Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Авербух, Минимаксный подход к играм среднего поля, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 7, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:25:50

УДК 517.978.4

Ю. В. Авербух

Минимаксный подход к играм среднего поля

Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений детерминированной игры среднего поля. Система состоит из уравнения типа Гамильтона–Якоби для функции цены и кинетического уравнения для распределения положений игроков. Предлагается определение обобщенного решения системы, основанное на понятии минимаксного решения уравнения типа Гамильтона–Якоби. Предложенный в работе метод доказательства существования обобщенного решения системы основан на исследовании равновесия по Нэшу в игре бесконечного числа игроков. С использованием обобщенного решения системы уравнений для игры среднего поля построено ε -равновесие по Нэшу в игре конечного числа игроков.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: игры среднего поля, уравнение типа Гамильтона–Якоби, минимаксное решение, равновесие по Нэшу, игра бесконечного числа игроков.

DOI: 10.4213/sm8380

§ 1. Введение

Концепция игр среднего поля была предложена в работах Ласри и Лионса (см. [1]–[5]) и в работах Вонга, Маламе и Кейнса (см. [6]–[10]). Подход, основанный на играх среднего поля, используется при исследовании управляемого процесса с N однотипными “слабыми” игроками в случае больших N . В предельном случае $N \rightarrow \infty$ динамика и функционал платы каждого игрока зависят лишь от его положения, управления и распределения положений всех игроков в пространстве, это распределение определяется динамикой всех игроков. Такая игровая постановка приводит к системе из двух уравнений в частных производных для игры среднего поля. Первое уравнение системы – это уравнение Гамильтона–Якоби для функции цены, второе уравнение – кинетическое уравнение (уравнение Колмогорова), оно задает распределение положений игроков в пространстве. Отметим, что гамильтониан в данном случае является функцией четырех переменных: времени, фазовой переменной, импульсной переменной, а также вероятностной меры, которая задает распределения положений игроков.

Обзор результатов в теории игр среднего поля дан в [11] (см. также приведенный в этой статье список литературы). Отметим, что игры среднего поля исследуются преимущественно для уравнений второго порядка. Этот случай соответствует стохастическим управляемым процессам. Для стохастического

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-07909).

случая теория построена в ситуации, когда динамика игроков задается нелинейным марковским процессом достаточно общего вида (см. [12], [13]).

Игры среднего поля первого порядка исследовались для случая, когда распределение положений игроков абсолютно непрерывно относительно меры Лебега (см. [3], [4], [14]–[16]). Существование и единственность решения системы уравнений для игры среднего поля доказаны для случая, когда зависимость гамильтониана от плотности распределения является нелокальной и сглаживающей (см. [3]), а также для случая, когда зависимость гамильтониана от плотности локальна, но гамильтониан удовлетворяет условию коэрцитивности по импульсной переменной (см. [15]). Эти работы базируются на представлении системы уравнений для игры среднего поля в виде задачи оптимизации. В некоторых случаях доказательство существования решения задачи может быть получено на основе прямого применения к исходной системе теоремы о неподвижной точке (см. [4], [14], а также [16]).

Другой подход рассматривает игру среднего поля как вероятностный процесс. Этот подход был применен к расширенным играм среднего поля (см. [11], [17]). В упомянутых работах второе (кинетическое) уравнение заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, при этом накладываются условия гладкости гамильтониана и коэрцитивности функции, сопряженной к гамильтониану.

В настоящей работе мы даем определение обобщенного решения системы уравнений для игры среднего поля и доказываем существование решения. В отличие от предыдущих работ предлагаемый подход не исключает случай, когда распределение положений игроков содержит атомы. Мы предполагаем, что гамильтониан непрерывен и липшицев по импульсной переменной. Предлагаемое определение обобщенного решения основано на понятии минимаксного решения для уравнений Гамильтона–Якоби, введенном А. И. Субботиным в [18]. Концепция минимаксного решения восходит к понятию стабильности, предложенному Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным в теории антагонистических дифференциальных игр (см. [19]). Функция позиции называется минимаксным решением, если ее надграфик и подграфик слабо инвариантны относительно некоторых дифференциальных включений. Определение минимаксного решения также может быть дано в инфинитезимальной форме (см. [18]). Отметим, что минимаксное решение эквивалентно вязкостному.

Предлагаемое в работе определение обобщенного решения системы уравнений игры среднего поля означает, что уравнение Гамильтона–Якоби выполняется в минимаксном смысле, в то время как кинетическое уравнение заменяется на следующее условие: распределение положений игроков определяется мерой на множестве траекторий, выживающих в графике решения первого уравнения (уравнения Гамильтона–Якоби). Мы доказываем, что обобщенное решение совпадает с классическим, если последнее существует. Отметим, что предлагаемый подход близок к вероятностному подходу, рассмотренному в [17]. Как и в этой работе, в настоящей статье распределение положений игроков определяется мерой на пространстве траекторий. В то же время предлагаемый в настоящей работе минимаксный подход позволяет рассматривать негладкие случаи.

Доказательство существования обобщенного решения, предложенное в настоящей статье, основано на исследовании дифференциальной игры бесконечного числа однотипных игроков, соответствующей исходной системе уравнений. Мы доказываем существование равновесия по Нэшу в данной игре. Далее мы рассматриваем функцию, равную выигрышу пробного игрока, начавшему движение из некоторой позиции. Эта функция и распределение положений игроков образуют обобщенное решение системы уравнений игры среднего поля. Кроме того, мы строим ε -равновесие по Нэшу в дифференциальной игре конечного числа игроков. В этом случае предполагается, что игроки используют рандомизированные программные стратегии.

Статья строится следующим образом. В § 2 дается постановка задачи. В § 3 мы вводим понятие обобщенного решения системы уравнений игры среднего поля. В § 4 мы рассматриваем необходимые условия в инфинитезимальной форме и исследуем связь обобщенного и классического решений. Доказательству существования равновесия по Нэшу во вспомогательной дифференциальной игре бесконечного числа игроков посвящен § 5. Этот результат используется в § 6 для доказательства существования решения у исходной системы уравнений игры среднего поля. Наконец, § 7 посвящен конструкции приближенного равновесия по Нэшу в игре конечного числа игроков.

§ 2. Постановка задачи

2.1. Система игры среднего поля. Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений игры среднего поля

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, \mu[t], \nabla V) = 0, \quad V(T, \cdot) = \sigma(\cdot, \mu[T]), \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}\mu[t] = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V), \nabla \right\rangle \mu[t], \quad \mu[0] = m_0. \quad (2.2)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, V – функция на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}$, $\mu[\cdot]$ – мерозначная функция времени (точнее, $\mu[t]$ является борелевской вероятностной мерой на $\mathbb{R}^n$ для всех t), $\partial H / \partial p$ обозначает частную производную функции H по четвертой (импульсной) переменной. Ниже функцию H будем называть гамильтонианом. В нашей работе мы не предполагаем, что мера $\mu[t]$ является абсолютно непрерывной относительно “ n -мерной” меры Лебега.

Как известно (см. [18]), при фиксированной непрерывной функции $t \mapsto \mu[t]$ решение уравнения Гамильтона–Якоби может быть негладкой функцией, в этом случае уравнение (2.1) надо понимать в минимаксном (или вязкостном) смысле. В настоящей работе для случая минимаксного решения уравнения (2.1) кинетическое уравнение заменяется условием, не требующим существования $\partial H / \partial p$.

Кинетическое уравнение (2.2) описывает изменение распределения положений игроков. В такой форме система уравнений для игры среднего поля рассматривалась в работах [12], [13] для стохастического случая при определенной гладкости коэффициентов. Уравнение (2.2) получается из кинетического

уравнения, изучавшегося в [12], [13], отбрасыванием членов, соответствующих броуновскому движению и скачкам.

Заметим, что если $\mu[t]$ абсолютно непрерывна с плотностью $q(t, \cdot)$, то кинетическое уравнение (2.2) может быть записано в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \left(q \frac{\partial H(t, x, \mu, \nabla V)}{\partial p} \right) = 0, \quad q(0, \cdot) = q_0(\cdot). \quad (2.3)$$

Здесь через q_0 мы обозначаем плотность меры m_0 .

Уравнения (2.1) и (2.2) могут быть получены из следующих эвристических рассуждений (вывод системы уравнений для игры среднего поля в случае, когда динамика задается стохастическими дифференциальными уравнениями, см. в [6]–[8], [12]). Рассмотрим неантагонистическую игру N лиц с динамикой каждого игрока

$$\dot{x}_i = f \left(t, x_i, \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}, u_i \right), \quad t \in [0, T], \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad u_i \in P, \quad (2.4)$$

и функционалом платы, значения которого имеют вид

$$\sigma \left(x_i(T), \frac{x_1(T) + \dots + x_N(T)}{N} \right) - \int_0^T g \left(t, x_i(t), \frac{x_1(t) + \dots + x_N(t)}{N}, u_i(t) \right) dt. \quad (2.5)$$

Мы предполагаем, что каждый игрок стремится к максимизации значения своего выигрыша, задаваемого функционалом (2.5).

Равновесие по Нэшу в этой игре может быть получено с использованием стратегий наказания (см. [20]) или с использованием систем уравнений Гамильтона–Якоби (см. [21]).

Отметим, что для больших N построение решения с помощью этих методов является достаточно сложной задачей. Вместо этого рассмотрим предельное поведение при $N \rightarrow \infty$. Введем эмпирическое распределение положений игроков

$$\mu_N[t] \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k(t)}.$$

Здесь δ_x обозначает меру Дирака, сосредоточенную в точке x . Далее будем считать, что в f и g вместо третьего аргумента используется распределение положений игроков. Поскольку уравнения динамики и функционал платы не зависят от номера игрока, можно считать, что оптимальное управление $u_N^*(t, x)$ не зависит от номера игрока, а определяется лишь реализовавшейся позицией. Тогда μ_N является слабым решением уравнения

$$\frac{d}{dt} \mu_N[t] = \langle f(t, x, \mu_N[t], u_N^*(t, x)), \nabla \rangle \mu_N[t]. \quad (2.6)$$

Динамика каждого игрока определяется уравнением

$$\dot{x}_i = f(t, x_i, \mu_N[t], u_N^*(t, x)),$$

а функционал платы (2.5) принимает вид

$$\sigma(x_i(T), \mu_N[T]) - \int_0^T g(t, x_i(t), \mu_N[t], u_N^*(t, x_i(t))) dt.$$

Перейдем формально к пределу при $N \rightarrow \infty$. (Мы предполагаем, что есть последовательность эмпирических распределений $m_{0,N}$ в момент $t = 0$, сходящаяся к некоторой вероятностной мере m_0 .) Обозначим предельное распределение положений игроков в момент времени t через $\mu[t]$. Функция цены игрока не зависит от номера игрока и является решением уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, \mu[t], u^*(t, x)) \right\rangle - g(t, x, \mu[t], u^*(t, x)) = 0. \quad (2.7)$$

Здесь $u^*(t, x)$ – оптимальное управление по принципу обратной связи, удовлетворяющее условию

$$u^*(t, x) \in \text{Arg max}_{u \in P} \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, \mu[t], u) \right\rangle - g(t, x, \mu[t], u) \right\}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \mu[t] = \langle f(t, x, \mu[t], u^*(t, x)), \nabla \rangle \mu[t]. \quad (2.9)$$

Уравнения (2.7)–(2.9) и составляют систему (2.1), (2.2) в случае, когда гамильтониан

$$H(t, x, m, p) = \max_{u \in P} [\langle p, f(t, x, m, u) \rangle - g(t, x, m, u)]$$

дифференцируем по p .

Данная схема вывода системы уравнений (2.1), (2.2) является нестрогой. Ниже мы исследуем свойства решения этой системы, считая ее заданной, а в § 7 на основе обобщенного решения этой системы построим приближенное равновесие по Нэшу в игре конечного числа игроков.

2.2. Основные обозначения и предположения. Рассматриваем элементы $\mathbb{R}^{n+1}$ как пары (x, z) , $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$. Для каждой такой пары обозначим

$$\text{proj}_1(x, z) \triangleq x.$$

Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, то $\overline{\text{co}} \Gamma$ обозначает замыкание выпуклой оболочки:

$$\overline{\text{co}} \Gamma \triangleq \text{cl} \{ r_1 y_1 + \dots + r_m y_m : y_1, \dots, y_m \in \Gamma, r_1, \dots, r_m \in [0, 1], r_1 + \dots + r_m = 1 \}.$$

Если S – замкнутое подмножество банахова пространства, то $C(S)$ – множество непрерывных функций из S в $\mathbb{R}$, $C_b(S)$ – множество ограниченных непрерывных функций $S \rightarrow \mathbb{R}$; на множестве $C_b(S)$ будем рассматривать суп-норму $\|\varphi\| = \sup_{s \in S} |\varphi(s)|$. Далее, обозначим через $C^k(S)$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на S со значениями в $\mathbb{R}$, через $C_b^k(S)$ – подмножество $C^k(S)$, состоящее из функций, ограниченных вместе со всеми производными до порядка k включительно.

Обозначим через $C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$ множество непрерывных функций

$$(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

В дальнейшем элементы множества $C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$ будем называть *движениями*. Норма на $C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$ определяется равенством

$$\|(x(\cdot), z(\cdot))\| = \sup_{t \in [0, T]} (\|x(t)\| + |z(t)|).$$

Если $(x(\cdot), z(\cdot)) \in C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$, то через e_t обозначим следующий оператор проектирования на $\mathbb{R}^n$:

$$e_t(x(\cdot), z(\cdot)) = x(t).$$

Если V – функция, определенная на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, со значениями в $\mathbb{R}$, то график $\text{gr } V$ – это множество

$$\text{gr } V \triangleq \{(t, x, V(t, x)) : (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n\}.$$

Аналогично, надграфик функции V – это множество

$$\text{epi } V \triangleq \{(t, x, z) : (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, z \geq V(t, x)\},$$

а подграфик функции V – множество

$$\text{hypo } V \triangleq \{(t, x, z) : (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, z \leq V(t, x)\}.$$

Пусть $\mathcal{B}(S)$ – σ -алгебра борелевских подмножеств замкнутого множества S . Если m – борелевская мера на S , то через $\text{supp}(m)$ обозначим носитель m (см. [22]). Если R – банахово пространство и h – борелевская функция из S в R , то через $h \# m$ обозначим образ меры m при отображении h , т.е. $h \# m$ – борелевская вероятностная мера на R со свойством

$$\int_R \varphi(r)(h \# m)(dr) = \int_S \varphi(h(s))m(ds) \quad \forall \varphi \in C_b(R).$$

Множество всех борелевских вероятностных мер на S обозначаем через $\mathcal{P}(S)$. Далее будем придавать множеству S различные значения.

Мы рассматриваем на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ топологию слабой (точнее, *-слабой) сходимости. Эта топология порождается, в частности, метрикой Канторовича–Рубинштейна (см. [22])

$$\begin{aligned} W(m', m'') &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi d(m' - m'') : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \\ &= \inf_{\pi \in \Pi(m', m'')} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|x' - x''\| \pi(dx', dx''). \end{aligned}$$

Здесь

$$\text{Lip}_1 \triangleq \{\phi : |\phi(x') - \phi(x'')| \leq \|x' - x''\|\},$$

$\Pi(m', m'')$ – множество вероятностных мер π на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ таких, что $\pi(Y \times \mathbb{R}^n) = m'(Y)$, $\pi(\mathbb{R}^n \times Y) = m''(Y)$ для всех измеримых $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество непрерывных в слабом смысле функций $\mu: [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mu \in \mathcal{M}$, то $\mu[t]$ – распределение положений игроков в момент t . Определим расстояние $\mathcal{W}$ между двумя функциями $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ по правилу

$$\mathcal{W}(\mu, \nu) \triangleq \sup_{t \in [0, T]} W(\mu[t], \nu[t]).$$

Отметим, что $\mathcal{M}$ с метрикой $\mathcal{W}$ является замкнутым подмножеством банахова пространства. Мерозначная функция $\mu \in \mathcal{M}$ может рассматриваться как “внешнее” поле в уравнении (2.1).

Мы рассматриваем гамильтонианы вида

$$H(t, x, m, p) = \max_{u \in P} [\langle p, f(t, x, m, u) \rangle - g(t, x, m, u)].$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x, p \in \mathbb{R}^n$, m – вероятностная мера на $\mathbb{R}^n$, переменная p соответствует ∇V .

На гамильтониан, множество P , начальное распределение положений игроков m_0 и терминальную функцию $\sigma(\cdot, \cdot)$ накладываются следующие условия:

- 1) P – метрический компакт;
- 2) функции f и g определены на $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times P$ и непрерывны;
- 3) функция f липшицева по x и m , т.е. существуют константы $L_{f,x}$ и $L_{f,m}$ такие, что для всех $t \in [0, T]$, $x, x', x'' \in \mathbb{R}^n$, $m, m', m'' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и $u \in P$

$$\begin{aligned} \|f(t, x', m, u) - f(t, x'', m, u)\| &\leq L_{f,x} \|x' - x''\|, \\ \|f(t, x, m', u) - f(t, x, m'', u)\| &\leq L_{f,m} W(m', m''); \end{aligned}$$

- 4) σ непрерывна;
- 5) мера m_0 сосредоточена на компакте $G_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Отметим, что существует компакт $G \subset \mathbb{R}^n$ такой, что для любых внешнего поля μ и управления u движение $x(\cdot)$, являющееся решением уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, \mu[t], u(t)), \quad x(0) \in G_0,$$

не покинет множества G до момента T , т.е. $x(t) \in G$ при $t \in [0, T]$. Положим

$$K \triangleq \sup \{ \|f(t, x, m, u)\| : t \in [0, T], x \in G, m \in \mathcal{P}(E), u \in P \}. \quad (2.10)$$

Поскольку G , P и $\mathcal{P}(G)$ компактны, величина K конечна.

§ 3. Минимаксные решения

Напомним, что решение уравнения (2.1) может быть негладким даже в случае гладкого гамильтониана H (см. [18; § 1.4]). Мы будем рассматривать решение уравнения (2.1) в минимаксном (вязкостном) смысле. Существует несколько эквивалентных определений минимаксного решения (см. [18; § 6]). Мы будем использовать определение, основанное на понятии слабой инвариантности. В нашей работе будет использован вариант определения, существенно использующий выпуклость гамильтониана по импульсной переменной.

Пусть $\mathcal{A}$ – множество индексов, и пусть многозначные отображения

$$(t, x, m) \mapsto E^-(t, x, m) \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t, x, m, a) \mapsto E^+(t, x, m, a) \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad a \in \mathcal{A},$$

удовлетворяют следующим условиям:

- (E1) множества $E^-(t, x, m)$ и $E^+(t, x, m, a)$ непусты, выпуклы и замкнуты;
- (E2) многозначное отображение $(t, x, m) \mapsto E^-(t, x, m)$ полунепрерывно сверху по включению; для всех a отображения $(t, x, m) \mapsto E^+(t, x, m, a)$ полунепрерывны сверху;
- (E3) $H(t, x, m, p) = \max\{\langle p, \xi \rangle - \zeta : (\xi, \zeta) \in E^-(t, x, m)\}$;
- (E4) для всех t, x, m и p существует $a_* \in \mathcal{A}$ такое, что

$$\begin{aligned} H(t, x, m, p) &= \min\{\langle p, \xi \rangle - \zeta : (\xi, \zeta) \in E^+(t, x, m, a_*)\} \\ &\geq \min\{\langle p, \xi \rangle - \zeta : (\xi, \zeta) \in E^+(t, x, m, a)\} \quad \forall a \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Напомним, что отображение называется полунепрерывным сверху по включению, если его график замкнут.

Можно выбрать $\mathcal{A}$ равным P , а E^- и E^+ следующим образом:

$$\begin{aligned} E^-(t, x, m) &= \text{co}\{(f(t, x, m, u), g(t, x, m, u)) : u \in P\}, \\ E^+(t, x, m, u) &= \{(f(t, x, m, u), g(t, x, m, u))\}. \end{aligned}$$

Функция V является минимаксным решением при заданном внешнем поле $\mu \in \mathcal{M}$ (см. [18; § 6, определения (M3), (U2), (L2)]), если:

- (i) $V(T, \cdot) = \sigma(\cdot, \mu[T])$;
- (ii) для всех $a \in \mathcal{A}$ надграфик V слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in E^+(t, x(t), \mu[t], a);$$

- (iii) подграфик V слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in E^-(t, x, \mu[t]). \quad (3.1)$$

Напомним, что замкнутое множество $\Gamma \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n$ называется *слабо инвариантным относительно дифференциального включения*

$$\dot{y} \in \mathcal{F}(t, y), \quad (3.2)$$

если для любой позиции (t_0, x_0) существует движение $y_*(\cdot)$, удовлетворяющее дифференциальному включению (3.2), начальному условию $y_*(t_0) = y_0$ и такое, что $(t, y_*(t)) \in \Gamma$. Ниже решения дифференциальных включений полагаем измеримыми по Лебегу.

Отметим, что при фиксированном внешнем поле определение минимаксного решения не зависит от выбора отображений E^- и E^+ (см. [18]).

Определение решения уравнения Гамильтона–Якоби можно переписать в инфинитиземальной форме (см. [18; теорема 6.4]). Определим верхнюю d^+ и

нижнюю d^- производные по Адамару:

$$d^-V(t, x, \alpha, \xi) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, \alpha' \rightarrow \alpha, \xi' \rightarrow \xi} \frac{V(t + \delta\alpha', x + \delta\xi') - V(t, x)}{\delta},$$

$$d^+V(t, x, \alpha, \xi) \triangleq \limsup_{\delta \downarrow 0, \alpha' \rightarrow \alpha, \xi' \rightarrow \xi} \frac{V(t + \delta\alpha', x + \delta\xi') - V(t, x)}{\delta}.$$

Функция V является минимаксным решением уравнения (2.1) при фиксированном $\mu \in \mathcal{M}$, если:

- (i) $V(T, \cdot) = \sigma(\cdot, \mu[T])$;
- (ii) $\inf\{d^+V(t, x, 1, \xi) - \zeta : (\xi, \zeta) \in E^-(t, x, \mu[t])\} \geq 0$ для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\sup\{d^-V(t, x, 1, \xi) - \zeta : (\xi, \zeta) \in E^+(t, x, \mu[t], a)\} \leq 0$ для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и $a \in \mathcal{A}$.

Отметим связь между минимаксными решениями уравнения (2.1) для гамильтонианов рассматриваемого вида и решениями задач управления. Функция V является минимаксным решением уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда V является функцией оптимального результата в задаче управления

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \mu[t], u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

с критерием

$$J(x(\cdot), u(\cdot), \mu) = \sigma(x(T), \mu[T]) - \int_{t_0}^T g(t, x(t), \mu[t], u(t)) dt.$$

Здесь мы предполагаем, что целью управления является максимизация значения функционала.

Пусть

$$H^*(t, x, m, \xi) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} [\langle \xi, p \rangle - H(t, x, m, p)],$$

$$\mathcal{H}(t, x, m) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : H^*(t, x, m, \xi) < \infty\}.$$

Для функции позиции V и внешнего поля μ положим

$$\mathcal{S}[V, \mu] \triangleq \{(x(\cdot), z(\cdot)) : \dot{x}(t) \in \mathcal{H}(t, x(t), \mu[t]),$$

$$\dot{z}(t) = H^*(t, x(t), \mu[t], \dot{x}(t)), z(t) = V(t, x(t))\}.$$

Имеем

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : \exists \zeta : (\xi, \zeta) \in E^-(t, x, m)\} = \mathcal{H}(t, x, m).$$

Если $(\xi, \zeta) \in E^-(t, x, m)$, то $\zeta \geq H^*(t, x, m, \xi)$, и пара $(\xi, H^*(t, x, m, \xi))$ лежит в $E^-(t, x, m)$. Таким образом, если $(x(\cdot), z(\cdot))$ является решением дифференциального включения (3.1) и лежит в графике функции V , то $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}[V, \mu]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что пара $(V, \mu) \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}$ является обобщенным (минимаксным) решением системы (2.1), (2.2), если:

- 1) V – минимаксное решение уравнения (2.1);
- 2) $\mu[0] = m_0$;

- 3) существует мера χ на $\mathcal{S}[V, \mu]$ такая, что $\mu[t] = e_t \# \chi$, т.е. для каждой функции $\phi \in C_1[0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu[t](dx) = \int_{\mathcal{S}[V, \mu]} \phi(x(t)) \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))).$$

Поскольку понятие минимаксного решения уравнения типа Гамильтона–Якоби не зависит от выбора дифференциальных включений и пп. 2) и 3) определения 1 включают лишь граничные условия и гамильтониан, то определение минимаксного решения системы уравнений игры среднего поля не зависит от выбора отображений E^- и E^+ .

В § 6 будет сформулирована и доказана теорема существования обобщенного (минимаксного) решения системы уравнений (2.1), (2.2).

§ 4. Свойства минимаксного решения

Обозначим через $\mathcal{T}V(t, x)$ касательный конус (конус Булигана) к графику $gr V$ в точке (t, x) ,

$$\mathcal{T}V(t, x) \triangleq \left\{ (v, s) : \liminf_{\delta \downarrow 0} \left| \frac{V(t + \delta, x + \delta v)}{\delta} - s \right| = 0 \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если (V, μ) – минимаксное решение системы (2.1), (2.2), то существует измеримая функция $b: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что:

- (i) $b(t, x) \in \text{proj}_1(\overline{\text{co}} \mathcal{T}V(t, x, \mu) \cap E^-(t, x, \mu[t]));$
- (ii)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu[t](dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle b(t, x), \nabla \phi(x) \rangle \mu[t](dx) \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in \mathcal{T}V(t, x(t))$ для всех движений $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}[V, \mu]$ и всех моментов $t \in [0, T]$. В самом деле, поскольку все движения, принадлежащие множеству $\mathcal{S}[V, \mu]$, выживают в графике функции V , включение $(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in \mathcal{T}V(t, x)$ справедливо для почти всех $t \in [0, T]$ (см. [23]). Изменив значения $\dot{x}$ и $\dot{z}$ на множестве меры 0, мы получаем требуемое свойство.

Рассмотрим произвольные функцию $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ и движение $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}[V, \mu]$. Имеем

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) = \langle \nabla \phi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \quad \text{п.в. } t \in [0, T].$$

Следовательно, для всех $\psi \in C^1([0, T])$ таких, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$, имеем

$$\int_0^T \psi(t) \frac{d}{dt} \phi(x(t)) dt = \int_0^T \psi(t) \langle \nabla \phi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt.$$

Далее,

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{S}[V, \mu]} \int_0^T \psi'(t) \phi(x(t)) dt \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))) \\ & = \int_{\mathcal{S}[V, \mu]} \int_0^T \psi(t) \langle \nabla \phi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))). \end{aligned}$$

Используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathcal{S}[V, \mu]} \psi'(t) \phi(x(t)) \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))) dt \\ & = \int_{\mathcal{S}[V, \mu]} \int_0^T \psi(t) \langle \nabla \phi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначим

$$\mathcal{S}[V, t_*, x_*, \mu] \triangleq \{(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}[V, \mu] : x(t_*) = x_*\}.$$

Существует (см. [24; теорема 10.4.6]) система мер χ_{t_*, x_*} на $\mathcal{S}[V, t_*, x_*, \mu]$ такая, что для всех $\varphi \in C_b(\mathcal{S}[V, \mu])$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}[V, \mu]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot)) \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))) \\ & = \int_0^T dt_* \int_{\mathbb{R}^n} \mu[t_*](dx_*) \int_{\mathcal{S}[V, t_*, x_*, \mu]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot)) \chi_{t_*, x_*}(d(x(\cdot), z(\cdot))). \end{aligned}$$

Применяя эту формулу к (4.2), получаем равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \psi'(t) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu[t](dx) dt \\ & = \int_0^T dt_* \psi(t_*) \int_{\mathbb{R}^n} \mu[t_*](dx_*) \int_{\mathcal{S}[V, t_*, x_*, \mu]} \langle \nabla \phi(x(t_*)), \dot{x}(t_*) \rangle \chi_{t_*, x_*}(d(x(\cdot), z(\cdot))). \end{aligned}$$

Обозначим

$$b(t_*, x_*) \triangleq \int_{\mathcal{S}[V, t_*, x_*, \mu]} \dot{x}(t_*) \chi_{t_*, x_*}(d(x(\cdot), z(\cdot))).$$

Имеем $b(t_*, x_*) \in \text{proj}_1(\overline{\text{co}} \mathcal{T}V(t_*, x_*, \mu) \cap E^-(t_*, x_*, \mu[t]))$ и

$$- \int_0^T \psi'(t) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu[t](dx) dt = \int_0^T \psi(t) \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla \phi(x), b(t, x) \rangle \mu[t](dx) dt.$$

Таким образом, функция b с требуемыми свойствами построена.

Функция V является классическим решением уравнения (2.1) при заданном внешнем поле μ , если V дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (2.1) в каждой точке $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что существует непрерывная частная производная $\partial H / \partial p$ и V дифференцируемо; функция $\mu \in \mathcal{M}$ является слабым решением уравнения (2.2), если для всех функций $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in C_b^1([0, T])$ таких, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$, выполнено равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi'(t) \phi(x) \mu[t](dx) dt \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V(t, x)), \nabla \phi(x) \right\rangle \mu[t](dx) dt. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть (V, μ) – минимаксное решение системы (2.1), (2.2). Предположим также, что V дифференцируемо, а гамильтониан H непрерывно дифференцируем по переменной p . Тогда V является классическим решением уравнения (2.1), а μ является слабым решением уравнения (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения доказано в [18; § 2.4]. Если V дифференцируемо, то

$$d^+V(t, x, 1, \xi) = d^-V(t, x, 1, \xi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla V(t, x), \xi \rangle.$$

Поскольку V является минимаксным решением уравнения (2.1), существует управление $u_* \in P$ такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla V(t, x), f(t, x, \mu[t], u_*) \rangle - g(t, x, \mu[t], u_*) \geq 0,$$

и для всех $u \in P$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla V(t, x), f(t, x, \mu[t], u) \rangle - g(t, x, \mu[t], u) \leq 0.$$

Таким образом, V – классическое решение уравнения (2.1). Также

$$\mathcal{T}V(t, x, \mu) = \{f(t, x, \mu[t], u_*), g(t, x, \mu[t], u_*)\}.$$

Следовательно, условие (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu[t](dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(t, x, \mu[t], u_*), \nabla \phi(x) \rangle \mu[t](dx) \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку H дифференцируемо по четвертому аргументу,

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V(t, x)) = f(t, x, \mu[t], u_*).$$

Отсюда мы получаем, что μ является слабым решением уравнения (2.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Предположим, что:

- H непрерывно дифференцируем по p ;
- V – классическое решение уравнения (2.1) и ∇V удовлетворяет условию Липшица по x ;
- μ – слабое решение уравнения (2.2).

Тогда (V, μ) является минимаксным решением системы (2.1), (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $x_*(\cdot, x_0)$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V(t, x)), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть также

$$z_*(t, x_0) = V(0, x_0) + \int_0^t H^*(\tau, x_*(\tau, x_0), \mu[\tau], \dot{x}_*(\tau, x_0)) d\tau.$$

Имеем

$$\mathcal{S}[V, \mu] = \{(x_*(\cdot, x_0), z_*(\cdot, x_0)) : x_0 \in \mathbb{R}^n\}.$$

Определение 1 существенно использует существование меры χ на множестве $\mathcal{S}[V, \mu]$. Положим

$$\chi(Y) = m_0\{x_0 \in \mathbb{R}^n : (x_*(\cdot, x_0), z_*(\cdot, x_0)) \in Y\}.$$

Обозначим $\nu[t] \triangleq e_t \# \chi$. Получаем, что ν является слабым решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\nu[t] = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \mu[t], \nabla V(t, x)), \nabla \right\rangle \nu[t]. \quad (4.3)$$

Здесь мы рассматриваем меру $\nu[t]$ как линейный функционал на $C(\mathbb{R}^n)$, дифференцирование по времени понимается в смысле дифференцирования линейных функционалов (см. [12]).

По предположению μ также является решением уравнения (4.3). Из [12; теорема 2.3 и предложение 4.2] следует, что $\mu = \nu$. Таким образом, (V, μ) – минимаксное решение системы (2.1), (2.2).

§ 5. Игры с бесконечным числом игроков

В этом параграфе мы рассмотрим дифференциальные игры с бесконечным числом игроков для случая, когда уравнение динамики и результат каждого игрока зависят от положения этого игрока, его управления и распределения положений игроков в пространстве. Впервые такие постановки для статических игр были рассмотрены в [25]–[27]; обзор результатов теории игр с бесконечным числом игроков дан в работе [28]. Отметим, что базовые конструкции дифференциальных игр с бесконечным числом игроков были предложены в [29].

Пусть Ω – множество игроков. Мы предполагаем, что Ω является компактным метрическим пространством. Метрику на Ω мы будем обозначать через d_Ω . Пусть также η является неатомической борелевской мерой на Ω , $x_0 : \Omega \rightarrow G_0$ – непрерывная функция, определяющая начальное положение игрока.

Положение $x[t, \omega]$ игрока ω в момент t определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}x[t, \omega] = f(t, x[t, \omega], \mu[t], u(t)), \quad x(0) = x_0(\omega), \quad u(t) \in P, \quad t \in [0, T]. \quad (5.1)$$

Здесь, как и выше, $\mu[t]$ – распределение положений игроков в момент t . Оно определяется равенством $\mu[t] = x[t, \cdot] \# \eta$.

Если u – управление игрока ω , то его функционал платы (выигрыша) равен

$$J[\omega, u, \mu] \triangleq \sigma(x[T, \omega], \mu[T]) - \int_0^T g(t, x[t, \omega], \mu[t], u(t)) dt. \quad (5.2)$$

Мы предполагаем, что каждый игрок стремится к максимизации своего выигрыша.

Дифференциальная игра с динамикой (5.1) и функционалом платы (5.2) может быть построена на основе исходной системы (2.1), (2.2) по правилу:

$\Omega \triangleq G_0 \times [0, 1]$, $\eta \triangleq m_0 \times \lambda$ и $x_0(\omega', \omega'') \triangleq \omega'$ при $\omega' \in G_0$, $\omega'' \in [0, 1]$. Здесь знак $\times$ обозначает произведение мер, а λ обозначает меру Лебега на $\mathbb{R}$. Эта конструкция будет использоваться нами ниже при доказательстве существования решения системы (2.1), (2.2). Предложенный подход позволяет рассматривать случай, когда мера m_0 атомична.

Отметим, что максимум функционала (5.2) может не достигаться. В этом случае необходимо использовать обобщенные управления. Мы будем использовать конструкцию стратегических мер (мер-управлений), предложенную в [30], [31]. Используемый метод релаксации задачи управления эквивалентен подходу, основанному на мерозначных управлениях и разработанному в [32], [33].

Пусть S и R – компактные множества в банаховых пространствах. Напомним, что множество $C(S \times R)$ является сепарабельным метрическим пространством. Пусть последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ плотна в $C(S \times R)$. Если $\varkappa \in \mathcal{P}(S \times R)$, то определим слабую норму меры $\varkappa$ по правилу

$$\|\varkappa\|_w \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \varphi_j, \varkappa \rangle|}{2^j(1 + \|\varphi_j\|)}.$$

Здесь

$$\langle \varphi, \varkappa \rangle = \int_{S \times R} \varphi(s, r) \varkappa(d(s, r)).$$

Множество $\mathcal{P}(S \times R)$ с топологией, порожденной метрикой, соответствующей норме $\|\cdot\|_w$, является компактом. Также $\|\varkappa_i - \varkappa\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ в том и только том случае, когда $\varkappa_i$ сходится к $\varkappa$ в слабом смысле.

Пусть θ – неатомическая борелевская мера на S . Обозначим

$$\Lambda(S, \theta, R) \triangleq \{\varkappa \in \mathcal{P}(S \times R) : \varkappa(Y \times R) = \theta(Y)\}.$$

Множество $\Lambda(S, \theta, R)$ – множество мер на $S \times R$, согласованных с мерой θ . Отметим, что множество $\Lambda(S, \theta, R)$ компактно.

Напомним (см. [24; теорема 10.4.6]), что для меры $\varkappa \in \Lambda(S, \theta, R)$ существует функция $h: S \rightarrow \mathcal{P}(R)$ такая, что для всех $\varphi \in C(S \times R)$ функция

$$s \mapsto \int_R \varphi(s, t) h(s)(dr) \quad \text{измерима} \quad (5.3)$$

и

$$\int_S \theta(ds) \int_R \varphi(s, r) h(s)(dr) = \int_{S \times R} \varphi(s, r) \varkappa(d(s, r)). \quad (5.4)$$

Ниже мы используем обозначение

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta}(s, dr) = h(s)(dr).$$

Также имеет место обратное представление: по функции h , удовлетворяющей условию (5.3), можно построить меру $\varkappa \in \Lambda(S, \theta, R)$ так, чтобы было выполнено условие (5.4).

Обозначим $\mathcal{U} \triangleq \Lambda([0, T], \lambda, P)$. Элементами множества $\mathcal{U}$ являются стратегические меры. Если $\alpha \in \mathcal{U}$, $\mu \in \mathcal{M}$, $\omega \in \Omega$, то движение $x[\cdot, \omega, \alpha, \mu]$ является решением уравнения

$$x(t) = x_0(\omega) + \int_{[0, t] \times P} f(\tau, x(\tau), \mu[\tau], u) \alpha(d(\tau, u)).$$

Кроме того, выигрыш игрока ω , использующего обобщенное управление α , равен

$$J[\omega, \alpha, \mu] = \sigma(x[T, \omega, \alpha, \mu], \mu[T]) - \int_{[0, T] \times P} g(\tau, x[\tau, \omega, \alpha, \mu], \mu[\tau], u) \alpha(d(\tau, u)).$$

Подход, основанный на стратегических мерах, эквивалентен подходу, основанному на мерозначных управлениях и разработанному в [32], [33]. Действительно, если $h = \partial\alpha/\partial\lambda$ – мерозначное управление, то $x[\cdot, \omega, \alpha, \mu]$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = \int_P f(t, x(t), \mu[t], u) h(t)(du), \quad x(0) = x_0(\omega).$$

Аналогично,

$$J[\omega, \alpha, \mu] = \sigma(x[T, \omega, \alpha, \mu], \mu[T]) - \int_0^T \int_P g(\tau, x[\tau, \omega, \alpha, \mu], \mu[\tau], u) h(t)(du) dt.$$

Ниже мы будем использовать конструкцию, аналогичную смешанным стратегиям в теории статических игр конечного числа игроков. Обозначим $\mathcal{D} \triangleq \Lambda(\Omega, \eta, \mathcal{U})$. Элементы множества $\mathcal{D}$ – профили программных стратегий, т.е. если $\gamma \in \mathcal{D}$, то $\partial\gamma/\partial\eta(\omega, \cdot)$ является распределением управлений, выбранных игроком ω для η -почти всех $\omega \in \Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть пару $X[\gamma] = (y, \mu)$ *процессом, порожденным профилем управлений* γ , если $y: [0, T] \times \Omega \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathcal{M}$ таковы, что $y[\cdot, \omega, \alpha] = x[\cdot, \omega, \alpha, \mu]$ для всех $\alpha \in \mathcal{U}$, $\omega \in \Omega$, а $\mu[t] = y[t, \cdot, \cdot] \# \gamma$.

Напомним, что равенство $\mu[t] = y[t, \cdot, \cdot] \# \gamma$ записывается в следующем виде:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mu[t](dx) = \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi(y[t, \omega, \alpha]) \gamma(d(\omega, \alpha)) \quad \forall \phi \in C_b(\mathbb{R}^n).$$

Положим

$$\mathcal{M}' \triangleq \{\mu \in \mathcal{M} : \mu[t] \in \mathcal{P}(G), W(\mu(t'), \cdot), \mu(t'', \cdot)) \leq K|t' - t''|\}.$$

Здесь константа K определена равенством (2.10). Множество $\mathcal{M}'$ является компактным и выпуклым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для каждого профиля управлений γ существует и единствен процесс $X[\gamma]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства мы определим оператор $A: \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'$, неподвижные точки которого и задают процессы, порожденные профилем γ . Положим $A(\mu)[t] \triangleq x[t, \cdot, \cdot, \mu] \# \gamma$, т.е. $\nu = A(\mu)$, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu[t](dx) = \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)) \quad \forall \phi \in C_b(\mathbb{R}^n). \quad (5.5)$$

Отметим, что если μ – неподвижная точка оператора A , то $(x[\cdot, \cdot, \cdot, \mu], \mu)$ – процесс, порожденный профилем управлений γ .

Покажем, что $\nu = A(\mu) \in \mathcal{M}'$. Пусть $\phi(x) = 0$ на G , тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu[t](dx) = 0.$$

Это означает, что $\text{supp}(\nu[t]) \subset G$. Далее, для $\phi \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu(dx) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} 1 \nu[t](dx) = 1.$$

Таким образом, $\nu[t] \in \mathcal{P}(G)$.

Пусть теперь $t', t'' \in [0, T]$, $t'' > t'$. Имеем

$$x[t'', \omega, \alpha, \mu] = x[t', \omega, \alpha, \mu] + \int_{[t', t''] \times P} f(\tau, x[\tau, \omega, \alpha, \mu], \mu[\tau], u) \alpha(d(\tau, u)).$$

Таким образом,

$$\|x[t'', \omega, \alpha, \mu] - x[t', \omega, \alpha, \mu]\| \leq K|t'' - t'|.$$

Также

$$\begin{aligned} W(\nu(t''), \cdot, \nu(t'), \cdot) &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu(t''), dx - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu(t'), dx : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega \times \mathcal{U}} [\phi(x[t'', \omega, \alpha, \mu]) - \phi(x[t', \omega, \alpha, \mu])] \gamma(d(\omega, \alpha)) : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \\ &\leq K|t'' - t'|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор A определен корректно.

Покажем, что оператор A непрерывен. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}'$. Имеем

$$\begin{aligned} &\|x[t, \omega, \alpha, \mu_1] - x[t, \omega, \alpha, \mu_2]\| \\ &\leq \int_0^t L_{f,x} \|x[\tau, \omega, \alpha, \mu_1] - x[\tau, \omega, \alpha, \mu_2]\| d\tau + \int_0^t L_{f,m} W(\mu_1[\tau], \mu_2[\tau]) d\tau. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гронуолла, получаем

$$\|x[t, \omega, \alpha, \mu_1] - x[t, \omega, \alpha, \mu_2]\| \leq e^{L_{f,x} T} L_{f,m} \int_0^t W(\mu_1[\tau], \mu_2[\tau]) d\tau. \quad (5.6)$$

Обозначим $C_1 \triangleq e^{L_{f,x} T} L_{f,m}$. Поскольку

$$\begin{aligned} &W(A(\mu_1)[t], A(\mu_2)[t]) \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega \times \mathcal{U}} (\phi(x[t, \omega, \alpha, \mu_1]) - \phi(x[t, \omega, \alpha, \mu_2])) \gamma(d(\omega, \alpha)) : \phi \in \text{Lip}_1 \right\}, \end{aligned}$$

имеем

$$W(A(\mu_1)[t], A(\mu_2)[t]) \leq C_1 \int_0^t W(\mu_1[\tau], \mu_2[\tau]) d\tau. \quad (5.7)$$

Отсюда получим

$$\mathcal{W}(A(\mu_1), A(\mu_2)) \leq C_1 T \mathcal{W}(\mu_1, \mu_2).$$

Поскольку множество $\mathcal{M}'$ компактно и выпукло, а оператор $A: \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ непрерывен, по теореме Шаудера о неподвижной точке (см., к примеру, [34; следствие 17.56]) существует $\mu^* \in \mathcal{M}'$ – неподвижная точка оператора A . Пара (y^*, μ^*) при $y^*: [0, T] \times \mathcal{U} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, равном $x[\cdot, \omega, \alpha, \mu^*]$, является процессом, порожденным γ .

Покажем единственность процесса $X[\gamma]$. Заметим, что если (y, μ) является процессом, порожденным γ , то $\mu = A(\mu)$. Пусть μ_1 и μ_2 – две неподвижные точки оператора A . Пусть также ϑ – максимальный момент такой, что $\mu_1[t] = \mu_2[t]$ для $t \in [0, \vartheta]$. Если $\vartheta < T$, выберем положительное число δ так, чтобы $\delta < \min\{T - \vartheta, 1/C_1\}$. Из (5.7) получаем

$$\sup_{t \in [\vartheta, \vartheta + \delta]} W(\mu_1[t], \mu_2[t]) \leq C_1 \delta \sup_{t \in [\vartheta, \vartheta + \delta]} W(\mu_1[t], \mu_2[t]).$$

Следовательно, $W(\mu_1[t], \mu_2[t]) = 0$ при $t \in [\vartheta, \vartheta + \delta]$. Это противоречит выбору ϑ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что профиль $\hat{\gamma}$ является *равновесием по Нэшу*, если для $(\hat{y}, \hat{\mu}) = X[\hat{\gamma}]$, для η -почти всех игроков $\omega \in \Omega$ и для любой меры $\varrho \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathcal{U}} J[\omega, \alpha, \hat{\mu}] \varrho(d\alpha) \leq \int_{\mathcal{U}} J[\omega, \alpha, \hat{\mu}] \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \eta}(\omega, d\alpha). \quad (5.8)$$

Обозначим

$$\mathcal{E}(\omega, \mu) \triangleq \text{Arg max}\{J[\omega, \alpha, \mu] : \alpha \in \mathcal{U}\}, \quad \tilde{\mathcal{E}}(\mu) = \{(\omega, \alpha) : \alpha \in \mathcal{E}(\omega, \mu)\}.$$

Множество $\tilde{\mathcal{E}}(\mu)$ замкнуто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Профиль $\hat{\gamma}$ является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда $\text{supp}(\hat{\gamma}) \subset \tilde{\mathcal{E}}(\hat{\mu})$ для $(\hat{y}, \hat{\mu}) = X[\hat{\gamma}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\hat{\gamma}$ является равновесием по Нэшу. Пусть $\Omega^+[\hat{\gamma}]$ – множество тех $\omega \in \Omega$, для которых неравенство (5.8) выполнено. Поскольку $\hat{\gamma}$ – равновесие по Нэшу, то $\eta(\Omega \setminus \Omega^+[\hat{\gamma}]) = 0$. Для каждого $\omega \in \Omega^+[\hat{\gamma}]$ справедливо вложение

$$\text{supp}\left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \eta}(\omega, \cdot)\right) \subset \mathcal{E}(\omega, \hat{\mu}).$$

Выберем произвольную функцию $\varphi \in C(\Omega \times \mathcal{U})$ так, чтобы $\varphi(\omega, \alpha) = 0$ для всех $(\omega, \alpha) \in \mathcal{E}(\hat{\mu})$. Имеем

$$\int_{\Omega \times \mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \hat{\gamma}(d(\omega, \alpha)) = \int_{\Omega^+} \eta(d\omega) \int_{\mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \eta}(\omega, d\alpha) = 0.$$

Следовательно, $\text{supp}(\hat{\gamma}) \subset \tilde{\mathcal{E}}(\hat{\mu})$.

Предположим теперь, что $\text{supp}(\hat{\gamma}) \subset \tilde{\mathcal{E}}(\hat{\mu})$ для $(\hat{y}, \hat{\mu}) = X[\hat{\gamma}]$. Это означает, что для η -почти всех $\omega \in \Omega$

$$\text{supp}\left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \eta}(\omega, \cdot)\right) \subset \mathcal{E}(\omega, \mu).$$

Отсюда для η -почти всех $\omega \in \Omega$, всех $\alpha \in \text{supp}(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \eta}(\omega, \cdot))$ и любых $\beta \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство

$$J[\omega, \beta, \hat{\mu}] \leq J[\omega, \alpha, \hat{\mu}].$$

Интегрируя это неравенство по мерам $\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \eta}(\omega, d\alpha)$ и $\varrho(d\beta)$, мы получаем неравенство (5.8).

ТЕОРЕМА 1. *Существует равновесный по Нэшу профиль управлений $\hat{\gamma}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим многозначное отображение, чьи неподвижные точки являются равновесными профилями управлений в игре с бесконечным числом игроков.

Прежде всего определим отображение $B: \mathcal{M}' \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}'$ по правилу: $\nu = B(\mu, \gamma)$, если $\nu[t] = x[t, \cdot, \cdot, \mu] \# \gamma$, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu[t](dx) = \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)) \quad \forall \phi \in C_b(\mathbb{R}^n). \quad (5.9)$$

Отображение B определено корректно (доказательство аналогично доказательству корректности оператора A в доказательстве предложения 4).

Покажем, что B непрерывно. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существуют $\mu_k \rightarrow \mu$, $\gamma_k \rightarrow \gamma$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{W}(B(\mu_k, \gamma_k), B(\mu, \gamma)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} W(B(\mu_k, \gamma_k)[t], B(\mu, \gamma)[t]) > 0.$$

Переходя при необходимости к подпоследовательностям, можно считать, что существует $t \in [0, T]$ со свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W(B(\mu_k, \gamma_k)[t], B(\mu, \gamma)[t]) > 0. \quad (5.10)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} & W(B(\mu_k, \gamma_k)[t], B(\mu, \gamma)[t]) \\ &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) B(\mu_k, \gamma_k)[t](dx) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) B(\mu, \gamma)[t](dx) : \phi \in \text{Lip}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что неравенство (5.10) можно переписать следующим образом: существует последовательность функций $\{\phi_k\} \subset \text{Lip}_1 \cap C(G)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_G \phi_k(x) B(\mu_k, \gamma_k)[t](dx) - \int_G \phi_k(x) B(\mu, \gamma)[t](dx) \right] > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что существует функция $\phi_* \in \text{Lip}_1 \cap C(G)$ такая, что $\|\phi_k - \phi_*\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Имеем

$$\begin{aligned}
& \int_G \phi_k(x) B(\mu_k, \gamma_k)[t](dx) - \int_G \phi_k(x) B(\mu, \gamma)[t](dx) \\
&= \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_k(x[t, \omega, \alpha, \mu_k]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) - \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_k(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)) \\
&= \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_k(x[t, \omega, \alpha, \mu_k]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) - \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_k(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) \\
&\quad + \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_k(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) - \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_*(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) \\
&\quad + \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_*(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) - \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_*(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)) \\
&\quad + \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_*(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)) - \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_k(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.6) мы получаем неравенство

$$\begin{aligned}
W(B(\mu_k, \gamma_k)[t], B(\mu, \gamma)[t]) &\leq C_1 T \mathcal{W}(\mu_k, \mu) + 2 \|\phi_k - \phi_*\| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_*(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) - \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \phi_*(x[t, \omega, \alpha, \mu]) \gamma(d(\omega, \alpha)) \right|.
\end{aligned}$$

Поскольку для всех $\varphi \in C(\Omega \times \mathcal{U})$

$$\int_{\Omega \times \mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \gamma_k(d(\omega, \alpha)) \rightarrow \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \gamma(d(\omega, \alpha)),$$

мы получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W(B(\mu_k, \gamma_k)[t], B(\mu, \gamma)[t]) = 0.$$

Это противоречит (5.10). Таким образом, функция B непрерывна.

Пусть $\mathcal{F}(\mu)$ – множество всех профилей управлений $\xi \in \mathcal{D}$ таких, что

$$\text{supp}(\xi) \subset \tilde{\mathcal{E}}(\mu).$$

Множество $\mathcal{F}(\mu)$ непусто. В самом деле, поскольку отображение $\omega \mapsto \mathcal{E}(\omega, \mu)$ полунепрерывно по включению, у отображения $\mathcal{E}(\omega, \mu)$ существует измеримый селектор $\alpha_*(\omega, \mu)$ (см., к примеру, [34; теорема 18.13]). Определим меру ξ_* по правилу

$$\int_{\Omega \times \mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \xi_*(d(\omega, \alpha)) = \int_{\Omega} \varphi(\omega, \alpha_*(\omega, \mu)) \eta(d\omega).$$

Имеем $\text{supp}(\xi_*) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mu)$. Таким образом, $\xi_* \in \mathcal{F}(\mu)$.

Заметим, что $\mathcal{F}(\mu)$ выпукло.

Докажем, что график $\mathcal{F}$ замкнут. Пусть $\mu_k \rightarrow \mu$, $\xi_k \rightarrow \xi$, $\xi_k \in \mathcal{F}(\mu_k)$. Докажем, что $\xi \in \mathcal{F}(\mu)$. Для этого достаточно показать, что $\text{supp}(\xi) \subset \tilde{\mathcal{E}}(\mu)$. Предположим обратное, т.е. пусть существует множество $Q \subset \Omega \times \mathcal{U}$ такое, что $Q \cap \tilde{\mathcal{E}}(\mu) = \emptyset$ и $\xi(Q) > 0$. Можно считать, что Q – компакт. Поскольку

$\tilde{\mathcal{E}}(\mu)$ – также компакт, то существует ε такое, что множество $Q_\varepsilon = \{(\omega, \alpha) : d((\omega, \alpha), Q) \leq \varepsilon\}$ не пересекается с $\tilde{\mathcal{E}}(\mu)$. Здесь d – расстояние от (ω, α) до Q :

$$d((\omega, \alpha), Q) = \min\{d_\Omega(\omega, \omega') + \|\alpha - \alpha'\|_w : (\omega', \alpha') \in Q\}.$$

Существует N такое, что $Q_\varepsilon \cap (\tilde{\mathcal{E}}(\mu_k)) = \emptyset$ для всех $k > N$. В противном случае существует последовательность $\{k_l\}$ такая, что $(\omega_{k_l}, \alpha_{k_l}) \in Q_\varepsilon \cap (\tilde{\mathcal{E}}(\mu_{k_l}))$. Можно считать, что $(\omega_{k_l}, \alpha_{k_l}) \rightarrow (\omega^*, \alpha^*)$ при $l \rightarrow \infty$. Поскольку отображение $\mu \mapsto \tilde{\mathcal{E}}(\mu)$ является полунепрерывным сверху, имеем $(\omega^*, \alpha^*) \in Q_\varepsilon \cap (\tilde{\mathcal{E}}(\mu))$. Это противоречит тому, что множество $Q_\varepsilon \cap \tilde{\mathcal{E}}(\mu)$ пусто.

Пусть функция $\varphi \in C(\Omega \times \mathcal{U})$ такова, что $\varphi = 1$ на Q и $\varphi = 0$ вне Q_ε . Имеем

$$\int_{\Omega \times \mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \xi_k(d(\omega, \alpha)) = 0, \quad k > N, \quad \int_{\Omega \times \mathcal{U}} \varphi(\omega, \alpha) \xi(d(\omega, \alpha)) \geq \xi(Q) > 0.$$

Это противоречит предположению о слабой сходимости ξ_k к ξ . Следовательно, $\xi \in \mathcal{F}(\mu)$.

Определим многозначное отображение $\mathcal{G}: \mathcal{M}' \times \mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{M}' \times \mathcal{U}$ правилом

$$\mathcal{G}(\mu, \gamma) \triangleq \{(\nu, \xi) : \nu = B(\mu, \gamma), \quad \xi \in \mathcal{F}(\mu)\}.$$

Отображение $\mathcal{G}$ полунепрерывно сверху по включению с непустыми с выпуклыми образами. Множество $\mathcal{M}' \times \mathcal{U}$ компактно и выпукло. Следовательно, по теореме Какутани–Фана–Гликсберга существует неподвижная точка отображения $\mathcal{G}$ (см., к примеру, [34; следствие 17.55]). Обозначим ее через $(\hat{\mu}, \hat{\gamma})$. Поскольку $\hat{\mu} = B(\hat{\mu}, \hat{\gamma})$, имеем $(\hat{\gamma}, \hat{\mu}) = X[\hat{\gamma}]$. По определению процесса $X[\hat{\mu}]$ функция $\hat{\gamma}$ такая, что $\hat{\gamma}[\cdot, \omega, \alpha] = x[\cdot, \omega, \alpha, \hat{\mu}]$. Также из включения $\text{supp}(\hat{\gamma}) \subset \tilde{\mathcal{E}}(\hat{\mu})$ и предложения 5 следует неравенство (5.8).

§ 6. Существование решения у системы уравнений для игры среднего поля

ТЕОРЕМА 2. *Существует минимаксное решение (V, μ) системы (2.1), (2.2).*

Сначала рассмотрим некоторые вспомогательные конструкции. Пусть μ – внешнее поле, $\alpha \in \mathcal{U}$ – стратегическая мера, $(t_*, x_*) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Обозначим через $x(\cdot, t_*, x_*, \alpha, \mu)$ решение уравнения

$$x(t) = x_* + \int_{[t_*, t] \times P} f(\tau, x(\tau), \mu[\tau], u) \alpha(d(\tau, u)).$$

Также положим

$$w(t, t_*, x_*, \alpha, \mu) \triangleq - \int_{[t_*, t] \times P} g(t, x(\tau, t_*, x_*, \alpha, \mu), \mu[t], u) \alpha(d(\tau, u)).$$

Если $\hat{\gamma}$ – равновесие по Нэшу в игре с бесконечным числом игроков, причем $X[\hat{\gamma}] = (\hat{\gamma}, \hat{\mu})$, то обозначим

$$\hat{x}(\cdot, t_*, x_*, \alpha) \triangleq x(\cdot, t_*, x_*, \alpha, \hat{\mu}), \quad \hat{w}(t, t_*, x_*, \alpha) = w(t, t_*, x_*, \alpha, \hat{\mu}).$$

Определим функцию V правилом

$$V(t_*, x_*) \triangleq \max\{\sigma(\hat{x}(T, t_*, x_*, \alpha), \hat{\mu}[T]) + \hat{w}(T, t_*, x_*, \alpha) : \alpha \in \mathcal{U}\}. \quad (6.1)$$

Значение $V(t_*, x_*)$ – максимальный выигрыш пробного игрока, начавшего свое движение в момент t_* в позиции x_* при условии, что внешнее поле есть $\hat{\mu}$.

Поскольку игрок ω может рассматриваться в качестве пробного, имеем

$$V(0, x_0(\omega)) = \max\{J[\omega, \alpha, \hat{\mu}] : \alpha \in \mathcal{U}\}.$$

Определим меру χ на множестве $C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$, эта мера используется в определении обобщенного решения системы уравнений игры среднего поля. Для каждого измеримого множества $Y \subset C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$ положим

$$\chi(Y) \triangleq \hat{\gamma}\{(\omega, \alpha) : (\hat{y}[\cdot, \omega, \alpha], V(\cdot, y[\cdot, \omega, \alpha])) \in Y\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Напомним, что по исходной системе (2.1), (2.2) мы можем построить дифференциальную игру с бесконечным числом игроков с динамикой, определяемой уравнением (5.1), и с функционалом платы, задаваемым выражением (5.2). Для этого положим $\Omega = G_0 \times [0, 1]$, $\eta = m_0 \times \lambda$. Если $\omega = (\omega', \omega'')$, $\omega' \in G_0$, $\omega'' \in [0, 1]$, то положим $x_0(\omega) = \omega'$. У полученной игры существует равновесный профиль $\hat{\gamma}$; пусть $(\hat{y}, \hat{\mu}) = X[\hat{\gamma}]$.

Отметим, что функция V , определенная по правилу (6.1), является единственным решением уравнения (2.1) при $\mu = \hat{\mu}$. Мера χ сосредоточена на множестве решений включения (3.1), выживающих в графике V . Мера $\hat{\mu}[t]$ является образом меры χ при действии отображения e_t . Таким образом, пара $(V, \hat{\mu})$ удовлетворяет определению обобщенного (минимаксного) решения системы уравнений среднего поля (см. определение 1).

§ 7. Приближенное равновесие в игре с конечным числом игроков

В этом параграфе мы считаем (в дополнение к сделанным выше предположениям), что:

- функции σ и g являются липшицевыми по фазовой переменной и по мере, т.е. существуют константы $L_{\sigma, x}$, $L_{\sigma, m}$, $L_{g, x}$ и $L_{g, m}$ такие, что для всех $t \in [0, T]$, $x', x'' \in G$, $m, m'' \in \mathcal{P}(G)$ и $u \in P$

$$\begin{aligned} |\sigma(x', m') - \sigma(x'', m'')| &\leq L_{\sigma, x} \|x' - x''\| + L_{\sigma, m} W(m', m''), \\ |g(t, x', m', u) - g(t, x'', m'', u)| &\leq L_{g, x} \|x' - x''\| + L_{g, m} W(m', m''); \end{aligned}$$

- для всех $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} &\{(\xi, H^*(t, x, m, \xi)) : \xi \in \mathcal{H}(t, x, m)\} \\ &\subset \{(f(t, x, m, u), g(t, x, m, u)) : u \in P\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Если $\mathbf{x} = (x_{N,0}^1, \dots, x_{N,0}^N) \in (G_0)^N$, то обозначим

$$\delta_{\mathbf{x}}^N \triangleq \frac{1}{N} (\delta_{x_{N,0}^1} + \dots + \delta_{x_{N,0}^N}).$$

Напомним, что δ_x обозначает меру Дирака, сосредоточенную в x .

ЛЕММА 1. *Существуют меры $m_N^1, \dots, m_N^N$ такие, что:*

- (i) $m_0 = m_N^1 + \dots + m_N^N$;
- (ii) $m_N^i(G_0) = 1/N$;
- (iii) *имеет место равенство*

$$W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) = \sum_{i=1}^N \int_{G_0} \|x - x_{N,0}^i\| m_N^i(dx).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|x' - x''\| \pi(d(x', x'')) : \pi \in \Pi(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) \right\}.$$

Поскольку $\text{supp}(m_0)$ и $\text{supp}(\delta_{\mathbf{x}}^N)$ лежат в G_0 , носители мер из $\Pi(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N)$ лежат в $G_0 \times G_0$. Напомним, что G_0 – компакт. Следовательно, существует мера $\bar{\pi}$ такая, что

$$W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) = \int_{G_0 \times G_0} \|x' - x''\| \bar{\pi}(d(x', x'')). \quad (7.2)$$

Поскольку $\bar{\pi}(G_0 \times Y) = \delta_{\mathbf{x}}^N(Y)$, то существует ограниченная измеримая функция $h: G_0 \times \mathcal{B}(G_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что для любого $\Upsilon \subset G_0 \times G_0$

$$\bar{\pi}(\Upsilon) = \int_{\Upsilon_2} h(y, \Upsilon_1(y)) \delta_{\mathbf{x}}^N(dy). \quad (7.3)$$

Здесь

$$\Upsilon_1(y) = \{x \in G_0 : \exists y \in G_0 (x, y) \in \Upsilon\}, \quad \Upsilon_2 = \{y \in G_0 : \exists x \in G_0 (x, y) \in \Upsilon\}.$$

Обозначим

$$m_N^i(\cdot) \triangleq \frac{1}{N} h(x_{N,0}^i, \cdot).$$

Из (7.3) следуют утверждения (i) и (ii) леммы.

Далее,

$$W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) = \int_{G_0} \int_{G_0} \|x' - x''\| h(x'', dx') \delta_{\mathbf{x}}^N(dx'').$$

Отсюда получаем утверждение (iii) леммы.

Из (7.1) следует, что

$$\mathcal{S}[V, \hat{\mu}] = \{(x(\cdot), z(\cdot)) : \dot{x} \in E^-(t, x, \hat{\mu}[t]), z(t) = V(t, x(t))\}.$$

Напомним обозначение

$$\mathcal{S}[V, t_*, x_*, \hat{\mu}] = \{(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}[V, \hat{\mu}] : x(t_*) = x_*\}.$$

Пусть χ – мера, определенная на $\mathcal{S}[V, \hat{\mu}]$, такая, что $\mu[t] = e_t \# \chi$ (см. определение 1). Как было отмечено выше (см. доказательство предложения 1), существует система мер χ_{0, x_*} такая, что для всех $\varphi \in C(\mathcal{S}[V, \hat{\mu}])$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}[V, \hat{\mu}]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot)) \chi(d(x(\cdot), z(\cdot))) \\ &= \int_{G_0} m_0(dx_*) \int_{\mathcal{S}[V, 0, x_*, \hat{\mu}]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot)) \chi_{0, x_*}(d(x(\cdot), z(\cdot))). \end{aligned}$$

Определим меры χ_N^i правилом

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}[V, \hat{\mu}]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot)) \chi_N^i(d(x(\cdot), z(\cdot))) \\ &= \int_{G_0} m_N^i(dx_*) \int_{\mathcal{S}[V, 0, x_*, \hat{\mu}]} \varphi(x(\cdot), z(\cdot)) \chi_{0, x_*}(d(x(\cdot), z(\cdot))) \\ & \quad \forall \varphi \in C(\mathcal{S}[V, \hat{\mu}]). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь и ниже m_N^i – меры, построенные в лемме 1.

Заметим, что $\chi = \chi_N^1 + \dots + \chi_N^N$.

Положим $\mu_N^i[t] \triangleq e_t \# \chi_N^i$. Внешнее поле $\hat{\mu}$ является суммой полей μ_N^i , т.е.

$$\hat{\mu}[t] = \mu_N^1[t] + \dots + \mu_N^N[t].$$

Рассмотрим игру N игроков. Если ν_N – внешнее поле, а $\alpha \in \mathcal{U}$ – обобщенное управление игрока i , то соответствующее движение игрока i определяется уравнением

$$x_N^i(t, \alpha, \nu_N) = x(t, 0, x_{N,0}^i, \alpha, \nu_N).$$

Функционал платы (выигрыша) игрока i равен

$$\begin{aligned} J_N^i(\alpha, \nu_N) &= \sigma(x_N^i(T, \alpha, \nu_N), \nu_N[T]) \\ &\quad - \int_{[0, T] \times P} g(t, x_N^i(t, \alpha, \nu_N), \nu_N[t], u) \alpha(d(t, u)) \\ &= \sigma(x(T, 0, x_{N,0}^i, \alpha, \nu_N), \nu_N[T]) + w(T, 0, x_{N,0}^i, \alpha, \nu_N). \end{aligned}$$

Ниже мы предполагаем, что игроки используют рандомизированные программные управления, т.е. игрок i выбирает распределение стратегических мер $\varrho_N^i \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Обозначим $\varrho_N \triangleq (\varrho_N^1, \dots, \varrho_N^N)$. Если игроки используют рандомизированные стратегии, то предполагаем, что положение игрока i описывается мерой $\nu_N^i(t, \cdot; \varrho_N)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \nu_N^i(t, dx, \varrho_N) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_N^i(t, \alpha, \nu_N(\cdot, \cdot; \varrho_N))) \varrho_N^i(d\alpha).$$

Здесь мы обозначили

$$\nu_N(t, \cdot, \varrho_N) \triangleq \sum_{i=1}^N \nu_N^i(t, \cdot; \varrho_N).$$

Существование движений $x_N^i(\cdot, \alpha, \nu_N)$ и распределения положений игроков $(\nu_N^1, \dots, \nu_N^N)$ для заданного набора стратегий ϱ_N устанавливается теми же методами, что и в предложении 4. Выигрыш игрока i равен

$$\bar{J}_N^i(\varrho_N) = \int_{\mathcal{U}} J_N^i(\alpha, \nu_N(\cdot, \cdot; \varrho_N)) \varrho_N^i(d\alpha).$$

Ниже мы определим набор стратегий и покажем, что он является ε -равновесным. Отображение, ставящее в соответствие движению $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathcal{S}[V, \hat{\mu}]$ множество стратегических мер β таких, что

$$x(\cdot) = \hat{x}(\cdot, 0, x(0), \beta), \quad z(\cdot) = \sigma(x(T), \hat{\mu}) + \hat{w}(\cdot, 0, x(0), \beta),$$

является полунепрерывным сверху по включению. Пусть Θ – его измеримый селектор.

Пусть $\widehat{\varrho}_N^i$ – рандомизированная стратегия такая, что $\widehat{\varrho}_N^i = N \cdot \Theta \# \chi_N^i$.

Обозначим $\widehat{\xi}_N^i(t, \alpha) \triangleq x_N^i(t, \alpha, \nu_N(\cdot, \cdot; \widehat{\varrho}_N^i))$. Также положим

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_N^i(t, \alpha) &\triangleq - \int_{[0, t] \times P} g(\tau, \widehat{\xi}_N^i(\cdot, \alpha), \widehat{\nu}_N(\cdot, \cdot; \widehat{\varrho}_N^i), u) \alpha(d(\tau, u)), \\ \widehat{\nu}_N^i(\cdot, \cdot) &\triangleq \nu_N^i(\cdot, \cdot; \widehat{\rho}_N), \quad \widehat{\nu}_N(\cdot, \cdot) \triangleq \nu_N(\cdot, \cdot; \widehat{\rho}_N).\end{aligned}$$

Если игрок j отклоняется, т.е. он использует стратегию ϱ_N^j , то обозначим соответствующий набор стратегий через $\widehat{\varrho}_N | \varrho_N^j$. В дальнейшем нижний индекс $N|j$ будем использовать для описания ситуации, когда отклоняется игрок j , а остальные игроки используют стратегии $\widehat{\varrho}_N^i = N \cdot \Theta \# \chi_N^i$. Положим

$$\begin{aligned}\widetilde{\nu}_{N|j}^i(\cdot, \cdot; \varrho_N^j) &\triangleq \nu_N^i(\cdot, \cdot; \widehat{\varrho}_N | \varrho_N^j), \\ \widetilde{\nu}_{N|j}(\cdot, \cdot; \varrho_N^j) &\triangleq \widetilde{\nu}_N^1(\cdot, \cdot; \varrho_N^j) + \cdots + \widetilde{\nu}_N^N(\cdot, \cdot; \varrho_N^j).\end{aligned}$$

Также обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_{N|j}^i(t, \alpha; \varrho_N^j) &\triangleq x_N^i(t, \alpha, \widetilde{\nu}_{N|j}(\cdot, \cdot; \varrho_N^j)), \\ \widetilde{\xi}_{N|j}^i(t, \alpha; \varrho_N^j) &\triangleq - \int_{[0, t] \times P} g(\tau, \widetilde{\xi}_{N|j}^i(\cdot, \alpha; \varrho_N^j), \widetilde{\nu}_{N|j}^i(\cdot, \cdot; \varrho_N^j), u) \alpha(d(\tau, u)).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *Существуют константы $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{C}_3 > 0$ такие, что для всех $\varrho_N^j \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$*

$$\begin{aligned}\overline{J}_N^i(\widehat{\varrho}_N) &\geq \overline{J}_N^i(\widehat{\varrho}_N | \varrho_N^j) \\ &\quad - \widehat{C}_1 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) - \widehat{C}_2 N \max_{i=1, \dots, N} \int_G \|x - x_{N,0}^i\| m_N^i(dx) - \widehat{C}_3 \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

В частности, если

$$W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) \rightarrow 0, \quad N \max_{i=1, \dots, N} \int_G \|x - x_{N,0}^i\| m_N^i(dx) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

то для любого ε существует число N_0 такое, что для $N > N_0$ набор рандомизированных стратегий $\widehat{\varrho}_N$ является ε -равновесным.

Доказательство теоремы требует ряда дополнительных построений и вспомогательных утверждений.

Напомним обозначение $C_1 = L_{f,m} e^{L_{f,x} T}$. Также пусть $C_2 \triangleq e^{L_{f,x} T}$.

ЛЕММА 2. *Для любого внешнего поля $\mu \in \mathcal{M}$ и любой стратегической меры $\alpha \in \mathcal{U}$ выполнена оценка*

$$\|x(t, 0, x_1, \alpha, \mu) - \widehat{x}(t, 0, x_2, \alpha)\| \leq C_2 \|x_1 - x_2\| + C_1 \int_0^t W(\widehat{\mu}[\tau], \mu[\tau]) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$x_1(\cdot) \triangleq x(\cdot, 0, x_1, \alpha, \mu), \quad x_2(\cdot) = \widehat{x}(\cdot, 0, x_2, \alpha).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|x_1 - x_2\| \\ &\quad + \int_{[0,t] \times P} \|f(\tau, x_1(\tau), \mu[\tau], u) - f(\tau, x_2(\tau), \widehat{\mu}[\tau], u)\| \alpha(d(\tau, u)) \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t L_{f,x} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau + \int_0^t L_{f,m} W(\mu[\tau], \widehat{\mu}[\tau]) d\tau. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гронуолла, получаем

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \left(\|x_1 - x_2\| + L_{f,m} \int_0^t W(\mu[\tau], \widehat{\mu}[\tau]) d\tau \right) e^{L_{f,x} T}. \quad (7.5)$$

Отсюда следует заключение леммы.

ЛЕММА 3. Существует константа C_3 такая, что

$$W(\widehat{\mu}[t], \widehat{\nu}_N[t]) \leq C_3 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения мер $\chi_N^i[t]$ (см. (7.4)), $\nu_N[t]$ и $\widehat{\mu}[t]$ следует, что

$$\begin{aligned} W(\widehat{\nu}_N[t], \widehat{\mu}[t]) &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \widehat{\nu}_N[t](dx) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \widehat{\mu}[t](dx) : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{S}[V, \widehat{\mu}]} (\phi(\widehat{\xi}_N^i(t, \Theta[x(\cdot), z(\cdot)])) - \phi(x(t))) \chi_N^i(d(x(\cdot), z(\cdot))) : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{S}[V, \widehat{\mu}]} \|\widehat{\xi}_N^i(t, \Theta[x(\cdot), z(\cdot)]) - x(t)\| \chi_N^i(d(x(\cdot), z(\cdot))). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для $\alpha = \Theta[x(\cdot), z(\cdot)]$ и $x_* = x(0)$ справедливы равенства

$$\xi_N^i(t, \alpha) = x(t, 0, x_{N,0}^i, \alpha, \widehat{\nu}_N), \quad \widehat{x}(t) = \widehat{x}(t, 0, x_*, \alpha).$$

Из леммы 2 следует, что

$$\|\widehat{\xi}_N^i(t, \Theta[x(\cdot), z(\cdot)]) - x(t)\| \leq C_2 \|x_{N,0}^i - x_*\| + C_1 \int_0^t W(\nu_N[\tau], \widehat{\mu}[\tau]) d\tau.$$

Отсюда и из неравенства (7.6) получаем оценку

$$W(\widehat{\nu}_N[t], \widehat{\mu}[t]) \leq C_2 \sum_{i=1}^N \int_{G_0} \|x_{N,0}^i - x_*\| m_N^i(dx_*) + C_1 \int_0^t W(\nu_N[\tau], \widehat{\mu}[\tau]) d\tau.$$

Из леммы 1 следует, что

$$W(\widehat{\nu}_N[t], \widehat{\mu}[t]) \leq C_2 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + C_1 \int_0^t W(\nu_N[\tau], \widehat{\mu}[\tau]) d\tau.$$

Заключение леммы с $C_3 \triangleq C_2 \exp(C_1 T)$ получается из последней оценки и неравенства Гронуолла.

ЛЕММА 4. Существует константа C_4 такая, что для всех ϱ_N^j

$$W(\tilde{\nu}_{N|j}(t, \cdot, \cdot; \varrho_N^j), \hat{\mu}[t]) \leq C_3 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + \frac{C_4}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству леммы 3. Как выше, имеем

$$\begin{aligned} & W(\tilde{\nu}_{N|j}(t, \cdot, \cdot; \varrho_N^j), \hat{\mu}[t]) \\ & \leq \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{S}[V, \hat{\mu}]} \|\tilde{\xi}_{N|j}^i(t, \Theta[x(\cdot), z(\cdot)]; \varrho_N^j) - x(t)\| \chi_N^i(d(x(\cdot), z(\cdot))) \\ & \quad + \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x') \tilde{\nu}_{N|j}^j(t, dx'; \varrho_N^j) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x'') \hat{\mu}_N^j(t, dx'') : \phi \in \text{Lip}_1 \right\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x') \tilde{\nu}_{N|j}^j(t, dx'; \varrho_N^j) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x'') \hat{\mu}_N^j[t](dx) : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \\ & = \left\{ \int_{G \times G} N(\phi(x') - \phi(x'')) \tilde{\nu}_{N|j}^j(t, dx'; \varrho_N^j) \hat{\mu}_N^j(t, dx'') : \phi \in \text{Lip}_1 \right\} \leq \frac{\text{diam}(G)}{N}. \end{aligned}$$

Здесь мы используем обозначение

$$\text{diam}(G) = \sup\{\|x' - x''\| : x', x'' \in G\}.$$

Отсюда, из (7.7) и леммы 2 мы получаем оценку

$$\begin{aligned} & W(\tilde{\nu}_{N|j}(t, \cdot, \cdot; \varrho_N^j), \hat{\mu}[t]) \\ & \leq \frac{\text{diam}(G)}{N} + C_2 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + C_1 \int_0^t W(\tilde{\nu}_{N|j}(\tau, \cdot, \cdot; \varrho_N^j), \hat{\mu}[\tau]) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, лемма 4 выполнена при $C_4 \triangleq \text{diam}(G) \exp(C_1 T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Вначале рассмотрим случай, когда все игроки используют стратегии, задаваемые профилем $\hat{\varrho}_N$. Определим вероятность на $\mathcal{W}$ по правилу $\hat{\rho}_x \triangleq \Theta \# \chi_{0,x}$.

Из леммы 2 следует

$$\|\hat{x}(t, 0, x_*, \alpha) - \hat{\xi}_N^i(t, \alpha)\| \leq C_2 \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_1 t \mathcal{W}(\hat{\mu}, \hat{\nu}_N).$$

Отсюда и из леммы 3 получаем неравенство

$$\|\hat{x}(t, 0, x_*, \alpha) - \hat{\xi}_N^i(t, \alpha)\| \leq C_2 \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_1 C_3 t W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N). \quad (7.8)$$

Обозначим $C_5 \triangleq C_1 C_3 T$.

Далее,

$$\begin{aligned} & \|\hat{w}(T, 0, x_*, \alpha) - \hat{\zeta}_N^i(T, \alpha)\| \\ & \leq \int_0^T (L_{g,x} \|\hat{x}(t, 0, x_*, \alpha) - \hat{\xi}_N^i(t, \alpha)\| + L_{g,m} W(\hat{\mu}[t], \hat{\nu}_N[t])) dt \\ & \leq L_{g,x} C_2 T \|x_* - x_{N,0}^i\| + T^2 C_1 C_3 (L_{g,x} + L_{g,m}) W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Также обозначим $C_6 \triangleq L_{g,x} C_2 T$, $C_7 \triangleq T^2 C_1 C_3 (L_{g,x} + L_{g,m})$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \left| \bar{J}_N^j(\hat{\varrho}_N) - N \int_{G_0} m_N^j(dx_*) \int_{\mathcal{U}} [\sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \alpha), \hat{\mu}[T]) + \hat{w}(T, 0, x_*, \alpha)] \hat{\rho}_{x_*}(d\alpha) \right| \\
&= N \int_{G_0} m_N^j(dx_*) \int_{\mathcal{U}} \hat{\rho}_{x_*}(d\alpha) \\
&\quad \times |\sigma(\hat{\xi}_N^j(T, \alpha), \hat{\mu}[T]) + \hat{\zeta}(T, \alpha) - \sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \alpha), \hat{\mu}[T]) - \hat{w}(T, 0, x_*, \alpha)| \\
&\leq N \int_{G_0} ((L_{\sigma, x} C_2 + C_6) \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_8 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N)) m_N^j(dx_*) \\
&= (L_{\sigma, x} C_2 + C_6) N \int_{G_0} \|x_* - x_{N,0}^i\| m_N^j(dx_*) + C_8 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N), \tag{7.10}
\end{aligned}$$

где $C_8 \triangleq (L_{\sigma, x} C_5 + L_{\sigma, m} C_3 + C_7)$.

Рассмотрим случай, когда игрок j отклоняется. Поскольку мера χ_{0, x_*} сосредоточена на выживающих в графике V движениях, в силу определения $\hat{\rho}_{x_*}$ имеем, что для всех $\alpha \in \text{supp}(\hat{\rho}_{x_*})$ и $\beta \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство

$$\sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \beta), \hat{\mu}[T]) + \hat{w}[T, 0, x_*, \beta] \leq \sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \alpha), \hat{\mu}[T]) + \hat{w}(T, 0, x_*, \alpha). \tag{7.11}$$

Пусть ρ_{x_*} – произвольная вероятностная мера на $\mathcal{U}$ для каждого x_* . Интегрируя неравенство (7.11) по $\hat{\rho}_{x_*}(d\alpha)$, $\rho_{x_*}(d\beta)$ и $m_N^j(dx_*)$, мы получаем неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{G_0} m_N^j(dx_*) \int_{\mathcal{U}} (\sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \beta), \hat{\mu}[T]) + \hat{z}(T, 0, x_*, \beta)) \rho_{x_*}(d\beta) \\
&\leq \int_{G_0} m_N^j(dx_*) \int_{\mathcal{U}} (\sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \alpha), \hat{\mu}[T]) + \hat{z}(T, 0, x_*, \alpha)) \hat{\rho}_{x_*}(d\alpha). \tag{7.12}
\end{aligned}$$

Из леммы 2 мы получаем

$$\|\hat{x}(t, 0, x_*, \beta) - \tilde{\xi}_{N|j}^j(t, \beta; \varrho_N^j)\| \leq C_2 \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_1 t \mathcal{W}(\hat{\mu}, \tilde{\nu}_{N|j}(\cdot, \cdot; \varrho_N^j)).$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что

$$\|\hat{x}(t, 0, x_*, \beta) - \tilde{\xi}_{N|j}^j(t, \beta; \varrho_N^j)\| \leq C_2 \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_1 t C_3 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + \frac{C_1 C_4 t}{N}. \tag{7.13}$$

Как выше (см. (7.8)), имеем

$$\begin{aligned}
& \|\hat{w}(T, 0, x_*, \beta) - \tilde{\zeta}_{N|j}^j(T, \beta; \varrho_N^j)\| \\
&\leq \int_0^T (L_{g, x} \|\hat{x}(t, 0, x_*, \beta) - \tilde{\xi}_N^i(t, \beta; \varrho_N^j)\| + L_{g, m} W(\hat{\mu}[t], \tilde{\nu}_{N|j}(t, \cdot; \varrho_N^j))) dt \\
&\leq C_6 \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_7 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + (L_{g, m} C_4 T + C_1 C_4 T^2 L_{g, x}) \frac{1}{N}. \tag{7.14}
\end{aligned}$$

Обозначим $C_9 \triangleq L_{\sigma, x} C_1 C_4 T + L_{\sigma, m} C_4 + L_{g, m} C_4 T + C_1 C_4 T^2 L_{g, x}$.

Отсюда получаем оценку

$$\begin{aligned}
& |\sigma(\hat{x}(T, 0, x_*, \beta), \hat{\mu}[T]) + \hat{w}(T, 0, x_*, \beta) \\
&\quad - \sigma(\tilde{\xi}_N^j(T, \beta; \varrho_N^j), \tilde{\nu}_N(T, \cdot; \varrho_N^j)) - \tilde{\zeta}_N^j(T, \beta; \varrho_N^j)| \\
&\leq (L_{\sigma, x} C_2 + C_6) \|x_* - x_{N,0}^i\| + C_8 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + C_9 \frac{1}{N}. \tag{7.15}
\end{aligned}$$

Для меры $\varrho_N^j \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ существует (см. [24; теорема 10.4.6]) система мер $\rho_{x_*} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ таких, что для любой функции $\varphi \in C(\mathcal{U})$

$$\int_{\mathcal{U}} \varphi(\beta) \varrho_N^j(\beta) = N \int_{G_0} m_N^j(dx_*) \int_{\mathcal{U}} \varphi(\beta) \rho_{x_*}(d\beta).$$

Из (7.12) и (7.15), подставляя значение $\bar{J}_N^j(\widehat{\varrho}_N|\varrho_N^j)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| J_N^j(\widehat{\varrho}_N|\varrho_N^j) - N \int_{G_0} m_N^j(dx_*) \int_{\mathcal{U}} (\sigma(\widehat{x}(T, 0, x_*, \beta), \widehat{\mu}[T]) + \widehat{w}(T, 0, x_*, \beta)) \rho_{x_*}(d\beta) \right| \\ & \leq (L_{\sigma, x} C_2 + C_6) N \int_{G_0} \|x_* - x_{N,0}^j\| m_N^j(dx_*) + C_8 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) + C_9 \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и неравенств (7.10) и (7.12) следует

$$\begin{aligned} \bar{J}_N^j(\widehat{\varrho}_N) & \geq \bar{J}_N^j(\widehat{\varrho}_N|\varrho_N^j) \\ & - 2(L_{\sigma, x} C_2 + C_6) N \int_{G_0} \|x_* - x_{N,0}^j\| m_N^j(dx_*) - 2C_8 W(m_0, \delta_{\mathbf{x}}^N) - C_9 \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Это неравенство и составляет заключение теоремы 3 при $\widehat{C}_1 = 2C_8$, $\widehat{C}_2 = 2(L_{\sigma, x} C_2 + C_6)$ и $\widehat{C}_3 = C_9$.

Автор выражает признательность А. Г. Ченцову за полезные обсуждения. Также автор благодарит рецензентов за ценные замечания, позволившие улучшить изложение результатов.

Список литературы

- [1] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, “Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**:9 (2006), 619–625.
- [2] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, “Jeux à champ moyen. II. Horizon fini et contrôle optimal”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **343**:10 (2006), 679–684.
- [3] J.-M. Lasry, P.-L. Lions, “Mean field games”, *Jpn. J. Math.*, **2**:1 (2007), 229–260.
- [4] P.-L. Lions, *Théorie des jeux de champ moyen et applications*, Cours au Collège de France, 2010, www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2009-2010.htm.
- [5] O. Guéant, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, “Mean field games and applications”, *Paris–Princeton lectures on mathematical finance 2010*, Lecture Notes in Math., **2003**, Springer, Berlin, 2011, 205–266.
- [6] M. Huang, P. E. Caines, R. P. Malhamé, “Individual and mass behaviour in large population stochastic wireless power control problems: centralized and Nash equilibrium solutions”, *Proceedings of the 42nd IEEE conference on decision and control*, 2003, v. 1 (Maui, Hawaii USA, December 2003), IEEE, 2003, 98–103.
- [7] M. Huang, R. P. Malhamé, P. E. Caines, “Nash equilibria for large-population linear stochastic systems of weakly coupled agents”, *Analysis, control and optimization of complex dynamic systems*, GERAD 25th Anniv. Ser., **4**, Springer, New York, 2005, 215–252.
- [8] M. Huang, R. P. Malhamé, P. E. Caines, “Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean–Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle”, *Commun. Inf. Syst.*, **6**:3 (2006), 221–252.

- [9] M. Huang, P. E. Caines, R. P. Malhamé, “Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ε -Nash equilibria”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **52**:9 (2007), 1560–1571.
- [10] M. Huang, P. E. Caines, R. P. Malhamé, “The NCE (mean field) principle with locality dependent cost interactions”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **55**:12 (2010), 2799–2805.
- [11] D. A. Gomes, J. Saúde, “Mean field games models – a brief survey”, *Dyn. Games Appl.*, **4**:2 (2014), 110–154.
- [12] V. N. Kolokoltsov, Jiajie Li, Wei Yang, *Mean field games and nonlinear Markov processes*, 2011, [arXiv: 1112.3744](https://arxiv.org/abs/1112.3744).
- [13] V. N. Kolokoltsov, Wei Yang, *Sensitivity analysis for HJB equations with an application to a coupled backward–forward system*, 2013, [arXiv: 1303.6234](https://arxiv.org/abs/1303.6234).
- [14] F. Bagagiolo, D. Bauso, “Mean-field games and dynamic demand management in power grids”, *Dyn. Games Appl.*, **4**:2 (2014), 155–176.
- [15] P. Cardaliaguet, *Weak solutions for first order mean field games with local coupling*, 2013, [arXiv: 1305.7015](https://arxiv.org/abs/1305.7015).
- [16] P. Cardaliaguet, *Notes on mean field games*, from P.-L. Lions’ lectures at Collège de France, 2012, 59 pp., <https://www.ceremade.dauphine.fr/~cardalia/MFG100629.pdf>.
- [17] D. A. Gomes, V. K. Voskanyan, *Extended mean-field games – formulation, existence, uniqueness and examples*, 2013, [arXiv: 1305.2600v1](https://arxiv.org/abs/1305.2600v1).
- [18] А. И. Субботин, *Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации*, РХД, Ижевск, 2003, 336 с.
- [19] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974, 456 с.; англ. пер.: N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Game-theoretical control problems*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, New York, 1988, xii+517 pp.
- [20] А. Ф. Клейменов, *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры*, Наука, Екатеринбург, 1993, 185 с.
- [21] T. Başar, G. J. Olsder, *Dynamic noncooperative game theory*, Reprint of the 2nd ed., Classics Appl. Math., **23**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999, xvi+519 pp.
- [22] C. Villani, *Optimal transport. Old and new*, Grundlehren Math. Wiss., **338**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, xxii+973 pp.
- [23] J.-P. Aubin, *Viability theory*, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991, xxvi+543 pp.
- [24] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, 2, 2-е изд., НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2006, 583 с., 679 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Measure theory*, v. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 2007, xviii+500 pp., xiv+575 pp.
- [25] R. J. Aumann, “Markets with a continuum of traders”, *Econometrica*, **32**:1-2 (1964), 39–50.
- [26] R. J. Aumann, “Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders”, *Econometrica*, **34**:1 (1966), 1–17.
- [27] K. Vind, “Edgeworth-allocations is an exchange economy with many traders”, *Internat. Econom. Rev.*, **5**:2 (1964), 165–177.
- [28] M. Ali Khan, Yeneng Sun, “Non-cooperative games with many players”, *Handbook of game theory with economic applications*, v. 3, Elsevier, Amsterdam, 2002, 1761–1808.
- [29] Л. А. Петросян, В. Уланов, “Динамические игры с бесконечным числом участников. Основные построения”, *Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. Астрон.*, 1982, № 7, 69–75.
- [30] А. Г. Ченцов, “Об игровой задаче сближения в заданный момент времени”, *Матем. сб.*, **99(141)**:3 (1976), 394–420; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On a game problem of converging at a given instant of time”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:3 (1976), 353–376.

- [31] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, Наука, М., 1981, 288 с.
- [32] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 623 с.; пер. с англ.: J. Warga, *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York–London, 1972, xiii+531 pp.
- [33] Р. В. Гамкредидзе, *Основы оптимального управления*, 2-е изд., Изд-во ТГУ, Тбилиси, 1977, 254 с.; англ. пер.: R. V. Gamkrelidze, *Principles of optimal control theory*, Rev. ed., Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **7**, Plenum Press, New York–London, 1978, xii+175 pp.
- [34] С. D. Aliprantis, К. С. Border, *Infinite dimensional analysis. A hitchhiker's guide*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2006.

Юрий Владимирович Авербух
(Yurii V. Averboukh)

Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН,
г. Екатеринбург;
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
E-mail: ayv@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
21.04.2014 и 22.01.2015