Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 6, 15–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 07:56:26

УДК 517.958:535.4+517.956.8

С. А. Назаров

Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра

Рассмотрена спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа в многомерной области с цилиндрическим выходом на бесконечность, резонаторе Гельмгольца. При помощи асимптотического анализа матрицы рассеяния продемонстрированы различные типы отражения высокоамплитудных околопороговых волн. Тот или иной тип рассеяния, неустойчивый или устойчивый к вариациям форм резонатора, обусловлен соответственно наличием или отсутствием стабилизирующихся решений на пороговой частоте. В волноводе с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность обнаружен эффект почти полного прохождения волны при “точной настройке” резонатора.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: резонатор Гельмгольца, задача рассеяния, пороги непрерывного спектра, волны на околопороговых частотах, почти полное отражение и прохождение.

DOI: 10.4213/sm8381

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим d -мерный резонатор Гельмгольца Ω , состоящий из полуцилиндра (волновода)

$$\Pi = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in \varpi, z = x_d \geq 0\} \quad (1.1)$$

и ограниченной области ω – собственно компактного резонатора, расположенного в нижнем полупространстве $\mathbb{R}_-^d$, $d \geq 2$ (рис. 1). Для простоты предположим, что границы областей $\varpi \subset \mathbb{R}^{d-1}$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ гладкие, хотя переход к липшицевым, в частности кусочно-гладким, поверхностям не представляет труда. Масштабированием сведем характерный размер сечения ϖ к единичному, т.е. сделаем декартовы координаты $x = (x_1, \dots, x_d)$ и все геометрические и спектральные параметры безразмерными.

Спектральной задаче Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.3)$$

ставится в соответствие (см. [1; гл. 6]) положительно определенный самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве Лебега $L^2(\Omega)$ с областью

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-02175).

Рис. 1. Волновод Ω , составленный из компактного резонатора ω и полубесконечного рукава Π

определения¹

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap \dot{H}^1(\Omega). \quad (1.4)$$

Здесь $H^l(\Omega)$ – пространство Соболева с показателем гладкости l и обычной нормой, а $\dot{H}^1(\Omega)$ – подпространство функций $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию Дирихле (1.3). Непрерывный спектр $\sigma_c = [\lambda_+, +\infty)$ этого оператора порогами

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.5)$$

разбивается на участки постоянной кратности. Последовательность (1.5) образована при учете кратностей собственными числами модельной задачи на сечении

$$\begin{aligned} -\Delta_y U(y) &= \Lambda U(y), & y \in \varpi, \\ U(y) &= 0, & y \in \partial\varpi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем первое собственное число $\Lambda_1 = \lambda_+$ (точка отсечки непрерывного спектра или основной порог) простое и положительное. Соответствующие собственные функции $U_n \in H^2(\varpi) \cap \dot{H}^1(\varpi)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(U_n, U_m)_\varpi = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \quad (1.7)$$

где $(\cdot, \cdot)_\varpi$ – натуральное скалярное произведение в пространстве $L^2(\varpi)$, а $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера.

1.2. Волны и матрица рассеяния. Если

$$\Lambda_{n-\kappa} < \Lambda_{n-\kappa+1} = \dots = \Lambda_n < \Lambda_{n+1}, \quad (1.8)$$

т.е. Λ_n – κ -кратное собственное число задачи (1.6), то при

$$\lambda \in (\Lambda_n, \Lambda_{n+1}) \quad (1.9)$$

¹В случае липшицевой границы $\partial\Omega$ область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, разумеется, оказывается уже, чем пространство $\dot{H}^1(\Omega)$, но может быть шире, чем подпространство (1.4) (см. работу [2] и, например, монографию [3; гл. 2]).

в бесконечном цилиндре $\varpi \times \mathbb{R}$ существуют n пар распространяющихся волн

$$w_k^\pm(y, z) = (2\alpha_k)^{-1/2} e^{\pm i\alpha_k z} U_k(y), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.10)$$

$$\alpha_k = \sqrt{\lambda - \Lambda_k}, \quad (1.11)$$

причем волны со знаком плюс путешествуют в положительном направлении оси z , а волны со знаком минус – в отрицательном, т.е. являются соответственно уходящими и приходящими в полужилиндре (1.1). Известно (см. монографии [4] и, например, [3; гл. 5]), что задача рассеяния (1.2), (1.3) в резонаторе Ω имеет n решений, инициированных приходящими волнами:

$$\zeta_k(y, z) = \chi(z) w_k^-(y, z) + \chi(z) \sum_{l=1}^n s_{lk} w_l^+(y, z) + \tilde{\zeta}_k(y, z). \quad (1.12)$$

При этом $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – гладкая срезающая функция,

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z < 0, \quad \chi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z > 1, \quad (1.13)$$

а $\tilde{\zeta}_k$ – экспоненциально затухающий остаток (см. п. 2.2). Благодаря нормирующим множителям (1.11) матрица рассеяния s размером $n \times n$, составленная из коэффициентов разложений (1.12), оказывается унитарной и симметричной (см. п. 2.3).

1.3. Околопороговая ситуация. Пусть спектральный параметр

$$\lambda^\varepsilon = \Lambda_n + \varepsilon^2 \quad (1.14)$$

расположен близко, но выше $\varkappa$ -кратного порога Λ_n из формулы (1.8), т.е. $\varepsilon > 0$ – малая величина. Далее параметр (1.14) называем просто *околопороговым*.

Припишем индекс ε ко всем введенным ранее объектам и заметим, что

$$\begin{aligned} \alpha_j^\varepsilon &= \sqrt{\lambda^\varepsilon - \Lambda_j} = \alpha_j^0 + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, \dots, n - \varkappa, \quad \alpha_j^0 = \sqrt{\Lambda_n - \Lambda_j} > 0, \\ \alpha_k^\varepsilon &= \sqrt{\lambda^\varepsilon - \Lambda_n} = \varepsilon, \quad k = n - \varkappa + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Кроме того,

$$w_j^{\varepsilon\pm}(y, z) = \hat{w}_j^\pm(y, z) + O(\varepsilon^2(1 + z)), \quad (y, z) \in \Pi, \quad j = 1, \dots, n - \varkappa, \quad (1.16)$$

причем в правой части фигурируют осциллирующие волны на пороге

$$\hat{w}_j^\pm(y, z) = w_j^{0\pm}(y, z) = (2\alpha_j^0)^{-1/2} e^{\pm i\alpha_j^0 z} U_j(y), \quad j = 1, \dots, n - \varkappa. \quad (1.17)$$

Остальные волны становятся высокоамплитудными на околопороговых частотах и приобретают вид

$$\begin{aligned} w_k^{\varepsilon\pm}(y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{\pm i\varepsilon z} U_k(y) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (1 \pm i\varepsilon z + O(\varepsilon^2 z)) U_k(y), \\ k &= n - \varkappa + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Выделенные члены в разложении (1.18) включают стоячие и резонансные волны на пороге

$$w_k^{00}(y, z) = U_k(y), \quad w_k^{01}(y, z) = zU_k(y), \quad k = n - \varkappa + 1, \dots, n. \quad (1.19)$$

В соответствии с разным поведением волн (1.17) и (1.18) логично разбить матрицу рассеяния на блоки

$$s^\varepsilon = \begin{pmatrix} s_{\bullet\bullet}^\varepsilon & s_{\bullet\#}^\varepsilon \\ s_{\#\bullet}^\varepsilon & s_{\#\#}^\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Здесь $s_{\bullet\bullet}^\varepsilon$ и $s_{\#\#}^\varepsilon$ – симметричные матрицы размером $(n - \varkappa) \times (n - \varkappa)$ и $\varkappa \times \varkappa$ соответственно, $s_{\bullet\#}^\varepsilon = (s_{\#\bullet}^\varepsilon)^\top$ – матрица размером $(n - \varkappa) \times \varkappa$, $\top$ – знак транспонирования.

Основная цель работы – найти асимптотику при $\varepsilon \rightarrow +0$ матрицы рассеяния (1.20). В частности, будет показано, что при подходящем выборе базиса в подпространстве собственных функций задачи (1.6), отвечающих собственному числу Λ_n , справедливо соотношение

$$s_{\#\#}^\varepsilon = \text{diag}\{\underbrace{-1, \dots, -1}_{n-\varkappa}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\varkappa}\} + O(\varepsilon). \quad (1.21)$$

Иными словами, на околупороговых частотах происходит почти полное отражение высокоамплитудных волн (1.18). При этом часть из них ведут себя так, будто на торце $\varpi(0) = \{x : y \in \varpi, z = 0\}$ полуцилиндра (1.1) назначено краевое условие Дирихле (ср. коэффициенты отражения, очерченные фигурной скобкой снизу), однако для описания поведения остальных ρ волн на торце нужно поставить условие Неймана (ср. коэффициенты, очерченные фигурной скобкой сверху). Величина ρ определяется размерностью пространства стабилизирующих решений задачи (1.2), (1.3) при пороговом значении $\lambda = \Lambda_n$ спектрального параметра (см. п. 2.4). Появление чисел $+1$ в диагональной матрице из правой части (1.21) – явление неустойчивое и, как показано в п. 2.5, малой полой вариацией стенки $\partial\omega \setminus \partial\P$ резонатора всегда можно добиться выполнения формулы

$$s_{\#\#}^\varepsilon = -\mathbb{I}_\varkappa + O(\varepsilon), \quad (1.22)$$

где $\mathbb{I}_\varkappa$ – единичная матрица размером $\varkappa \times \varkappa$.

1.4. Устройство статьи. В § 2 исследуется задача (1.2), (1.3) на пороге $\lambda = \Lambda_n$: дается классификация волн, вводятся линейные волновые пакеты и формулируется операторная постановка задачи с энергетическими условиями излучения. Теорема 2 предоставляет критерий существования стабилизирующих решений задачи в терминах пороговой матрицы рассеяния. Эти решения и матрица играют главенствующую роль в формальном асимптотическом анализе из § 3, где разбираются различные случаи, сооружаются соответствующие асимптотические анзацы для решений задачи рассеяния на околупороговых

частотах и, как следствие, вычисляются асимптотики блоков матрицы рассеяния (1.20) с той или иной точностью. Наиболее сложным является обоснование полученных формально асимптотических формул для матрицы рассеяния, использующее технику весовых пространств с отделенной асимптотикой и представленное в § 4. В § 5 обсуждаются доступные обобщения и, в частности, строится бесконечный волновод с резонатором, в котором реализуется почти полное прохождение волны.

§ 2. Задача на пороге

2.1. Линейные волновые пакеты и сопутствующие объекты. В п. 1.2 классификация волн (1.10) была основана на классическом принципе Зоммерфельда (см. книги [4] и, например, [3; гл. 5]) – направление распространения волны $w_k^\pm$ указывается ее волновым числом $\pm\alpha_k$. В работах [5], [6] (см. также монографию [3; гл. 5]) был предложен другой способ определения направления движения волны, а именно, по знаку величины $\text{Im } a(w_k^\pm, w_k^\pm)$, где $a(u, v)$ – симплектическая (полуторалинейная и антиэрмитова) форма

$$a(u, v) = \int_{\varpi} (\overline{v(y, R)} \partial_z u(y, R) - u(y, R) \overline{\partial_z v(y, R)}) dy, \quad (2.1)$$

возникающая как поверхностный интеграл в формуле Грина на усеченном волноводе $\Omega(R) = \{x \in \Omega : z < R\}$ и поэтому не зависящая от выбора длины R в случае волн (1.10). В самом деле, нетрудно убедиться в том, что при ограничении (1.9) верны соотношения

$$a(w_p^\theta, w_q^\tau) = i\theta\delta_{\theta\tau}\delta_{p,q}, \quad \theta, \tau = \pm, \quad p, q = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

т.е. величина $\text{Im } a(w_k^\pm, w_k^\pm)$ совпадает со знаком волнового числа $\pm\alpha_k$.

На пороге $\lambda = \Lambda_n$ принцип Зоммерфельда не работает. Осциллирующие волны (1.17) по-прежнему удовлетворяют соотношениям (2.1) при $p, q \leq n - \varkappa$, однако для стоячих и резонансных волн (1.19), появляющихся при пороговом значении спектрального параметра, выполнены соотношения абсолютно иного содержания:

$$\begin{aligned} a(w_k^{00}, w_l^{00}) &= a(w_k^{01}, w_l^{01}) = 0, \\ a(w_k^{01}, w_l^{00}) &= -a(w_k^{00}, w_l^{01}) = \delta_{k,l}, \quad k, l = n - \varkappa + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для исправления ситуации в публикациях [5], [6] и [3; гл. 5] были введены линейные волновые пакеты

$$\hat{w}_k^\pm(y, z) = 2^{-1/2}(z \pm i) U_k(y), \quad k = n - \varkappa + 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

которые вместе с волнами (1.17) подчинены всей группе (2.2) условий ортогональности и нормировки. Это нетрудно проверить непосредственными вычислениями при помощи равенств (1.7) и (2.3).

Поскольку, как показано в книге [3; гл. 5], форма (2.1) тесно связана с вектором Умова–Пойнтинга [7], [8], условия излучения, допускающие в разложение

на бесконечности решения задачи с финитным источником только “уходящие” волны $\hat{w}_1^\pm, \dots, \hat{w}_{n-\varkappa}^\pm$ и $\hat{w}_{n-\varkappa+1}^\pm, \dots, \hat{w}_n^\pm$ из списков (1.17) и (2.3), следует ассоциировать с энергетическим принципом излучения Мандельштама (см. монографию [9] и, например, статью [10]).

Кроме того, согласно работам [5], [6] и [11] соблюдения условий (2.2) вполне достаточно для идентификации решений задачи рассеяния (1.2), (1.3) на пороге

$$\hat{\zeta}_k(y, z) = \chi(z) \hat{w}_k^-(y, z) + \chi(z) \sum_{l=1}^n \hat{s}_{lk} \hat{w}_l^+(y, z) + \tilde{\zeta}_k(y, z) \quad (2.4)$$

(ср. разложения (1.12)) и проверки свойств унитарности и симметричности у матрицы $\hat{s}$ коэффициентов представлений (2.4). Вместе с тем, поскольку у решений $\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_n$ допускается линейный рост на бесконечности и матрица $\hat{s}$ не получается аналитическим продолжением матрицы рассеяния s^ε вне порога, назовем (2.4) решениями задачи порогового рассеяния, а s^0 – *пороговой матрицей рассеяния*. Отметим еще, что выбор линейных пакетов (2.3) заведомо неоднозначен, и это обстоятельство в полной мере будет использовано в п. 4.2 при обосновании асимптотики.

2.2. Операторная постановка задачи. Введем весовое пространство Соболева $W_\beta^l(\Omega)$ (пространство Кондратьева) как замыкание линейного множества $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по норме

$$\|u; W_\beta^l(\Omega)\| = \|e^{\beta z} u; H^l(\Omega)\| \quad (2.5)$$

с показателями гладкости $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и веса $\beta \in \mathbb{R}$. Это пространство состоит из тех функций $u \in H_{\text{loc}}^l(\bar{\Omega})$, для которых конечна норма (2.5). Подпространство функций $u \in W_\beta^1(\Omega)$, удовлетворяющих краевому условию Дирихле (1.3), обозначим $\mathring{W}_\beta^1(\Omega)$. Ясно, что при любом $\beta \in \mathbb{R}$ оператор

$$W_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{W}_\beta^1(\Omega) \ni u \mapsto A_\beta(\lambda)u = f \in W_\beta^0(\Omega) \quad (2.6)$$

задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) - \lambda u(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.7)$$

является непрерывным. Согласно общим результатам [12] (см. также [3; теоремы 3.1.1 и 5.1.4]) он становится фредгольмовым тогда и только тогда, когда $\beta \neq \pm \operatorname{Re} \sqrt{\lambda - \Lambda_j}$ при $j \in \mathbb{N}$; здесь Λ_j – члены последовательности (1.5) собственных чисел задачи (1.6).

Зафиксируем спектральный параметр и весовой показатель

$$\lambda \in [\Lambda_n, \Lambda_{n+1}), \quad \beta \in (0, \sqrt{\Lambda_{n+1} - \lambda}). \quad (2.8)$$

Операторы $A_\beta(\lambda)$ и $A_{-\beta}(\lambda)$ являются фредгольмовыми и формально сопряженными. В силу альтернативы Фредгольма критерием существования решения

$u \in W_{-\beta}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{-\beta}^1(\Omega)$ задачи (2.7) с правой частью $f \in W_{-\beta}^0(\Omega)$ служит равенство

$$(f, v)_{\Omega} = 0 \quad \forall v \in \ker A_{+\beta}(\lambda), \quad (2.9)$$

в котором фигурирует ядро оператора (2.6), а именно

$$\ker A_{\beta}(\lambda) = \{v \in W_{\beta}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{\beta}^1(\Omega) : \Delta v + \lambda v = 0 \text{ в } \Omega\}. \quad (2.10)$$

Дефектные функционалы (2.9) составляют коядро оператора $A_{-\beta}(\lambda)$. Приведенное утверждение о разрешимости задачи (2.7) позволяет отождествить подпространства $\text{coker } A_{-\beta}(\lambda)$ и $\ker A_{\beta}(\lambda)$. При этом ввиду допустимой замены $\beta \mapsto -\beta$ справедливо равенство

$$\text{Ind } A_{\beta}(\lambda) = -\text{Ind } A_{-\beta}(\lambda), \quad (2.11)$$

где $\text{Ind } A = \dim \ker A - \dim \text{coker } A$ – индекс оператора A .

Обозначим $\mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega)$ прообраз $A_{-\beta}(\lambda)^{-1}W_{\beta}^0(\Omega)$ – совокупность, вообще говоря, растущих решений $u \in W_{-\beta}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{-\beta}^1(\Omega)$ задачи (2.7) с экспоненциально затухающими правыми частями $f \in W_{\beta}^0(\Omega)$. Согласно теореме об асимптотике (см. [12], а также [3; теоремы 3.1.4 и 5.1.4]) для функции $u \in \mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega)$ выполнено представление

$$u(y, z) = \chi(z) \sum_{\pm} \sum_{k=1}^n b_k^{\pm} w_k^{\pm}(y, z) + \tilde{u}(y, z), \quad (2.12)$$

причем исчезающий на бесконечности остаток $\tilde{u} \in W_{\beta}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{\beta}^1(\Omega)$ и коэффициенты $b_k^{\pm} \in \mathbb{C}$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \|u; \mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega)\| &:= \left(\|\tilde{u}; W_{\beta}^2(\Omega)\|^2 + \sum_{\pm} \sum_{k=1}^n |b_k^{\pm}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_{\beta} (\|f; W_{\beta}^0(\Omega)\| + \|u; W_{-\beta}^0(\Omega)\|). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) относятся к случаю (1.9), но на пороге, т.е. при $\lambda = \Lambda_n$ (ср. первое включение (2.8)) нуждаются в заменах $b_k^{\pm} \mapsto \hat{b}_k^{\pm}$ и $w_k^{\pm} \mapsto \hat{w}_k^{\pm}$.

Линейное пространство $\mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega)$, снабженное нормой из левой части (2.13), становится гильбертовым пространством, а сужение $\mathbf{A}_{\beta}(\lambda)$ оператора $A_{-\beta}(\lambda)$ на $\mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega) \subset W_{-\beta}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{-\beta}^1(\Omega)$ наследует фредгольмово свойство, в частности, благодаря оценке (2.13). Гильбертова структура пространства $\mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega)$, называемого весовым классом с отделенной асимптотикой, далее востребована не будет.

2.3. Оператор задачи с условиями излучения. Введем еще одно подпространство

$$\mathbf{W}_{\beta,0}^{2+}(\Omega) = \{u \in \mathbf{W}_{\beta,0}^2(\Omega) : b_1^{-} = \dots = b_n^{-} = 0\}. \quad (2.14)$$

Разложение (2.12) его элементов принимает вид

$$u(y, z) = \chi(z) \sum_{k=1}^n b_k^+ w_k^+(y, z) + \tilde{u}(y, z) \quad (2.15)$$

и лишается всех приходящих волн, как w_k^- из списка (1.10) в случае (1.9), так и $\hat{w}_k^-$ из списков (1.17), (2.3) в случае $\lambda = \Lambda_n$, когда символ $\hat{\cdot}$, разумеется, нужно приписать ко всем объектам. Таким образом, сужение $\mathbf{A}_\beta^+(\lambda)$ оператора $A_{-\beta}(\lambda)$ на подпространство (2.14) следует интерпретировать как оператор задачи (2.7) с упомянутыми в п. 2.1 энергетическими условиями излучения.

ТЕОРЕМА 1. *Задача (2.7) с правой частью $f \in W_\beta^0(\Omega)$ имеет решение $u \in W_{\beta,0}^{2+}(\Omega)$ в том и только в том случае, если выполнены условия разрешимости (2.9). Это решение определено с точностью до слагаемого из подпространства (2.10). Будучи подчинено условиям ортогональности*

$$(u, v)_\Omega = 0 \quad \forall v \in \ker A_\beta(\lambda), \quad (2.16)$$

решение (2.15) становится единственным и удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{u}; W_\beta^2(\Omega)\| + \sum_{k=1}^n |b_k^+| \leq c \|f; W_\beta^0(\Omega)\|. \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения можно найти, например, в статье [11], однако для удобства читателя приведем его краткую проверку.

Как упоминалось, условия ортогональности (2.9) гарантируют существование решения $u \in W_{-\beta}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{-\beta}^1(\Omega)$ задачи (2.7), которое к тому же допускает разложение (2.12) вместе с оценкой (2.13). Нужно уничтожить коэффициенты $b_1^-, \dots, b_n^-$, для чего используем произвол в выборе решения – слагаемое из подпространства $\ker A_{-\beta}(\lambda)$. Вспомним равенство (2.11) и дополним его формулой для приращения индекса [3; теоремы 4.3.3 и 5.1.4]

$$\text{Ind } A_{-\beta}(\lambda) = \text{Ind } A_\beta(\lambda) + 2n,$$

которая, в частности, содержит количество волн, отделенных в асимптотике (2.12). В результате находим, что, во-первых, $\text{Ind } A_{-\beta}(\lambda) = n$ и, во-вторых, в силу комментария к условиям разрешимости (2.9) справедливо соотношение

$$\dim \ker A_{-\beta}(\lambda) = \text{Ind } A_{-\beta}(\lambda) + \dim \text{coker } A_{-\beta}(\lambda) = n + \dim \ker A_\beta(\lambda). \quad (2.18)$$

Таким образом, в ядре $\ker A_{-\beta}(\lambda)$ найдется в точности n решений задачи (1.2), (1.3), не затухающих на бесконечности, т.е. допускающих представление (2.12) с нетривиальным набором коэффициентов $b_1^\pm, \dots, b_n^\pm$. Для проверки представлений (1.12) в случае (1.9) и представлений (2.4) в случае $\lambda = \Lambda_n$ предположим, что существует решение $\zeta \in \ker A_{-\beta}(\lambda) \setminus \ker A_\beta(\lambda)$, для которого

$$\zeta = \chi \sum_{k=1}^n c_k w_k^+ + \tilde{\zeta}, \quad \tilde{\zeta} \in W_\beta^2(\Omega), \quad \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \neq 0. \quad (2.19)$$

Подставим ζ на обе позиции в формулу Грина на усеченном волноводе $\Omega(R)$ и получим, что

$$0 = a(\zeta, \zeta) = a\left(\sum_{k=1}^n c_k w_k^+, \sum_{k=1}^n c_k w_k^+\right) = i \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (2.20)$$

Пояснение: сначала устранили экспоненциально затухающий остаток $\tilde{\zeta}$ предельным переходом $R \rightarrow +\infty$, а затем воспользовались соотношениями (2.2).

Обнаруженное противоречие между формулами (2.19) и (2.20) означает, что в разложении незатухающих решений задачи (1.2), (1.3) не могут присутствовать только уходящие волны, а значит, в n -мерном пространстве $\ker A_{-\beta}(\lambda) \ominus \ker A_{\beta}(\lambda)$ можно выбрать базис, элементы которого “начинаются” с приходящих волн, т.е. допускают разложения (1.12) или (2.4). Окончательно находим, что

$$u - \sum_{k=1}^n b_k^- \zeta_k = \chi \sum_{k=1}^n \left(b_k^+ w_k^+ - b_k^- \sum_{l=1}^n s_{kl} w_l^+ \right) + \tilde{u} - \sum_{k=1}^n b_k^- \tilde{\zeta}_k \in \mathbf{W}_{\beta,0}^{2+}(\Omega),$$

т.е. нужное решение построено. Его единственность при условии (2.16) и оценка (2.17) вытекает из формулы (2.18) и вложения $\ker A_{\beta}(\lambda) \subset \ker A_{-\beta}(\lambda)$, а также неравенства (2.13).

Отметим, что проверка унитарности матриц рассеяния, обычной и пороговой, во многом повторяет выкладку (2.20), а именно,

$$0 = a(\zeta^p, \zeta^q) = -\delta_{p,q} + i \sum_{k=1}^n s_{kp} \overline{s_{kq}}, \quad p, q = 1, \dots, n.$$

При $\lambda = \Lambda_n$ к величинам ζ^l и s_{kl} , как обычно, нужно приписать символ $\hat{}$.

2.4. Стабилизирующиеся решения задачи на пороге. В случае (1.9) все решения (1.12) задачи рассеяния оказываются ограниченными. Решения (2.4) той же задачи (1.2), (1.3) с параметром $\lambda = \Lambda_n$ могут иметь линейный рост на бесконечности ввиду присутствия в их разложениях пакетов (2.3). Далее будут востребованы стабилизирующиеся решения в пороговой ситуации.

Разобьем матрицу порогового рассеяния $\hat{s}$ на блоки $\hat{s}_{\bullet\bullet}$, $\hat{s}_{\#\#}$, $\hat{s}_{\bullet\#}$ и $\hat{s}_{\#\bullet}$ так, как указано в формуле (1.20), и введем соответствующие строки волн и решений

$$\begin{aligned} \hat{w}_{\bullet}^{\pm} &= (\hat{w}_1^{\pm}, \dots, \hat{w}_{n-\kappa}^{\pm}), & \hat{w}_{\#}^{\pm} &= (\hat{w}_{n-\kappa+1}^{\pm}, \dots, \hat{w}_n^{\pm}), \\ \hat{\zeta}_{\bullet} &= (\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_{n-\kappa}), & \hat{\zeta}_{\#} &= (\hat{\zeta}_{n-\kappa+1}, \dots, \hat{\zeta}_n). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В результате разложения (2.4) кратко переписываются следующим образом:

$$\hat{\zeta}_{\bullet} = \chi \hat{w}_{\bullet}^{-} + \chi \hat{w}_{\bullet}^{+} \hat{s}_{\bullet\bullet} + \chi \hat{w}_{\#}^{+} \hat{s}_{\bullet\#} + o(1), \quad (2.22)$$

$$\hat{\zeta}_{\#} = \chi \hat{w}_{\#}^{-} + \chi \hat{w}_{\bullet}^{-} \hat{s}_{\bullet\#} + \chi \hat{w}_{\#}^{+} \hat{s}_{\#\#} + o(1). \quad (2.23)$$

Здесь и всюду далее символ $o(1)$ заменяет экспоненциально затухающие остатки.

ТЕОРЕМА 2. *Размерности подпространств ограниченных и стабилизирующих решений в линейной оболочке $\text{span}(\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_n)$ равны соответственно*

$$n - \varkappa + \dim \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa), \quad \dim \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa),$$

причем последнее выражение – кратность собственного числа -1 блока $\hat{s}_{\#\#}$ пороговой матрицы рассеяния.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим собственный вектор

$$\hat{a}_\# \in \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) \setminus \{0\}.$$

Столбец $\hat{a}$ высотой n , составленный из столбцов $\hat{a}_\bullet = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n-\varkappa}$ и $\hat{a}_\#$, является собственным вектором всей матрицы, так как

$$\begin{aligned} |\hat{a}_\#|^2 &= |\hat{a}|^2 = |\hat{s}\hat{a}|^2 = |\hat{s}_\bullet\hat{a}_\#|^2 + |\hat{s}_{\#\#}\hat{a}_\#|^2 = |\hat{s}_\bullet\hat{a}_\#|^2 + |\hat{a}_\#|^2 \\ \implies \hat{s}_\bullet\hat{a}_\# &= 0 \in \mathbb{C}^{n-\varkappa}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Кроме того, в силу соотношений (2.23) и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_\# \hat{a}_\# &= \chi 2^{-1/2} (z + i) U_\# \hat{a}_\# + \chi 2^{-1/2} (z - i) U_\# \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\# + o(1) \\ &= \chi 2^{-1/2} z U_\# (\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) \hat{a}_\# - \chi 2^{-1/2} i U_\# (\hat{s}_{\#\#} - \mathbb{I}_\varkappa) \hat{a}_\# + o(1), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $U_\#$ – строка стоячих волн $(U_{n-\varkappa+1}, \dots, U_n)$. Первое слагаемое в правой части аннулируется, а остальные два оказываются стабилизирующим и затухающим соответственно, причем $(\hat{s}_{\#\#} - \mathbb{I}_\varkappa) \hat{a}_\# = -2\hat{a}_\# \neq 0$, т.е. $\hat{\zeta}_\# \hat{a}_\# \notin \ker A_\beta(\Lambda_n)$.

Пусть теперь $\hat{a} = (\hat{a}_\bullet, \hat{a}_\#)$ – нетривиальный столбец, и $\hat{a}_\# \perp \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa)$. Если $\hat{a}_\bullet = 0 \in \mathbb{C}^{n-\varkappa}$, то согласно представлению (2.25) линейная комбинация $\hat{\zeta}\hat{a} = \hat{\zeta}_\# \hat{a}_\#$ остается неограниченной, поскольку $\hat{a}_\# + \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\# \neq 0$. Вместе с тем при любом $\hat{a}_\bullet \in \mathbb{C}^{n-\varkappa}$ вектор $\hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\bullet$ ортогонален подпространству $\ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa)$ в силу формулы (2.24) и симметричности матрицы рассеяния, а значит, можно определить столбец $\hat{a}_\# = -(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa)^{-1} \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\bullet \in \mathbb{C}^\varkappa$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}\hat{a} &= \chi \hat{w}_\bullet^- \hat{a}_\bullet + \chi \hat{w}_\bullet^+ \hat{s}_{\bullet\bullet} \hat{a}_\bullet + \chi \hat{w}_\#^+ \hat{s}_{\#\bullet} \hat{a}_\bullet + \chi \hat{w}_\#^- \hat{a}_\# \\ &\quad + \chi \hat{w}_\#^+ \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\# + \chi \hat{w}_\bullet^+ \hat{s}_{\bullet\#} \hat{a}_\# + o(1) \\ &= \chi 2^{-1/2} z U_\# (\hat{a}_\# + \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\bullet + \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\#) + \chi 2^{-1/2} i U_\# (\hat{a}_\# - \hat{s}_{\#\bullet} \hat{a}_\bullet - \hat{s}_{\#\#} \hat{a}_\#) \\ &\quad + \chi \hat{w}_\bullet^- \hat{a}_\bullet + \chi \hat{w}_\bullet^+ (\hat{s}_{\bullet\bullet} - \hat{s}_{\bullet\#} (\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa)^{-1} \hat{s}_{\#\#}) \hat{a}_\bullet + o(1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю благодаря определению составляющей $\hat{a}_\#$, второе содержит стоячие волны, но в остальной части выражения обязательно присутствуют осциллирующие волны, так как $\hat{a}_\bullet \neq 0$.

Поскольку любой элемент $u \in \ker A_{-\beta}(\Lambda_n) \ominus \ker A_\beta(\Lambda_n)$ представим в виде линейной комбинации $\hat{\zeta}\hat{a}$, утверждение теоремы проверено.

Подведем итог. Множество $\ker A_{-\beta}(\Lambda_n)$ решений задачи (1.2), (1.3) с не более чем полиномиальным (на самом деле линейным) ростом на бесконечности состоит из подпространства $\ker A_\beta(\Lambda_n)$ экспоненциально затухающих решений (захваченных волн), подпространства решений с линейным ростом на

бесконечности и подпространства ограниченных, но не затухающих, т.е. осциллирующих или стабилизирующихся решений. Поскольку каждый столбец $\hat{a}_\# \in \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa)$ превращается в собственный вектор $\hat{a}$ унитарной матрицы $\hat{s}$, отвечающий ее собственному числу -1 , в пространстве собственных функций задачи (1.6), отвечающих собственному числу Λ_n из формулы (1.8), можно выбрать базис $U_{n-\varkappa}, \dots, U_n$ так, чтобы были выполнены соотношения (1.7), а блок $\hat{s}_{\#\#}$ принял вид

$$\hat{s}_{\#\#} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{bb} & \mathbb{O}_{(\varkappa-\rho) \times \rho} \\ \mathbb{O}_{\rho \times (\varkappa-\rho)} & -\mathbb{I}_\rho \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где $\rho = \dim \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa)$, $\hat{s}_{bb}$ – матрица размером $(\varkappa - \rho) \times (\varkappa - \rho)$, а $\mathbb{O}_{p \times q}$ – нулевая $(p \times q)$ -матрица. Более того, правые ρ столбцов блока $\hat{s}_{\#\#}$ и нижние ρ строк блока $\hat{s}_{\#\bullet}$ пороговой матрицы рассеяния $\hat{s}$ содержат только нули. Таким образом, в соответствии с формулами (2.4) и (2.3) стабилизирующиеся решения выглядят следующим образом:

$$\hat{\zeta}_p(\varkappa) = \chi(z)\sqrt{2}iU_p(y) + \tilde{\zeta}_p(x), \quad p = n - \rho + 1, \dots, n. \quad (2.27)$$

2.5. Комментарии. Далее придется различать две ситуации:

- 1°) матрица $\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa$ неособенная, т.е. $\dim \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) = 0$;
- 2°) матрица $\hat{s}_{\#\#} - \mathbb{I}_\varkappa$ особенная, т.е. $\dim \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) = \rho > 0$.

Ситуацию 1°) следует характеризовать как устойчивую, а ситуацию 2°) – как неустойчивую. Точный смысл сказанному придает очередное утверждение, в котором речь пойдет о задаче (1.2), (1.3) в регулярно возмущенном волноводе

$$\Omega^h = (\Omega \setminus \mathcal{V}) \cup \{x \in \mathcal{V} : \nu < h\mathcal{H}(\varsigma)\}. \quad (2.28)$$

Здесь $\mathcal{V}$ – окрестность выделенного конечного участка Γ гладкой границы $\partial\Omega$ (тонирована на рис. 2), (ν, ς) – локальная система координат, ν – ориентированное расстояние до $\partial\Omega$, $\nu < 0$ в $\Omega \cap \mathcal{V}$, а ς – какой-нибудь подходящий атлас карт на Γ . Кроме того, h – малый положительный параметр, а $\mathcal{H} \in C_c^\infty(\Gamma)$ – гладкая профильная функция, обращающаяся в нуль около $(d-2)$ -мерной границы $\partial\Gamma$. Приращение объема волновода глубоко тонировано на рис. 2.

Рис. 2. Резонатор с пологим и гладким возмущением стенки

ЛЕММА 2.1. Пусть в ситуации 2°) матрица Грама $M_{\# \#}$ с элементами

$$M_{pq} = \int_{\Gamma} \mathcal{H}(\varsigma) \overline{\partial_{\nu} \widehat{\zeta}_p(x)} \partial_{\nu} \widehat{\zeta}_q(x) d\varsigma, \quad p, q = n - \rho + 1, \dots, n, \quad (2.29)$$

неособенная. Тогда для пороговой матрицы рассеяния $\widehat{\zeta}^h$ в возмущенном волноводе (2.28) при малом h выполняется соотношение

$$\dim \ker(\widehat{s}_{\# \#}^h + \mathbb{I}_{\mathcal{K}}) = 0,$$

т.е. реализуется ситуация 1°).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения анализа предположим, что у задачи (1.2), (1.3) с $\lambda = \Lambda_n$ нет захваченных волн, т.е. $\dim \ker A_{\beta}(\Lambda_n) = 0$. В общей ситуации вычисления и доводы усложняются несильно (см. конец доказательства).

Все приводимые ниже формулы с многоточием, заменяющим младшие члены порядка h^2 и выше, обосновываются при помощи теории возмущений линейных операторов (см. [13] и, в частности, п. 7.6.5 этой монографии по поводу регулярного возмущения границы). Примем стандартные асимптотические анзацы

$$\widehat{\zeta}^h(x) = \widehat{\zeta}(x) + h\zeta'(x) + \dots, \quad \widehat{s}^h = \widehat{s} + hs' + \dots. \quad (2.30)$$

Согласно формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}^h(h\mathcal{H}(\varsigma), \varsigma) &= \widehat{\zeta}(h\mathcal{H}(\varsigma), \varsigma) + h\zeta'(h\mathcal{H}(\varsigma), \varsigma) + \dots \\ &= \widehat{\zeta}(0, \varsigma) + h\mathcal{H}(\varsigma) \partial_{\nu} \widehat{\zeta}(0, \varsigma) + \dots + h\zeta'(0, \varsigma) + \dots. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь строки функций $\widehat{\zeta}^h$ и тому подобное записаны в локальных координатах ν, ς , т.е. $\widehat{\zeta}^h(h\mathcal{H}(\varsigma), \varsigma)$ и $\widehat{\zeta}(0, \varsigma) = 0$ – следы функций $\widehat{\zeta}^h$ и $\widehat{\zeta}$ на поверхностях $\Gamma^h \subset \partial\Omega^h$ и Γ соответственно. Уничтожая члены порядка h в правой части (2.31), заключаем, что строка ζ' – решение векторной задачи

$$\Delta \zeta'(x) = \Lambda_n \zeta'(x), \quad x \in \Omega, \quad \zeta'(x) = -\mathcal{H}(\varsigma) \partial_{\nu} \widehat{\zeta}(0, \varsigma), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.32)$$

причем профильная функция $\mathcal{H}$ продолжена нулем с участка Γ на всю границу $\partial\Omega$. Несмотря на то, что неоднородность перекочевала из дифференциального уравнения в краевое условие, теорема 1 сохраняет силу для задачи (2.32) и предоставляет ее решение $\zeta' \in \mathbf{W}_{\beta, 0}^{2+}(\Omega)^n$, для которого

$$\zeta' - \chi \widehat{w}^+ b' \in W_{\beta}^2(\Omega)^n. \quad (2.33)$$

Матрицу коэффициентов b' размером $n \times n$ вычислим, подставив строки ζ' и $\widehat{\zeta}$ в формулу Грина на усеченном волноводе $\Omega(R)$ и устремив длину R к бесконечности. В результате получаем

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma} \overline{\partial_n \widehat{\zeta}(0, \varsigma)}^{\top} \mathcal{H}(\varsigma) \partial_{\nu} \widehat{\zeta}(0, \varsigma) d\varsigma &= \int_{\partial\Omega} \overline{\partial_{\nu} \widehat{\zeta}(x)}^{\top} \zeta'(x) d\varsigma \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\omega} (\overline{\widehat{\zeta}(y, R)} \partial_z \zeta'(y, R) - \zeta'(y, R) \overline{\partial_z \widehat{\zeta}(y, R)}) dy \\ &= a(\zeta', \widehat{\zeta}) = a(\widehat{w}^+ b', \widehat{w}^- + \widehat{w}^+ \widehat{s}) = i \widehat{s}^* b' = i \widehat{s}^{-1} b' \implies b' = i \widehat{s} M. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь M – $(n \times n)$ -матрица с элементами (2.29).

Сравнивая формулы (2.30), (2.4) и (2.33), (2.34), видим, что

$$s' = b' = i\widehat{s}M \quad \text{и} \quad \widehat{s}^h = \widehat{s} + ih\widehat{s}M + \dots \quad (2.35)$$

Собственному числу -1 матрицы $\widehat{s}$ отвечают собственные векторы $e_{(n-\rho+1)}, \dots, e_{(n)}$, где $e_{(j)} = (\delta_{1,j}, \dots, \delta_{n,j})^\top$ – орт в пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, собственные числа матрицы $\widehat{s}^h$ из формулы (2.35) приобретают вид

$$1 + ih\mu_j + O(h^2), \quad j = n - \rho + 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

где $\mu_{n-\rho+1}, \dots, \mu_n$ – собственные числа эрмитовой невырожденной матрицы $M_{\# \#}$ из формулировки леммы. Поскольку $\mu_{n-\rho+1}, \dots, \mu_n \neq 0$, собственные числа (2.36) и по понятным причинам другие $\varkappa - \rho$ собственных чисел матрицы $\widehat{s}_{\# \#}^h$ не могут обратиться в -1 при малом h .

В случае $\dim \ker A_\beta(\Lambda_n) > 0$ нужно дополнительно потребовать, чтобы

$$(\mathcal{H} \partial_\nu \widehat{\zeta}, \partial_\nu v)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall v \in \ker A_\beta(\Lambda_n)$$

(ср. формулу (2.9)). Соблюсти эти условия ортогональности путем выбора профильной функции, конечно же, возможно.

§ 3. Формальный асимптотический анализ

3.1. Асимптотические анзацы. Для построения асимптотики решений $\zeta_1^\varepsilon, \dots, \zeta_n^\varepsilon$ задачи (1.2), (1.3) с параметром (1.14) в предположении (1.8) применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [14], [15] и другие) в исполнении [16], [11].

Введем аналогичные (2.21) строки $w_{\bullet \#}^{\varepsilon \pm}$ и $w_{\# \#}^{\varepsilon \pm}$, составленные из волн (1.9) с показателями (1.15) и имеющие длины $n - \varkappa$ и $\varkappa$ соответственно. Строки решений обозначим $\zeta_{\bullet}^\varepsilon$ и $\zeta_{\#}^\varepsilon$. Примем асимптотические анзацы

$$s_{\# \#}^\varepsilon = s_{\# \#}^0 + \varepsilon s' + \dots, \quad (3.1)$$

$$s_{\bullet \#}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} (s_{\bullet \#}^0 + \varepsilon s'_{\bullet \#} + \dots), \quad (3.2)$$

обозначив многоточием младшие члены, несущественные для предприняемого формального асимптотического анализа следующей строки решений задачи рассеяния:

$$\zeta_{\#}^\varepsilon = \chi w_{\#}^{\varepsilon -} + \chi w_{\#}^{\varepsilon +} s_{\# \#}^\varepsilon + \chi w_{\bullet \#}^{\varepsilon +} s_{\bullet \#}^\varepsilon + \widetilde{\zeta}_{\#}^\varepsilon. \quad (3.3)$$

При учете формул (1.16) и (1.18) получаем, что

$$\begin{aligned} \zeta_{\#}^\varepsilon(x) &= \chi(z) \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (1 - i\varepsilon z + \dots) U_{\#}(y) \\ &\quad + \chi(z) \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (1 + i\varepsilon z + \dots) U_{\#}(y) (s_{\# \#}^0 + \varepsilon s'_{\# \#} + \dots) \\ &\quad + \chi(z) \sqrt{\varepsilon} (w_{\bullet}^0(x) + \dots) (s_{\bullet \#}^0 + \varepsilon s'_{\bullet \#} + \dots) + o(1) \\ &= \chi(z) \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} U_{\#}(y) (\mathbb{I}_{\varkappa} + s_{\# \#}^0) + \chi(z) \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} U_{\#}(y) (s'_{\# \#} + iz(\mathbb{I}_{\varkappa} - s_{\# \#}^0)) \\ &\quad + \chi(z) \sqrt{\varepsilon} w_{\bullet}^0 s_{\bullet \#}^0 + \dots + o(1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В согласии с работами [16], [11] разложение (3.4) интерпретируем как *внешнее*, описывающее свойства решения на больших расстояниях от начала координат. Метод сращиваемых асимптотических разложений подразумевает, что слагаемые из правой части (3.4) предписывают поведение на бесконечности членов *внутреннего*, пригодного вблизи резонатора ω , разложения

$$\zeta_{\#}^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Z_{\#}^0(x) + \sqrt{\varepsilon} Z'_{\#}(x) + \dots \quad (3.5)$$

Поскольку возмущение (1.14) спектрального параметра Λ_n составляет $O(\varepsilon^2)$, оба члена $Z_{\#}^0$ и $Z'_{\#}$ анзаца (3.5) должны удовлетворять однородной задаче (1.2), (1.3) на пороге, т.е.

$$-\Delta Z_{\#}(x) = \Lambda_n Z_{\#}(x), \quad x \in \Omega, \quad Z_{\#}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.6)$$

Кроме того, сравнивая слагаемые $O(\varepsilon^{-1/2})$ и $O(\varepsilon^{1/2})$ в правых частях (3.4) и (3.5), выводим соотношения

$$Z_{\#}^0(x) = 2^{-1/2} \chi(z) U_{\#}(y) (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + s_{\#\#}^0) + o(1), \quad (3.7)$$

$$Z'_{\#}(x) = 2^{-1/2} \chi(z) U_{\#}(y) (s'_{\#\#} + iz(\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - s_{\#\#}^0)) + \chi(z) w_{\bullet}^{0+}(x) s_{\bullet\#}^0 + o(1). \quad (3.8)$$

Теперь приходится перейти к разбору разных случаев.

3.2. Устойчивая ситуация. Предположим, что число -1 не является собственным для блока $\widehat{s}_{\#\#}$ пороговой матрицы рассеяния. По теореме 2 стабилизирующихся решений у задачи (3.6) нет, а значит, $Z_{\#}^0$ – строка экспоненциально затухающих решений,

$$Z_{\#}^0(x) = \widehat{\eta}_1 c_1^0 + \dots + \widehat{\eta}_N c_N^0. \quad (3.9)$$

При этом $c_1^0, \dots, c_N^0$ – строки коэффициентов длиной $\mathcal{K}$, $N = \dim \ker A_{\beta}(\Lambda_n)$, $\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_N$ – базис в пространстве захваченных волн, т.е.

$$\ker A_{\beta}(\Lambda_n) = \text{span}(\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_N). \quad (3.10)$$

Ввиду экспоненциального затухания функций (3.9) приходится положить

$$s_{\#\#}^0 = -\mathbb{I}_{\mathcal{K}}. \quad (3.11)$$

Именно такой главный член был анонсирован формулой (1.22) во введении.

Векторное решение задачи (3.6), (3.8) принимает вид

$$Z'_{\#}(x) = \widehat{\zeta}_{\#} c'_{\#} + \widehat{\eta}_1(x) c'_1 + \dots + \widehat{\eta}_N(x) c'_N, \quad (3.12)$$

где $c'_{\#}$ – $(\mathcal{K} \times \mathcal{K})$ -матрица коэффициентов, подлежащая определению, а $c'_1, \dots, c'_N$ – строки коэффициентов, которые не понадобятся из-за экспоненциального затухания захваченных волн. Сравнивая множители при $zU_{\#}$, $U_{\#}$ и $\widehat{w}_{\#}^+ = w_{\#}^{0+}$ в соотношениях (3.8) и (3.12), (2.4), (2.3), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} 2^{-1/2} (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + \widehat{s}_{\#\#}) c'_{\#} &= 2^{-1/2} i (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - s_{\#\#}^0) \implies c'_{\#} = 2i (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + \widehat{s}_{\#\#})^{-1}, \\ 2^{-1/2} i (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - \widehat{s}_{\#\#}) c'_{\#} &= 2^{-1/2} s'_{\#\#} \implies s'_{\#\#} = -2 (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - \widehat{s}_{\#\#}) (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + \widehat{s}_{\#\#})^{-1}, \\ \widehat{s}_{\bullet\#} c'_{\#} &= s_{\bullet\#}^0 \implies s_{\bullet\#}^0 = 2i \widehat{s}_{\bullet\#} (\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + \widehat{s}_{\#\#})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Итак, основные члены анзацев (3.1), (3.2) вычислены – главный $s_{\# \#}^0$ указан формулой (3.11), а поправочные $s'_{\# \#}$ и $s_{\bullet \#}^0$ выражены через блоки пороговой матрицы рассеяния. Младшие члены асимптотик можно построить, продолжив процедуру сращивания, однако они востребованы далее не будут. Напомним, что $s_{\# \bullet}^\varepsilon$ – транспонированный блок (3.2). Наконец, асимптотика блока $s_{\bullet \bullet}^\varepsilon$ будет найдена в п. 3.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведем проверку проделанных вычислений, основанную на унитарности матрицы рассеяния s^ε :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_\varkappa &= (s_{\# \#}^\varepsilon)^* s_{\# \#}^\varepsilon + (s_{\bullet \#}^\varepsilon)^* s_{\bullet \#}^\varepsilon = \mathbb{I}_\varkappa - \varepsilon(s'_{\# \#} + (s'_{\# \#})^*) + \varepsilon(s_{\bullet \#}^0)^* s_{\bullet \#}^0 + O(\varepsilon)^2 \\ &= \mathbb{I}_\varkappa - 2\varepsilon(\mathbb{I}_\varkappa + \widehat{s}_{\# \#}^*)^{-1}((\mathbb{I}_\varkappa - \widehat{s}_{\# \#}^*)(\mathbb{I}_\varkappa + \widehat{s}_{\# \#}) \\ &\quad + (\mathbb{I}_\varkappa + \widehat{s}_{\# \#}^*)(\mathbb{I}_\varkappa - \widehat{s}_{\# \#}) - 2\widehat{s}_{\bullet \#}^* \widehat{s}_{\bullet \#})(\mathbb{I}_\varkappa + \widehat{s}_{\# \#})^{-1} + O(\varepsilon^2) \\ &= \mathbb{I}_\varkappa - 4\varepsilon(\mathbb{I}_\varkappa - \widehat{s}_{\# \#}^* \widehat{s}_{\# \#} - \widehat{s}_{\bullet \#}^* \widehat{s}_{\bullet \#})(\mathbb{I}_\varkappa + \widehat{s}_{\# \#})^{-1} + O(\varepsilon^2) = \mathbb{I}_\varkappa + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь были учтены асимптотические формулы (3.1), (3.2) и выражения (3.13), а последний множитель при ε исчез в силу унитарности пороговой матрицы рассеяния $\widehat{s}$.

3.3. Неустойчивая ситуация. Пусть теперь блок $\widehat{s}_{\# \#}$ имеет вид (2.26), причем $\rho > 0$. Поскольку $Z_{\#}^0$ – строка стабилизирующих решений, а у строки $Z'_{\#}$ допускается линейный рост (см. соответственно разложения (3.7) и (3.8)), справедливы представления

$$Z_{\#}^0(x) = \widehat{\zeta}_{\dagger}(x)c_{\dagger}^0 + \widehat{\eta}_1(x)c_1^0 + \cdots + \widehat{\eta}_N(x)c_N^0, \quad (3.15)$$

$$Z'_{\#}(x) = \widehat{\zeta}_{\flat}(x)c'_{\flat} + \widehat{\zeta}_{\dagger}(x)c'_{\dagger} + \widehat{\eta}_1(x)c'_1 + \cdots + \widehat{\eta}_N(x)c'_N. \quad (3.16)$$

Линейные комбинации (3.15) различаются строкой $\widehat{\zeta}_{\dagger} = (\widehat{\zeta}_{n-\rho+1}, \dots, \widehat{\zeta}_n)$ стабилизирующих решений (2.27), умноженной на неизвестную в настоящий момент числовую $(\varkappa \times \rho)$ -матрицу $c_{\dagger}^0$. Отметим еще, что строка $\widehat{\zeta}_{\#}$ составлена из строк $\widehat{\zeta}_{\flat}$ и $\widehat{\zeta}_{\dagger}$, а матрица $c_{\#}$ – из матриц $c'_{\flat}$ и $c'_{\dagger}$.

Сравнивая формулы (3.7) и (2.27), приходим к соотношениям

$$2^{1/2}ic_{\dagger}^0 = 2^{-1/2}(\mathbb{I}_{\rho} + s_{\dagger \dagger}^0), \quad s_{\dagger \flat}^0 = \mathbb{O}_{\rho(\varkappa-\rho)}. \quad (3.17)$$

Кроме того, в силу неособенности матрицы $\widehat{s}_{\flat \flat} + \mathbb{I}_{\varkappa-\rho}$ любая линейная комбинация $\widehat{\zeta}_{\flat}c_{\flat}^0$ линейно растет на бесконечности, а значит, по необходимости

$$s_{\flat \flat}^0 = -\mathbb{I}_{\varkappa-\rho}, \quad s_{\flat \dagger}^0 = \mathbb{O}_{(\varkappa-\rho) \times \rho}. \quad (3.18)$$

Ввиду специального строения матрицы (2.26) любая линейная комбинация $\widehat{\zeta}_{\#}c'_{\#}$ не содержит резонансных волн $zU_{n-\rho+1}, \dots, zU_n$. Следовательно, коэффициенты при таких волнах в правой части (3.8) должны аннулироваться, т.е.

$$\mathbb{I}_{\rho} - s_{\dagger \dagger}^0 = \mathbb{O}_{\rho \times \rho}, \quad (3.19)$$

и при учете равенства (3.18) обнаруживаем, что

$$s_{\#\#}^0 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_{\varkappa-\rho} & \mathbb{O}_{(\varkappa-\rho) \times \rho} \\ \mathbb{O}_{\rho \times (\varkappa-\rho)} & \mathbb{I}_{\rho} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

(ср. диагональную матрицу из формулы (1.21)). Теперь первое соотношение (3.17) и равенство (3.19) показывают, что

$$c_{\ddagger}^0 = -2i\mathbb{I}_{\rho}. \quad (3.21)$$

Вместе с тем для определения матрицы коэффициентов $c'_{\ddagger}$ нужно обратиться к следующему члену $\varepsilon^{3/2}Z''$ анзаца (3.3) (точно так же матрица коэффициентов (3.21) из представления (3.15) была найдена при обработке члена $\varepsilon^{1/2}Z'$); этот младший член в настоящей работе не строится.

Все приемы, нужные для реализации асимптотической процедуры, уже продемонстрированы, и в окончательной формулировке результата в теореме 7 будет использован только главный асимптотический член (3.20). Поэтому вычислять матрицу коэффициентов c'_b в представлении (3.16) тоже не будем.

3.4. Блок матрицы рассеяния, связанный с осциллирующими волнами на пороге. На первый взгляд кажется, что формулы (1.15) и (1.16) приводят к выражению $s_{\bullet\bullet}^0 = \widehat{s}_{\bullet\bullet}$ для главного члена асимптотического анзаца

$$s_{\bullet\bullet}^{\varepsilon} = s_{\bullet\bullet}^0 + \dots \quad (3.22)$$

Это впечатление ошибочно. Дело в том, что в соответствии с анзацами (3.1) и (3.2) блочно-диагональная матрица $\text{diag}\{s_{\bullet\bullet}^0, s_{\#\#}^0\}$ наследует свойство унитарности от матрицы рассеяния s^{ε} . Следовательно, оба блока $s_{\bullet\bullet}^0$ и $s_{\#\#}^0$ унитарны, однако блок $\widehat{s}_{\bullet\bullet}$ матрицы квазирассеяния $\widehat{s}$ не обязан обладать названным свойством, если ее блоки $\widehat{s}_{\bullet\bullet}$ и $\widehat{s}_{\#\#}$ нетривиальны.

Используя соотношения (1.15)–(1.18), напомним следующее представление для строки $\zeta_{\bullet}^{\varepsilon} = (\zeta_1^{\varepsilon}, \dots, \zeta_{n-\varkappa}^{\varepsilon})$ решений задачи (1.2), (1.3) с параметром (1.14):

$$\begin{aligned} \zeta_{\bullet}^{\varepsilon}(x) &= \chi(z)w_{\bullet}^{\varepsilon-}(x) + \chi(z)w_{\bullet}^{\varepsilon+}(x)s_{\bullet\bullet}^{\varepsilon} + \chi(z)w_{\#\#}^{\varepsilon+}(x)s_{\#\bullet}^{\varepsilon} + o(1) \\ &= \chi(z)w_{\bullet}^0(x) + \chi(z)w_{\bullet}^{0+}(x)s_{\bullet\bullet}^0 + \chi(z)(2\varepsilon)^{-1/2}U_{\#\#}(y)\sqrt{\varepsilon}s_{\#\bullet}^0 + \dots + o(1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Теперь обратимся к представлениям (2.22) строк решений на пороге. Вспомнив определение (2.3) волновых пакетов, находим, что

$$\widehat{\zeta}_{\bullet}(x) = \chi(z)\widehat{w}_{\bullet}^-(x) + \chi(z)\widehat{w}_{\bullet}^+(x)\widehat{s}_{\bullet\bullet} + \chi(z)2^{-1/2}(z-i)U_{\#\#}(y)\widehat{s}_{\#\bullet} + o(1), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}_{\#}(x) &= \chi(z)2^{-1/2}zU_{\#\#}(y)(\mathbb{I}_{\varkappa} + \widehat{s}_{\#\#}) + \chi(z)2^{-1/2}iU_{\#\#}(y)(\mathbb{I}_{\varkappa} - \widehat{s}_{\#\#}) \\ &\quad + \chi(z)\widehat{w}_{\bullet}^-(x)\widehat{s}_{\bullet\#} + o(1). \end{aligned} \quad (3.25)$$

С целью исключить линейную составляющую из правой части (3.24) умножим строку (3.25) справа на матрицу $(\mathbb{I}_{\varkappa} + \widehat{s}_{\#\#})^{-1}\widehat{s}_{\#\bullet}$, которая определена корректно

благодаря выкладке (2.24), означающей, что подпространство $\hat{s}_{\# \bullet} \mathbb{C}^{n-\varkappa}$ ортогонально образу $(\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#}) \mathbb{C}^{\varkappa}$ (подробности см., например, в статье [11; § 2]). Теперь вычтем результат из выражения (3.24) и получим, что

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{\bullet}(x) - \hat{\zeta}_{\#}(x)(\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#})^{-1} \hat{s}_{\# \bullet} &= \chi(z) \hat{w}_{\bullet}^{-}(x) + \chi(z) \hat{w}_{\bullet}^{+}(x) (\hat{s}_{\bullet \bullet} - \hat{s}_{\bullet \#}(\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#})^{-1} \hat{s}_{\# \bullet}) \\ &\quad - \chi(z) 2^{-1/2} i U_{\#}(y) \hat{s}_{\# \bullet} - \chi(z) 2^{-1/2} i U_{\#}(y) (\mathbb{I}_{\varkappa} - \hat{s}_{\# \#}) (\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#})^{-1} \hat{s}_{\# \bullet} + o(1). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Итак, найдена строка решений задачи (1.2), (1.3) на пороге $\lambda = \Lambda_n$, которое имеет ту же строку $\hat{w}_{\bullet}^{-}(x) = w_{\bullet}^{0-}(x)$ (ср. связь (1.17)) приходящих волн, что и в правой части (3.23). Согласно теореме 1, указывающей единственный произвол в выборе решений – линейную комбинацию захваченных волн $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_N$, в разложениях (3.26) и (3.23) должны совпасть коэффициенты при остальных незатухающих волнах $\hat{w}_{\bullet}^{+}(x) = w_{\bullet}^{0+}(x)$ и $U_{\#}(y)$, т.е.

$$s_{\bullet \bullet}^0 = \hat{s}_{\bullet \bullet} - \hat{s}_{\bullet \#}(\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#})^{-1} \hat{s}_{\# \bullet}, \quad (3.27)$$

$$s_{\# \bullet}^0 = i \hat{s}_{\# \bullet} - i(\mathbb{I}_{\varkappa} - \hat{s}_{\# \#})(\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#})^{-1} \hat{s}_{\# \bullet} = 2i(\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#})^{-1} \hat{s}_{\# \bullet}. \quad (3.28)$$

Отметим, что матрица (3.27) является унитарной и симметричной, причем определена корректно вне зависимости от того, вырождена или нет матрица $\mathbb{I}_{\varkappa} + \hat{s}_{\# \#}$ (см. еще раз выкладку (2.24) и пояснения в статье [11; § 2]). Кроме того, формулы (3.28) и (3.13) подтверждают соотношение $s_{\bullet \#}^0 = (s_{\# \bullet}^0)^{\top}$ – следствие симметричности матриц s^{ε} и $\hat{s}$.

Формальный асимптотический анализ закончен.

§ 4. Обоснование асимптотики

4.1. План вывода оценок погрешностей. В предыдущем параграфе были построены приемлемые приближения к решениям $\zeta_1^{\varepsilon}, \dots, \zeta_n^{\varepsilon}$ задачи (1.2), (1.3) с параметром (1.14), коэффициенты в разложениях которых формируют асимптотику элементов матрицы рассеяния s^{ε} . Вместе с тем для обоснования формальных асимптотических конструкций нужны априорные оценки решений по норме весовых классов с отделенной асимптотикой и явное выделение их зависимостей от малого параметра ε – оценка (2.17), предоставленная теоремой 1, недостаточна для этих целей из-за отсутствия сколь-нибудь точной информации о множителе $c = c(\varepsilon)$ в правой части (2.17).

Специфика пороговой ситуации состоит в том, что при обычной нормировке (2.2) волн базис $w_1^{\varepsilon \pm}, \dots, w_n^{\varepsilon \pm}$ не переводится в базис $\hat{w}_1^{\pm}, \dots, \hat{w}_n^{\pm}$ предельным переходом $\varepsilon \rightarrow +0$, так как пределы $\lim w_j^{\varepsilon \pm}$ – ограниченные волны, осциллирующие или стоячие. Поэтому на пороге невозможно непосредственное применение теории возмущений линейных операторов (ср. подходы в публикациях [17] и [11]) и приходится выполнять обходные маневры. Дополнительные сложности возникают из-за захваченных волн. Опишем план действий.

Сначала в пространстве волн, отвечающих околупороговому спектральному параметру (1.14), вводится искусственный базис из пакетов приходящих

и уходящих волн, который, во-первых, удовлетворяет условиям ортогональности и нормировки (2.2) и, во-вторых, плавно переходит при $\varepsilon \rightarrow +0$ в базис $\widehat{w}_1^\pm, \dots, \widehat{w}_n^\pm$ на пороге, составленный из осциллирующих волн (1.17) и линейных пакетов (2.3). В результате появляется решение задачи (1.2), (1.3) с искусственными условиями излучения и для него выводится квалифицированная оценка нужной нормы и формируется искусственная матрица рассеяния. Наконец, при помощи решений, порождающих эту матрицу, решение задачи с искусственными условиями излучения переделывается в решение задачи с физическими условиями излучения, причем попутно получается оценка с множителем в мажоранте, не зависящим от малого параметра ε , но с весами – степенями этого параметра – при различных компонентах разложения решения. Такая оценка оказывается достаточной для обоснования асимптотики в заключительных разделах параграфа.

4.2. Новый базис в пространстве волн и измененная операторная постановка задачи. При $j = 1, \dots, n - \varkappa$ в качестве волн $\mathbf{w}_j^{\varepsilon\pm} = w_j^{\varepsilon\pm}$ берутся старые выражения (1.17), но при $j = n - \varkappa + 1, \dots, n$ волны определяются новой формулой

$$\mathbf{w}_k^{\varepsilon\pm}(y, z) = \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\varepsilon z} - e^{i\varepsilon z}) \mp (e^{i\varepsilon z} + e^{i\varepsilon z}) \right) U_k(y). \quad (4.1)$$

Непосредственные вычисления показывают, что для введенных волн по-прежнему справедливы условия ортогональности и нормировки (2.2), а также справедливы аналогичные (1.16) формулы Тейлора

$$\mathbf{w}_j^{\varepsilon\pm}(y, z) = \widehat{w}_j^\pm(y, z) + O(\varepsilon^2(1+z)^2), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Соотношения (4.2) можно почленно дифференцировать, сохраняя при этом качество остатка.

Возникновение пакетов (4.1), содержащих как уходящие, так и приходящие монохроматические волны (1.10), обусловлено именно соотношениями (4.2), обеспечивающими плавный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ базиса $\{\mathbf{w}_j^{\varepsilon\pm}\}_{j=1}^n$ в пороговый базис $\{\widehat{w}_j^\pm\}_{j=1}^n$, определенный согласно формулам (1.17) и (2.3). Это наблюдение позволяет сравнить оператор

$$\widehat{\mathbf{A}}_\beta^0 := \widehat{\mathbf{A}}_\beta(\Lambda_n) : \mathbf{W}_{\beta,0}^{2+}(\Omega) \rightarrow W_\beta^0(\Omega) \quad (4.3)$$

задачи (2.7) на пороге $\lambda = \Lambda_n$ (см. п. 2.3, где по соглашению объекты снабжены символом $\widehat{}$) с оператором

$$\widehat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon : \widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2\varepsilon}(\Omega) \rightarrow W_\beta^0(\Omega) \quad (4.4)$$

той же задачи (2.7), но с послепороговым значением (1.14) спектрального параметра λ^ε и искусственными условиями излучения

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \chi(z)\mathbf{w}^{\varepsilon+}(y, z)\mathbf{b}^\varepsilon + \widetilde{\mathbf{u}}^\varepsilon(x). \quad (4.5)$$

Здесь $\mathbf{w}^{\varepsilon+}$ – строка волн $(\mathbf{w}_1^{\varepsilon+}, \dots, \mathbf{w}_n^{\varepsilon+})$, $\mathbf{b}^\varepsilon \in \mathbb{C}^n$ – неизвестный столбец коэффициентов, а остаток $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon \in W_\beta^2(\Omega) \cap W_{\beta,0}^1(\Omega)$, как обычно, затухает на бесконечности. Пространство $\widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2\varepsilon}(\Omega)$ составлено из функций (4.5) и снабжено нормой

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon; \widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2\varepsilon}(\Omega)\| = \left(\sum_{p=1}^n |\mathbf{b}_p^\varepsilon|^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon; W_\beta^2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Оба пространства $\widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2+}(\Omega)$ и $\widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2\varepsilon}(\Omega)$ являются весовыми классами с отделенными асимптотиками и могут быть отождествлены с декартовыми суммами

$$\mathbb{C}^n \oplus (W_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{W}_\beta^1(\Omega)),$$

содержащими наборы $\{b^+, \tilde{u}\}$ и $\{\mathbf{b}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon\}$ ингредиентов разложений (2.12) и (4.5) соответственно.

Выполнение требований (2.2) позволяет по обычной схеме (см. публикации [6], [11] и [3; гл. 5]) определить искусственную матрицу рассеяния $\mathbf{s}^\varepsilon$, унитарную и симметричную (последнее свойство обеспечено связью $\mathbf{w}_k^{\varepsilon+}(y, z) = \overline{\mathbf{w}_k^{\varepsilon-}(y, z)}$). Она образована коэффициентами разложений следующих решений $\zeta_1^\varepsilon, \dots, \zeta_n^\varepsilon$ задачи (1.2), (1.3) с $\lambda^\varepsilon = \Lambda_n + \varepsilon^2$:

$$\zeta^\varepsilon(x) = \chi(z)\mathbf{w}^{\varepsilon-}(y, z) + \chi(z)\mathbf{w}^{\varepsilon+}(y, z)\mathbf{s}^\varepsilon + \tilde{\zeta}^\varepsilon(x). \quad (4.6)$$

Здесь использована привычная векторная форма записи.

4.3. Обратный оператор. Приступим к сравнению операторов (4.4) и (4.3). Их дифференциальные выражения $-\Delta - \Lambda_n - \varepsilon^2$ и $-\Delta - \Lambda_n$ отличаются одно от другого малым слагаемым ε^2 . Волны $\mathbf{w}_j^{\varepsilon\pm}$ и $\hat{w}_j^\pm$, $j = 1, \dots, n$, аннулируются этими выражениями, но все-таки влияют на значения $\hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$ и $\hat{\mathbf{A}}_\beta^0 \hat{u}$, вычисленные на функциях (4.5) и (2.15) соответственно, из-за присутствия в разложениях срезки χ . Вместе с тем благодаря удачному выбору волновых пакетов (4.1) разность волн приобретает порядок ε^2 на компакте $\text{supp}(\partial_z \chi)$ (см. формулы Тейлора (4.2) и (1.16)), т.е. верна оценка

$$\|\hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon - \hat{\mathbf{A}}_\beta^0 u; W_\beta^0(\Omega)\| \leq C \left(\|\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon - \tilde{u}; W_\beta^2(\Omega)\| + \sum_{j=1}^n |\mathbf{b}_j^\varepsilon - b_j^+| \right). \quad (4.7)$$

В случае $\ker(A_\beta(\Lambda_n)) = \{0\}$ (на пороге нет захваченных волн) этой информации достаточно для того, чтобы убедиться в существовании обратного оператора

$$(\hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon)^{-1}: W_\beta^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus (W_\beta^2(\Omega) \cap \mathring{W}_\beta^1(\Omega))$$

и в справедливости оценки

$$\|(\hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon)^{-1}\| \leq c$$

с не зависящей от $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ мажорантой c . В самом деле, по теореме 1 оператор $\hat{\mathbf{A}}_\beta^0$ – изоморфизм, а в силу неравенства (4.7) оператор $\hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon$ – малое непрерывное возмущение оператора $\hat{\mathbf{A}}_\beta^0$.

Пусть теперь $N = \dim \ker A_\beta(\Lambda_n) > 0$, т.е. подпространство (3.10) – нетривиальная линейная оболочка экспоненциально затухающих решений задачи (1.2), (1.3) на пороге $\lambda = \Lambda_n$. Эти захваченные волны подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(\hat{\eta}_m, \hat{\eta}_q)_\Omega = \delta_{m,q}, \quad m, q = 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

Почти обратный оператор $\hat{\mathbf{R}}_\beta^\varepsilon$ для оператора (4.4) представим в виде

$$\hat{\mathbf{R}}_\beta^\varepsilon f = -\varepsilon^{-2} \sum_{m=1}^N (f, \hat{\eta}_m)_\Omega \hat{\eta}_m + \chi \sum_{j=1}^n b_j^0 \mathbf{w}_j^{\varepsilon+} + \tilde{u}^0,$$

где решение

$$u^0 = \chi \sum_{j=1}^n b_j^0 \hat{w}_j^+ + \tilde{u}^0 \in \mathbf{W}_{\beta,0}^{2+}(\Omega)$$

задачи (2.7) с параметром $\lambda = \Lambda_n$ и правой частью

$$f^\perp = f - \sum_{m=1}^N (f, \hat{\eta}_m)_\Omega \hat{\eta}_m \quad (4.9)$$

предоставлено теоремой 1. Это частное решение и функция (4.9) подчинены упомянутым в теореме 1 условиям ортогональности (2.16) и (2.9) соответственно, причем последние, т.е. условия разрешимости задачи, выполнены благодаря соотношениям (4.8). Справедлива оценка (2.17), принимающая в новых обозначениях вид

$$\|u^0; \widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2+}(\Omega)\| \leq c \|f^\perp; W_\beta^0(\Omega)\| \leq c \|f; W_\beta^0(\Omega)\|. \quad (4.10)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon \hat{\mathbf{R}}_\beta^\varepsilon f &= -(\Delta + \Lambda_n + \varepsilon^2) \hat{\mathbf{R}}_\beta^\varepsilon f \\ &= \sum_{m=1}^N (f, \hat{\eta}_m)_\Omega \hat{\eta}_m - (\Delta + \Lambda_n) u^0 - \varepsilon^2 \tilde{u}^0 - [\Delta, \chi] \sum_{j=1}^n b_j^0 (\mathbf{w}_j^{\varepsilon+} - \hat{w}_j^+), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$[\Delta, \chi] = 2\partial_z \chi(z) \partial_z + \partial_z^2 \chi(z)$$

– коммутатор оператора Лапласа со срезкой (1.13), т.е. дифференциальный оператор первого порядка, носители коэффициентов которого расположены на множестве $\overline{\omega} \times [0, 1]$. Сумма первых двух слагаемых из правой части (4.11) равна

$$\sum_{m=1}^N (f, \hat{\eta}_m)_\Omega \hat{\eta}_m + f^\perp = f,$$

нормы остальных в пространстве $W_\beta^0(\Omega)$ не превосходят $c\varepsilon^2 \|f; W_\beta^0(\Omega)\|$ в силу оценки (4.10) для коэффициентов b_j^0 и остатка $\tilde{u}^0$ (ср. определения (2.13) и (2.14)), а также соотношений (4.2) для волн. Таким образом,

$$\hat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon \hat{\mathbf{R}}_\beta^\varepsilon = \text{Id} + \hat{\mathbf{S}}_\beta^\varepsilon,$$

где Id – тождественное отображение и $\widehat{\mathbf{S}}_\beta^\varepsilon$ – непрерывный линейный оператор в $W_\beta^0(\Omega)$ с малой нормой $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, обратный оператор для оператора (4.4) приобретает вид

$$(\widehat{\mathbf{A}}_\beta^\varepsilon)^{-1} = \widehat{\mathbf{R}}_\beta^\varepsilon (\text{Id} + \widehat{\mathbf{S}}_\beta^\varepsilon)^{-1},$$

причем последний сомножитель имеет смысл при достаточно малом ε . Наконец, представление (4.11) и ограниченность упомянутого сомножителя приводят к очередному утверждению.

ТЕОРЕМА 3. *Найдутся такие положительные числа ε_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ задача (2.7) с параметром (1.14) и искусственными условиями излучения (4.5) обладает единственным решением $\mathbf{u}^\varepsilon \in \widehat{\mathbf{W}}_{\beta,0}^{2\varepsilon}(\Omega)$ при любой правой части $f \in W_\beta^0(\Omega)$. Более того, остаток $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon \in W_\beta^2(\Omega) \cap \dot{W}_\beta^1(\Omega)$ в разложении (4.5) этого решения допускает представление*

$$\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = \sum_{m=1}^N \mathbf{c}_m^\varepsilon \widehat{\eta}_m + \tilde{\mathbf{u}}_\perp^\varepsilon, \quad (\tilde{\mathbf{u}}_\perp^\varepsilon, \widehat{\eta}_q)_\Omega = 0, \quad q = 1, \dots, N,$$

и верна оценка

$$\sum_{p=1}^n |\mathbf{b}_p^\varepsilon| + \varepsilon^2 \sum_{m=1}^N |\mathbf{c}_m^\varepsilon| + \|\tilde{\mathbf{u}}_\perp^\varepsilon; W_\beta^2(\Omega)\| \leq c_0 \|f; W_\beta^0(\Omega)\|. \quad (4.12)$$

Обращаем внимание на то, что норма проекции $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\perp^\varepsilon$ решения $\mathbf{u}^\varepsilon$ на подпространство (3.10) захваченных волн приобретает порядок ε^{-2} (ср. множитель ε^2 при второй сумме из неравенства (4.12)), однако это обстоятельство не повлияет на искомые оценки остатков в асимптотических анзацах (3.1), (3.2) и (3.22) ввиду экспоненциального затухания составляющих $\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_N$.

Наконец, предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ преобразует решения (4.6) задачи (1.2), (1.3) с $\lambda = \Lambda_n + \varepsilon^2$ в решения (2.22), (2.23) той же задачи на пороге $\lambda = \Lambda_n$. Прделанные выше вычисления приводят к еще одному утверждению.

ТЕОРЕМА 4. *Искусственная и пороговая матрицы рассеяния $\mathbf{s}^\varepsilon$ и $\widehat{\mathbf{s}}$ связаны соотношением*

$$\|\mathbf{s}^\varepsilon - \widehat{\mathbf{s}}; \mathbb{C}^{n \times n}\| \leq c\varepsilon^2.$$

4.4. Решение задачи с физическими условиями излучения. Подберем столбец $\mathbf{a}_\#^\varepsilon = (\mathbf{a}_{n-\kappa+1}^\varepsilon, \dots, \mathbf{a}_n^\varepsilon)^\top$ так, чтобы линейная комбинация

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon + \sum_{p=n-\kappa+1}^n \mathbf{a}_p^\varepsilon \zeta_p^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon + \zeta_\#^\varepsilon \mathbf{a}_\#^\varepsilon$$

удовлетворяла физическим условиям излучения. Вспомнив обозначения (2.21) для строк волн (1.10) со спектральным параметром (1.14) и разбив матрицу $\mathbf{s}^\varepsilon$

на блоки согласно формуле (1.20), получим, что

$$\begin{aligned}
 u^\varepsilon &= \chi \mathbf{w}_\bullet^{\varepsilon+} \mathbf{b}_\bullet^\varepsilon + \chi \mathbf{w}_\#^{\varepsilon+} (\mathbf{b}_\#^\varepsilon + \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon \mathbf{a}_\#^\varepsilon) + \chi \mathbf{w}_\#^{\varepsilon-} \mathbf{a}_\#^\varepsilon + o(1) \\
 &= \chi w_\bullet^{\varepsilon+} \mathbf{b}_\bullet^\varepsilon + \chi \frac{i\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) w_\#^{\varepsilon-} - \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) w_\#^{\varepsilon+} \right) (\mathbf{b}_\#^\varepsilon + \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon \mathbf{a}_\#^\varepsilon) \\
 &\quad + \chi \frac{i\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) w_\#^{\varepsilon-} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) w_\#^{\varepsilon+} \right) \mathbf{a}_\#^\varepsilon + o(1) \\
 &= \chi w_\bullet^{\varepsilon+} \mathbf{b}_\bullet^\varepsilon - \chi \frac{i\sqrt{\varepsilon}}{2} w_\#^{\varepsilon+} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) (\mathbf{b}_\#^\varepsilon + \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon \mathbf{a}_\#^\varepsilon) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \mathbf{a}_\#^\varepsilon \right) \\
 &\quad + \chi \frac{i\sqrt{\varepsilon}}{2} w_\#^{\varepsilon-} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) (\mathbf{b}_\#^\varepsilon + \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon \mathbf{a}_\#^\varepsilon) + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \mathbf{a}_\#^\varepsilon \right) + o(1). \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Здесь учтены формулы (4.1) для искусственных пакетов уходящих и приходящих волн, а также формулы (1.10), (1.16) и (1.18) для монохроматических волн. Для обеспечения условий излучения (2.15) со строками $w_\bullet^{\varepsilon+}$ и $w_\#^{\varepsilon+}$ уходящих монохроматических волн нужно уничтожить в выражении (4.13) строку

$$w_\#^{\varepsilon-}(y, z) = e^{-i\varepsilon z} (U_{n-\varkappa+1}(y), \dots, U_n(y))$$

монохроматических приходящих волн. Иными словами, нужно решить алгебраическую систему

$$\mathbf{t}_{\#\#}^\varepsilon \mathbf{a}_\#^\varepsilon = -(1 - \varepsilon) \mathbf{b}_\#^\varepsilon \in \mathbb{C}^\varkappa \tag{4.14}$$

с $(\varkappa \times \varkappa)$ -матрицей

$$\mathbf{t}_{\#\#}^\varepsilon = (1 - \varepsilon) \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon + (1 + \varepsilon) \mathbb{I}_\varkappa. \tag{4.15}$$

Опять приходится различать ситуации 1°) и 2°), описанные в п. 2.5.

ЛЕММА 4.1. *Матрица (4.15) неособенная при малом $\varepsilon > 0$. В ситуации 1°) норма обратной матрицы $(\mathbf{t}_{\#\#}^\varepsilon)^{-1}$ равномерно относительно параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограничена, но в ситуации 2°) равна $O(\varepsilon^{-1})$. Иными словами,*

$$\|(\mathbf{t}_{\#\#}^\varepsilon)^{-1}; \mathbb{C}^{\varkappa \times \varkappa}\| \leq C \begin{cases} 1 & \text{при } \dim \ker(\widehat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) = 0, \\ \varepsilon^{-1} & \text{при } \dim \ker(\widehat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) > 0, \end{cases}$$

где множитель C не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, а $\varepsilon_0 > 0$ некоторая фиксированная величина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом случае имеем

$$\mathbf{t}_{\#\#}^\varepsilon = \widehat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa + \widehat{\mathbf{t}}_{\#\#}^\varepsilon,$$

причем норма остатка

$$\widehat{\mathbf{t}}_{\#\#}^\varepsilon = \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon - \widehat{s}_{\#\#} + \varepsilon(\mathbb{I}_\varkappa - \mathbf{s}_{\#\#}^\varepsilon)$$

равна $O(\varepsilon)$ в силу теоремы 4, т.е. нужное утверждение очевидно. Во втором случае считаем, что блок $\widehat{s}_{\#\#}$ принимает вид (2.26) за счет выбора подходящего набора собственных функций $U_{n-\varkappa+1}, \dots, U_n$ задачи (1.6). В результате

матрица (4.15) представлена как сумма $\mathbf{t}_{\#\#}^{\varepsilon 0} + \widetilde{\mathbf{t}}_{\#\#}^{\varepsilon 0}$, где

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{t}}_{\#\#}^{\varepsilon 0} &= \mathbf{s}_{\#\#}^{\varepsilon} - \widehat{s}_{\#\#}, \quad \|\widetilde{\mathbf{t}}_{\#\#}^{\varepsilon 0}; \mathbb{C}^{\varkappa \times \varkappa}\| \leq c\varepsilon^2, \\ \mathbf{t}_{\#\#}^{\varepsilon 0} &= \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)\widehat{s}_{bb} + (1 + \varepsilon)\mathbb{I}_{\varkappa - \rho}, & \mathbb{O}_{(\varkappa - \rho) \times \rho} \\ \mathbb{O}_{\rho \times (\varkappa - \rho)}, & 2\varepsilon\mathbb{I}_{\rho} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

а также $\dim \ker(\widehat{s}_{bb} + \mathbb{I}_{\varkappa - \rho}) = 0$. Нужное утверждение опять-таки стало очевидным.

Решим систему (4.14) и заметим, что

$$\mathbf{b}_{\#}^{\varepsilon} + (\mathbf{s}_{\#\#}^{\varepsilon} + \mathbb{I}_{\varkappa})\mathbf{a}_{\#}^{\varepsilon} = \varepsilon(\mathbf{b}_{\#}^{\varepsilon} + (\mathbf{s}_{\#\#}^{\varepsilon} - \mathbb{I}_{\varkappa})\mathbf{a}_{\#}^{\varepsilon}).$$

В итоге переписываем разложение (4.13) следующим образом:

$$u^{\varepsilon} = \chi w_{\bullet}^{\varepsilon+} b_{\bullet}^{\varepsilon} + \chi w_{\#}^{\varepsilon+} b_{\#}^{\varepsilon} + \widetilde{u}^{\varepsilon}, \quad (4.17)$$

$$\widetilde{u}^{\varepsilon} = \sum_{m=1}^N c_m^{\varepsilon} \widehat{\eta}_m + \widetilde{u}_{\perp}^{\varepsilon}, \quad (\widetilde{u}_{\perp}^{\varepsilon}, \widehat{\eta}_m)_{\Omega} = 0, \quad m = 1, \dots, N.$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{\bullet}^{\varepsilon} &= \mathbf{b}_{\bullet}^{\varepsilon}, \quad \widetilde{u}^{\varepsilon} = \widetilde{\mathbf{u}}^{\varepsilon} + \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\#}^{\varepsilon} \mathbf{a}_{\#}^{\varepsilon}, \\ b_{\#}^{\varepsilon} &= -\frac{i\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) (\mathbf{b}_{\#}^{\varepsilon} + \mathbf{s}_{\#\#}^{\varepsilon} \mathbf{a}_{\#}^{\varepsilon}) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \mathbf{a}_{\#}^{\varepsilon} \right) = -i\sqrt{\varepsilon} (\mathbf{b}_{\#}^{\varepsilon} + (\mathbf{s}_{\#\#}^{\varepsilon} - \mathbb{I}_{\varkappa})\mathbf{a}_{\#}^{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Теперь формулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 5. *Существует такая положительная величина ε_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2.7) с любой правой частью $f \in W_{\beta}^0(\Omega)$ имеет единственное решение u^{ε} , подчиненное физическим условиям излучения (4.17), в которых*

$$\begin{aligned} b_{\bullet}^{\varepsilon} &= (b_1^{\varepsilon}, \dots, b_{n-\varkappa}^{\varepsilon})^{\top} \in \mathbb{C}^{n-\varkappa}, \quad b_{\#}^{\varepsilon} = (b_{n-\varkappa+1}^{\varepsilon}, \dots, b_n^{\varepsilon})^{\top} \in \mathbb{C}^{\varkappa}, \\ \widetilde{u}^{\varepsilon} &= W_{\beta}^2(\Omega) \cap \mathring{W}_{\beta}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Кроме того, для ингредиентов (4.19), (4.18) этого решения верны оценки

$$\sum_{j=1}^{n-\varkappa} |b_j^{\varepsilon}| + \varepsilon^{-1/2} \sum_{j=n-\varkappa+1}^n |b_j^{\varepsilon}| + \varepsilon^2 \sum_{m=1}^N |c_m^{\varepsilon}| + \|\widetilde{u}_{\perp}^{\varepsilon}; W_{\beta}^2(\Omega)\| \leq c_0 \|f; W_{\beta}^0(\Omega)\| \quad (4.20)$$

в случае $\dim \ker(\widehat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_{\varkappa}) = 0$ и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-\varkappa} |b_j^{\varepsilon}| + \varepsilon^{-1/2} \sum_{j=n-\varkappa+1}^{n-\rho} |b_j^{\varepsilon}| + \varepsilon^{1/2} \sum_{j=n-\rho+1}^n |b_j^{\varepsilon}| + \varepsilon^3 \sum_{m=1}^N |c_m^{\varepsilon}| + \varepsilon \|\widetilde{u}_{\perp}^{\varepsilon}; W_{\beta}^2(\Omega)\| \\ \leq c_0 \|f; W_{\beta}^0(\Omega)\| \end{aligned} \quad (4.21)$$

в случае $\rho = \dim \ker(\widehat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_{\varkappa}) > 0$ (см. формулу (2.26)). Здесь c_0 – постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ситуации 1°) теорема 3 и лемма 4.1 предоставляют неравенство

$$|\mathbf{a}_\#^\varepsilon| \leq c|\mathbf{b}^\varepsilon| \leq C\|f; W_\beta^0(\Omega)\|.$$

Теперь оценка (4.20) вытекает из соотношений (4.18) и (4.12). В ситуации 2°), уточненной формулой (2.26), лемма 4.1 и, в частности, представление (4.16) дают следующие оценки коэффициентов линейной комбинации:

$$\sum_{j=n-\kappa+1}^{n-\rho} |\mathbf{a}_j^\varepsilon| + \varepsilon \sum_{j=n-\rho+1}^n |\mathbf{a}_j^\varepsilon| \leq c|\mathbf{b}^\varepsilon| \leq C\|f; W_\beta^0(\Omega)\|.$$

Итак, коэффициенты $\mathbf{a}_{n-\rho+1}^\varepsilon, \dots, \mathbf{a}_n^\varepsilon$ приобретают порядок ε^{-1} , что и приводит к появлению дополнительных множителей – степеней малого параметра ε – при втором, третьем и четвертом членах в левой части (4.21).

4.5. Оценка асимптотических остатков в асимптотике матрицы рассеяния. Имея в распоряжении оценки решений задачи (2.7) в весовых классах с отдельной асимптотикой, следуем стандартной схеме обоснования асимптотики матриц рассеяния (см. работы [11], [17] и другие). Ограничимся рассмотрением более простого в изложении случая 1°) – переход к случаю 2°) требует лишь косметической правки рассуждений и выкладок из данного раздела (см. п. 4.6).

Рис. 3. Графики срезающих функций

Сростим внешнее (3.4) и внутреннее (3.5) разложения для строки решений (3.3) при помощи асимптотической конструкции с “перехлестывающимися” срезками (см. книгу [18; гл. 2], а также статьи [11], [17]). Срезающая функция χ определена формулой (1.13), а вторая срезающая функция X^ε имеет вид

$$X^\varepsilon(z) = 1 - \chi\left(z - \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (4.22)$$

Графики этих функций изображены на рис. 3, который поясняет расположение их носителей. Пусть

$$\begin{aligned}
 Z_{\#}^{\varepsilon}(x) &= \chi(z)(w_{\#}^{\varepsilon-}(y, z) + w_{\#}^{\varepsilon+}(y, z)(s_{\#}^0 + \varepsilon s'_{\#}) + \varepsilon^{1/2} w_{\bullet}^{\varepsilon+}(y, z) s_{\bullet}^0) \\
 &\quad + X^{\varepsilon}(z) \varepsilon^{-1/2} (Z_{\#}^0(x) + \varepsilon^{1/2} Z'_{\#}(x)) \\
 &\quad - \chi(z) X^{\varepsilon}(z) \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (1 - i\varepsilon z) U_{\#}(y) + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (1 + i\varepsilon z) U_{\#}(y) (s_{\#}^0 + \varepsilon s'_{\#}) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\varepsilon} w_{\bullet}^0(y, z) s_{\bullet}^0 \right) \\
 &=: \chi(z) W_{\#}^{\varepsilon}(x) + X^{\varepsilon}(z) V_{\#}^{\varepsilon}(x) - \chi(z) X^{\varepsilon}(z) Y_{\#}^{\varepsilon}(x).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Отметим, что вычитаемое содержит сумму $Y_{\#}^{\varepsilon}(x)$ асимптотических членов, подвергшихся сращиванию в п. 3.1 и присутствующих в асимптотике обоих слагаемых $W_{\#}^{\varepsilon}(x)$ и $V_{\#}^{\varepsilon}(x)$, т.е. это вычитаемое устраняет дублирование, возникшее в глобальном асимптотическом приближении (4.23) ввиду перекреста носителей $\text{supp } \chi$ и $\text{supp } X^{\varepsilon}$ (ср. рис. 3). Кроме того, производя перегруппировку членов, получаем, что

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \Lambda_n + \varepsilon^2) Z_{\#}^{\varepsilon} &= \chi(\Delta + \Lambda_n + \varepsilon^2) W_{\#}^{\varepsilon} + X^{\varepsilon}(\Delta + \Lambda_n + \varepsilon^2) V_{\#}^{\varepsilon} \\
 &\quad - \chi X^{\varepsilon}(\Delta + \Lambda_n + \varepsilon^2) Y_{\#}^{\varepsilon} - [\Delta, \chi](W_{\#}^{\varepsilon} - Y_{\#}^{\varepsilon}) - [\Delta, X^{\varepsilon}](V_{\#}^{\varepsilon} - Y_{\#}^{\varepsilon}) =: F_{\#}^{\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь учтено соотношение $[\Delta, \chi X^{\varepsilon}] = [\Delta, \chi] + [\Delta, X^{\varepsilon}]$ для коммутаторов операторов со срезками, справедливое потому, что носители производных срезов не пересекаются.

Первое выражение в правой части (4.24) обращается в нуль согласно определению волн $w_j^{\varepsilon\pm}$. Поскольку слагаемые $Z_{\#}^0$, $Z'_{\#}$ и $Y_{\#}$ аннулируются оператором Гельмгольца $\Delta + \Lambda_n$, сумма второго и третьего выражений равна $X^{\varepsilon} \varepsilon^2 (V_{\#}^{\varepsilon} - \chi Y_{\#}^{\varepsilon})$ и в силу представлений (3.7), (3.8) экспоненциально затухает на бесконечности, т.е.

$$\varepsilon^2 \|X^{\varepsilon}(V_{\#}^{\varepsilon} - \chi Y_{\#}^{\varepsilon}); W_{\beta}^0(\Omega)\| \leq c \varepsilon^{3/2},$$

причем в мажоранте учтены множители $\varepsilon^{-1/2}$ из средней части (4.23). Кроме того, в силу определений (4.22) и (1.13) носители коэффициентов коммутатора $[\Delta, X^{\varepsilon}]$ располагаются на множестве $\overline{\omega} \times [1/\varepsilon, 1 + 1/\varepsilon]$, где разность $V_{\#}^{\varepsilon} - Y_{\#}^{\varepsilon}$ экспоненциально затухает. Используя произвол в выборе показателя

$$\beta \in \left(0, \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} \tag{4.25}$$

(см. п. 2.2 и, в частности, формулу (2.8)) и замечая, что интересующая нас матрица рассеяния, разумеется, не зависит от весового показателя, решаем задачу (3.6) для $Z_{\#}^0$ и $Z'_{\#}$ в классе $W_{\beta'}^2(\Omega) \cap \dot{W}_{\beta'}^1(\Omega)$ с новым показателем (допустимым благодаря выбору величины ε_0)

$$\beta' \in \left(\beta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}\right) \subset (0, \sqrt{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n - \varepsilon^2}) \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_0,$$

но производим оценивание в весовом пространстве с показателем (4.25). В результате обнаруживаем, что

$$\|[\Delta, X^\varepsilon](V_\#^\varepsilon - Y_\#^\varepsilon); W_\beta^0(\Omega)\| \leq c e^{-\delta/\varepsilon}, \quad \delta = \beta' - \beta > 0.$$

Наконец, носители коэффициентов коммутатора $[\Delta, \chi]$ попадают на компакт $\overline{\omega} \times [0, 1]$, где действуют формулы Тейлора (1.16) и (1.18), а значит, в силу преобразования (3.4) получаем оценку

$$\|[\Delta, \chi](W_\#^\varepsilon - Y_\#^\varepsilon); W_\beta^0(\Omega)\| \leq c \varepsilon^2 \varepsilon^{-1/2} = c \varepsilon^{3/2}. \quad (4.26)$$

Подчеркнем, что в соотношении (4.26) наличие или отсутствие весового множителя в норме не играет никакой роли, так как множество $\text{supp}([\Delta, \chi](W_\#^\varepsilon - Y_\#^\varepsilon))$ компактно.

Подведем итог. В асимптотической конструкции (4.23) только первое слагаемое не содержит срезку (4.22) и поэтому не аннулируется на бесконечности. Следовательно, разложение вектор-функции $Z_\#^\varepsilon$ около бесконечности включает строку $w_\#^{\varepsilon-}$ приходящих волн и строки $w_\#^{\varepsilon+}$, $w_\#^{\varepsilon+}$ уходящих волн с некоторыми матричными коэффициентами. Аналогичное разложение (3.3) выполнено и для строки решений $\zeta_\#^\varepsilon$. Следовательно, разность $R_\#^\varepsilon = \zeta_\#^\varepsilon - Z_\#^\varepsilon$ удовлетворяет физическим условиям излучения (приходящие волны взаимно уничтожаются) и является решением задачи (2.7) с параметром $\lambda^\varepsilon + \Lambda_n + \varepsilon^2$ и правой частью $f = F^\varepsilon$, взятой из представления (4.24) и подчиненной неравенству

$$\|F^\varepsilon; W_\beta^0(\Omega)\| \leq c \varepsilon^{3/2}.$$

Таким образом, теорема 5 дает оценку нормы $R_\#^\varepsilon$ в весовом пространстве с определенной асимптотикой. Сравнивая коэффициенты при уходящих волнах у строк (3.3) и (4.23), учитываем множители ε^0 и $\varepsilon^{-1/2}$ при модулях коэффициентов в упомянутой норме, т.е. левой части неравенства (4.20), и заключаем, что

$$\|s_{\#\#}^\varepsilon - s_{\#\#}^0 - \varepsilon s'_{\#\#}; \mathbb{C}^{\varkappa \times \varkappa}\| \leq c \varepsilon^2, \quad (4.27)$$

$$\|s_{\bullet\#}^\varepsilon - \varepsilon^{1/2} s_{\bullet\#}^0; \mathbb{C}^{\varkappa \times (n-\varkappa)}\| \leq c_0 \varepsilon^{3/2}. \quad (4.28)$$

Обратим внимание на то, что формула (4.27) предоставляет “правильную” оценку остатка в асимптотическом анзаце (3.1), однако в анзаце (3.2) поправочный член совпадает по порядку с мажорантой (4.28) и потому должен быть присоединен к остатку. Последнее наблюдение вполне согласуется с формальным анализом в п. 3.1: поправку $s'_{\bullet\#}$ вычислить не удалось – для этого нужно строить младшие члены.

ТЕОРЕМА 6. Если $\dim \ker(\widehat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_\varkappa) = 0$, то найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$ и $c_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для двух правых блоков матрицы рассеяния (1.20) верны асимптотические соотношения (4.27) и (4.28), в которых матрицы $s_{\#\#}^0 = -\mathbb{I}_\varkappa$ и $s'_{\#\#}$, $s_{0\#}^0$ взяты соответственно из формул (3.11) и (3.13).

4.6. Формулировки других теорем об асимптотике. По той же схеме с незначительными и понятными модификациями, вызванными представленными в п. 3.2 изменениями формального асимптотического анализа и согласованной вариацией весовой нормы (ср. левые части (4.20) и (4.19)), доказывается очередная теорема, обслуживающая ситуацию 2°).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\dim \ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_{\#}) = \rho > 0$ и справедливо представление (2.26). Тогда найдутся такие положительные ε_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для нижнего правого блока матрицы рассеяния (1.20) выполнена оценка

$$\|s_{\#\#}^{\varepsilon} - s_{\#\#}^0; \mathbb{C}^{\# \times \#}\| \leq c_0 \varepsilon,$$

где $s_{\#\#}^0$ – диагональная матрица (3.20), образованная элементами -1 и 1 в количестве $\# - \rho$ и ρ штук соответственно.

Наконец, сформулируем оценку, обосновывающую асимптотику верхнего левого блока $s_{\bullet\bullet}^{\varepsilon}$ матрицы s^{ε} , построенную в п. 3.4 и не зависящую от размерности подпространства $\ker(\hat{s}_{\#\#} + \mathbb{I}_{\#})$. Обращаем внимание на то, что при модулях коэффициентов $b_1^{\varepsilon}, \dots, b_{n-\#}^{\varepsilon}$ в обеих левых частях (4.20) и (4.21) отсутствуют множители ε^{α} . Именно поэтому проверка следующего утверждения значительно проще, чем доказательство теорем 6 и 7.

ТЕОРЕМА 8. Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $c_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ верна оценка

$$\|s_{\bullet\bullet}^{\varepsilon} - s_{\bullet\bullet}^0; \mathbb{C}^{(n-\#) \times (n-\#)}\| \leq c_0 \varepsilon,$$

где $s_{\bullet\bullet}^0$ – матрица (3.27).

§ 5. Обсуждение результатов и доступные обобщения

5.1. О собственных числах. В статье [11] установлены необходимые условия появления околопороговых, т.е. допускающих одно из представлений

$$\lambda^{\varepsilon} = \Lambda_n \pm \varepsilon^2 \lambda' + O(\varepsilon^{5/2}), \quad \lambda' > 0, \quad (5.1)$$

собственных чисел у задачи (1.2), (1.3) в возмущенной области (2.28). Именно, собственное число может появиться ниже порога (формула (5.1) со знаком минус) только в том случае, если на пороге предельная задача (1.2), (1.3) в области Ω имеет стабилизирующееся или исчезающее на бесконечности решение. Собственное число может расположиться выше порога (формула (5.1) со знаком плюс) лишь тогда, когда у предельной задачи на пороге есть затухающее решение (захваченная волна).

Известно и в некотором смысле обратное утверждение: при наличии стабилизирующегося решения можно так подобрать профиль $h\mathcal{H}$ границы возмущенной области (2.28), чтобы ниже порога Λ_n появилось собственное число (5.1) (знак минус). Асимптотический анализ точек $\lambda^h < \Lambda_1$ дискретного спектра (Λ_1 – нижняя грань непрерывного спектра) рассматривался в статьях [19]–[21], [16] и др. Значительно более сложные асимптотические конструкции для собственных чисел $\lambda^h \in (\Lambda_{n-1}, \Lambda_n)$, вкрапленных в непрерывный

спектр, описаны в работах [11], [17] и др. Аналогичные процедуры, даже со значительными упрощениями, пригодны для построения собственных чисел (5.1) выше порога (знак плюс) с собственными функциями, порожденными захваченными волнами на пороге, однако автор не знает публикаций на эту тему.

5.2. Другие задачи. Выбор условий Дирихле и оператора Лапласа (квантовый волновод) определен только желанием упростить изложение. Все выкладки, рассуждения и выводы сохраняют силу, например, для условий Неймана на границе (акустический волновод) или спектральных условий Стеклова (волны на поверхности весовой жидкости), – изменяется лишь модельная задача (1.6) на сечении ϖ . При переходе к другим дифференциальным уравнениям или системам уравнений (упругий волновод) может видоизменяться строение разложений решений на пороге из-за появления полиномиальных, а не только линейных волн (1.19) и (2.3). Аналогичные эффекты на пороге возможны и для скалярных задач в периодических волноводах. Построение входящих и уходящих пакетов волн и пороговой матрицы рассеяния указаны в публикациях [5], [6] (см. также книгу [3; гл. 6] и обзор [22]), однако асимптотический анализ на околопороговых частотах не проводился и теория возмущений, подобная описанной в статье [11] и в пп. 4.2, 4.3 настоящей работы, неизвестна.

Рис. 4. Волновод, сочлененный с коническим раструбом (а), и два волновода, соединенных коллектором (б)

Если полубесконечный цилиндрический волновод соединен с коническим, в частности, пространством или полупространством (рис. 4, а), то асимптотический анализ не изменяется по существу, однако ситуация 2°) (см. п. 2.5) невозможна, так как на пороге полное отражение хотя бы одного из пакетов

линейных волн в полуцилиндре невозможно в принципе из-за обязательного излучения в конический выход на бесконечность (см., например, теорему о единственности продолжения в книге [23; гл. 4]). Иными словами, строение (2.26) с $\rho > 0$ у блока пороговой матрицы рассеяния не возникает никогда, и поэтому на околопороговых частотах асимптотика матрицы рассеяния описывается формальным асимптотическим анализом из пп. 3.2, 3.4 и оценками из теорем 6 и 8.

Для двумерной задачи Неймана об акустическом волноводе-полуполосе, имеющем жесткие стенки и открытом во всю плоскость, аналогичный результат получен в монографии [24] на основе явного решения, найденного при помощи метода Винера–Хопфа. Упомянем недавнюю работу [25], в которой тот же результат установлен в задаче дифракции на решетке сложной структуры.

5.3. О согласованном возмущении частоты и стенок. Может сложиться впечатление, что около порога блок $s_{\#}^{\varepsilon}$ матрицы рассеяния всегда близок к неособенной диагональной матрице, имеющей ненулевыми элементами только ± 1 , и, поскольку множество таких матриц дискретно, плавная вариация стенок резонатора может спровоцировать “перескок” из одного предельного положения в другое. Разумеется, это впечатление ошибочно в первую очередь из-за того, что полученные формулы могут не быть равномерными относительно дополнительных параметров, т.е. область действия асимптотик существенно зависит, в частности, от формы резонатора.

Понятно, что ситуация 1°), описанная в п. 2.5, устойчивая. Покажем, что в неустойчивой ситуации 2°) (лемма 2.1) согласованные вариации частоты и формы стенки резонатора могут придать матрице $s_{\#}^{\varepsilon}$ достаточно произвольное значение. Пусть спектральный параметр имеет вид (1.14), а возмущенный волновод Ω^{ε} задан формулой (2.28) с некоторой профильной функцией $\mathcal{H}$ и малым параметром $h = \varepsilon$. Для простоты предположим, что $N = 0$ и $\rho = \varkappa$, т.е. $\ker A_{\beta} = \{0\}$ (нет захваченных волн) и аналогично (2.27)

$$\widehat{s}_{\#} = -\mathbb{I}_{\varkappa}, \quad \widehat{\zeta}_{\#}(x) = (\widehat{\zeta}_{n-\varkappa+1}(x), \dots, \widehat{\zeta}_n(x)) = \chi(z)\sqrt{2}iU_{\#}(y) + o(1). \quad (5.2)$$

Примем асимптотические анзацы (3.1) и (3.5). Рассуждения из пп. 3.1, 3.3 и п. 2.5 показывают, что $Z_{\#}^0$ – ограниченное решение задачи (3.6), причем

$$Z_{\#}^0(x) = \widehat{\zeta}_{\#}(x)c_{\#}^0, \quad 2^{1/2}ic_{\#}^0 = 2^{-1/2}(\mathbb{I}_{\varkappa} + s_{\#}^0) \quad (5.3)$$

(ср. соотношения (3.15), (3.17) и (3.7)), а $Z'_{\#}$ – решение задачи

$$-\Delta Z'_{\#}(x) = \Lambda_n Z'_{\#}(x), \quad x \in \Omega, \quad Z'_{\#}(x) = -\mathcal{H}(\varsigma)\partial_n Z_{\#}^0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.4)$$

с пороговыми условиями излучения (ср. формулы (2.31) и (2.32)). В силу теоремы 1 и сделанных предположений задача (5.4) имеет единственное решение

$$Z'_{\#}(x) = \chi(z)\widehat{w}^+(y, z)b' + o(1), \quad (5.5)$$

и согласно выкладке (2.34), а также представлению (5.3) получаем равенства

$$b' = i\widehat{S}Mc^0, \quad c^0 = (0, \dots, 0, c_{n-\varkappa+1}^0, \dots, c_n^0)^{\top}, \quad (5.6)$$

в которых $\hat{s}$ – пороговая матрица рассеяния, а M – эрмитова $(n \times n)$ -матрица с элементами (2.29).

Сравнивая разложения (5.5) и (3.8), видим, что

$$2^{-1/2}i(\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - s_{\#\#}^0) = 2^{-1/2}b'_{\#}.$$

Подставив сюда формулы (5.6), (5.2) и (5.3), находим

$$i(\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - s_{\#\#}^0) = -\frac{1}{2}M_{\#\#}(\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + s_{\#\#}^0).$$

Следовательно, $s_{\#\#}^0$ – преобразование Кэли эрмитовой $(\mathcal{K} \times \mathcal{K})$ -матрицы $M_{\#\#}$ из леммы 2.1, т.е. унитарная матрица

$$s_{\#\#}^0 = (2i\mathbb{I}_{\mathcal{K}} - M_{\#\#})^{-1}(2i\mathbb{I}_{\mathcal{K}} + M_{\#\#}).$$

Поскольку преобразование Кэли биективно, подходящая вариация профиля $\mathcal{H}$ возмущенной стенки волновода (2.28) (весовой множитель в интеграле (2.29)) позволяет превратить предельный ($\varepsilon = 0$) блок $s_{\#\#}^0$ матрицы рассеяния s^ε для волновода Ω^ε при $\lambda^\varepsilon = \Lambda_n + \varepsilon^2$ в любую унитарную $(\mathcal{K} \times \mathcal{K})$ -матрицу.

5.4. О почти полном прохождении волны. Покажем, как при помощи полученных результатов можно соорудить коллектор ω сложной формы, соединяющий два волновода-получилиндра Π^+ и Π^- (рис. 4, b) и обеспечивающий эффект почти полного прохождения околупороговой высокоамплитудной волны из рукава $\Pi^\pm$ в рукав $\Pi^\pm$. Подробному исследованию этого эффекта будет посвящена последующая публикация, более полная, основанная на иных идеях и имеющая дело с менее причудливыми формами; поэтому здесь ограничимся только краткими пояснениями.

Пусть $\Omega = \omega \cup \Pi^+ \cup \Pi^-$ и $\Omega^+ = \{x \in \Omega : z > 0\} = \omega^+ \cup \Pi^+$ – тела вращения с осью симметрии $z = x_n$, а именно

$$\Omega = \{x = (y, z) : |y| < H(z), \ z \in \mathbb{R}\}, \quad (5.7)$$

где H – четная кусочно-постоянная функция,

$$H(z) = \begin{cases} R & \text{при } z \in (0, h) \cup (2h, 3h), \\ \varrho & \text{при } z \in (h, 2h), \\ 1 & \text{при } z > 4h, \end{cases}$$

а h , R и ϱ – положительные размеры, отмеченные на рис. 4, b. Явное значение порога $\lambda_{\dagger} > 0$ непрерывного спектра оператора задачи (1.2), (1.3) (первое собственное число задачи Дирихле в единичном круге) не понадобится. На плоскости симметрии $\Upsilon = \{x : z = 0\}$ и участке Σ^+ присоединения рукава поставим искусственные краевые условия Дирихле или Неймана и введем две вспомогательные смешанные краевые задачи

$$\begin{aligned} -\Delta V_D(x) &= \mu_D V_D(x), \quad x \in \omega^+, \quad V_D(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^+ \setminus \Sigma^+, \\ \partial_z V_D(x) &= 0, \quad x \in \Sigma^+ = \partial\omega^+ \cap \partial\Pi^+, \end{aligned} \quad (5.8)$$

и

$$\begin{aligned} -\Delta V_N(x) &= \mu_N V_N(x), \quad x \in \omega^+, \quad V_N(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^+ \setminus \Sigma^0, \\ -\partial_z V_N(x) &= 0, \quad x \in \Sigma^0 = \partial\omega^+ \cap \Upsilon. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Их первые собственные числа, разумеется, зависят от параметров h , R и ϱ , но всегда находятся в отношении $\mu_N^1 < \mu_D^1$, так как область ω^+ симметрична относительно плоскости $\{x : z = 3h/2\}$, а условие Неймана в задаче (5.8) назначено на более узком множестве, чем в задаче (5.9). При малых $h = h_0$, $\varrho = \varrho_0$ и любом зафиксированном $R = R_0 > 1$ справедливо неравенство

$$\mu_N^1 > \lambda_{\dagger}, \quad (5.10)$$

но при возрастании ширины $h = th_0$ вместе с радиусом $R = tR_0$ неравенство (5.10) при больших t меняется на противоположное:

$$\mu_N^1 < \lambda_{\dagger}. \quad (5.11)$$

Оба этих и последующие утверждения о собственных числах вытекают из максиминимального принципа (см. [1; теорема 10.2.2]) и простых вариантов неравенства Фридрихса – подробное описание схемы проверки утверждения во всех вариантах можно найти в статье [26]. Более того, ввиду непрерывной зависимости от переменной t найдется такое $t_1 > 1$, что при параметрах $h = t_1 h_0$, $R = t_1 R_0$ и ϱ_0 выполнено соотношение

$$\lambda_{\dagger} = \mu_N^1 < \mu_D^1. \quad (5.12)$$

Теперь рассмотрим еще две задачи в полубесконечном волноводе с искусственными краевыми условиями на Σ^0 :

$$-\Delta u_D(x) = \lambda_D u_D(x), \quad x \in \Omega^+, \quad u_D(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^+, \quad (5.13)$$

и

$$\begin{aligned} -\Delta u_N(x) &= \lambda_N u_N(x), \quad x \in \Omega^+, \quad u_N(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^+ \setminus \Upsilon, \\ -\partial_z u_N(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega^+ \cap \Upsilon. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Соотношение (5.12) гарантирует, что задача (5.14) имеет собственное число на интервале $(0, \lambda_{\dagger})$, но у задачи (5.13) дискретный спектр пуст. Будем уменьшать параметр $t \in (1, t_1)$. Поскольку собственное число μ_D^1 возрастает, интервал $(0, \lambda_{\dagger})$ свободен от собственных чисел задачи Дирихле (5.13). У задачи (5.14) дискретный спектр оказывается пустым при $t \in (1, t_*)$ с некоторым $t_* > 1$. В силу уже упоминавшихся ранее результатов и подходов в статьях [11] и [26] получаем, что для коллектора ω с параметрами $h = t_* h_0$, $R = t_* R_0$ и $\varrho = \varrho_0$ у задачи (5.13) стабилизирующегося решения на пороге $\lambda_D = \lambda_{\dagger}$ нет, а у задачи (5.14) с $\lambda_N = \lambda_{\dagger}$ оно есть².

²На самом деле в работе [11] доказано существование ограниченного решения, и потому нужно было бы проверить отсутствие затухания на бесконечности, однако изложение в данном разделе конспективное и, более того, захваченная волна на пороге – явление неустойчивое, и вариацией размеров коллектора от него можно избавиться.

Обратимся к задачам дифракции (5.13) и (5.14) при $\lambda^\varepsilon = \lambda_\dagger + \varepsilon^2$. Для аналогичных (1.12) решений справедливы разложения

$$\begin{aligned}\zeta_D^\varepsilon(x) &= \chi(z)w_1^{\varepsilon-}(y, z) + \chi(z)s_D^\varepsilon w_1^{\varepsilon+}(y, z) + \tilde{\zeta}_D^\varepsilon(x), \\ \zeta_N^\varepsilon(x) &= \chi(z)w_1^{\varepsilon-}(y, z) + \chi(z)s_N^\varepsilon w_1^{\varepsilon+}(y, z) + \tilde{\zeta}_N^\varepsilon(x).\end{aligned}\quad (5.15)$$

Подчеркнем, что матрица рассеяния превращается в скаляр, так как около основного порога существуют только две распространяющиеся волны $w_1^{\varepsilon\pm}$ – первое собственное число задачи (1.6) простое.

Упомянутые выше наблюдения, подкрепленные асимптотическим анализом, который был проведен в § 3 и § 4, показывают, что коэффициенты отражения в задачах (5.13) и (5.14) удовлетворяют соотношениям

$$s_D^\varepsilon = -1 + O(\varepsilon), \quad s_N^\varepsilon = 1 + O(\varepsilon). \quad (5.16)$$

Заметив, что нечетное (четное) продолжение функции ζ_D^ε (функции ζ_N^ε) с Ω^+ на Ω дает решение задачи (1.2), (1.3) в целом волноводе (5.7), и сохранив за продолжениями прежние обозначения, положим

$$\zeta^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\zeta_D^\varepsilon(x) + \zeta_N^\varepsilon(x)).$$

В силу формул (5.15) и (5.16) справедливо разложение

$$\zeta^\varepsilon(x) = \chi(z)w_1^{\varepsilon-}(y, z) + \chi(z)s_+^\varepsilon w_1^{\varepsilon+}(y, z) + \chi(-z)s_-^\varepsilon w_1^{\varepsilon+}(y, z) + \tilde{\zeta}^\varepsilon(x) \quad (5.17)$$

с коэффициентами

$$s_+^\varepsilon = \frac{1}{2}(s_N^\varepsilon + s_D^\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad s_-^\varepsilon = \frac{1}{2}(s_N^\varepsilon - s_D^\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon).$$

Итак, коэффициент прохождения волны $w_1^{\varepsilon-}$ из рукава Π^+ в рукав Π^- мало отличается от единицы, а коэффициент отражения s_{+-}^ε имеет порядок ε . Именно такие коэффициенты рассеяния характеризуют эффект почти полного прохождения. Благодаря симметрии волновода почти полное прохождение из рукава Π^- в рукав Π^+ имеет место и для волны $w_1^{\varepsilon+}$.

Список литературы

- [1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980, 264 с.; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, xv+301 pp.
- [2] М. Ш. Бирман, Г. Е. Сковрцов, “О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей”, *Изв. вузов. Матем.*, 1962, № 5(30), 12–21.
- [3] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991, 336 с.; англ. пер.: S. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, De Gruyter Exp. Math., **13**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994, viii+525 pp.

- [4] C. H. Wilcox, *Scattering theory for diffraction gratings*, Appl. Math. Sci., **46**, Springer-Verlag, New-York, 1984, ix+163 pp.
- [5] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Об условиях излучения для самосопряженных эллиптических задач”, *Докл. АН СССР*, **311**:3 (1990), 532–536; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, “Radiation conditions for selfadjoint elliptic problems”, *Soviet Math. Dokl.*, **41**:2 (1990), 274–277.
- [6] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач”, *Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Распознавание волн*, Проблемы матем. физики, **13**, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1991, 192–244.
- [7] Н. А. Умов, *Уравнения движения энергии в телах*, Тип. Ульриха и Шульце, Одесса, 1874, 56 с.
- [8] J. H. Poynting, “On the transfer of energy in the electromagnetic field”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **175** (1884), 343–361.
- [9] И. И. Ворович, В. А. Бабешко, *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*, Наука, М., 1979, 320 с.
- [10] С. А. Назаров, “Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах”, *Проблемы матем. анализа*, 2013, № 72, 101–146; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The Mandelstam energy radiation conditions and the Umov–Poynting vector in elastic waveguides”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **195**:5 (2013), 676–729.
- [11] С. А. Назаров, “Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода”, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 239–263; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide”, *Theoret. and Math. Phys.*, **167**:2 (2011), 606–627.
- [12] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, *Тр. ММО*, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **16** (1967), 227–313.
- [13] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
- [14] M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Appl. Math. Mech., **8**, Academic Press, New York–London, 1964, x+229 с.
- [15] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989, 336 с.; англ. пер.: A. M. Il’in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+281 pp.
- [16] С. А. Назаров, “Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:5 (2010), 1086–1101; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold”, *Siberian Math. J.*, **51**:5 (2010), 866–878.
- [17] С. А. Назаров, “Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:3 (2013), 37–53; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum of a waveguide”, *Funct. Anal. Appl.*, **47**:3 (2013), 195–209.
- [18] W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. I. Störungen isolierter Randsingularitäten*, Math. Lehrbücher und Monogr., **82**, Akademie-Verlag, Berlin, 1991, 432 pp.

- [19] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
- [20] В. В. Грушин, “О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 360–371; англ. пер.: V. V. Grushin, “On the eigenvalues of finitely perturbed Laplace operators in infinite cylindrical domains”, *Math. Notes*, **75**:3 (2004), 331–340.
- [21] Р. Р. Гадильшин, “О локальных возмущениях квантовых волноводов”, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 358–371; англ. пер.: R. R. Gadyl’shin, “Local perturbations of quantum waveguides”, *Theoret. and Math. Phys.*, **145**:3 (2005), 1678–1690.
- [22] S. A. Nazarov, “Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains”, *Sobolev spaces in mathematics*, v. II, Int. Math. Ser. (N. Y.), **9**, Springer, New York, 2009, 261–309.
- [23] R. Leis, *Initial boundary value problems in mathematical physics*, B. G. Teubner, Stuttgart; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986, viii+266 pp.
- [24] Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации*, Советское радио, М., 1966, 431 с.
- [25] А. В. Шанин, А. И. Корольков, “Отражение волны от дифракционной решетки, составленной из поглощающих экранов. Описание в рамках метода Винера–Хопфа–Фока”, *Акустический журн.*, **60**:6 (2014), 587–595; англ. пер.: A. V. Shanin, A. I. Korol’kov, “Wave reflection from a diffraction grating consisting of absorbing screens: Description in terms of the Wiener–Hopf–Fock method”, *Acoust. Phys.*, **60**:6, 624–632.
- [26] С. А. Назаров, “Дискретный спектр крестообразных квантовых волноводов”, *Проблемы матем. анализа*, **73**:3 (2013), 87–113; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Discrete spectrum of cross-shaped quantum waveguides”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **196**:3 (2014), 346–376.

Сергей Александрович Назаров
(Sergey A. Nazarov)

Поступила в редакцию
28.04.2014

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург;
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета;
Лаборатория “Механика новых наноматериалов”
Санкт-Петербургского государственного
политехнического университета
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk