f(\cdot) \in C(\mathbb{T}) : f(\cdot) \geq 0, f(0) = 0, f(\cdot) \not\equiv 0\}.$$

⁷Формально, в цитируемой работе исследуется проблема приближения функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$ классом целых функций экспоненциального типа. Однако стандартными приемами периодизации легко трансформировать соответствующее утверждение в нижеформулированную теорему.

Определим также класс функций

$$\Psi^V(\mathbb{T}) := \left\{ \psi(\cdot) \in C_0^+(\mathbb{T}) : \psi(-x) \equiv \psi(x), \right. \\ \left. \frac{1}{t} \int_0^t \psi(x) dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) dx \quad \forall t \in (0, \pi) \right\}.$$

Класс $\Psi^V(\mathbb{T})$ был введен С. Н. Васильевым в работе [14]. В этой работе, в частности, доказано, что

$$\mathfrak{K}_\psi(n, \delta) \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}, \quad \delta \geq \frac{7}{5} \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Четная функция $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$ принадлежит классу $\Psi^V(\mathbb{T})$, например, когда она монотонно не убывает на $[0, \pi]$. В частности, функция $\psi^r(t) = 4^r \sin^{2r}(t/2)$, соответствующая классической разности порядка r , принадлежит $\Psi^V(\mathbb{T})$. Однако, к примеру, для функции $\psi_r(t) = 4^r \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2(2^{k-1}t)$, отвечающей разности Туэ–Морса, можно показать, что при $r \geq 2$ условие

$$\frac{1}{t} \int_0^t \psi_r(x) dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi_r(x) dx \quad \forall t \in (0, \pi)$$

уже не выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, что при $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ функция

$$\psi_r(t) = 4^r \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2(2^{k-1}t)$$

не принадлежит классу $\Psi^V(\mathbb{T})$. Докажем, что для таких r справедливо представление

$$\frac{1}{\pi - \varepsilon} \int_0^{\pi - \varepsilon} \psi_r(x) dx = J_\psi + \frac{\varepsilon}{\pi} J_\psi + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

где $J_\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi_r(x) dx$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi - \varepsilon} \int_0^{\pi - \varepsilon} \psi_r(x) dx &= \frac{1}{\pi - \varepsilon} \left(\int_0^\pi - \int_{\pi - \varepsilon}^\pi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \right)^{-1} \left(\int_0^\pi - \int_{\pi - \varepsilon}^\pi \right) = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi} + o(\varepsilon) \right) \left(\int_0^\pi - \int_{\pi - \varepsilon}^\pi \right) \\ &= J_\psi + \frac{\varepsilon}{\pi} J_\psi + o(\varepsilon) - \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi} + o(\varepsilon) \right) \int_{\pi - \varepsilon}^\pi \psi_r(x) dx. \end{aligned}$$

Для доказательства (1.11) достаточно показать, что $\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \psi_r(x) dx = O(\varepsilon^{2r-1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$. В последнем интеграле сделаем замену переменного $z = \pi - x$ и обозначим z снова через x :

$$\begin{aligned} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \psi_r(x) dx &= 2^r \int_0^{\varepsilon} (1 + \cos x) \prod_{k=1}^{r-1} (1 - \cos(2^k x)) dx \\ &= 2^r \int_0^{\varepsilon} (2 + o(x)) \prod_{k=1}^{r-1} (2^{2k-1} x^2 + o(x^2)) dx \\ &= 2^{r+1} \cdot 2^{1+3+5+\dots+(2r-1)} \int_0^{\varepsilon} (x^{2(r-1)} + o(x^{2(r-1)})) dx \\ &= C_r \cdot \varepsilon^{2r-1} + o(\varepsilon^{2r-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (1.11) доказано. Из (1.11), в частности, вытекает, что для $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ существует ε_0 такое, что для любого ε из промежутка $(0, \varepsilon_0)$ справедливо

$$\frac{1}{\pi - \varepsilon} \int_0^{\pi-\varepsilon} \psi_r(x) dx > J_{\psi}.$$

Тем самым показано, что функция $\psi_r(x)$ не принадлежит классу $\Psi^V(\mathbb{T})$.

ТЕОРЕМА Е [14]. Пусть $\psi \in \Psi^V(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда

$$\varkappa_{\psi}(n, \delta) \geq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx + \omega\left(\psi, \frac{\delta}{2}\right)_{\infty} \right)^{-1/2}.$$

Здесь $\omega(\psi, h)_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq h} \|\Delta_t \psi(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}$ — обычный “равномерный” модуль непрерывности.

ТЕОРЕМА F [5].⁸ Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^r \theta_k = 0$, $\theta_k = 0$ при $k \notin \{0, \dots, r\}$, $0 < \delta < 2\pi/r$. Тогда

$$\varkappa_{\theta}(n, \delta) \geq \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^r \theta_k^2}}.$$

Приведем результат о точной константе в неравенстве Джексона в $L_2(\mathbb{T})$ с модулем Туэ–Морса.

ТЕОРЕМА G [15]⁹. Если $n \in \mathbb{N}$, $r = 2, 3, \dots, 7$,

$$n > \frac{9}{1 + 2\sqrt{r}} 2^{r-1}, \quad \frac{9}{1 + 2\sqrt{r}} \frac{\pi}{n} \leq \delta < \frac{\pi}{2^{r-1}},$$

то

$$\tilde{\varkappa}_{2,r}(n, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2^r}}.$$

⁸ Для простоты изложения мы приводим теорему F в частном случае конечных разностей с постоянными коэффициентами. В цитируемой статье доказано аналогичное утверждение для конечных разностей, коэффициенты которых являются непрерывными функциями шага t и удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^r \theta_k(0) = 0$.

⁹ В указанной работе анонсирована теорема, утверждающая справедливость этого равенства и в случае, если в определении точной константы рассматривать приближение произвольным подпространством размерности $2n - 1$.

Отметим, что $2^r = 1^2 + \sum_{k=1}^{2^r-1} |(-1)^{\gamma_k}|^2$, где γ_k – последовательность Туэ–Морса.

Перейдем к формулировке основных утверждений работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Будем говорить, что множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ принадлежит классу Λ_*^d , если оно содержит точку $\mathbf{0}$ и его пересечение хотя бы с одной из координатных полуосей – конечное множество. Таким образом,

$$\Lambda_*^d = \{ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d : \mathbf{0} \in \Lambda, \exists j (\text{card}(\Lambda \cap \epsilon_j^+) < \infty \text{ или } \text{card}(\Lambda \cap \epsilon_j^-) < \infty) \},$$

где $\epsilon_j^{+(-)} = \{ \lambda \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq (\leq) 0, \lambda_k = 0, k \neq j \}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $\Lambda \in \Lambda_*^d$. Тогда

$$\varkappa_\psi^{(d)}(\Lambda) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

Полагая $\psi(x) = 4 \sin^2(x/2)$, в качестве следствия из этой теоремы получаем теорему D.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $\psi(-x) \equiv \psi(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta \geq \pi$. Тогда

$$\varkappa_\psi(n, \delta) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

Из этого утверждения очевидным образом вытекает теорема E.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Тогда

$$\varkappa_r(n, \pi) = \frac{1}{\sqrt{C_{2r}^r}}.$$

Это предложение, в частности, усиливает теорему C, а также позволяет снять ограничение $n > r$ во второй части теоремы B.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть T – замкнутое подмножество $[0, 2\pi]^d$, $\Lambda \in \Lambda_*^d$, $\{\theta_s\}_{s \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, $0 < \sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta_s| < \infty$, $\sum_{s \in \mathbb{Z}} \theta_s = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\varkappa_\theta^{(d)}(\Lambda, T) \geq \frac{1}{\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta_s|^2}};$$

причем

$$\varkappa_\theta^{(d)}(\Lambda, [0, 2\pi]^d) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta_s|^2}}.$$

В случае $d = 1$ из этого следствия получаем теорему F.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Для $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$ положим

$$J_\psi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi x} \psi(\tau) d\tau, \quad \bar{J}_\psi(x) := \min_{0 \leq \delta \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi\delta}^{2\pi(\delta+x)} \psi(\tau) d\tau.$$

Нетрудно видеть, что

$$\bar{J}_\psi(1) = J_\psi(1) = J_\psi := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\tau) d\tau.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $\psi(-x) \equiv \psi(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$. Тогда

$$\mathfrak{K}_\psi\left(n, \gamma \frac{\pi}{n}\right) \leq \left(\min_{[\gamma]/2 \leq x \leq [\gamma]/2+1} \frac{J_\psi(x)}{x} \right)^{-1/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $\psi(-x) \equiv \psi(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$. Тогда

$$\mathfrak{K}_\psi\left(n, \gamma \frac{\pi}{n}\right) \leq \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

Введем обозначение $\square_n := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |k_j| < n, j = 1, \dots, d\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$. Тогда

$$\mathfrak{K}_\psi^{(d)}\left(\square_n, \left[0, \gamma \frac{2\pi}{n}\right]^d\right) \leq \left(\min_{[\gamma] \leq x \leq [\gamma]+1} \frac{\bar{J}_\psi(x)}{x} \right)^{-1/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$. Тогда

$$\mathfrak{K}_\psi^{(d)}\left(\square_n, \left[0, \gamma \frac{2\pi}{n}\right]^d\right) \leq \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть $a \in \mathbb{N}$ нечетно, $a \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2^r}} \leq \mathfrak{K}_{a,r}\left(n, \gamma \frac{\pi}{n}\right) \leq \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}} \frac{1}{\sqrt{2^r}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Определим класс функций Υ . Будем писать $\xi(\cdot) \in \Upsilon$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\xi(\cdot) \in C(\mathbb{R})$;
- 2) $\xi(x) \geq 0 \ \forall x$;
- 3) $\xi(x) \equiv \xi(\pi + x)$, т.е. функция $\xi(\cdot)$ — π -периодична;
- 4) $\xi(x) \equiv \xi(-x)$, т.е. $\xi(\cdot)$ четная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть $\xi(\cdot) \in \Upsilon$. Обозначим

$$h_\xi(x) := - \int_0^\pi \cos(xt) \xi(xt) \sin t \, dt. \quad (1.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть $\mathbf{b} = \{b_k\}$ – заданный конечный набор положительных чисел. Обозначим через $\Psi(\mathbf{b})$ множество четных функций $\psi(\cdot) \in C_0^+(\mathbb{T})$, для которых справедливо представление

$$\int_0^\pi \psi(xt) \frac{\sin t}{2} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \, dt + \sum_k h_{\xi_k}(b_k x) \quad \forall x \geq \widehat{b} := \max_k \frac{1}{b_k} \quad (1.13)$$

с некоторыми $\xi_k(\cdot) \in \Upsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Введенные выше функции $\psi_{a,r}(\cdot)$ при четных значениях параметра a принадлежат классу $\Psi(\mathbf{b})$ при $\mathbf{b} = (a^{r-1}, a^{r-2}, \dots, a^0)$ (см. лемму 15). С другой стороны, например, функция $\psi_{1,r}(t) := 2^r(1 - \cos t)^r$, “соответствующая” классическому модулю непрерывности порядка r , при $r \geq 2$ не принадлежит классу $\Psi(\mathbf{b})$ ни для какого набора $\mathbf{b}$.¹⁰

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{b} = \{b_k\}$ – конечный набор положительных чисел, $\psi \in \Psi(\mathbf{b})$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\overline{\mathfrak{K}}_\psi(n, \delta) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \, dx \right)^{-1/2}$$

при всех $\delta \geq \min\{\widehat{b}\pi/n, \pi\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть $a \in \mathbb{N}$ четно, $n, r \in \mathbb{N}$, $\delta \geq \pi/n$. Тогда

$$\widetilde{\mathfrak{K}}_{a,r}(n, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2^r}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $r = 1$ из следствия 1.7 вытекает теорема А, а при $a = 2$ – теорема G.

¹⁰ Действительно, в лемме 13 доказано, что $h_\xi(y) \geq 0$ при всех $\xi \in \Upsilon$ и $y \geq 1$. Поэтому $\sum_k h_{\xi_k}(b_k x) \geq 0 \quad \forall x \geq \widehat{b}$. С другой стороны,

$$\int_0^\pi \psi_{1,r}(t) \frac{\sin t}{2} \, dt \equiv 2^r \int_0^\pi (1 - \cos t)^r \frac{\sin t}{2} \, dt = \frac{4^r}{r+1} < C_{2r}^r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{1,r}(t) \, dt$$

и, следовательно, представление (1.13) невозможно.

§ 2. Доказательства теорем 1–3 и следствий из них

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для заданного замкнутого подмножества $T \subset [0, 2\pi]^d$ обозначим через $\mathcal{M}(T)$ пространство конечных борелевских мер на T , $\mathcal{M}^+(T) = \{\mu \in \mathcal{M}(T) : \mu \geq 0\}$ – подмножество неотрицательных мер из $\mathcal{M}(T)$, $B\mathcal{M}^+(T) = \{\mu \in \mathcal{M}^+(T) : \mu(T) \leq 1\}$.

Следующие две леммы дают двойственное описание точной константы в неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности. Используемая при их доказательстве идея редукции проблемы нахождения величины точной константы для неравенства Джексона в L_2 к задаче поиска расстояния от точки до выпуклого множества в пространстве непрерывных функций принадлежит, очевидно, В. В. Арестову (см., например, [16]).

ЛЕММА 1. Пусть T – замкнутое подмножество $[0, 2\pi]^d$, $\psi(\cdot) \in C^+(\mathbb{T})$, $\Lambda \subsetneq \mathbb{Z}^d$. Тогда

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \frac{\max_{\mathbf{t} \in T} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t})}{\sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}}} : c_{\mathbf{k}} \geq 0, 0 < \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} < \infty \right\} \\ &= \max_{\mu \in B\mathcal{M}^+(T)} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $C(T)$ введем следующее множество функций:

$$A_\psi := \left\{ g \in C(T) : g(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}), c_{\mathbf{k}} \geq 0, \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} = 1 \right\}.$$

Нетрудно заметить, что A_ψ – выпуклое множество. Из определения A_ψ вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \frac{\max_{\mathbf{t} \in T} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t})}{\sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}}} : c_{\mathbf{k}} \geq 0, 0 < \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} < \infty \right\} \\ &= \inf \{ \|g(\cdot)\|_{C(T)} : g(\cdot) \in A_\psi \}. \end{aligned}$$

По формуле двойственности для расстояния от точки до выпуклого множества в нормированном пространстве [17]

$$\inf \{ \|g\|_{C(T)} : g \in A_\psi \} = \max \left\{ \inf_{g \in A_\psi} \langle g^*, g \rangle : g^* \in C^*(T), \|g^*\|_* \leq 1 \right\}.^{11}$$

По теореме Рисса–Радона об общем виде линейного непрерывного функционала на $C(T)$ имеем $\langle g^*, g \rangle = \int_T g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t})$, где $\mu \in \mathcal{M}(T)$. Следовательно,

$$\inf \{ \|g\|_{C(T)} : g \in A_\psi \} = \max \left\{ \inf_{g \in A_\psi} \int_T g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) : \mu(\cdot) \in \mathcal{M}(T), \|\mu\|_* \leq 1 \right\}.$$

¹¹Здесь $C^*(T)$ – пространство, сопряженное к $C(T)$, и $\|\cdot\|_*$ – стандартная норма в $C^*(T)$.

При этом

$$\begin{aligned} \inf_{g \in A_\psi} \int_T g(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) &= \inf \left\{ \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) : c_{\mathbf{k}} \geq 0, \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} = 1 \right\} \\ &= \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

В заключение осталось заметить, что так как функция ψ неотрицательная, то

$$\max_{\mu \in \mathcal{M}(T), \|\mu\|_* \leq 1} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \max_{\mu \in B\mathcal{M}^+(T)} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть T – замкнутое подмножество $[0, 2\pi]^d$, $\psi(\cdot) \in C^+(\mathbb{T})$, $\Lambda \subsetneq \mathbb{Z}^d$. Тогда

$$\mathfrak{Z}_\psi^{(d)}(\Lambda, T) = \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+(T)} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \right)^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\overline{\omega}_\psi^2(f, T) = \max_{\mathbf{t} \in T} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}_{\mathbf{k}}|^2 \psi(\mathbf{k}\mathbf{t})$, то

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Z}_\psi^{(d)}(\Lambda, T))^2 &= \sup \left\{ \frac{\sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}}}{\max_{\mathbf{t} \in T} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) c_{\mathbf{k}}} : c_{\mathbf{k}} \geq 0, 0 < \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} < \infty \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}}}{\max_{\mathbf{t} \in T} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) c_{\mathbf{k}}} : c_{\mathbf{k}} \geq 0, 0 < \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} < \infty \right\} \\ &= \left(\inf \left\{ \frac{\max_{\mathbf{t} \in T} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t})}{\sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}}} : c_{\mathbf{k}} \geq 0, 0 < \sum_{\mathbf{k} \notin \Lambda} c_{\mathbf{k}} < \infty \right\} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму 1, получаем искомое равенство.

ЛЕММА 3. Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ конечное и содержит 0, замкнутое множество $T \subset [0, 2\pi]^d$ счетно. Тогда

$$\mathfrak{Z}_\psi^{(d)}(\Lambda, T) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 нам достаточно доказать равенство

$$\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+(T)} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = 0.$$

Занумеруем в произвольном порядке точки множества T , $T = \{2\pi \mathbf{t}_s\}_{s=1}^\infty$. Тогда

$$\int_T \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \sum_{s=1}^\infty \psi(2\pi \mathbf{k}\mathbf{t}_s) \alpha_s,$$

где $\alpha_s = \mu(2\pi \mathbf{t}_s) \geq 0$.

Из равномерной относительно $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ сходимости ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \psi(2\pi \mathbf{k} \mathbf{t}_s) \alpha_s$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{s=M+1}^{\infty} \psi(2\pi \mathbf{k} \mathbf{t}_s) \alpha_s < \varepsilon/2 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$.

Так как функция $\psi(\cdot)$ по условию непрерывна, 2π -периодична и $\psi(0) = 0$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $\psi(x) < \varepsilon/2$, как только $\|x/(2\pi)\| < \delta$. (Здесь $\|y\|$ обозначает расстояние от y до ближайшего к нему целого числа.)

По теореме Дирихле о совместных диофантовых приближениях [18; гл. 2, §1], примененной к набору $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_M\}$, существует бесконечная последовательность $\{\mathbf{k}_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}^d$ такая, что

$$\left\| \frac{1}{2\pi} (2\pi \mathbf{t}_s \mathbf{k}_l) \right\| = \|\mathbf{t}_s \mathbf{k}_l\| < \delta \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq s \leq M.$$

(Без ограничения общности будем полагать, что $|\mathbf{k}_l| > \max\{|\mathbf{k}| : \mathbf{k} \in \Lambda\}$ при всех l .) Отсюда заключаем, что $0 \leq \psi(2\pi \mathbf{t}_s \mathbf{k}_l) < \varepsilon/2 \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq s \leq M$, и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^M \psi(2\pi \mathbf{t}_s \mathbf{k}_l) \alpha_s \leq \max_{1 \leq s \leq M} \psi(2\pi \mathbf{t}_s \mathbf{k}_l) \sum_{s=1}^M \alpha_s < \frac{\varepsilon}{2} \int_T d\mu(\mathbf{t}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Значит,

$$0 \leq \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_T \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_T \psi(\mathbf{k}_l \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) < \varepsilon.$$

Учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$, получаем искомое равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае $d = 1$ и классической разности эта лемма доказана в работе [19].

Для сокращения записи везде ниже $B.\mathcal{M}^+ := B.\mathcal{M}^+([0, 2\pi]^d)$.

ЛЕММА 4 (основная). Пусть $\psi \in C_0^+(\mathbb{T})$, $\Lambda \in \Lambda_*^d$. Тогда

$$\max_{\mu \in B.\mathcal{M}^+} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем полагать, что множество $\Lambda \cap \{\mathbf{k} : \mathbf{k} = (k, 0, \dots, 0), k \in \mathbb{Z}_+\}$ конечно.

Пусть $K = \max\{k_1 : \mathbf{k} = (k_1, 0, \dots, 0) \in \Lambda\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) &\leq \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda, \mathbf{k} = (k, 0, \dots, 0)} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \\ &\leq \inf_{k > K, k \in \mathbb{Z}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k t_1) d\mu(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Представим $\int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k t_1) d\mu(\mathbf{t})$ в виде суммы

$$\int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k t_1) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{\Omega_1} \psi(k t_1) d\mu(\mathbf{t}) + \int_{\Omega_2} \psi(k t_1) d\mu(\mathbf{t}),$$

где $\Omega_1 = \{t \in [0, 2\pi]^d : t_1/\pi \in \mathbb{Q}\}$, $\Omega_2 = [0, 2\pi]^d \setminus \Omega_1$, $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел.

Занумеруем точки множества $[0, 2\pi] \cap 2\pi\mathbb{Q}$ произвольным образом, $[0, 2\pi] \cap 2\pi\mathbb{Q} = \{2\pi p_s/q_s\}_{s=1}^\infty$. (Здесь $p_s \in \mathbb{Z}$, $q_s \in \mathbb{N}$.)

Из свойства σ -аддитивности интеграла получаем, что

$$\int_{\Omega_1} \psi(kt_1) d\mu(t) = \sum_{s=1}^\infty \psi\left(k2\pi \frac{p_s}{q_s}\right) \alpha_s,$$

где $0 \leq \alpha_s = \mu(\{t \in [0, 2\pi]^d : t_1 = 2\pi p_s/q_s\})$, $\sum_{s=1}^\infty \alpha_s \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{s=M+1}^\infty \alpha_s < \frac{\varepsilon}{\|\psi(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}}.$$

Тогда

$$\sum_{s=M+1}^\infty \psi\left(2\pi k \frac{p_s}{q_s}\right) \alpha_s < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Положим $Q = \text{НОК}\{q_1, \dots, q_M\}$.¹² Тогда $\psi(l2\pi Q p_s/q_s) = \psi(0) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq M$. Следовательно, $\sum_{s=1}^M \psi(l2\pi Q p_s/q_s) \alpha_s = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}$ и

$$\int_{\Omega_1} \psi(lQt_1) d\mu(t) = \sum_{s=M+1}^\infty \psi\left(l2\pi Q \frac{p_s}{q_s}\right) \alpha_s \leq \varepsilon \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

откуда

$$\begin{aligned} \inf_{l \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(lQt_1) d\mu(t) &= \inf_{l \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega_1} \psi(lQt_1) d\mu(t) + \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) \right) \\ &\leq \varepsilon + \inf_{l \in \mathbb{N}} \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) = \varepsilon + \inf_{N \in \mathbb{N}} \min_{1 \leq l \leq N} \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t). \end{aligned}$$

Введем функцию

$$\bar{\psi}_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi(lx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\min_{1 \leq l \leq N} \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) \leq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_2} \psi(lQt_1) d\mu(t) = \int_{\Omega_2} \bar{\psi}_N(Q t_1) d\mu(t).$$

Так как при каждом $t_1 \in [0, 2\pi] \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ последовательность $\{lQt_1 \pmod{2\pi}\}_{l=1}^\infty$ равномерно распределена на $\mathbb{T}$, то по критерию Вейля о равномерном распределении [20; гл. 4, § 4]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\psi}_N(Q t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \quad \forall t_1 \notin 2\pi\mathbb{Q}.$$

¹²Без ограничения общности $Q > K$.

При этом $|\bar{\psi}_N(Q t_1)| \leq \max_{1 \leq l \leq N} |\psi(l Q t_1)| \leq \|\psi(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}$, т.е. $|\bar{\psi}_N(Q t_1)|$ равномерно ограничено по t_1 и N .

Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе [21; гл. 5, §5]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \bar{\psi}_N(Q t_1) d\mu(\mathbf{t}) = \int_{\Omega_2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right) d\mu(\mathbf{t}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx.$$

Так как $Q \geq K + 1$, то

$$\begin{aligned} \inf_{k \geq K+1, k \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k t) d\mu(\mathbf{t}) &\leq \inf_{l \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(l Q t_1) d\mu(\mathbf{t}) \\ &\leq \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \bar{\psi}_N(Q t_1) d\mu(\mathbf{t}) \leq \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ делаем вывод о справедливости оценки

$$\inf_{k \geq K+1, k \in \mathbb{N}} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(k t_1) d\mu(\mathbf{t}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx.$$

Итак, резюмируя проведенные рассуждения, приходим к неравенству

$$\inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \quad \forall \mu \in B\mathcal{M}^+.$$

С другой стороны,

$$\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \geq \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{(2\pi)^d}.$$

При этом для всякого $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{k} \neq 0$ (для определенности будем считать, что $k_1 \neq 0$), в силу 2π -периодичности $\psi(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{(2\pi)^d} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(k_1 t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_d \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(k_1 t_1) dt_1 = \frac{1}{2\pi k_1} \int_0^{2\pi k_1} \psi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу леммы 2

$$\overline{\mathfrak{K}}_{\psi}^{(d)}(\Lambda, [0, 2\pi]^d) = \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+} \inf_{\mathbf{k} \notin \Lambda} \int_{[0, 2\pi]^d} \psi(\mathbf{k} \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \right)^{-1/2}.$$

Следовательно, применяя лемму 4, приходим к искомому равенству.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.1. По определению

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_\psi(f, 2\pi)^2 &= \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(st) |\widehat{f}_s|^2 \\ &= \max \left\{ \max_{0 \leq t \leq \pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(st) |\widehat{f}_s|^2, \max_{\pi \leq t \leq 2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(st) |\widehat{f}_s|^2 \right\}.\end{aligned}$$

В силу четности и 2π -периодичности функции ψ имеем тождество $\psi(s(2\pi - \tau)) \equiv \psi(s\tau)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\max_{\pi \leq t \leq 2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(st) |\widehat{f}_s|^2 &= \max_{0 \leq \tau \leq \pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(s(2\pi - \tau)) |\widehat{f}_s|^2 \\ &= \max_{0 \leq \tau \leq \pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \psi(s\tau) |\widehat{f}_s|^2 = \overline{\omega}_\psi(f, \pi)^2.\end{aligned}$$

Вспоминая определение $\overline{\mathfrak{X}}_\psi$, отсюда заключаем, что $\overline{\mathfrak{X}}_\psi(n, \pi) = \overline{\mathfrak{X}}_\psi(n, 2\pi)$, и осталось только применить теорему 1 и воспользоваться свойством монотонности функции $\overline{\mathfrak{X}}_\psi(n, \cdot)$ при каждом фиксированном n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. Искомое равенство немедленно получаем из теоремы В и следствия 1.1, имея в виду соотношения (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. Как обычно, обозначим

$$\psi_\theta(t) = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_k(t) \right|^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\theta(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\theta_k|^2$$

и в силу теоремы 1 и свойства (1.5)

$$\overline{\mathfrak{X}}_{\psi_\theta}^{(d)}(\Lambda, T) \geq \overline{\mathfrak{X}}_{\psi_\theta}^{(d)}(\Lambda, [0, 2\pi]^d) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\theta(x) dx \right)^{-1/2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\theta_k|^2 \right)^{-1/2}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $\psi(\cdot) \in C^+(\mathbb{T})$, $\psi(-x) \equiv \psi(x)$, $\gamma > 0$. Тогда

$$\overline{\mathfrak{X}}_\psi\left(n, \gamma \frac{\pi}{n}\right) \leq \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])} \inf_{x \geq \gamma} \int_0^\pi \psi(xt) d\mu(t) \right)^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2

$$\overline{\mathfrak{X}}_\psi\left(n, \gamma \frac{\pi}{n}\right) = \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \gamma\pi/n])} \inf_{|k| \geq n} \int_0^{\gamma\pi/n} \psi(kt) d\mu(t) \right)^{-1/2}.$$

При этом, имея в виду четность $\psi(\cdot)$,

$$\begin{aligned} \inf_{|k| \geq n} \int_0^{\gamma\pi/n} \psi(kt) d\mu(t) &= \inf_{k \geq n} \int_0^{\gamma\pi/n} \psi(kt) d\mu(t) \\ &= \inf_{k \geq n} \int_0^\pi \psi\left(\gamma \frac{k}{n} \tau\right) d\tilde{\mu}(\tau) \geq \inf_{x \geq \gamma} \int_0^\pi \psi(x\tau) d\tilde{\mu}(\tau). \end{aligned}$$

(Здесь мера $\tilde{\mu} \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])$ определяется равенством $\tilde{\mu}(A) = \mu(\gamma/nA)$ для всякого борелевского множества $A \subset [0, \pi]$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])} \inf_{x \geq \gamma} \int_0^\pi \psi(xt) d\mu(t) &\geq \inf_{x \geq \gamma} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(xt) dt \\ &= \inf_{x \geq \gamma} \frac{1}{\pi x} \int_0^{\pi x} \psi(t) dt \geq \inf_{x \geq [\gamma]} \frac{1}{\pi x} \int_0^{\pi x} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Представляя x в виде $x = [\gamma] + 2s + y$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq y < 2$, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi x} \psi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(2s+[\gamma])} \psi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi(2s+[\gamma])}^{\pi(2s+[\gamma]+y)} \psi(t) dt.$$

В силу четности и 2π -периодичности ψ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(2s+[\gamma])} \psi(t) dt &= (2s + [\gamma])J_\psi, \\ \frac{1}{\pi} \int_{\pi(2s+[\gamma])}^{\pi(2s+[\gamma]+y)} \psi(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi[\gamma]}^{\pi([\gamma]+y)} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл обозначим через $j_\psi(y)$.

Следовательно,

$$\inf_{x \geq [\gamma]} \frac{1}{\pi x} \int_0^{\pi x} \psi(t) dt = \inf_{0 \leq y < 2} \inf_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{([\gamma] + 2s)J_\psi + j_\psi(y)}{[\gamma] + 2s + y}.$$

Так как функция

$$H(s, y) := \frac{([\gamma] + 2s)J_\psi + j_\psi(y)}{[\gamma] + 2s + y}$$

монотонная по s при каждом $y \in [0, 2)$, $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s, y) = J_\psi$ и $H(0, 0) = J_\psi$, то

$$\begin{aligned} \inf_{0 \leq y < 2} \inf_{s \in \mathbb{Z}_+} H(s, y) &= \min_{0 \leq y \leq 2} \min\{H(0, y), J_\psi\} = \min_{0 \leq y \leq 2} H(0, y) \\ &= \min_{0 \leq y \leq 2} \frac{[\gamma]J_\psi + j_\psi(y)}{[\gamma] + y} \\ &= \min_{0 \leq y \leq 2} \frac{1}{[\gamma] + y} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi[\gamma]} \psi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi[\gamma]}^{\pi([\gamma]+y)} \psi(t) dt \right) \\ &= \min_{[\gamma] \leq z \leq [\gamma]+2} \frac{1}{\pi z} \int_0^{\pi z} \psi(t) dt = \min_{[\gamma]/2 \leq x \leq [\gamma]/2+1} \frac{1}{2\pi x} \int_0^{2\pi x} \psi(t) dt \\ &= \min_{[\gamma]/2 \leq x \leq [\gamma]/2+1} \frac{J_\psi(x)}{x}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться леммой 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.4. Так как в силу неотрицательности, четности и 2π -периодичности функции ψ

$$\frac{1}{\pi z} \int_0^{\pi z} \psi(t) dt \geq \frac{[z]}{z} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \quad \forall z \geq 1,$$

то

$$\begin{aligned} \min_{[\gamma]/2 \leq x \leq [\gamma]/2+1} \frac{J_\psi(x)}{x} &= \min_{[\gamma] \leq z \leq [\gamma]+2} \frac{1}{\pi z} \int_0^{\pi z} \psi(t) dt \\ &\geq \min_{[\gamma] \leq z \leq [\gamma]+2} \frac{[z]}{z} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx = \frac{[\gamma]}{[\gamma]+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Следовательно, правая часть неравенства, доказанного в теореме 2, не превосходит

$$\left(\frac{[\gamma]}{[\gamma]+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2} = \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Вследствие леммы 2

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_\psi^{(d)} \left(\square_n, \left[0, \gamma \frac{2\pi}{n} \right]^d \right) \\ = \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \gamma 2\pi/n]^d)} \inf_{|\mathbf{k}| \geq n} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^d} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

(Здесь $|\mathbf{k}| := |\mathbf{k}|_\infty = \max_{1 \leq j \leq d} |k_j|$.)

Ясно, что

$$\begin{aligned} &\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \gamma 2\pi/n]^d)} \inf_{|\mathbf{k}| \geq n} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^d} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \\ &\geq \inf_{|\mathbf{k}| \geq n} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^d \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^d} \psi(\mathbf{k}\mathbf{t}) dt = \min_{1 \leq j \leq d} \inf_{|k_j| \geq n, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^d \\ &\quad \times \int_0^{\gamma 2\pi/n} \cdots \int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi(k_1 t_1 + \cdots + k_d t_d) dt_1 \cdots dt_d \\ &= \inf_{|k_1| \geq n} \inf_{k_2, \dots, k_d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \frac{n}{\gamma 2\pi} \int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi(k_1 t_1 + \overline{k}\overline{t}) dt_1 d\overline{t}, \end{aligned}$$

где $\overline{k} = (k_2, \dots, k_d)$, $\overline{t} = (t_2, \dots, t_d)$.

Для $\delta \in \mathbb{R}$ положим $\psi_\delta(x) := \psi(x + \delta)$. Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} \psi_\delta(t) dt = \int_0^{2\pi} \psi(t) dt.$$

Пусть $k \geq n$. Обозначая $x := \gamma k/n$, представляя x в форме $x = [\gamma] + s + y$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq y < 1$, и проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 2, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\gamma 2\pi} \int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi_\delta(k\tau) d\tau &= \frac{n}{\gamma 2\pi k} \int_0^{\gamma 2\pi k/n} \psi_\delta(t) dt = \frac{1}{2\pi x} \int_0^{2\pi x} \psi_\delta(t) dt \\ &= \frac{1}{[\gamma] + s + y} \left(([\gamma] + s) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_\delta(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_\delta(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{[\gamma] + s + y} \left(([\gamma] + s) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_\delta(t) dt \right). \end{aligned}$$

Следовательно, полагая $\bar{\delta} := \bar{k}\bar{t}$, получаем

$$\begin{aligned} &\inf_{k \geq n} \inf_{k_2, \dots, k_d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \frac{n}{\gamma 2\pi} \int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi(k_1 t_1 + \bar{k}\bar{t}) dt_1 d\bar{t} \\ &\geq \inf_{x \geq [\gamma]} \inf_{k_2, \dots, k_d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \left(\frac{1}{2\pi x} \int_0^{2\pi x} \psi(t + \bar{k}\bar{t}) dt \right) d\bar{t} \\ &\geq \inf_{0 \leq y \leq 1} \inf_{s \in \mathbb{Z}_+} \inf_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{d-1}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \left(\frac{[\gamma] + s}{[\gamma] + s + y} J_\psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[\gamma] + s + y} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_{\bar{\delta}}(t) dt \right) d\bar{t} = \inf_{0 \leq y \leq 1} \inf_{s \in \mathbb{N}} \left(\frac{[\gamma] + s}{[\gamma] + s + y} J_\psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[\gamma] + s + y} \inf_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{d-1}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_{\bar{\delta}}(t) dt d\bar{t} \right). \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} &\inf_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{d-1}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_{\bar{\delta}}(t) dt d\bar{t} \\ &\geq \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \inf_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{d-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_{\bar{\delta}}(t) dt d\bar{t} \\ &\geq \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \inf_{0 \leq \delta \leq 2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_\delta(t) dt d\bar{t} \\ &= \inf_{0 \leq \delta \leq 2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi y} \psi_\delta(t) dt = \inf_{0 \leq \delta \leq 2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi y + \delta} \psi(t) dt = \bar{J}_\psi(y). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\inf_{k \geq n} \inf_{k_2, \dots, k_d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n}{\gamma 2\pi} \right)^{d-1} \int_{[0, \gamma 2\pi/n]^{d-1}} \frac{n}{\gamma 2\pi} \int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi(k_1 t_1 + \bar{k}\bar{t}) dt_1 d\bar{t} \\ &\geq \inf_{0 \leq y \leq 1} \inf_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{([\gamma] + s) J_\psi + \bar{J}_\psi(y)}{[\gamma] + s + y}. \end{aligned}$$

Так как функция

$$H(s, y) := \frac{([\gamma] + s) J_\psi + \bar{J}_\psi(y)}{[\gamma] + s + y}$$

монотонная по s при каждом $y \in [0, 1]$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s, y) = J_\psi$, то

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq y \leq 1} \inf_{s \in \mathbb{N}} H(s, y) &= \min_{0 \leq x \leq 1} \min\{H(0, x), J_\psi\} \\ &= \min_{0 \leq x \leq 1} H(0, x) = \min_{[\gamma] \leq x \leq [\gamma]+1} \frac{\bar{J}_\psi(x)}{x}. \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве мы использовали следующее очевидное соотношение: $H(0, 0) = J_\psi$, а в последнем – свойство $[\gamma]J_\psi + \bar{J}_\psi(y) = \bar{J}_\psi([\gamma] + y)$.

Ситуацию, когда $k_1 \leq -n$, сведем к разобранному случаю $k_1 \geq n$, воспользовавшись равенством

$$\int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi_\delta(kt) dt = \int_0^{\gamma 2\pi/n} \psi_{\delta - |k|\gamma 2\pi/n}(|k|s) ds \quad \forall k < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.5. Как и при доказательстве следствия 1.4, замечаем, что из неотрицательности и 2π -периодичности функции ψ легко следует неравенство $\bar{J}_\psi(x) \geq ([x]/(2\pi)) \int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ (при $x \geq 1$), а также, что

$$\min_{[\gamma] \leq x \leq [\gamma]+1} \frac{[x]}{x} = \frac{[\gamma]}{[\gamma] + 1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{[\gamma]}{[\gamma] + 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx \right)^{-1/2} &\geq \left(\min_{[\gamma] \leq x \leq [\gamma]+1} \frac{\bar{J}_\psi(x)}{x} \right)^{-1/2} \\ &\geq \bar{\kappa}_\psi^{(d)} \left(\square_n, \left[0, \gamma \frac{2\pi}{n} \right]^d \right), \end{aligned}$$

где второе неравенство составляет содержание теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.6. Из равенства (1.9) следует, что для натуральных a таких, что $a \geq 2$, справедливо равенство¹³

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{a,r}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2^r \prod_{k=0}^{r-1} (1 - \cos(a^k x)) dx = 2^r.$$

Отсюда в силу следствия 1.1 $\tilde{\kappa}_{a,r}(n, \delta) = 1/\sqrt{2^r} \quad \forall \delta \geq \pi$, а значит,

$$\tilde{\kappa}_{a,r}(n, \delta) \geq \frac{1}{\sqrt{2^r}} \quad \forall \delta > 0.$$

С другой стороны, в силу следствия 1.4

$$\tilde{\kappa}_{a,r} \left(n, \gamma \frac{\pi}{n} \right) \leq \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}} \frac{1}{\sqrt{2^r}} \quad \forall \gamma \geq 1.$$

Сопоставляя полученную оценку с оценкой снизу, приходим к искомому утверждению для $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, и, в частности, для нечетных a , $a \geq 3$.

¹³ Для $a \geq 2$, $a \in \mathbb{N}$, равенство $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2^r \prod_{k=0}^{r-1} (1 - \cos(a^k x)) dx = 2^r$ вытекает из очевид-

ного при таких значениях a представления $\prod (1 - \cos(a^k x)) = 1 + \sum \alpha_k \cos kx$ с некоторыми $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

§ 3. Свойства модулей Туэ–Морса

Изучим подробнее свойства модуля непрерывности, построенного по разности Туэ–Морса $\tilde{\Delta}_t^r(f, x)$, а также – по обобщенной разности $\tilde{\Delta}_t^{a,r}(f, x)$.

Для этой цели рассмотрим характеристический многочлен разностного оператора $\tilde{\Delta}_t^r$:

$$\chi_{2^r-1}(z) = (1-z)(1-z^2)(1-z^4) \cdots (1-z^{2^{r-1}}) = \sum_{k=0}^{2^r-1} c_{k,r} z^k. \quad (3.1)$$

Индукцией по r легко доказать, что коэффициенты $c_{k,r}$ многочлена $\chi_{a^r-1}(z)$ равны ± 1 . В §1 было замечено, что $c_{k,r} = (-1)^{\gamma_k}$, где $\gamma_0 = 1$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность Туэ–Морса. Для $r = 1, 2, 3$ многочлены $\chi_{2^r-1}(z)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= 1 - z, \\ \chi_3(z) &= 1 - z - z^2 + z^3, \\ \chi_7(z) &= 1 - z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + z^6 - z^7. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для разности $\tilde{\Delta}_t^{a,r}(f, x)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h^{a,1}(f, x) &= \Delta_h^1(f, x) = \Delta_h(f, x) = f(x) - f(x+h), \\ \tilde{\Delta}_h^{a,2}(f, x) &= \tilde{\Delta}_h^{a,1}(f, x) - \tilde{\Delta}_h^{a,1}(f, x+ah) \\ &= f(x) - f(x+h) - f(x+ah) + f(x+(a+1)h), \\ \tilde{\Delta}_h^{a,3}(f, x) &= \tilde{\Delta}_h^{a,2}(f, x) - \tilde{\Delta}_h^{a,2}(f, x+a^2h), \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) &= \tilde{\Delta}_h^{a,r-1}(f, x) - \tilde{\Delta}_h^{a,r-1}(f, x+a^{r-1}h). \end{aligned}$$

Из данных равенств, в частности, вытекает, что

$$\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) = \Delta_h \Delta_{ah} \cdots \Delta_{a^{r-1}h}(f, x),$$

где $\Delta_h(f, x) = f(x) - f(x+h)$ – “обычная” разность. Модуль непрерывности в пространстве L_2 , построенный по разности $\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x)$, мы определили в п. 1.1 следующим образом: $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, \cdot)\|_{L_2}$.

Такой модуль, в свою очередь, можно рассматривать как частный случай (при $p = 2$) модуля

$$\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, \cdot)\|_{L_p}.$$

Здесь и всюду ниже будем предполагать, что $p \in [1, +\infty]$.

ЛЕММА 6. *Обобщенная разность Туэ–Морса $\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x)$, $a \in \mathbb{N}$, обладает следующими свойствами.*

1) Пусть функция f принадлежит $W_1^r(\mathbb{T})$. Тогда справедливо следующее интегральное представление:

$$\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) = (-1)^r \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+ah} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+a^2h} dt_3 \cdots \int_{t_{r-1}}^{t_{r-1}+a^{r-1}h} f^{(r)}(t_r) dt_r.$$

2) Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $\varphi \in L_{p'}(\mathbb{T})$, $1/p + 1/p' = 1$. Тогда

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \tilde{\Delta}_{-h}^r(\varphi, x) dx = \int_{\mathbb{T}} \tilde{\Delta}_h^r(f, x) \varphi(x) dx.$$

3) Пусть $f \in L_p([t_1, t_2])$ и $[\alpha, \beta] \subset (t_1, t_2)$. Существует $h(\alpha, \beta, t_1, t_2) > 0$ такое, что разностный оператор $\tilde{\Delta}_h^{a,r}$ аннулирует пространство $\mathcal{P}_{r-1}$ алгебраических многочленов степени $r-1$ при всех $|h| \leq h(\alpha, \beta, t_1, t_2)$; точнее, $\|\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, \cdot)\|_{L_p([\alpha, \beta])} = o(h^r)$, $h \rightarrow +0$, $\iff f(x) = P(x)$ при н.в. $x \in [\alpha, \beta]$, где $P \in \mathcal{P}_{r-1}$.

4) Пусть $f \in W_p^r(\mathbb{T})$. Тогда $\tilde{\omega}_{a,r}(f, t)_p \leq a^{r(r-1)/2} t^r \|f^{(r)}\|_p$ при любом $t \geq 0$.

5) Для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ выполнено неравенство $\tilde{\omega}_{a,r}(f, n\delta)_p \leq n^r \tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $\delta \geq 0$.

6) Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T})$ и $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p = o(\delta^r)$, $\delta \rightarrow +0$. Тогда $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p \equiv 0$, т.е. функция $g(\delta) := \tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p$ не может убывать быстрее, чем δ^r при $\delta \rightarrow +0$, если только $f(x)$ не равна константе почти всюду.

7) Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству $W_p^r(\mathbb{T})$ и отлична от константы. Тогда

$$\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p \asymp \delta^r, \quad \delta \rightarrow +0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство в 1) легко доказать индукцией по r , используя тождество $\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) = \tilde{\Delta}_h^{a,r-1}(f, x) - \tilde{\Delta}_h^{a,r-1}(f, x + a^{r-1}h)$. Докажем второе свойство. Очевидно, справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \Delta_{-h}(\varphi, x) dx = \int_{\mathbb{T}} \Delta_h(f, x) \varphi(x) dx,$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(x) \tilde{\Delta}_{-h}^{a,r}(\varphi, x) dx &= \int_{\mathbb{T}} f(x) \Delta_{-h} \Delta_{-ah} \cdots \Delta_{-a^{r-1}h}(\varphi, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \Delta_h(f, x) \Delta_{-ah} \cdots \Delta_{-a^{r-1}h}(\varphi, x) dx \\ &= \cdots = \int_{\mathbb{T}} \Delta_{a^{r-1}h} \cdots \Delta_{ah} \Delta_h(f, x) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Но для оператора разности справедливо свойство коммутативности, т.е. $\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} = \Delta_{h_2} \Delta_{h_1}$ (в чем легко убедиться, исходя из его определения). Поэтому из (3.2) вытекает свойство 2).

Докажем 3). Пусть $g(x)$ — функция из пространства $C^r([t_1, t_2])$. Тогда из интегральной теоремы о среднем [22] получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} a^{-r(r-1)/2} h^{-r} \tilde{\Delta}_h^{a,r}(g, x) = g^{(r)}(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \quad (3.3)$$

Для произвольной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C^\infty([t_1, t_2])$ при помощи неравенства Гёльдера получаем (при достаточно малом по абсолютному значению h)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) a^{-r(r-1)/2} h^{-r} \tilde{\Delta}_{-h}^{a,r}(\varphi, x) dx \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} a^{-r(r-1)/2} h^{-r} \tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq a^{-r(r-1)/2} h^{-r} \int_{\alpha}^{\beta} |\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x)| \cdot |\varphi(x)| dx \\ &\leq a^{-r(r-1)/2} h^{-r} \|\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, \cdot)\|_{L_p([\alpha, \beta])} \|\varphi\|_{L_{p'}([\alpha, \beta])}. \end{aligned}$$

Устремляя $h \rightarrow +0$ и используя (3.3), находим, что $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi^{(r)}(x) dx = 0$. Но согласно [23; гл. 5] если для функции $f(x)$ из пространства $L_{\text{loc}}([t_1, t_2])$ справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi^{(r)}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty([t_1, t_2]),$$

то существует алгебраический многочлен P степени не выше $r-1$ такой, что $f(x) = P(x)$ для почти всех $x \in [\alpha, \beta]$. Таким образом, свойство 3) доказано.

Докажем свойство 4). В равенстве п. 1) произведем последовательно замены переменного $t_k^* = t_k - x$, $k = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) &= (-1)^r \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+ah} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+a^2h} dt_3 \cdots \int_{t_{r-1}}^{t_{r-1}+a^{r-1}h} f^{(r)}(t_r) dt_r \\ &= (-1)^r \int_0^h dt_1^* \int_{t_1^*+x}^{t_1^*+x+ah} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+a^2h} dt_3 \cdots \int_{t_{r-1}}^{t_{r-1}+a^{r-1}h} f^{(r)}(t_r) dt_r \\ &= \cdots = (-1)^r \int_0^h dt_1^* \int_{t_1^*}^{t_1^*+ah} dt_2^* \int_{t_2^*}^{t_2^*+a^2h} dt_3^* \cdots \int_{t_{r-1}^*}^{t_{r-1}^*+a^{r-1}h} f^{(r)}(t_r^* + x) dt_r^*. \end{aligned}$$

Теперь применим обобщенное неравенство Минковского (см. [24; гл. 1]) к полученному равенству:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, \cdot)\|_p &\leq \int_0^h dt_1^* \int_{t_1^*}^{t_1^*+ah} dt_2^* \int_{t_2^*}^{t_2^*+a^2h} dt_3^* \\ &\quad \times \cdots \times \int_{t_{r-1}^*}^{t_{r-1}^*+a^{r-1}h} \|f^{(r)}(t_r^* + \cdot)\|_p dt_r^* = a^{r(r-1)/2} h^r \|f^{(r)}\|_p \end{aligned}$$

при всех $h \geq 0$.

Свойство 5) вытекает из тождества

$$\tilde{\Delta}_{nh}^{a,r}(f, x) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{n-1} \tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x + k_1h + ak_2h + \cdots + a^{r-1}k_rh),$$

которое для $r = 1$ очевидно, а для $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ доказывается индукцией по r с применением равенства $\tilde{\Delta}_h^{a,r}(f, x) = \tilde{\Delta}_h^{a,r-1}(f, x) - \tilde{\Delta}_h^{a,r-1}(f, x + a^{r-1}h)$.

Докажем свойство 6). Применяя свойство 5), заключаем, что

$$\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p = \tilde{\omega}_{a,r}\left(f, \frac{n\delta}{n}\right)_p \leq n^r \tilde{\omega}_{a,r}\left(f, \frac{\delta}{n}\right)_p = \delta^r \frac{\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta/n)_p}{(\delta/n)^r}.$$

Теперь, переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow +\infty$ и предполагая, что для функции f справедливо $\tilde{\omega}_{a,r}(f, h)_p = o(h^r)$, $\delta \rightarrow +0$, получаем тождество $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta) \equiv 0$.

Докажем свойство 7). Из свойства 5) вытекает неравенство $\tilde{\omega}_{a,r}(f, \lambda\delta)_p \leq (\lambda + 1)^r \tilde{\omega}_{a,r}(f, \delta)_p$ при $\lambda > 0$, $\delta \geq 0$. Отсюда для любого $t \in (0, 1]$ получаем

$$\tilde{\omega}_{a,r}(f, t)_p \geq \frac{1}{(1 + 1/t)^r} \omega_{a,r}(f, 1)_p \geq 2^{-r} \tilde{\omega}_{a,r}(f, 1)_p t^r = Ct^r.$$

Из свойства 6) следует, что $C > 0$. Теперь, применяя свойство 4), получаем искомую эквивалентность.

Посмотрим на разность $\tilde{\Delta}_t^r$ как на линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Важным свойством этого оператора является тот факт, что при почти всех t его норма меньше по порядку (при $r \rightarrow \infty$) аналогичной нормы как “классического” оператора r -й разности, так и оператора обобщенной разности Туэ–Морса $\tilde{\Delta}_t^{a,r}$ при всех $a \in \mathbb{N}$, $a > 2$. При этом, однако, отметим, что для вычисления значений $\tilde{\Delta}_t^{a,r}(f, x)$ в каждой точке x используются значения функции f в 2^r точках, а для вычисления значения $\Delta_t^r(f, x)$ – значения в $r + 1$ точке.

Вводя обозначение $K_{a,r}(t) := \|\tilde{\Delta}_t^{a,r}\|_{L_2 \rightarrow L_2}^2$, мы утверждаем справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 7. Для любых $t > 0$, $a, r \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$K_{a,r}(t) \leq 4^r \quad \text{при нечетном } a, \quad (3.4)$$

$$K_{a,r}(t) \leq \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)}\right)^{2r} \sin^{-2} \frac{a\pi}{2(a+1)} \quad \text{при четном } a. \quad (3.5)$$

Если $t/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, т.е. t/π является иррациональным числом, то справедливы оценки

$$K_{a,r}(t) = 4^r \quad \text{при нечетном } a, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)}\right)^{2r} &\leq K_{a,r}(t) \\ &\leq \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)}\right)^{2r} \sin^{-2} \frac{a\pi}{2(a+1)} \quad \text{при четном } a. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если t/π является иррациональным числом, то $K_{a,r}(t)$ не зависит от t (см. (1.3)), поэтому в этом случае вместо $K_{a,r}(t)$ будем писать $K_{a,r}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для случая $a = 2$, $r \in \mathbb{N}$, $t/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ получаем двухстороннюю оценку.¹⁴

¹⁴Верхняя оценка $\max_x 2^{2r} \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2(2^{k-1}x) \leq \frac{4}{3} 3^r$ установлена также в работе [25].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Функция $g(a) = 2 \sin(a\pi/(2(a+1)))$ монотонно возрастает на $[1, \infty)$, поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $r_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $r \geq r_0$ и $t/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ справедливо

$$3^r \leq K_{2,r} < K_{4,r} < K_{6,r} < \dots < K_{2k,r} < K_{1,r} = K_{3,r} = K_{5,r} = K_{2k-1,r} = 4^r.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Проводя более детальные оценки для $\|\psi_{a,r}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}$, чем при доказательстве леммы 7 (оценок (3.7) в данном случае недостаточно), можно показать, что при всех $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, и $t/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ справедливы соотношения

$$3^r < K_{2,r} < K_{4,r} < \dots < K_{2k,r} < \dots < K_{1,r} = K_{3,r} = \dots = K_{2k-1,r} = \dots = 4^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (1.1) и (1.9) для разностного оператора $\tilde{\Delta}_t^{a,r}$ имеет место неравенство $\|\tilde{\Delta}_t^{a,r}\|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 \leq \|\psi_{a,r}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}$. Напомним, что $\psi_{a,r}(t) = 4^r \prod_{\nu=0}^{r-1} \sin^2(a^\nu t/2)$. Поэтому $\|\psi_{a,r}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq 4^r$ и, следовательно, справедлива оценка (3.4).

Докажем оценку (3.5).

Для этого сначала отметим, что при $r \geq 2$ и $a \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\psi_{a,r}(x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \psi_{a,r-1}(ax) = \psi_{a,1}(x) \psi_{a,r-1}(ax) = \psi_{a,2}(x) \psi_{a,r-2}(a^2 x). \quad (3.8)$$

Для $r = 1$ имеем $\|\psi_{a,1}\|_{C(\mathbb{T})} = 4$.

Теперь индукцией по $r = 2, 3, \dots$ докажем неравенство

$$\|\psi_{a,r}\|_C \leq 4^r \left(\sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^{2r-2} \quad (3.9)$$

(имея в виду, что $\|\tilde{\Delta}_t^{a,r}\|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 \leq \|\psi_{a,r}\|_C$.) Для $r = 2$ оценку (3.9) проведем отдельно на каждом из отрезков $[0, a\pi/(a+1)]$ и $[a\pi/(a+1), \pi]$. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, a\pi/(a+1)]} \psi_{a,2}(x) &= \max_{x \in [0, a\pi/(a+1)]} 4 \sin^2 \frac{x}{2} \psi_{a,1}(ax) \leq 16 \sin^2 \frac{a\pi}{2(a+1)} \\ &= \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^4 \sin^{-2} \frac{a\pi}{2(a+1)}. \end{aligned}$$

А для отрезка $[a\pi/(a+1), \pi]$ требуется доказать более сильное неравенство

$$\max_{x \in [a\pi/(a+1), \pi]} \psi_{a,2}(x) = \max_{x \in [a\pi/(a+1), \pi]} 16 \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{ax}{2} \leq \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^4. \quad (3.10)$$

Для этого покажем, что функция $\psi_{a,2}(x)$ монотонно не возрастает на отрезке $[a\pi/(a+1), \pi]$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_{a,2}(x)}{4} \right)' &= ((1 - \cos x)(1 - \cos(ax)))' = \sin x(1 - \cos(ax)) + a \sin(ax)(1 - \cos x) \\ &= \sin x \sin ax \left(\frac{1 - \cos(ax)}{\sin(ax)} + a \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) = \sin x \sin ax \left(\operatorname{tg} \frac{ax}{2} + a \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Для $x \in [a\pi/(a+1), \pi]$ справедливы неравенства $\sin x \geq 0$ и $\sin ax \leq 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{sign} \psi'_{a,2}(x) = (-1) \operatorname{sign} \left(\operatorname{tg} \frac{ax}{2} + a \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

Покажем, что $|\operatorname{tg}(ax/2)| \leq a \operatorname{tg}(x/2)$ для $x \in [a\pi/(a+1), \pi]$. После замены $x = \pi - y\pi/(a+1)$, $y \in [0, 1]$, видим, что последнее неравенство становится равносильным неравенству $|\operatorname{tg}(ay\pi/(2(a+1)))| \leq a \operatorname{ctg}(y\pi/(2(a+1)))$, которое и докажем.

Так как для $y \in [0, 1]$ и $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, справедливо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{ay\pi}{2(a+1)} &\leq \operatorname{tg} \frac{ay\pi}{2(a+1)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(a+1)} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(a+1)}, \\ \operatorname{ctg} \frac{y\pi}{2(a+1)} &\geq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(a+1)}, \end{aligned}$$

то

$$\operatorname{tg} \frac{ay\pi}{2(a+1)} \leq \operatorname{ctg} \frac{y\pi}{2(a+1)} \leq a \operatorname{ctg} \frac{y\pi}{2(a+1)}.$$

Откуда $\operatorname{sign} \psi'_{a,2}(x) = -1$ для $x \in [a\pi/(a+1), \pi]$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, и, следовательно, функция $\psi_{a,2}(x)$ монотонно не возрастает на отрезке $[a\pi/(a+1), \pi]$.

Предположим теперь, что неравенство (3.9) уже доказано для $r = 2, 3, \dots, k$, $k \geq 2$. Докажем справедливость этого неравенства и для $r = k+1$.

Как и выше, проведем оценку отдельно на каждом из отрезков $[0, a\pi/(a+1)]$ и $[a\pi/(a+1), \pi]$. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, a\pi/(a+1)]} \psi_{a,k+1}(x) &= \max_{x \in [0, a\pi/(a+1)]} 4 \sin^2 \frac{x}{2} \psi_{a,k}(ax) \\ &\leq 4 \sin^2 \frac{a\pi}{2(a+1)} \|\psi_{a,k}(a \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^{2r} \sin^{-2} \frac{a\pi}{2(a+1)}. \end{aligned}$$

А для отрезка $[a\pi/(a+1), \pi]$ воспользуемся (3.8), (3.10) и монотонностью функции $\psi_{a,2}(x)$

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a\pi/(a+1), \pi]} \psi_{a,k+1}(x) &= \max_{x \in [a\pi/(a+1), \pi]} \psi_{a,2}(x) \psi_{a,k-1}(ax) \\ &\leq \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^4 \|\psi_{a,k-1}(a \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^{2r} \sin^{-2} \frac{a\pi}{2(a+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.9) установлено, а вместе с ним и (3.5). С другой стороны, если $t/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то в силу формул (1.3) и (1.9)

$$\|\tilde{\Delta}_t^{a,r}\|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 = \|\psi_{a,r}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = \max_t 2^{2r} \prod_{k=0}^{r-1} \sin^2 \left(a^k \frac{t}{2} \right).$$

Из равенства $\sin^2(a^k \pi/2) = 1$ при всех нечетных a и целых неотрицательных k получаем $\|\tilde{\Delta}_t^{a,r}\|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 = 4^r$, когда a нечетно и $r \in \mathbb{N}$, а следовательно, справедливо равенство (3.6).

Теперь докажем первое неравенство в (3.7). Для этого при четных a индукцией по $k = 1, 2, \dots$ установим справедливость равенств

$$\sin^2 \frac{a\pi}{2(a+1)} = \sin^2 \frac{a^2\pi}{2(a+1)} = \dots = \sin^2 \frac{a^k\pi}{2(a+1)}. \quad (3.11)$$

Пусть равенство (3.11) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что (3.11) справедливо и для $k+1$. Из разложения $a^{k+1} = (a+1)a^k - a^k$ и четности a следует, что

$$\sin^2 \frac{a^{k+1}\pi}{2(a+1)} = \sin^2 \left(\frac{a^k\pi}{2} - \frac{a^k\pi}{2(a+1)} \right) = \sin^2 \frac{a^k\pi}{2(a+1)}.$$

Равенство (3.11) доказано. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\psi_r(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} &\geq \psi_{a,r} \left(\frac{a\pi}{a+1} \right) = 4^r \prod_{\nu=0}^{r-1} \sin^2 \frac{a^{\nu+1}\pi}{2(a+1)} \\ &= 4^r \prod_{\nu=0}^{r-1} \sin^2 \frac{a\pi}{2(a+1)} = \left(2 \sin \frac{a\pi}{2(a+1)} \right)^{2r} \end{aligned}$$

и, значит, неравенства (3.7) доказаны.

ЛЕММА 8. Если $f \in W_2^r(\mathbb{T})$, $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, $a \in \mathbb{N}$, число $t/(2\pi)$ иррационально и имеет ограниченные неполные частные, то существует функция $g \in L_2(\mathbb{T})$ такая, что

$$f(x) = \tilde{\Delta}_t^{a,r} g(x) \quad \text{n. в. } x. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим последовательность $\{\lambda_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ формулой

$$\lambda_s = \begin{cases} \left((is)^r \prod_{k=0}^{r-1} (1 - e_{a^k}(st)) \right)^{-1}, & \text{если } s \neq 0; \\ 0, & \text{если } s = 0, \end{cases}$$

и определим линейный оператор T_λ на множестве тригонометрических полиномов формулой

$$T_\lambda[e_s(\cdot)] = \lambda_s e_s(\cdot).$$

Учитывая, что

$$\frac{d^r}{dx^r} e_s(x) = (is)^r e_s(x),$$

для любого тригонометрического полинома $P(\cdot)$ с нулевым средним имеем равенство

$$T_\lambda[\tilde{\Delta}_t^{a,r} P^{(r)}(\cdot)] = P(\cdot).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\lambda_s|^{-1} &= |s|^r 2^r \prod_{k=0}^{r-1} \left| \sin \left(a^{k-1} s \frac{t}{2} \right) \right| = |s|^r 2^r \prod_{k=0}^{r-1} \left| \sin \left(a^{k-1} s \pi \frac{t}{2\pi} \right) \right| \\ &\geq |s|^r 2^r \prod_{k=0}^{r-1} 2 \left\| a^{k-1} s \frac{t}{2\pi} \right\|, \end{aligned}$$

где $\|y\|$ обозначает расстояние от y до ближайшего к нему целого числа.

Известно [18; гл. 1, § 5], что ограниченность неполных частных числа α влечет за собой существование такой положительной постоянной $C(\alpha)$, что $|s| \|s\alpha\| \geq C(\alpha)$ для всякого $s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |s|^r 2^{2r} \prod_{k=0}^{r-1} \left\| a^{k-1} s \frac{t}{2\pi} \right\| &= 2^{2r} \cdot a^0 \cdots a^{1-r} \prod_{k=0}^{r-1} a^k |s| \left\| a^k s \frac{t}{2\pi} \right\| \\ &\geq 2^{2r} a^{-r(r-1)/2} C^r \left(\frac{t}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

и поэтому абсолютные величины членов последовательности $\{\lambda_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ равномерно ограничены. Отсюда заключаем (см. [1; § 16.1]), что T_λ продолжается до линейного непрерывного и перестановочного со сдвигами оператора в $L_2(\mathbb{T})$ (который мы также обозначим символом T_λ).

Итак,

$$\tilde{\Delta}_t^{a,r} T_\lambda[f^{(r)}](x) = T_\lambda[\tilde{\Delta}_t^{a,r} f^{(r)}](x) = f(x) \quad \text{п.в. } x$$

и, значит, для $f(\cdot)$ справедливо представление (3.12), в котором $g(\cdot)$ следует положить равным $T_\lambda f^{(r)}$.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Напомним, запись $\xi(\cdot) \in \Upsilon$ означает, что для функции $\xi(\cdot)$ выполняются следующие условия:

- 1) $\xi(\cdot) \in C(\mathbb{R})$;
- 2) $\xi(x) \geq 0$;
- 3) $\xi(x) = \xi(\pi + x)$, т.е. $\xi(\cdot)$ — π -периодична;
- 4) $\xi(x) = \xi(-x)$, т.е. $\xi(\cdot)$ четная.

Основная идея доказательства теоремы 4 состоит в установлении факта неотрицательности функции $h_\xi(x)$ для $x \geq 1$ с произвольной $\xi(\cdot) \in \Upsilon$ (см. лемму 13).

Докажем вспомогательные леммы.

ЛЕММА 9. Пусть $\xi(x) \in \Upsilon$, $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $x \geq 1$ справедливо представление

$$\begin{aligned} - \int_0^{k\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt &= 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \\ &\quad \times \cos(xt) \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2x} - t\right) - \frac{\sin(l\pi/x)}{\cos(\pi/(2x))} \cos t \right) dt. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем интеграл в сумму двух

$$-\int_0^{k\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = -\int_0^{k\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt, \quad I_2 = -\int_{k\pi/(2x)}^{k\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt.$$

Сделаем в интеграле I_2 замену переменного $t = k\pi/x - z$, где z — новая переменная, а затем, заменив переменную интегрирования z опять на t , с учетом нечетности k получим

$$I_2 = \int_0^{k\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{k\pi}{x} - t\right) dt.$$

Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_0^{k\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \left(\sin\left(\frac{k\pi}{x} - t\right) - \sin t \right) dt \\ &= 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \int_0^{k\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{k\pi}{2x} - t\right) dt \\ &= 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \left(\int_0^{\pi/(2x)} + \int_{\pi/(2x)}^{3\pi/(2x)} + \cdots + \int_{(l-1/2)\pi/x}^{(l+1/2)\pi/x} \right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) (J_0 + J_1 + \cdots + J_l). \end{aligned}$$

В интегралах J_s , $s = 1, \dots, l$, сделаем замену переменного $t = s\pi/x - z$, где z — новая переменная, а затем, заменив переменную интегрирования z опять на t , получим

$$\begin{aligned} J_s &= (-1)^s \int_{-\pi/(2x)}^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{(k-2s)\pi}{2x} + t\right) dt \\ &= (-1)^s \left(\int_0^{\pi/(2x)} + \int_{-\pi/(2x)}^0 \right). \end{aligned}$$

Сделав замену переменного в последнем интеграле и воспользовавшись четностью функции $\xi(t) \cos t$, получаем

$$\begin{aligned} J_s &= (-1)^s \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \left(\sin\left(\frac{(k-2s)\pi}{2x} + t\right) + \sin\left(\frac{(k-2s)\pi}{2x} - t\right) \right) dt \\ &= (-1)^s 2 \sin\left(\frac{(k-2s)\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \cos t \, dt. \end{aligned}$$

И, наконец, получаем

$$I_1 + I_2 = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) r_l(x, t) \, dt,$$

где

$$r_l(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2x} - t\right) + 2 \cos t \left(-\sin\left(\frac{(k-2)\pi}{2x}\right) + \sin\left(\frac{(k-4)\pi}{2x}\right) + \cdots + (-1)^l \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \right).$$

Найдем последнюю сумму. Для этого, вводя обозначение $v := \pi/(2x)$, получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^l (\sin v - \sin(3v) + \cdots + (-1)^l \sin((2l-3)v) + (-1)^{l+1} \sin((2l-1)v)) \\ &= \frac{(-1)^l}{2 \sin(2v)} (2 \sin(2v)) (\sin v - \sin(3v) + \cdots + (-1)^l \sin((2l-3)v) \\ &\quad + (-1)^{l+1} \sin((2l-1)v)) = \frac{(-1)^l}{2 \sin(2v)} ((\cos v - \cos(3v)) - (\cos v - \cos(5v)) \\ &\quad + (\cos(3v) - \cos(7v)) - (\cos(5v) - \cos(9v)) \\ &\quad + \cdots + (-1)^l (\cos((2l-5)v) - \cos((2l-1)v)) \\ &\quad + (-1)^{l+1} (\cos((2l-3)v) - \cos((2l+1)v))) \\ &= \frac{(-1)^l}{2 \sin(2v)} ((-1)^l (\cos((2l+1)v) - \cos((2l-1)v))) \\ &= -\frac{\sin(2lv) \sin v}{\sin(2v)} = -\frac{\sin(2lv)}{2 \cos v}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$r_l(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2x} - t\right) - \cos t \frac{\sin(l\pi/x)}{\cos(\pi/(2x))}. \quad (4.1)$$

Предъявим удобное для дальнейшего изложения представление для функции $r_l(x, t)$.

ЛЕММА 10. Пусть $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $x > 1$ справедливо

$$r_l(x, t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2x} - t\right), & l = 0; \\ \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \cos t \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} - \operatorname{tg} t \right), & l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где функция $r_l(x, t)$ определена равенством (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $l = 0$ утверждение тривиально. Докажем его для случая $l \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\begin{aligned} r_l(x, t) &= \sin\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \cos t - \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \sin t - \frac{\sin(l\pi/x)}{\cos(\pi/(2x))} \cos t \\ &= \frac{\cos t}{\cos(\pi/(2x))} \left(\cos \frac{\pi}{2x} \sin \frac{k\pi}{2x} - \sin \frac{l\pi}{x} \right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2x}\right) \sin t. \end{aligned}$$

Изучим выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2x} \sin \frac{(l+1/2)\pi}{x} - \sin \frac{l\pi}{x} &= \cos \frac{\pi}{2x} \sin \frac{\pi}{2x} \cos \frac{l\pi}{x} + \cos^2 \frac{\pi}{2x} \sin \frac{l\pi}{x} - \sin \frac{l\pi}{x} \\ &= \cos \frac{\pi}{2x} \sin \frac{\pi}{2x} \cos \frac{l\pi}{x} - \sin^2 \frac{\pi}{2x} \sin \frac{l\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{2x} \left(\cos \frac{\pi}{2x} \cos \frac{l\pi}{x} - \sin \frac{\pi}{2x} \sin \frac{l\pi}{x} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{2x} \cos \frac{k\pi}{2x}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$r_l(x, t) = \cos \frac{k\pi}{2x} \left(\frac{\cos t}{\cos(\pi/(2x))} \sin \frac{\pi}{2x} - \sin t \right) = \cos \frac{k\pi}{2x} \cos t \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} - \operatorname{tg} t \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для $\xi(\cdot) \in \Upsilon$ определим вспомогательную функцию $R_\xi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезках вида $x \in [2l, 2l+1/2]$, $l \in \mathbb{N}$, равенством

$$\begin{aligned} R_\xi(x) &= 2 \cos \frac{(2l+1/2)\pi}{x} \int_{\pi}^{(2l+1/2)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin \left(t - \frac{(2l+1/2)\pi}{x} \right) dt \\ &\quad + \int_{(4l+1-x)\pi/x}^{(2l+1)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt, \end{aligned} \quad (4.2)$$

на отрезках вида $x \in [2l+1/2, 2l+1]$, $l \in \mathbb{N}$, равенством

$$R_\xi(x) = \int_{\pi}^{(2l+1)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt, \quad (4.3)$$

на отрезках вида $x \in [2l+1, 2l+3/2]$, $l \in \mathbb{Z}_+$, равенством

$$R_\xi(x) = - \int_{(2l+1)\pi/x}^{\pi} \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt, \quad (4.4)$$

на отрезках вида $x \in [2l+3/2, 2l+2]$, $l \in \mathbb{Z}_+$, равенством

$$\begin{aligned} R_\xi(x) &= 2 \cos \frac{(2l+3/2)\pi}{x} \int_{(2l+3/2)\pi/x}^{\pi} \xi(xt) \cos(xt) \sin \left(\frac{(2l+3/2)\pi}{x} - t \right) dt \\ &\quad - \int_{(2l+1)\pi/x}^{(4l+3-x)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ЛЕММА 11. Пусть $\xi(\cdot) \in \Upsilon$. Тогда справедливо следующее:

- 1) $R_\xi(x) = 0$, если $x = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $R_\xi(x) \geq 0$, если $x \in (2l+1, 2l+3)$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $R_\xi(x)$ определялась на луче $[1, +\infty)$ раз-
личным образом, то доказательство проведем на каждом из соответствующих мно-
жеств отдельно. Положим

$$[1, +\infty) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

где $A_1 = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} [2l, 2l + 1/2]$, $A_2 = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} [2l + 1/2, 2l + 1]$, $A_3 = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} [2l + 1, 2l + 3/2]$,
 $A_4 = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} [2l + 3/2, 2l + 2]$.

Пусть $x \in A_1$, т.е. существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in [2l, 2l + 1/2]$. Покажем,
что каждый из интегралов, определенных в (4.2), неотрицателен. Действитель-
но, для первого интеграла множество интегрирования по t составляет отрезок $[\pi,$
 $(2l + 1/2)\pi/x]$. Следовательно, $xt \in [2l\pi, (2l + 1/2)\pi]$, откуда $\cos(xt) \geq 0$, $\sin(t - (2l +$
 $1/2)\pi/x) \leq 0$, а так как $(2l + 1/2)\pi/x \in [\pi, \pi + \pi/(4l)]$, то $\cos((2l + 1/2)\pi/x) \leq 0$,
и из (4.2) получаем, что первое слагаемое в сумме неотрицательно. Для второ-
го интеграла множество интегрирования по t составляет отрезок $[(4l + 1 - x)\pi/x,$
 $(2l + 1)\pi/x]$. Следовательно, $xt \in [(2l + 1/2)\pi, (2l + 1)\pi]$, откуда $\cos(xt) \leq 0$,
 $\sin t \leq 0$, и из (4.2) заключаем, что

$$R_\xi(x) \geq 0, \quad x \in A_1.$$

Пусть $x \in A_2$, т.е. существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in [2l + 1/2, 2l + 1]$. Покажем,
что интеграл, определенный в (4.3), неотрицателен. Действительно, множество
интегрирования по t составляет отрезок $[\pi, (2l + 1)\pi/x]$. Имеем $xt \in [(2l + 1/2)\pi,$
 $(2l + 1)\pi]$, откуда следует, что $\cos(xt) \leq 0$, $\sin t \leq 0$, а значит, из (4.3) получаем
соотношение

$$R_\xi(x) = \begin{cases} \geq 0, & x \in A_2; \\ 0, & x = 2l + 1, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пусть $x \in A_3$, т.е. существует $l \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $x \in [2l + 1, 2l + 3/2]$. Покажем,
что интеграл, определенный в (4.4), неотрицателен. Действительно, множество
интегрирования по t составляет отрезок $[(2l + 1)\pi/x, \pi]$. Имеем $xt \in [(2l + 1)\pi,$
 $(2l + 3/2)\pi]$, откуда следует, что $\cos(xt) \leq 0$, $\sin t \geq 0$, а значит, из (4.4) получаем

$$R_\xi(x) = \begin{cases} \geq 0, & x \in A_3; \\ 0, & x = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Пусть $x \in A_4$, т.е. существует $l \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $x \in [2l + 3/2, 2l + 2]$. Пока-
жем, что каждый из интегралов, определенных в формуле (4.5), неотрицателен.
Действительно, для первого интеграла множество интегрирования по t составля-
ет отрезок $[(2l + 3/2)\pi/x, \pi]$. Следовательно, $xt \in [(2l + 3/2)\pi, (2l + 2)\pi]$, откуда
 $\cos(xt) \geq 0$, $\sin((2l + 3/2)\pi/x - t) \leq 0$, а так как $(2l + 3/2)\pi/x \in [\pi - \pi/(4(l + 1)), \pi]$,
то $\cos((2l + 3/2)\pi/x) \leq 0$, и из (4.5) получаем, что первое слагаемое в сумме не-
отрицательно. Для второго интеграла множество интегрирования по t составляет
отрезок $t \in [(2l + 1)\pi/x, (4l + 3 - x)\pi/x]$. Следовательно, $xt \in [(2l + 1)\pi, (2l + 3/2)\pi]$,
откуда $\cos(xt) \leq 0$, $\sin t \geq 0$, и из (4.5) получаем, что

$$R_\xi(x) \geq 0, \quad x \in A_4.$$

Так как рассмотренные отрезки заполняют всю числовую полуось $[1, +\infty)$, то
тем самым утверждение леммы полностью доказано.

Напомним, что для $\xi(\cdot) \in \Upsilon$ через $h_\xi(x)$ мы обозначили (см. (1.12)) следующий
интеграл: $(-1) \int_0^\pi \cos(xt) \xi(xt) \sin t dt$. Сформулируем центральную лемму.

ЛЕММА 12 (интегральное представление). При $\xi(\cdot) \in \Upsilon$ справедливо представление

$$h_\xi(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{\pi}{2x} - t\right) dt + R_\xi(x), \quad x \in [1, 2],$$

и

$$h_\xi(x) = 2 \cos^2\left(\frac{(2l+1)\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \cos t \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} - \operatorname{tg} t\right) dt + R_\xi(x), \\ x \in [2l, 2l+2], \quad l \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство интегрального представления разобьем на четыре части.

1) Пусть $x \in [2l, 2l+1/2], l \in \mathbb{N}$. Легко заметить, что для заданных x справедливо $(2l+1)\pi/x \geq (4l+1-x)\pi/x \geq (2l+1/2)\pi/x \geq \pi$. Поэтому представим интеграл в виде следующей суммы:

$$- \int_0^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt \\ = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + \int_\pi^{(2l+1/2)\pi/x} + \int_{(2l+1/2)\pi/x}^{(4l+1-x)\pi/x} + \int_{(4l+1-x)\pi/x}^{(2l+1)\pi/x}.$$

В предпоследнем интеграле сделаем замену переменного $t = (4l+1)\pi/x - z$, где z — новая переменная, а затем, заменив переменную интегрирования z опять на t , получим

$$\int_{(2l+1/2)\pi/x}^{(4l+1-x)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt \\ = - \int_\pi^{(2l+1/2)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{(4l+1)\pi}{x} - t\right) dt.$$

Теперь можем продолжить:

$$- \int_0^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin t dt = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + \int_{(4l+1-x)\pi/x}^{(2l+1)\pi/x} \\ + \int_\pi^{(2l+1/2)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \left(\sin t - \sin\left(\frac{(4l+1)\pi}{x} - t\right) \right) dt \\ = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + \int_{(4l+1-x)\pi/x}^{(2l+1)\pi/x} \\ + 2 \cos\left(\frac{(2l+1/2)\pi}{x}\right) \int_\pi^{(2l+1/2)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(t - \frac{(2l+1/2)\pi}{x}\right) dt \\ = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + R_\xi(x).$$

Воспользовавшись леммами 9 и 10, получаем искомое представление для $x \in [2l, 2l+1/2], l \in \mathbb{N}$.

2) На отрезках вида $x \in [2l + 1/2, 2l + 1]$, $l \in \mathbb{N}$, используем разбиения

$$\begin{aligned} h_\xi(x) &= - \int_0^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + \int_\pi^{(2l+1)\pi/x} \\ &= - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + R_\xi(x). \end{aligned}$$

Применяя леммы 9 и 10, получаем искомое представление для $x \in [2l + 1/2, 2l + 1]$, $l \in \mathbb{N}$.

3) На отрезках вида $x \in [2l + 1, 2l + 3/2]$, $l \in \mathbb{Z}_+$, используем следующее разбиение:

$$\begin{aligned} h_\xi(x) &= - \int_0^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} - \int_{(2l+1)\pi/x}^\pi \\ &= - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + R_\xi(x). \end{aligned}$$

И опять из лемм 9 и 10 получаем утверждение леммы для $x \in [2l + 1, 2l + 3/2]$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

4) Пусть теперь $x \in [2l + 3/2, 2l + 2]$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что для заданных x справедливы неравенства $(2l+1)\pi/x \leq (4l+3-x)\pi/x \leq (2l+3/2)\pi/x \leq \pi$. Поэтому представим интеграл в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt \\ &= - \int_0^{(2l+1)\pi/x} - \int_{(2l+1)\pi/x}^{(4l+3-x)\pi/x} - \int_{(4l+3-x)\pi/x}^{(2l+3/2)\pi/x} - \int_{(2l+3/2)\pi/x}^\pi. \end{aligned}$$

В предпоследнем интеграле сделаем замену переменного $t = (4l+3)\pi/x - z$, где z — новая переменная, а затем, заменив переменную интегрирования z опять на t , получим

$$- \int_{(4l+3-x)\pi/x}^{(2l+3/2)\pi/x} \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt = \int_{(2l+3/2)\pi/x}^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{(4l+3)\pi}{x} - t\right) dt.$$

Теперь можем продолжить:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin t \, dt = - \int_0^{(2l+1)\pi/x} - \int_{(2l+1)\pi/x}^{(4l+3-x)\pi/x} \\ & \quad + \int_{(2l+3/2)\pi/x}^\pi \xi(xt) \cos(xt) \left(\sin\left(\frac{(4l+3)\pi}{x} - t\right) - \sin t \right) dt \\ &= - \int_0^{(2l+1)\pi/x} - \int_{(2l+1)\pi/x}^{(4l+3-x)\pi/x} \\ & \quad + 2 \cos\left(\frac{(2l+3/2)\pi}{x}\right) \int_{(2l+3/2)\pi/x}^\pi \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{(2l+3/2)\pi}{x} - t\right) dt \\ &= - \int_0^{(2l+1)\pi/x} + R_\xi(x). \end{aligned}$$

Теперь на основании лемм 9 и 10 получаем требуемое представление и для $x \in [2l + 3/2, 2l + 2]$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

Из лемм 11 и 12 получим следующий результат.

ЛЕММА 13. Пусть $\xi \in \Upsilon$, $\xi(x) \not\equiv 0$. Тогда для функции $h_\xi(x)$ справедливо

$$h_\xi(x) = \begin{cases} > 0, & x \in (2l+1, 2l+3), \quad l \in \mathbb{Z}_+; \\ = 0, & x = 2l+1, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим ($l \in \mathbb{N}$)

$$g_\xi(x) = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \sin\left(\frac{\pi}{2x} - t\right) dt, & \text{если } 1 \leq x \leq 2; \\ 2 \cos^2\left(\frac{(2l+1)\pi}{2x}\right) \int_0^{\pi/(2x)} \xi(xt) \cos(xt) \\ \quad \times \cos t \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} - \operatorname{tg} t\right) dt, & \text{если } 2l \leq x \leq 2l+2. \end{cases}$$

В силу леммы 12 справедливо представление $h_\xi(x) = g_\xi(x) + R_\xi(x)$, причем из леммы 11 следует, что $R_\xi(x) = 0$, если x нечетно, и $R_\xi(x) \geq 0$, если $x \in (2l+1, 2l+3)$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

Из определения класса Υ , в частности, следует неотрицательность функции $\xi(\cdot)$, а значит, как нетрудно видеть, и неотрицательность $g_\xi(x)$ при всех $x \geq 1$. При этом, очевидно, $g_\xi(2l+1) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{Z}_+$.

Отсюда заключаем, что $h_\xi(x) > 0$ при $\xi(x) \not\equiv 0$, $x \in (2l+1, 2l+3)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, и $h_\xi(2l+1) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{Z}_+$, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $\xi(x) \equiv 1$. Тогда

$$h_1(x) = - \int_0^\pi \cos(xt) \sin t \, dt = \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

Действительно, так как $-\cos(xt) \sin t = (1/2)(\sin((x-1)t) - \sin((x+1)t))$, то, интегрируя по t данное равенство на отрезке $[0, \pi]$, получаем

$$h_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos((x+1)t)}{x+1} - \frac{\cos((x-1)t)}{x-1} \right) \Big|_{t=0}^\pi = \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 1}.$$

Из этого примера видно, что множество $[1, +\infty)$, которому принадлежит переменная x , заменить в лемме 13 на большее множество невозможно, так как $h_1(x) < 0$ при $x \in (-1, 1)$.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 4. Так как из определения множества $\Psi(\mathbf{b})$ следует, что функция ψ четная и принадлежит классу $C_0^+(\mathbb{T})$, то из следствия 1.1 при всех $\delta > 0$ получаем неравенство

$$\mathfrak{K}_\psi(n, \delta) \geq \mathfrak{K}_\psi(n, \pi) = J_\psi^{-1/2}, \quad (4.6)$$

где $J_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \, dx$. Из определения класса $\Psi(\mathbf{b})$ также следует, что для функции ψ справедливо разложение

$$\int_0^\pi \psi(xt) \frac{\sin t}{2} \, dt = J_\psi + \sum_k h_{\xi_k}(b_k x),$$

где $\xi_k(\cdot) \in \Upsilon$. Из леммы 13 вытекает, что $h_{\xi_k}(b_k x) \geq 0$, если $b_k x \geq 1$. Отсюда получаем, что $\int_0^\pi \psi(xt) \frac{\sin t}{2} dt \geq J_\psi$ при всех $x \geq \hat{b}$. Из леммы 5 следует, что

$$\overline{\mathcal{K}}_\psi(n, \delta) \leq \left(\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])} \inf_{x \geq \hat{b}} \int_0^\pi \psi(xt) d\mu(t) \right)^{-1/2}$$

при всех $\delta \geq \hat{b}\pi/n$.

Так как функция $w(t) = (\sin t)/2$, очевидно, удовлетворяет условиям

$$\int_0^\pi w(t) dt = 1, \quad w(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \pi],$$

то, полагая $d\mu(t) = w(t) dt$, приходим к неравенствам

$$\max_{\mu \in B\mathcal{M}^+([0, \pi])} \inf_{x \geq \hat{b}} \int_0^\pi \psi(xt) d\mu(t) \geq \inf_{x \geq \hat{b}} \int_0^\pi \psi(xt) \frac{\sin t}{2} dt \geq J_\psi$$

и, значит, $\overline{\mathcal{K}}_\psi(n, \delta) \leq J_\psi^{-1/2}$ при $\delta \geq \hat{b}\pi/n$. Из последней оценки и неравенства (4.6) получаем утверждение теоремы.

§ 5. Доказательство следствия 1.7

Для доказательства следствия 1.7 достаточно проверить, что функция $\psi_{a,r}(x) = 2^r \prod_{k=0}^{r-1} (1 - \cos(a^k x))$ принадлежит классу $\Psi(\mathbf{b})$ для некоторого конечного набора $\mathbf{b}$ чисел, минимальное из которых равно единице. Свойство $\psi_{a,r}(x) \in C_0^+(\mathbb{T})$ и четность функции $\psi_{a,r}$ очевидны.

Следовательно, для того чтобы выполнялось требуемое условие на $\psi_{a,r}(\cdot)$, нужно предъявить функции $\xi_k(\cdot) = \xi_{k,a,r}(\cdot) \in \Upsilon$ и числа $b_k = b_{k,a,r} \geq 1$ такие, чтобы было справедливо равенство

$$\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \frac{\sin t}{2} dt = J_{\psi_{a,r}} + \sum_k h_{\xi_k}(b_k x) \quad \forall x \geq 1.$$

Прежде всего заметим, что в силу ортогональности тригонометрической системы при $r, a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, имеем $J_{\psi_{a,r}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{a,r}(x) dx = 2^r$. Поэтому для доказательства следствия достаточно установить соотношение

$$\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \frac{\sin t}{2} dt = 2^r + \sum_k h_{\xi_k}(b_k x). \quad (5.1)$$

В данном параграфе мы докажем, что функции

$$\begin{aligned} \xi_{0,a,r}(x) &\equiv 2^{r-1}, \\ \xi_{k,a,r}(x) &= 2^{r-1} \prod_{s=1}^k (1 - \cos(a^s x)), \quad k = 1, \dots, r-1, \end{aligned}$$

и числа $b_k = a^{r-1-k}$, $k = 0, \dots, r-1$, удовлетворяют соотношению (5.1) (и условию $\xi_{k,a,r} \in \Upsilon$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Для фиксированного натурального r и четного положительного a введем функции

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{0,a}(x) &\equiv 1, \\ \tilde{\xi}_{1,a}(x) &= 1 - \cos(ax), \\ \tilde{\xi}_{2,a}(x) &= (1 - \cos(ax))(1 - \cos(a^2x)), \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\xi}_{r-1,a}(x) &= (1 - \cos(ax))(1 - \cos(a^2x)) \cdots (1 - \cos(a^{r-1}x)),\end{aligned}$$

которые отличаются от функций $\xi_{k,a,r}(x)$ только множителем 2^{r-1} .

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, r-1$, $a = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Докажем важные свойства функций $\xi_{k,a,r}(x)$ и $\tilde{\xi}_{k,a}(x)$:

$$\xi_{k,a,r}(x), \tilde{\xi}_{k,a}(x) \in \Upsilon; \quad (5.2)$$

$$\tilde{\xi}_{k,a}(a^{r-1-k}x)(1 - \cos(a^r x)) = \tilde{\xi}_{k+1,a}(a^{r-1-k}x); \quad (5.3)$$

$$\tilde{\xi}_{1,a}(a^{r-1}x) = 1 - \cos(a^r x). \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим свойство (5.2). Из построения функций $\xi_{k,a,r}(x)$ и $\tilde{\xi}_{k,a}(x)$ сразу вытекают следующие свойства:

- 1) $\xi_{k,a,r}(x) \geq 0$, $\tilde{\xi}_{k,a}(x) \geq 0$;
- 2) $\xi_{k,a,r}(x), \tilde{\xi}_{k,a}(x) \in C(\mathbb{R})$;
- 3) $\xi_{k,a,r}(x), \tilde{\xi}_{k,a}(x)$ четные;
- 4) $\xi_{k,a,r}(x), \tilde{\xi}_{k,a}(x)$ имеют период равный π , так как a — четное положительное число.

Следовательно, $\xi_{k,a,r}(x), \tilde{\xi}_{k,a}(x) \in \Upsilon$.

Свойство (5.3) непосредственно вытекает из определений функций. Действительно, из определения $\tilde{\xi}_{k,a}(x)$ следует

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{k,a}(a^{r-k-1}x) &= \prod_{l=1}^k (1 - \cos(a^l \cdot a^{r-k-1}x)), \\ \tilde{\xi}_{k+1,a}(a^{r-k-1}x) &= \prod_{l=1}^{k+1} (1 - \cos(a^l \cdot a^{r-k-1}x)).\end{aligned}$$

Таким образом, домножив первое равенство на $(1 - \cos(a^r x))$, получаем второе.

Свойство (5.4) очевидно.

ЛЕММА 14. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $a = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned}(1 - \cos x)(1 - \cos(ax))(1 - \cos(a^2x)) \cdots (1 - \cos(a^{r-1}x)) \\ = 1 - \sum_{k=1}^{r-1} \cos(a^{r-1-k}x) \tilde{\xi}_{k,a}(a^{r-1-k}x) - \cos(a^r x).\end{aligned} \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, проведем доказательство (5.5), используя индукцию по r . Для $r = 1$ это равенство тривиально, поскольку оно утверждает: $1 - \cos x = 1 - \cos x$.

Предположим, что равенство (5.5) верно и для $r = r_0$. Докажем его справедливость и для случая $r = r_0 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \prod_{k=0}^{r_0-1} (1 - \cos(a^k x))(1 - \cos(a^{r_0} x)) \\
&= \left(1 - \sum_{k=1}^{r_0-1} \cos(a^{r_0-1-k} x) \tilde{\xi}_{k,a}(a^{r_0-1-k} x) - \cos(a^{r_0-1} x) \right) (1 - \cos(a^{r_0} x)) \\
&= 1 - \cos(a^{r_0} x) - \sum_{k=1}^{r_0-1} \cos(a^{r_0-1-k} x) \tilde{\xi}_{k,a}(a^{r_0-1-k} x) (1 - \cos(a^{r_0} x)) \\
&\quad - \cos(a^{r_0-1} x) (1 - \cos(a^{r_0} x)). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Теперь, используя равенства (5.3), (5.4), продолжаем:

$$\begin{aligned}
& \prod_{k=0}^{r_0} (1 - \cos(a^k x)) = 1 - \cos(a^{r_0} x) - \sum_{k=1}^{r_0-1} \cos(a^{r_0-(k+1)} x) \tilde{\xi}_{k+1,a}(a^{r_0-(k+1)} x) \\
&\quad - \cos(a^{r_0-1} x) \tilde{\xi}_{1,a}(a^{r_0-1} x) \\
&= 1 - \cos(a^{r_0} x) - \sum_{k=2}^{r_0} \cos(a^{r_0-k} x) \tilde{\xi}_{k,a}(a^{r_0-k} x) - \cos(a^{r_0-1} x) \tilde{\xi}_{1,a}(a^{r_0-1} x) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{r_0} \cos(a^{r_0-k} x) \tilde{\xi}_{k,a}(a^{r_0-k} x) - \cos(a^{r_0} x). \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Лемма 14 доказана.

ЛЕММА 15 (представление для $\psi_{a,r}(x)$). Пусть $r \in \mathbb{N}$, $a = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi_{a,r}(x) = 4^r \sin^2(x/2) \sin^2(ax/2) \cdots \sin^2(a^{r-1}x/2) \cdots$. Тогда справедливо представление

$$\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \frac{\sin t}{2} dt = 2^r + 2^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} h_{\tilde{\xi}_{k,a}}(a^{r-1-k} x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.9) вытекает, что

$$2^{-r} \psi_{a,r}(x) = (1 - \cos x)(1 - \cos(ax))(1 - \cos(a^2 x)) \cdots (1 - \cos(a^{r-1} x)).$$

Откуда по лемме 14 вытекает равенство

$$2^{-r} \psi_{a,r}(xt) = 1 - \sum_{k=1}^{r-1} \cos(a^{r-1-k} xt) \tilde{\xi}_{k,a}(a^{r-1-k} xt) - \cos(a^{r-1} xt).$$

Теперь, проинтегрировав по t с весом $\sin t/2$ на отрезке от $[0, \pi]$ данное равенство, с учетом определений функций $h_{\tilde{\xi}_{k,a},r}(x)$ получаем утверждение леммы.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СЛЕДСТВИЯ 1.7. Из леммы 15 получаем, что справедливо представление

$$\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \frac{\sin t}{2} dt = 2^r + \sum_{k=0}^{r-1} h_{\xi_k}(a^{r-1-k}x),$$

где $\xi_k(\cdot) = \xi_{k,a,r}(\cdot) \in \Upsilon$ и $a^{r-1-k} \geq 1$. Теперь из леммы 13

$$\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \frac{\sin t}{2} dt \geq 2^r, \quad x \geq 1.$$

Таким образом, следствие 1.7 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Проблему получения верхней оценки точной константы при доказательстве следствия 1.7 мы фактически свели к доказательству неравенства

$$\inf_{x \geq 1} \int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \nu(t) dt \geq 2^r,$$

где в качестве “веса” $\nu(t)$ мы взяли функцию $\nu(t) = \sin t/2$. Заметим, однако, что это неравенство останется справедливым, если, например, брать “вес” $\nu(t) = 6t(\pi - t)/(\pi^3)$.

Для иллюстрации последнего утверждения приведем удобное представление для интеграла $\int_0^\pi \psi_{a,r}(xt) \frac{6}{\pi^3} t(\pi - t) dt$ в случае $a = r = 2$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi 4^2 \sin^2\left(\frac{xt}{2}\right) \sin^2(xt) \frac{6t(\pi - t)}{\pi^3} dt = 4 + \frac{4}{9} \\ & \times \frac{1}{(\pi x)^3} \left(\pi x (24 - 12 \cos^3(\pi x) + 27 \cos^2(\pi x) + 36 \cos(\pi x)) \right. \\ & \left. + \sin(\pi x) (8 \cos^2(\pi x) - 27 \cos(\pi x) - 56) \right). \end{aligned}$$

Обозначая $g(y) = 24 - 12y^3 + 27y^2 + 36y$, $\tilde{g}(y) = 8y^2 - 27y - 56$ и $f(x) = \pi x g(\cos(\pi x)) + \sin(\pi x) \tilde{g}(\cos(\pi x))$, вполне элементарными рассуждениями доказываем неравенство $f(x) \geq 0$ при $1 \leq x \leq 2$ и отдельно – при $2 \leq x < \infty$. Тогда

$$\int_0^\pi \psi_{2,2}(xt) \frac{6t(\pi - t)}{\pi^3} dt = 4 + \frac{4}{9} \frac{f(x)}{(\pi x)^3} \geq 4, \quad x \geq 1.$$

Авторы признательны А. Г. Бабенко и Н. И. Черныху за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста работы.

Список литературы

1. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
2. Shapiro H. S. A Tauberian theorem related to approximation theory // Acta Math. 1968. V. 120. P. 279–292.
3. Boman J., Shapiro H. S. Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Ark. Mat. 1971. V. 9. № 1. P. 91–116.
4. Boman J. Equivalence of generalized moduli of continuity // Ark. Mat. 1980. V. 18. № 1. P. 73–100.

5. Babenko A. G. On the Jackson–Stechkin inequality for the best L^2 -approximations of functions by trigonometric polynomials // Proc. Math. Inst. Steklov. 2001. Suppl. 1. P. S30–S47.
6. Prouhet M. E. Memoire sur quelques relations entre les puissances des nombres // C. R. Acad. Sci. Paris. 1851. V. 33.
7. Thue A. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Kra. Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl. 1912. № 10.
8. Morse M. Recurrent geodesics on a surface on negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc. 1921. V. 22.
9. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
10. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2 -approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
11. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
12. Виноградов О. Л., Жук В. В. Точные оценки отклонения среднего значения периодической функции через модули непрерывности высших порядков // Проблемы матем. анализа. 2001. № 22. С. 3–26.
13. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 336–350.
14. Vasil'ev S. N. The Jackson–Stechkin inequality in $L_2(-\pi, \pi)$ // Proc. Math. Inst. Steklov. 2001. Suppl. 1. P. S243–S253.
15. Барабошкина Н. А. Неклассические модули непрерывности и минимальные константы Джексона–Стечкина // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 11-ой Саратовской зимней школы, посвященной памяти выдающихся профессоров МГУ Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова (Саратов, 28 января–4 февраля 2002 г.). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002.
16. Арестов В. В., Попов В. Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Изв. вузов. Сер. матем. 1995. № 8(399). С. 13–20.
17. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // УМН. 1968. Т. 23. № 6. С. 51–116.
18. Шмидт В. Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.
19. Юдин А. А., Юдин В. А. О теоремах Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 152–157.
20. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
21. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
22. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1981.
23. Lorentz G., von Golitschek M. V., Makovoz Y. Constructive approximation: advanced problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
24. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
25. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des proprietes additives et multiplicatives donnees // Acta Arith. 1968. V. 13. P. 259–265.