Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Пенков, А. С. Тихомиров, О теореме Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 6, 49–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:01:46

УДК 512.723

И. Б. Пенков, А. С. Тихомиров

О теореме Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато

Теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато утверждает, что всякое векторное расслоение конечного ранга на бесконечномерном комплексном проективном пространстве $\mathbf{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Мы устанавливаем достаточные условия на локально полное линейное инд-многообразие $\mathbf{X}$, при которых этот же результат выполняется на $\mathbf{X}$. Затем мы описываем естественные классы локально полных линейных инд-многообразий, для которых выполнены эти условия.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: инд-многообразие, векторное расслоение.

DOI: 10.4213/sm8384

§ 1. Введение

Теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато утверждает, что всякое векторное расслоение конечного ранга на бесконечномерном комплексном проективном пространстве $\mathbf{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Для расслоений ранга 2 она была установлена В. Бартом и А. Ван де Веном в [1], а для расслоений конечного ранга А. Н. Тюриным в [2] и Е. Сато в [3]. Эта тематика возродилась в недавних работах [4]–[6], где, в частности, изучался случай скрученных инд-грассманианов.

В настоящей статье рассматриваются инд-многообразия $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$, задаваемые цепочками вложений гладких полных алгебраических многообразий

$$X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{m-1}} X_m \xrightarrow{\phi_m} \dots$$

Мы называем такие инд-многообразия *локально полными*. Локально полное инд-многообразие $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ называется *линейным*, если отображение групп Пикара, индуцированное вложениями φ_i , сюръективно для почти всех значений i . Наша основная цель – в разумной общности дать достаточные условия выполнимости теоремы Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато на локально полном инд-многообразии $\mathbf{X}$.

В линейном случае помимо результатов 1970-х гг. и важных результатов Е. Сато [7], [8], в которых он рассматривает случай, когда теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато не выполняется, некоторые недавние результаты принадлежат И. Донину и И. Пенкову (см. [4]). В частности, в [4] показано, что

Авторы выражают благодарность за поддержку и гостеприимство Математическому Институту Макса Планка в Бонне, где была задумана настоящая статья, а также за частичную поддержку Немецкому Исследовательскому Обществу (DFG) через приоритетную программу “Теория представлений” (SPP 1388).

теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато верна для любого линейного прямого предела $\mathbf{G}(\infty) = \varinjlim G(k_m, \mathbb{C}^{n_m})$, где через $G(k_m, \mathbb{C}^{n_m})$ обозначается грассманиан k_m -мерных подпространств в $\mathbb{C}^{n_m}$, в предположении, что $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (n_m - k_m) = \infty$. Оказывается, что существует единственный класс изоморфизма таких инд-многообразий. Тем не менее имеются другие естественные однородные инд-многообразия, для которых теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато верна, но которые не рассматривались в литературе. Это относится, в частности, к линейным прямым пределам изотропных (ортогональных либо симплектических) грассманианов, равно как и к прямым произведениям таких прямых пределов.

По этой причине мы формулируем набор абстрактных условий на линейное локально полное инд-многообразие $\mathbf{X}$, которые гарантируют выполнение на нем теоремы Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато (коротко: теоремы БВТС). Затем мы приводим много примеров инд-многообразий, удовлетворяющих этим достаточным условиям. Интересный новый пример таких инд-многообразий состоит из прямых пределов $\mathbf{Y}$ линейных сечений Y_m грассманианов $G(k_m, \mathbb{C}^{n_m})$, где $\varinjlim G(k_m, \mathbb{C}^{n_m}) = \mathbf{G}(\infty)$. Другой класс инд-многообразий, для которых теорема БВТС верна, представляют некоторые инд-многообразия обобщенных флагов (см. п. 6.3).

Возможно, существуют более общие условия справедливости теоремы БВТС на локально полных инд-многообразиях. В частности, для нелинейных локально полных инд-многообразий, по-видимому, ничего не известно сверх результатов из [6]. Поэтому нахождение достаточных условий для выполнения теоремы БВТС на произвольном локально полном инд-многообразии остается проблемой на будущее.

§ 2. Линейные инд-многообразия. Формулировка основного результата

2.1. Основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Мы используем термин “алгебраическое многообразие” как синоним приведенной нететровой схемы. Если E есть векторное расслоение (или просто векторное пространство), то E^* обозначает двойственное расслоение (или двойственное пространство). Мы пользуемся стандартным обозначением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$ для линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\otimes -a}$, где $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ есть тавтологическое расслоение на комплексном n -мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^n$.

Напомним, что инд-многообразие есть прямой предел $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ цепочки морфизмов алгебраических многообразий

$$X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{m-1}} X_m \xrightarrow{\phi_m} X_{m+1} \xrightarrow{\phi_{m+1}} \dots \quad (2.1)$$

Заметим, что прямой предел цепочки (2.1) не меняется, если мы заменим последовательность $\{X_m\}_{m \geq 1}$ на подпоследовательность $\{X_{i_m}\}_{m \geq 1}$, а морфизмы ϕ_m – на композиции $\phi_{i_m} := \phi_{i_{m+1}-1} \circ \dots \circ \phi_{i_m+1} \circ \phi_{i_m}$.

Пусть $\mathbf{X}$ – прямой предел цепочки (2.1) и $\mathbf{X}'$ – прямой предел цепочки

$$X'_1 \xrightarrow{\phi'_1} X'_2 \xrightarrow{\phi'_2} \dots \xrightarrow{\phi'_{m-1}} X'_m \xrightarrow{\phi'_m} X'_{m+1} \xrightarrow{\phi'_{m+1}} \dots$$

Морфизм инд-многообразий $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ – это отображение из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}'$, индуцированное совокупностью морфизмов алгебраических многообразий $\{f_m: X_m \rightarrow Y_{n_m}\}_{m \geq 1}$ таких, что $\tilde{\phi}'_{n_m} \circ f_m = f_{m+1} \circ \phi_m$ для всех $m \geq 1$. Тожественный морфизм $\text{id}_{\mathbf{X}}$ – это морфизм, который совпадает с тождественным как теоретико-множественное отображение из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$. Морфизм $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $\mathbf{g}: \mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}$ такой, что $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \text{id}_{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \text{id}_{\mathbf{X}'}$.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь такие цепочки (2.1), в которых X_m являются полными алгебраическими многообразиями, $\lim_{m \rightarrow \infty} (\dim X_m) = \infty$, а морфизмы ϕ_m – вложения. Мы называем такие инд-многообразия *локально полными*. Более того, мы называем морфизм $\mathbf{f}: \mathbf{X} = \varinjlim X_n \rightarrow \mathbf{X}' = \varinjlim X'_n$ локально полных инд-многообразий *вложением*, если все морфизмы $f_m: X_m \rightarrow X'_m$ – вложения.

Векторное расслоение $\mathbf{E}$ ранга $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}_{>0}$ на $\mathbf{X}$ есть обратный предел $\varprojlim E_m$ обратной системы векторных расслоений E_m ранга $\mathbf{r}$ на X_m , т.е. совокупность векторных расслоений E_m с фиксированными изоморфизмами $\psi_m: E_m \cong \phi_m^* E_{m+1}$; здесь и ниже ϕ^* обозначает обратный образ векторных расслоений при морфизме ϕ . Ясно, что $E|_{X_m} \cong E_m$, $m \geq 1$. В частности, *структурный пучок* $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_{X_m}$ инд-многообразия $\mathbf{X}$ корректно определен. Под *группой Пикара* $\text{Pic } \mathbf{X}$ понимается группа классов изоморфизма линейных расслоений на $\mathbf{X}$. Ясно, что $\text{Pic } \mathbf{X}$ есть обратный предел $\varprojlim \text{Pic } X_m$ системы гомоморфизмов групп Пикара $\{\phi_m^*: \text{Pic } X_{m+1} \rightarrow \text{Pic } X_m\}_{m \geq 1}$. Всюду ниже мы предполагаем, что все рассматриваемые векторные расслоения имеют конечный ранг. Если $\mathbf{E}$ – векторное расслоение на $\mathbf{X}$, то $r\mathbf{E}$ обозначает прямую сумму $\mathbf{E} \oplus \dots \oplus \mathbf{E}$, т.е. прямую сумму r копий расслоения $\mathbf{E}$. Расслоение $\mathbf{E}$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно $\mathbf{r}\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$, где $\mathbf{r} = \text{rk } \mathbf{E}$.

Линейное инд-многообразие есть инд-многообразие $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ такое, что для всех достаточно больших $m \geq 1$ индуцированные гомоморфизмы групп Пикара $\phi_m^*: \text{Pic } X_{m+1} \rightarrow \text{Pic } X_m$ являются эпиморфизмами. Типичным примером линейного инд-многообразия является *проективное инд-пространство* $\mathbf{P}^\infty$, которое есть прямой предел цепочки линейных вложений

$$\mathbb{P}^{n_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{P}^{n_2} \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{m-1}} \mathbb{P}^{n_m} \xrightarrow{\phi_m} \dots$$

для произвольной возрастающей последовательности $\{n_m\}_{m \geq 1}$ неотрицательных целых чисел. (Легко видеть, что определение $\mathbf{P}^\infty$ не зависит, с точностью до изоморфизма инд-многообразий, от выбора последовательности $\{n_m\}_{m \geq 1}$ и вложений ϕ_m .) Под *проективным инд-подпространством* инд-многообразия $\mathbf{X}$ мы понимаем образ вложения $\psi: \mathbf{P}^\infty \hookrightarrow \mathbf{X}$.

Другим примером линейного инд-многообразия является *инд-грассманиан* $\mathbf{G}(\infty)$, который есть прямой предел цепочки линейных вложений

$$G(k_1, \mathbb{C}^{n_1}) \xrightarrow{\phi_1} G(k_2, \mathbb{C}^{n_2}) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{m-1}} G(k_m, \mathbb{C}^{n_m}) \xrightarrow{\phi_m} \dots,$$

где $G(k_m, \mathbb{C}^{n_m})$ – грассманиан k_m -мерных подпространств в n_m -мерном векторном пространстве и $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (n_m - k_m) = \infty$.

2.2. Пусть $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ – линейное инд-многообразие такое, что существуют конечное или счетное множество $\Theta_{\mathbf{X}}$ и совокупность $\{\mathbf{L}_i = \varprojlim L_{im}\}_{i \in \Theta_{\mathbf{X}}}$

нетривиальных линейных расслоений на $\mathbf{X}$ таких, что для любого m имеем изоморфизмы $L_{im} \simeq \mathcal{O}_{X_m}$ для всех, кроме конечного числа индексов $i_1(m), \dots, i_{j(m)}(m)$, и образы расслоений $L_{i_1(m)m}, \dots, L_{i_{j(m)}(m)m}$ в $\text{Pic } X_m$ образуют базис группы $\text{Pic } X_m$, которая по предположению является свободной абелевой группой. Ясно, что в этом случае группа $\text{Pic } \mathbf{X}$ изоморфна прямому произведению бесконечных циклических групп с образующими – образами расслоений $\mathbf{L}_i$. Обозначим через $\bigotimes_{i \in \Theta_{\mathbf{X}}} \mathbf{L}_i^{\otimes a_i}$ линейное расслоение на $\mathbf{X}$, ограничение которого на X_m равно

$$\bigotimes_i L_{im}^{\otimes a_i} = L_{i_1(m)m}^{\otimes a_1} \otimes \dots \otimes L_{i_{j(m)}(m)m}^{\otimes a_{j(m)}}.$$

Будем говорить, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Л, если вдобавок к предыдущему условию $H^1(X_m, \bigotimes_i L_{im}^{\otimes a_i}) = 0$ для всех $m \geq 1$ и хотя бы одного отрицательного a_i .

Пусть $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Л. Для данного $i \in \Theta_{\mathbf{X}}$ гладкая рациональная кривая $C \simeq \mathbb{P}^1$ в $\mathbf{X}$ называется *проективной прямой i -го семейства на $\mathbf{X}$* (или, просто, *прямой i -го семейства*), если

$$\mathbf{L}_j|_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta_{ij}) \quad \text{для } j \in \Theta_{\mathbf{X}}. \quad (2.2)$$

Через $\mathbf{B}_i$ мы обозначаем множество всех проективных прямых i -го семейства на $\mathbf{X}$. Оно имеет естественную структуру инд-многообразия: $\mathbf{B}_i = \varinjlim B_{im}$, где $B_{im} := \{C \in \mathbf{B}_i \mid C \subset X_m\}$ для $m \geq 1$. Для любой точки $x \in \mathbf{X}$ подмножество $\mathbf{B}_i(x) = \{C \in \mathbf{B}_i \mid C \ni x\}$ наследует индуцированную структуру инд-многообразия.

Предположим, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Л. В этом случае будем говорить, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству А, если для любого $i \in \Theta_{\mathbf{X}}$ существует инд-многообразие Π_i , являющееся прямым пределом цепочки вложений

$$\{\dots \xrightarrow{\pi_{i,m-1}} \Pi_{im} \xrightarrow{\pi_{im}} \Pi_{i,m+1} \xrightarrow{\pi_{i,m+1}} \dots\},$$

где точки многообразия Π_{im} – проективные подпространства $\mathbb{P}^{n_m}$ в B_{im} вместе с линейными вложениями $\mathbb{P}^{n_m} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n_{m+1}} = \pi_{im}(\mathbb{P}^{n_m})$, индуцированными вложениями $B_{im} \hookrightarrow B_{i,m+1}$, так что каждая точка в Π_i является проективным инд-подпространством $\mathbf{P}^\infty = \varinjlim \mathbb{P}^{n_m}$ в $\mathbf{B}_i$, и для любого $x \in \mathbf{X}$ выполнены следующие условия:

(А.i) для любого $m \geq 1$ такого, что $x \in X_m$, каждый нетривиальный пучок L_{im} определяет морфизм $\psi_{im}: X_m \rightarrow \mathbb{P}^{r_{im}} := \mathbb{P}(H^0(X_m, L_{im})^*)$, отображающий семейство прямых $B_{im}(x)$ изоморфно на подсемейство прямых в $\mathbb{P}^{r_{im}}$, проходящих через точку $\psi_{im}(x)$;

(А.ii) многообразие $\Pi_{im}(x) := \{\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im} \mid \mathbb{P}^{n_m} \subset B_{im}(x)\}$ связно для любого $m \geq 1$;

(А.iii) проективные инд-подпространства $\mathbf{P}^\infty \in \Pi_i(x) := \varinjlim \Pi_{im}(x)$ замечают $\mathbf{B}_i(x)$;

(А.iv) для любого $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ существует $m_0(d) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ такое, что для любого d -мерного многообразия Y и любого $m \geq m_0(d)$ всякий морфизм $\Pi_{im}(x) \rightarrow Y$ есть постоянное отображение.

В частности, из (А.ii) и (А.iii) следует, что многообразия Π_{im} , B_{im} , $B_{im}(x)$ связны.

Пусть $\mathbf{X}$ удовлетворяет вышеуказанным свойствам Л и А. Векторное расслоение $\mathbf{E}$ на $\mathbf{X}$ называется $\mathbf{B}_i$ -равномерным, если для любой проективной прямой $\mathbb{P}^1 \in \mathbf{B}_i$ на $\mathbf{X}$, ограниченное расслоение $\mathbf{E}|_{\mathbb{P}^1}$ изоморфно $\bigoplus_{j=1}^{\mathrm{rk} \mathbf{E}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j)$ для некоторых целых чисел k_j , не зависящих от выбора прямой $\mathbb{P}^1$. Если вдобавок все $k_j = 0$, то $\mathbf{E}$ называется $\mathbf{B}_i$ -линейно тривиальным. Мы называем $\mathbf{E}$ равномерным (соответственно линейно тривиальным), если оно является $\mathbf{B}_i$ -равномерным (соответственно $\mathbf{B}_i$ -линейно тривиальным) для любого $i \in \Theta_{\mathbf{X}}$. Более того, будем говорить, что $\mathbf{X}$ удовлетворяют свойству Т, любое линейно тривиальное расслоение на $\mathbf{X}$ тривиально.

Наша общая версия теоремы БВТС такова.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{E}$ – векторное расслоение на линейном инд-многообразии $\mathbf{X}$.

(i) Если $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойствам Л и А для некоторых фиксированных линейных расслоений $\{\mathbf{L}_i\}_{i \in \Theta_{\mathbf{X}}}$ и соответствующих семейств $\{\mathbf{B}_i\}_{i \in \Theta_{\mathbf{X}}}$ проективных прямых на $\mathbf{X}$, то $\mathbf{E}$ обладает фильтрацией векторными подрасслоениями

$$0 = \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{E}_t = \mathbf{E} \quad (2.3)$$

с равномерными соответствующими факторами $\mathbf{E}_k/\mathbf{E}_{k-1}$, $k = 1, \dots, t$.

(ii) Если вдобавок $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Т, то фильтрация (2.3) расщепляется, и ее факторы имеют вид

$$\mathbf{E}_k/\mathbf{E}_{k-1} \cong \mathrm{rk}(\mathbf{E}_k/\mathbf{E}_{k-1}) \left(\bigotimes_{i \in \Theta_{\mathbf{X}}} \mathbf{L}_i^{\otimes a_{ik}} \right), \quad a_{ik} \in \mathbb{Z}, \quad i \in \Theta_{\mathbf{X}}, \quad 1 \leq k \leq t.$$

В частности, $\mathbf{E}$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

§ 3. Доказательство основной теоремы

3.1. Предварительные результаты о векторных расслоениях. Если $C \subset X$ – гладкая неприводимая рациональная кривая в алгебраическом многообразии X и E – векторное расслоение на X , то согласно классической теореме, часто приписываемой Гротендику, $E|_C$ изоморфно $\bigoplus_i \mathcal{O}_C(\delta_i)$ для некоторых $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_{\mathrm{rk} E}$. Мы называем упорядоченный набор $\mathrm{rk} E$ чисел $(\delta_1, \dots, \delta_{\mathrm{rk} E})$ типом расщепления расслоения $E|_C$ и обозначаем его $\mathrm{Split}(E|_C)$. Мы упорядочиваем типы расщепления лексикографически, т.е. $(\delta_1, \dots, \delta_{\mathrm{rk} E}) > (\delta'_1, \dots, \delta'_{\mathrm{rk} E})$, если $\delta_1 = \delta'_1, \dots, \delta_{k-1} = \delta'_{k-1}$, $\delta_k > \delta'_k$ для некоторого k , $1 \leq k \leq \mathrm{rk} E$.

Пусть $\mathbf{X}$ есть локально полное линейное инд-многообразие, удовлетворяющее свойствам Л и А, и пусть $x \in \mathbf{X}$ и $i \in \Theta_{\mathbf{X}}$. В обозначениях (А.i) пусть $\mathbb{P}^{r_{im}} = \mathbb{P}(H^0(X_m, L_{im})^*)$ и $y = \psi_{im}(x) = \mathbb{C}u$, $0 \neq u \in H^0(X_m, L_{im})^*$, так что

$$B_{im}(x) \subset \mathbb{P}_y^{r_{im}-1} := \mathbb{P}(H^0(X_m, L_{im})^*/\mathbb{C}u).$$

Зафиксируем проективное подпространство $\mathbb{P}^{n_m} \subset B_{im}(x)$, где $\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)$. Тогда

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^0(X_m, L_{im})^*/\mathbb{C}u)}(1)|_{\mathbb{P}^{n_m}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_m}}(N(i))$$

для некоторого $N(i) > 0$. Рассмотрим локально замкнутое подмногообразие

$$Y_m := \{(z, l) \in \mathbb{P}^{r_{im}} \times \mathbb{P}^{n_m} \mid z \in l \setminus \{y\}\}$$

в $\mathbb{P}^{r_{im}} \times \mathbb{P}^{n_m}$, и пусть $Y_m \hookrightarrow \mathbb{P}^{r_{im}}$ – вложение, индуцированное проекцией $\mathbb{P}^{r_{im}} \times \mathbb{P}^{n_m} \rightarrow \mathbb{P}^{r_{im}}$. Тогда Y_m изоморфно тотальному пространству линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_m}}(N(i))$ (см., например, [9; приложение B]) и

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r_{im}}}(1)|_{Y_m} \simeq \pi_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_m}}(N(i)), \quad (3.1)$$

где $\pi_m: Y_m \rightarrow \mathbb{P}^{n_m}$ – естественная проекция. Более того, по построению мы имеем коммутативную диаграмму морфизмов

$$\begin{array}{ccccc} \bar{Y}_m & \xleftarrow{\tau_m} & Y_m & \xrightarrow{\pi_m} & \mathbb{P}^{n_m} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^{r_{im}} & \xleftarrow{\varphi_y} & \tilde{\mathbb{P}}^{r_{im}} & \xrightarrow{\pi_y} & \mathbb{P}_y^{r_{im}-1}, \end{array} \quad (3.2)$$

где $\tau_m: Y_m \hookrightarrow \bar{Y}_m := Y_m \cup \{y\}$ – вложение, $\varphi_y: \tilde{\mathbb{P}}^{r_{im}} \rightarrow \mathbb{P}^{r_{im}}$ – раздутие $\mathbb{P}^{r_{im}}$ с центром в y , а π_y – естественная проекция, которая является $\mathbb{P}^1$ -расслоением. Вдобавок имеем открытое вложение

$$\iota_m: Y_m \hookrightarrow \tilde{Y} := \tilde{\mathbb{P}}^{r_{im}} \times_{\mathbb{P}_y^{r_{im}-1}} \mathbb{P}^{n_m}$$

и проекции $\bar{Y}_m \xleftarrow{\tilde{\tau}_m} \tilde{Y}_m \xrightarrow{\tilde{\pi}_m} \mathbb{P}^{n_m}$ такие, что

$$\tau_m = \tilde{\tau}_m \circ \iota_m, \quad \pi_m = \tilde{\pi}_m \circ \iota_m. \quad (3.3)$$

Ввиду (A.i) $\psi_{im}: \psi_{im}^{-1}(\bar{Y}_m) \rightarrow \bar{Y}_m$ является изоморфизмом. Поэтому мы можем рассматривать $\mathbf{E}|_{\psi_{im}^{-1}(\bar{Y}_m)}$ как векторное расслоение на $\bar{Y}_m$ и обозначать его $\mathbf{E}|_{\bar{Y}_m}$. Положим также $\mathbf{E}|_{Y_m} := \tau_m^*(\mathbf{E}|_{\bar{Y}_m})$.

Для произвольной проективной прямой $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{n_m}$ рассмотрим поверхность $S = S(x, \mathbb{P}^1) := \pi_y^{-1}(\mathbb{P}^1)$ с естественными проекциями $\pi_S := \pi_y|_S: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\sigma_S := \varphi_y|_S: S \rightarrow \mathbf{X}$. Из (3.1) следует, что S является поверхностью типа $F_{N(i)}$.

Пусть $\mathbf{E}$ – векторное расслоение ранга $\mathbf{r}$ на $\mathbf{X}$. Для любого $i \in \Theta_{\mathbf{X}}$ и $x \in \mathbf{X}$ положим $C(i) := c_1(\mathbf{E}|_l) \in \mathbb{Z}$, где c_1 обозначает первый класс Черна и $l \in \mathbf{B}_i(x)$. Поскольку $\mathbf{B}_i(x)$ связно, число $C(i)$ корректно определено. Более того, имеем $\delta_1(\mathbf{E}|_l) \geq C(i)/\mathbf{r} \geq \delta_B(\mathbf{E}|_l)$. Следовательно, корректно определены целые числа

$$\delta_1^{\min} := \min_{l \in \mathbf{B}_i(x)} \delta_1(\mathbf{E}|_l), \quad \delta_{\text{rk } E}^{\max} := \max_{l \in \mathbf{B}_i(x)} \delta_{\text{rk } E}(\mathbf{E}|_l),$$

и существуют прямые $l_{\min}, l_{\max} \in \mathbf{B}_i(x)$ такие, что

$$\delta_1(\mathbf{E}|_{l_{\min}}) = \delta_1^{\min}, \quad \delta_{\text{rk } E}(\mathbf{E}|_{l_{\max}}) = \delta_{\text{rk } E}^{\max}.$$

Неравенство $C(i) \geq \delta_1^{\min} + (\mathbf{r} - 1)\delta_{\text{rk } E}(\mathbf{E}|_{l_{\min}})$ влечет

$$\delta_1^{\min} - \delta_{\text{rk } E}(\mathbf{E}|_{l_{\min}}) \leq \delta_1^{\min} - \frac{C(i)}{\mathbf{r} - 1}, \quad \delta_1(\mathbf{E}|_{l_{\max}}) - \delta_{\text{rk } E}^{\max} \geq \frac{C(i)}{\mathbf{r} - 1} - \delta_{\text{rk } E}^{\max}. \quad (3.4)$$

Зафиксируем $\mathbf{P}^\infty \in \mathbf{B}_i(x)$ и $l_{\min} \in \mathbf{P}^\infty$. Для произвольной точки $l_0 \in \mathbf{P}^\infty \setminus \{l_{\min}\}$ рассмотрим прямую $\mathbb{P}^1 = \text{Span}(l_0, l_{\min})$ в $\mathbf{P}^\infty$ и соответствующую

поверхность $S = S(x, \mathbb{P}^1)$ вместе с векторным расслоением $E_S := \sigma_S^* \mathbf{E}$ на S . Для общей точки $l \in \mathbb{P}^1$ (l – прямая на $\mathbf{X}$) из первого неравенства в (3.4) вытекает неравенство

$$\delta_{\text{gen}} := \delta_1(\mathbf{E}|_l) - \delta_{\text{rk } E}(\mathbf{E}|_l) \leq \delta_1^{\min} - \frac{C(i)}{\mathbf{r} - 1}. \quad (3.5)$$

Следующая лемма является прямым следствием результата Тюринга.

ЛЕММА 1. *Существуют многочлены $P_A, P_B \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$ такие, что для любой прямой $l_0 \in \mathbf{P}^\infty \setminus \{l_{\min}\}$*

$$\delta_1(\mathbf{E}|_{l_0}) \leq P_A(\mathbf{r}, \delta_1^{\min}, C(i), N(i), c_1^2(E_S), c_2(E_S)) =: P_A(\mathbf{E}, i), \quad (3.6)$$

$$\delta_{\text{rk } E}(\mathbf{E}|_{l_0}) \geq P_B(\mathbf{r}, \delta_{\text{rk } E}^{\max}, C(i), N(i), c_1^2(E_S), c_2(E_S)) =: P_B(\mathbf{E}, i), \quad (3.7)$$

где $c_1^2(E_S)$ и $c_2(E_S)$ понимаются как целые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению S является поверхностью типа $F_{N(i)}$. Следовательно, повторяя для векторного расслоения E_S доказательство леммы 5 из [2; гл. 2, § 1] получаем, что существует многочлен $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$ такой, что

$$\delta_1(\mathbf{E}|_{l_0}) \leq f(\mathbf{r}, \delta_1^{\min}, \delta_{\text{gen}}, N(i), c_1^2(E_S), c_2(E_S)).$$

Поэтому ввиду (3.5) существует многочлен $P_A \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$, удовлетворяющий (3.6). Доказательство неравенства (3.7) аналогично.

Следующее предложение использует существенным образом результаты Е. Сато. Зафиксируем $i \in \Theta_{\mathbf{X}}$, $x \in \mathbf{X}$ и $\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)$ для достаточно большого m . Ввиду (3.6) существует максимальный (по отношению к лексикографическому упорядочению) тип расщепления $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m}) := \max_{l \in \mathbb{P}^{n_m}} \text{Split}(\mathbf{E}|_l)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Максимальный тип расщепления $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$ зависит лишь от пары $(\mathbf{E}, i)$, т.е. $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$ не зависит от x и от $\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$M_i(\mathbb{P}^{n_m}) := \{l \in \mathbb{P}^{n_m} \mid \text{Split}(\mathbf{E}|_l) = S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})\}.$$

Из полунепрерывности $\text{Split}(\mathbf{E}|_l)$ следует, что $M_i(\mathbb{P}^{n_m})$ – замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}^{n_m}$. Более того, лемма 1 вместе с [2; гл. 2, § 2, леммы 3, 4] приводят к неравенству

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^{n_m}} M_i(\mathbb{P}^{n_m}) \leq \mathbf{r}(\mathbf{r} - 1)(P_A(\mathbf{E}, i) - P_B(\mathbf{E}, i)). \quad (3.8)$$

Рассмотрим верхнюю строку диаграммы (3.2). Так как правая часть неравенства (3.8) не зависит от m , для достаточно большого m имеем

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^{n_m}} M_i(\mathbb{P}^{n_m}) < \min\left(n_m - \mathbf{r}, \frac{n_m - 2\mathbf{r}^2}{2}\right). \quad (3.9)$$

Ясно также, что для достаточно большого m

$$\text{codim}_{\overline{Y}_m} \{x\} = \text{codim}_{\overline{Y}_m} (\overline{Y}_m \setminus Y_m) > \mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Неравенство (3.10) показывает, что

$$c_k(\mathbf{E}|_{Y_m}) = \tau_m^* c_k(\mathbf{E}|_{\overline{Y}_m}), \quad 0 \leq k \leq \mathbf{r}, \quad (3.11)$$

где $c_k(\cdot)$ означает k -й класс Черна. Более того, поскольку группа Чжоу коразмерности k базы произвольного векторного расслоения изоморфно отображается в группу Чжоу коразмерности k тотального пространства этого расслоения, получаем

$$c_k(\mathbf{E}|_{Y_m}) = \pi_m^*(c_k H^k), \quad 0 \leq k \leq \mathbf{r}, \quad (3.12)$$

где H есть класс дивизора гиперплоского сечения в $\mathbb{P}^{n_m}$ и $c_1, \dots, c_{\mathbf{r}}$ — целые числа. Важно заметить, что из очевидной совместимости морфизмов π_m для различных m и функториальности классов Черна вытекает, что числа $c_1, \dots, c_{\mathbf{r}}$ не зависят от x и от $\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)$. Отметим также, что из (3.1), (3.3) и (3.11), (3.12) вытекает

$$\begin{aligned} \iota_m^* c_k(\tilde{\tau}_m^*(\mathbf{E} \otimes \mathbf{L}_i^{-a}|_{\bar{Y}_m})) &= \tau_m^* c_k(\mathbf{E} \otimes \mathbf{L}_i^{-a}|_{\bar{Y}_m}) \\ &= c_k(\mathbf{E}|_{Y_m} \otimes \pi_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_m}}(-N(i)aH)), \quad 0 \leq k \leq \mathbf{r}, \quad a \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее, рассмотрим многочлен

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\mathbf{r}} c_k(-t)^{\mathbf{r}-k} \in \mathbb{Z}[t], \quad (3.14)$$

где $c_0 = 1$, а коэффициенты c_k при $k \geq 1$ суть введенные выше целые числа. Следуя идее Е. Сато, покажем теперь, что корни $h(t)$ составляют с точностью до умножения на общую константу максимальный тип расщепления $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$. Более точно, пусть $a_1 > \dots > a_{\alpha}$, $\alpha \leq \mathbf{r}$, — различные элементы из $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$, входящие в $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$ с соответствующими кратностями $r_1, \dots, r_{\alpha}$. Тогда мы утверждаем, что корни многочлена $h(t)$ суть числа $N(i)a_1, \dots, N(i)a_{\alpha}$ с соответствующими кратностями $r_1, \dots, r_{\alpha}$.

Рассуждение из [3; с. 138, 139] показывает, что для доказательства этого утверждения достаточно установить зануление чисел

$$c_k(\mathbf{E}|_{Y_m} \otimes \pi_m^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_m}}(-N(i)a_j H))$$

для $\mathbf{r} - r_j + 1 \leq k \leq \mathbf{r}$, $1 \leq j \leq \alpha$. Ввиду (3.13) достаточно доказать зануление чисел $c_k(\tilde{\tau}_m^*(\mathbf{E} \otimes \mathbf{L}_i^{-a_j}|_{\bar{Y}_m}))$. Доказательство этого факта практически то же, что и в [3]. А именно, индуктивно определяются векторные расслоения

$$F_1 := \tilde{\phi}_m^* \mathbf{E}|_{\tilde{\pi}_m^{-1}(M_i(\mathbb{P}^{n_m}))}, \quad F_2, \dots, F_{\alpha}$$

на $\tilde{\pi}_m^{-1}(M_i(\mathbb{P}^{n_m}))$ рангов $\mathrm{rk} F_j = \sum_{p=j}^{\alpha} r_p$, входящие в точные тройки

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow r_j \mathcal{O}_{\tilde{\pi}_m^{-1}(M_i(\mathbb{P}^{n_m}))} &\rightarrow F_j \otimes (\mathbf{L}_i^{a_{j-1}-a_j}|_{\tilde{\pi}_m^{-1}(M_i(\mathbb{P}^{n_m}))}) \rightarrow F_{j+1} \rightarrow 0, \\ 1 \leq j &\leq \alpha - 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $a_0 := 0$. Используя (3.9) и применяя рассуждение из [3; с. 139] к тройкам (3.15), получаем $c_k(\tilde{\tau}_m^*(\mathbf{E} \otimes \mathbf{L}_i^{-a_j}|_{\bar{Y}_m})) = 0$, что и требовалось.

Поскольку $h(t)$ не зависит от x и от $\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)$, это же справедливо и для $S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$, т.е. предложение 1 доказано.

3.2. Доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.9) при $m \gg 0$ размерность $M_i(\mathbb{P}^{n_m})$ больше половины размерности пространства $\mathbb{P}^{n_m}$, следовательно, многообразия $M_i(\mathbb{P}^{n_m})$ связны для достаточно больших m . Для $x \in \mathbf{X}$ и любого $m \geq 1$ такого, что $x \in X_m$, рассмотрим многообразие

$$\Gamma_{im}(x) := \{(l, \mathbb{P}^{n_m}) \in B_{im}(x) \times \Pi_{im}(x) \mid l \in M_i(\mathbb{P}^{n_m})\}$$

с проекциями $B_{im}(x) \xrightarrow{p_1} \Gamma_{im}(x) \xrightarrow{p_2} \Pi_{im}(x)$. Так как $M_i(\mathbb{P}^{n_m}) = p_2^{-1}(\mathbb{P}^{n_m})$ связно для любого $\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)$ и $\Pi_{im}(x)$ связно согласно условию (A.ii), то, значит, $\Gamma_{im}(x)$ связно. По определению $\Gamma_{im}(x)$ описывается так:

$$\Gamma_{im}(x) = \bigsqcup_{\mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)} M_i(\mathbb{P}^{n_m}), \quad m \geq 1. \quad (3.16)$$

Аналогично рассмотрим многообразия

$$\Gamma_{im} := \{(x, l, \mathbb{P}^{n_m}) \in X_m \times B_{im} \times \Pi_{im} \mid (l, \mathbb{P}^{n_m}) \in \Gamma_{im}(x)\}.$$

По построению

$$\Gamma_{im} = \bigsqcup_{x \in X_m} \Gamma_{im}(x),$$

так что каждое Γ_{im} связно. Более того, имеются корректно определенные инд-многообразия $\Gamma_i := \varinjlim \Gamma_{im}$ и $\Gamma_i(x) := \varinjlim \Gamma_{im}(x)$, $x \in \mathbf{X}$.

Пусть $(x, l, \mathbb{P}^{n_m}) \in \Gamma_i$. Если $\delta_1^{\max}$ есть максимальный элемент в $\text{Split}(\mathbf{E}|_l) = S_i(\mathbf{E}, \mathbb{P}^{n_m})$, то корректно определено подрасслоение $\mathbf{E}_1(l)$ в $\mathbf{E}|_l$:

$$\mathbf{E}_1(l) := \text{im}(H^0(l, \mathbf{E}|_l(-\delta_1^{\max})) \otimes \mathcal{O}_l \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{E}|_l(-\delta_1^{\max})) \otimes \mathcal{O}_l(\delta_1^{\max}). \quad (3.17)$$

Положим $\mathbf{r}_1 := \text{rk } \mathbf{E}_1(l)$ и затем рассмотрим относительный грассманиан $\rho_1: \mathbf{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{X}$. Согласно предложению 1 числа $\delta_1^{\max}$ и $\mathbf{r}_1$ не зависят от точки $(x, l, \mathbb{P}^{n_m}) \in \Gamma_i$. Поэтому существует морфизм инд-многообразий

$$\mathbf{f}_{i1}: \Gamma_i \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}), \quad (x, l) \mapsto \mathbf{E}_1(l)|_x, \quad x \in \mathbf{X}. \quad (3.18)$$

Поскольку $\mathbf{f}_{i1}(\Gamma_{im}(x)) \subset \rho_1^{-1}(x) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}|_x)$, ввиду (3.16) имеем

$$\mathbf{f}_{i1}(M_i(\mathbb{P}^{n_m})) \subset G(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}|_x), \quad \mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x).$$

Согласно (3.8) коразмерности $\text{codim}_{\mathbb{P}^{n_m}} M_i(\mathbb{P}^{n_m})$ ограничены при $m \rightarrow \infty$. Это означает, что морфизм $\mathbf{f}_{i1}: M_i(\mathbb{P}^{n_m}) \rightarrow G(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}|_x)$ для достаточно больших m удовлетворяет условиям предложения 3.2 из [3], в котором мы полагаем $n = n_m$, $X = M_i(\mathbb{P}^{n_m})$, $Y = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}|_x)$ и $f = \mathbf{f}_{i1}$. Согласно этому предложению $\mathbf{f}_{i1}|_{M_i(\mathbb{P}^{n_m})}$ является постоянным отображением, а значит, оно индуцирует морфизм

$$\phi_{i1}(x): \Pi_{im}(x) \rightarrow G(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}|_x), \quad \mathbb{P}^{n_m} \mapsto \mathbf{f}_{i1}(M_i(\mathbb{P}^{n_m})), \quad x \in \mathbf{X}.$$

Теперь из условия (A.iv) следует, что существует положительное целое число m_1 такое, что морфизм $\phi_{i1}(x)$ – постоянное отображение для любого $m \geq m_1$. Таким образом, получаем, что (3.18) индуцирует постоянный морфизм

$$\phi_{i1}(x): \Pi_i(x) \rightarrow G(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}|_x).$$

Рассмотрим инд-многообразие $\Sigma_i = \varinjlim \Sigma_{im}$, где

$$\Sigma_{im} := \{(x, \mathbb{P}^{n_m}) \in X_m \times \Pi_{im} \mid \mathbb{P}^{n_m} \in \Pi_{im}(x)\},$$

и пусть $\mathbf{p}_i: \Sigma_i \rightarrow \mathbf{X}$ – естественная проекция со слоем $\Pi_i(x)$, $x \in \mathbf{X}$. Рассмотренные выше постоянные морфизмы $\phi_{i1}(x)$ продолжают до морфизма $\phi_{i1}: \Sigma_i \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{E})$, который постоянен на слоях проекции $\mathbf{p}_i$. Вдобавок морфизм $\mathbf{f}_{i1}|_{\Gamma_i(x)}$ является постоянным отображением. Таким образом, мы получаем корректно определенный морфизм

$$\Phi_{i1}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{E}), \quad x \mapsto \mathbf{f}_{i1}(\Gamma_i(x)). \quad (3.19)$$

Пусть $\mathcal{S}$ – тавтологическое расслоение ранга $\mathbf{r}_1$ на $\mathbf{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{E})$. Положим $\mathbf{E}_{1i} := \Phi_{i1}^* \mathcal{S}$. Из (3.17)–(3.19) следует, что $\mathbf{E}_{1i}$ есть подрасслоение в $\mathbf{E}$ такое, что

$$\mathbf{E}_{1i}|_l = \mathbf{E}_1(l) \simeq \mathbf{r}_1 \mathcal{O}_l(\delta_1^{\max}), \quad l \in \mathbf{q}_i(\Gamma_i),$$

где $\mathbf{q}_i: \Gamma_i \rightarrow \mathbf{B}_i: (x, l, \mathbb{P}^{n_m}) \mapsto l$ – естественная проекция. Используя полунепрерывность $\dim H^0(l, \mathbf{E}_{1i}(-\delta_1^{\max})|_l)$, немедленно проверяем, что последнее равенство выполняется для всех $l \in \mathbf{B}_i$.

Применяя предыдущее рассуждение к фактору $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/\mathbf{E}_{1i}$ и так далее, получаем фильтрацию расслоения $\mathbf{E}$

$$0 \subset \mathbf{E}_{1i} \subset \mathbf{E}_{2i} \subset \cdots \subset \mathbf{E}_{\alpha i} \subset \mathbf{E}_{1i}$$

с $\mathbf{B}_i$ -равномерными последовательными факторами $\mathbf{F}_{ki} = \mathbf{E}_{ki}/\mathbf{E}_{k-1,i}$.

Зафиксируем теперь $j \in \Theta_{\mathbf{X}}$, $i \neq j$. Применяя предыдущую процедуру ко всем расслоениям $\mathbf{F}_{ki}$, получаем фильтрацию расслоения $\mathbf{E}$, все факторы в которой $\mathbf{B}_i$ -равномерны и $\mathbf{B}_j$ -равномерны. После конечного числа итераций мы наконец получим фильтрацию

$$0 = \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{E}_s = \mathbf{E} \quad (3.20)$$

расслоения $\mathbf{E}$ с равномерными последовательными факторами. Это доказывает (i).

Заметим, что всякое равномерное векторное расслоение на $\mathbf{X}$ становится линейно тривиальным после подкрутки на подходящее линейное расслоение. Это означает, что каждое последовательное факторрасслоение $\mathbf{E}_k/\mathbf{E}_{k-1}$ изоморфно $\mathbf{M}_k \otimes \mathbf{F}_k$, где $\mathbf{M}_k$ – линейное расслоение и $\mathbf{F}_k$ линейно тривиально. Предположим вдобавок, что выполнено свойство Т. Тогда расслоения $\mathbf{F}_k$ тривиальны, т.е.

$$\mathbf{E}_k/\mathbf{E}_{k-1} \simeq \mathrm{rk}(\mathbf{E}_k/\mathbf{E}_{k-1})\mathbf{M}_k, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Более того, для $p < k$

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_p) = H^1(\mathbf{X}, \mathbf{M}_k^* \otimes \mathbf{M}_p),$$

и согласно хорошо известному факту [10; теорема 4.5] (см. также [11; предложение 10.3])

$$H^1(\mathbf{X}, \mathbf{M}_k^* \otimes \mathbf{M}_p) = \varprojlim H^1(X_m, (\mathbf{M}_k^* \otimes \mathbf{M}_p)|_{X_m}).$$

Однако предыдущая конструкция показывает, что

$$(\mathbf{M}_k^* \otimes \mathbf{M}_p)|_{X_m} \simeq \bigotimes_i L_{im_i}^{\otimes a_i}$$

для некоторых отрицательных a_i . Поэтому часть свойства Л, касающаяся обращения в нуль, дает

$$H^1(X_m, (\mathbf{M}_k^* \otimes \mathbf{M}_p)|_{X_m}) = 0$$

для $m \geq 1$, и, следовательно, $\text{Ext}^1(\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_p) = 0$ для $1 \leq p \leq k \leq s$. Этого достаточно, чтобы заключить, что фильтрация (3.20) расщепляется, т.е. выполнено (ii).

Оставшаяся часть работы (за исключением приложения) посвящена примерам линейных инд-многообразий, удовлетворяющих свойствам Л, А и Т.

§ 4. Линейные инд-грассманианы со свойствами Л, А, Т

4.1. Конечномерные ортогональные и симплектические грассманианы. Пусть V – конечномерное векторное пространство. В дальнейшем мы будем рассматривать как симметрические, так и симплектические билинейные формы Φ на V . В предположении, что Φ фиксирована, для произвольного подпространства $W \subset V$ положим $W^\perp := \{v \in V \mid \Phi(v, w) = 0 \text{ для любого } w \in W\}$. Напомним, что W называется *изотропным* (или *Φ -изотропным*), если $W \subset W^\perp$.

Пусть $\Phi \in S^2 V^*$ – невырожденная симметрическая форма на V . Для $\dim V \geq 3$ и $1 \leq k \leq [\dim V/2]$, *ортогональный грассманиан* $GO(k, V)$ определяется как подмногообразие в $G(k, V)$, состоящее из всех Φ -изотропных k -мерных подпространств в V . За исключением случая $\dim V = 2n$, $k = n$, многообразие $GO(k, V)$ гладко и неприводимо. При $\dim V = 2n$, $k = n$, многообразие $GO(k, V)$ – гладкое и имеет две неприводимые компоненты, обе из которых изоморфны $GO(n-1, \tilde{V})$ для $\dim \tilde{V} = 2n-1$.

Если $\Phi \in \Lambda^2 V^*$ – невырожденная симплектическая форма на V , $\dim V = 2n$, то *симплектический грассманиан* $GS(k, V)$ есть гладкое неприводимое подмногообразие в $G(k, V)$, состоящее из всех Φ -изотропных k -мерных подпространств в V .

4.2. Определение линейных инд-грассманианов. Начнем с напоминания определения стандартного расширения грассманианов [12].

Назовем *стандартным расширением грассманианов* вложение грассманианов $f: G(k, V) \rightarrow G(k, V')$ для $\dim V \geq \dim V$, $k' \geq k$, задаваемое формулой

$$f: V_k \mapsto V_k \oplus W, \quad (4.1)$$

для некоторого фиксированного изоморфизма $V' \simeq V \oplus \widehat{W}$ и фиксированного подпространства $W \subset \widehat{W}$ размерности $k' - k$. Соответственно под *стандартным расширением ортогональных, соответственно симплектических, грассманианов* мы понимаем вложение изотропных грассманианов $f: GO(k, V) \rightarrow GO(k, V')$ (соответственно $f: GS(k, V) \rightarrow GS(k, V')$), задаваемое формулой (4.1) для некоторого фиксированного ортогонального (соответственно симплектического) изоморфизма $V' \simeq V \oplus \widehat{W}$ и фиксированного изотропного подпространства $W \subset \widehat{W}$ размерности $k' - k$ (ср. [12; определения 3.2, 3.5]). Заметим, что стандартные расширения являются линейными морфизмами.

Далее, напомним определение стандартных инд-гассманианов [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Зафиксируем бесконечную цепочку векторных пространств

$$V_{n_1} \subset V_{n_2} \subset \dots \subset V_{n_m} \subset V_{n_{m+1}} \subset \dots \quad (4.2)$$

размерностей $n_m, n_m < n_{m+1}$.

а) Для целого $k, 1 \leq k < n_1$, положим $\mathbf{G}(k) := \varinjlim G(k, V_{n_m})$, где

$$G(k, V_{n_1}) \hookrightarrow G(k, V_{n_2}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow G(k, V_{n_m}) \hookrightarrow G(k, V_{n_{m+1}}) \hookrightarrow \dots$$

– цепочка канонических включений гассманианов, индуцированная цепочкой (4.2).

б) Для последовательности целых чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ таких, что $k_m < n_m, \lim_{m \rightarrow \infty} (n_m - k_m) = \infty$, положим $\mathbf{G}(\infty) := \varinjlim G(k_m, V_{n_m})$, где

$$G(k_1, V_{n_1}) \hookrightarrow G(k_2, V_{n_2}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow G(k_m, V_{n_m}) \hookrightarrow G(k_{m+1}, V_{n_{m+1}}) \hookrightarrow \dots$$

– произвольная цепочка стандартных расширений гассманианов.

с) Предположим, что пространства V_{n_m} снабжены совместимыми невырожденными симметрическими (соответственно симплектическими) формами Φ_m . В симметрическом случае $n_m/2 \in \mathbb{Z}_+$. Для целого $k, 1 \leq k \leq [n_1/2]$, положим $\mathbf{GO}(k, \infty) := \varinjlim GO(k, V_{n_m})$ (соответственно $\mathbf{GS}(k, \infty) := \varinjlim GS(k, V_{n_m})$), где

$$GO(k, V_{n_1}) \hookrightarrow GO(k, V_{n_2}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow GO(k, V_{n_m}) \hookrightarrow GO(k, V_{n_{m+1}}) \hookrightarrow \dots$$

(соответственно

$$GS(k, V_{n_1}) \hookrightarrow GS(k, V_{n_2}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow GS(k, V_{n_m}) \hookrightarrow GS(k, V_{n_{m+1}}) \hookrightarrow \dots)$$

есть цепочка вложений изотропных гассманианов, индуцированная цепочкой (4.2).

д) Для последовательности целых чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ такой, что $k_m < [n_m/2], \lim_{m \rightarrow \infty} ([n_m/2] - k_m) = \infty$, положим $\mathbf{GO}(\infty, \infty) = \varinjlim GO(k_m, V_{n_m})$ (соответственно $\mathbf{GS}(\infty, \infty) := \varinjlim GS(k_m, V_{n_m})$), где

$$GO(k_1, V_{n_1}) \hookrightarrow GO(k_2, V_{n_2}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow GO(k_m, V_{n_m}) \hookrightarrow GO(k_{m+1}, V_{n_{m+1}}) \hookrightarrow \dots \quad (4.3)$$

(соответственно

$$GS(k_1, V_{n_1}) \hookrightarrow GS(k_2, V_{n_2}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow GS(k_m, V_{n_m}) \hookrightarrow GS(k_{m+1}, V_{n_{m+1}}) \hookrightarrow \dots) \quad (4.4)$$

– произвольная цепочка стандартных расширений изотропных гассманианов.

е) В симплектическом случае рассмотрим последовательность целых чисел $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ таких, что $k_m \leq n_m/2, \lim_{m \rightarrow \infty} (n_m/2 - k_m) = k \in \mathbb{N}$, и положим $\mathbf{GS}(\infty, k) := \varinjlim GS(k_m, V_{n_m})$ для произвольной цепочки стандартных расширений (4.4). В ортогональном случае предположим, что $\dim V_{n_m}$ четны. Тогда положим $\mathbf{GO}^0(\infty, k) := \varinjlim GO(k_m, V_{n_m})$ для цепочки (4.3), где $k_m < n_m/2, \lim_{m \rightarrow \infty} (n_m/2 - k_m) = k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Наконец, рассмотрим ортогональный случай в предположении, что $\dim V_{n_m}$ нечетны. Тогда положим $\mathbf{GO}^1(\infty, k) := \varinjlim GO(k_m, V_{n_m})$ для цепочки (4.3), где $k_m \leq [n_m/2], \lim_{m \rightarrow \infty} ([n_m/2] - k_m) = k \in \mathbb{N}$.

В частности, $\mathbf{P}^\infty = \mathbf{G}(1) \simeq \mathbf{GS}(1)$. Заметим, что рассмотренные выше стандартные инд-грассманианы определены корректно, т.е. стандартные инд-грассманианы не зависят, с точностью до изоморфизма инд-многообразий, от конкретной цепочки стандартных расширений, используемых в их определении. Более того, основной результат в [12] гласит, что, за исключением изоморфизма $\mathbf{P}^\infty \simeq \mathbf{GS}(1)$, стандартные инд-грассманианы попарно неизоморфны как инд-многообразия.

Во всех случаях максимальная внешняя степень тавтологического расслоения на X_m , порожденного глобальными сечениями, дает обильное линейное расслоение $\mathcal{O}_{X_m}(1)$, где $X_m = G(k_m, V_{n_m}), GO(k_m, V_{n_m}), GS(k_m, V_{n_m})$. Как известно, класс изоморфизма расслоения $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ порождает $\text{Pic } X_m$. Более того, если $i_m: X_m \hookrightarrow X_{m+1}$ есть одно из вложений в определении 1, имеется изоморфизм $i_m^* \mathcal{O}_{X_{m+1}}(1) \simeq \mathcal{O}_{X_m}(1)$. Это позволяет заключить, что $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ есть линейное многообразие и группа $\text{Pic } \mathbf{X}$ порождена классом изоморфизма расслоения $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1) := \varinjlim \mathcal{O}_{X_m}(1)$.

4.3. Теорема БВТС для $\mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GO}^1(\infty, 0)$ и $\mathbf{GS}(\infty, 0)$. Сначала заметим, что если $\mathbf{X} = \mathbf{G}(k)$, $\mathbf{GO}(k, \infty)$, $\mathbf{GS}(k, \infty)$, на $\mathbf{X}$ имеется тавтологическое векторное расслоение $\mathbf{S}$ ранга k . Если $k \geq 2$, это расслоение не изоморфно прямой сумме линейных расслоений, поэтому теорема БВТС не верна для этих инд-грассманианов. Более того, из [7] известно, что для $\mathbf{X} = \mathbf{G}(k)$, $\mathbf{GO}(k, \infty)$, $\mathbf{X} = \mathbf{GS}(k, \infty)$ всякое простое векторное расслоение конечного ранга, т.е. векторное расслоение на $\mathbf{X}$, не имеющее нетривиального векторного подрасслоения, есть прямое слагаемое в тензорной степени расслоения $\mathbf{S}$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое векторное расслоение $\mathbf{E}$ на $\mathbf{X} \simeq \mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GO}^1(\infty, 0)$, $\mathbf{GS}(\infty, 0)$ изоморфно $\bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(k_i)$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$.*

Для $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\infty)$ это доказано в [4] (см. также [5; §4]). Для остальных стандартных инд-грассманианов утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1 и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathbf{X} \simeq \mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GO}^1(\infty, 0)$ или $\mathbf{GS}(\infty, 0)$. Тогда $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойствам Л, А и Т.¹*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Л, поскольку $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)$ порождает $\text{Pic } \mathbf{X}$ и $H^1(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(a))$ обращается в нуль для всех a и достаточно больших m по теореме Бореля–Вейля–Ботта. Более того, свойство Т следует из предложения 9 ниже.

Остается установить свойство А. Часть (A.i) свойства А выполнена здесь просто потому, что $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)$ очень обильно. Рассмотрим свойства (A.ii)–(A.iv).

Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{GO}(\infty, \infty) = \varinjlim GO(k_m, V_{n_m})$. Для $m \geq 1$ база B_m семейства проективных прямых на $GO(k_m, V_{n_m})$ совпадает с многообразием изотропных флагов типа $(k_m - 1, k_m + 1)$ в V_{n_m} :

$$B_m = \{(V_{k_m-1}, V_{k_m+1}) \in GO(k_m - 1, V_{n_m}) \times GO(k_m + 1, V_{n_m}) \mid V_{k_m-1} \subset V_{k_m+1}\} \quad (4.5)$$

¹Читатель может проверить, что $\mathbf{G}(\infty)$ также удовлетворяет свойствам Л, А, Т.

(см. [12; лемма 2.2, (i)]). Более того, положим

$$\Pi_m := \{(V_{k_m}, V_{k_m+1}) \in GO(k_m, V_{n_m}) \times GO(k_m + 1, V_{n_m}) \mid V_{k_m} \subset V_{k_m+1}\}. \quad (4.6)$$

Точка $y = (V_{k_m}, V_{k_m+1}) \in \Pi_m$ соответствует проективному подпространству $G(k_m - 1, V_{k_m}) \times \{V_{k_m+1}\} \subset B_m$.

Легко видеть, что $\Pi := \varinjlim \Pi_m$ является корректно определенным инд-многообразием и что точка многообразия Π представляет проективное инд-подпространство в $\mathbf{B} := \varinjlim B_m$.

Далее, (4.5) вместе с [12; лемма 2.2, (iv)] влечет, что для любой точки $x = \{V_{k_m}\} \in GO(k_m, V_{n_m})$

$$\begin{aligned} B_{\tilde{m}}(x) &:= \{\mathbb{P}^1 \in B_{\tilde{m}} \mid \mathbb{P}^1 \ni x\} \simeq \mathbb{P}((\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})^*) \\ &\quad \times GO(1, (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})^\perp / (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})), \quad \tilde{m} \geq m, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{m}}(x) &:= \{((\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m}), V_{k_{\tilde{m}+1}}) \in \Pi_{\tilde{m}}\} \\ &\simeq GO(1, V_{k_{\tilde{m}}}^\perp / V_{k_{\tilde{m}}}), \quad \tilde{m} \geq m. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку квадрики $GO(1, (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})^\perp / (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m}))$ связны, (A.ii) следует из (4.5). Более того, так как для любого $\tilde{m} \geq 1$ многообразие $GO(1, V_{k_{\tilde{m}}}^\perp / V_{k_{\tilde{m}}})$ есть гладкая квадратичная гиперповерхность в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n_{\tilde{m}}-2k_{\tilde{m}}-1}$, из (4.7) и (4.8) непосредственно следуют (A.iii) и (A.iv).

В остальных случаях то же самое рассуждение проходит при условии, что сделаны следующие изменения.

Если $\mathbf{X} = \mathbf{GS}(\infty, \infty)$, формулы для B_m , Π_m и $\Pi_{\tilde{m}}(x)$ – те же, что и (4.5), (4.6), (4.7) и (4.8) соответственно, с заменой GO на GS (использовать [12; лемма 2.5]). Заметим также, что $GS(1, V_{k_{\tilde{m}}}^\perp / V_{k_{\tilde{m}}})$ изоморфно проективному пространству $\mathbb{P}(V_{k_{\tilde{m}}}^\perp / V_{k_{\tilde{m}}})$.

Для

$$\mathbf{X} = \mathbf{GO}^1(\infty, 0) = \varinjlim GO(k_m, V_{2k_m+1})$$

сначала отождествим $GO(k_m, V_{2k_m+1})$ с неприводимой компонентой $GO(k_m + 1, V_{2k_m+2})^*$ многообразия $GO(k_m + 1, V_{2k_m+2})$ (см. [12; п. 2.3]). Следовательно, $\mathbf{X} \simeq \varinjlim GO(k_m, V_{2k_m})^*$. Далее, вместо (4.5), (4.6) имеем

$$B_m \simeq GO(k_m - 2, V_{2k_m}), \quad \Pi_m \simeq GO(k_m - 1, V_{2k_m}), \quad m \geq 1.$$

Соответственно вместо (4.7), (4.8) имеем

$$B_{\tilde{m}}(x) \simeq G(k_{\tilde{m}} - 2, (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m}))$$

для $x = \{V_{k_m}\}$. Последний факт доказывается рассуждением, аналогичным приведенному в [12; лемма 2.2]. Вдобавок $\Pi_{\tilde{m}}(x) \simeq \mathbb{P}((\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})^*)$, $\tilde{m} \geq m$.

Для

$$\mathbf{X} = \mathbf{GS}(\infty, 0) = \varinjlim GS(k_m, V_{2k_m})$$

можно показать, что (4.5), (4.6) можно заменить на

$$B_m \simeq GS(k_m - 1, V_{2k_m}), \quad \Pi_m \simeq GS(k_m, V_{2k_m}).$$

Соответственно (4.7), (4.8) для $x = \{V_{k_m}\} \in GS(k_m, V_{2k_m})$ можно заменить на

$$B_{\tilde{m}}(x) \simeq G(k_{\tilde{m}} - 1, (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \cdots \circ \phi_m)(V_{k_m})),$$

и $\Pi_{\tilde{m}}(x) \simeq \{\mathbb{P}((\phi_{\tilde{m}-1} \circ \cdots \circ \phi_m)(V_{k_m})^*)\}$ является точкой при $\tilde{m} \geq m$.

§ 5. Линейные сечения инд-грассманианов

$G(\infty)$, $GO(\infty, \infty)$, $GS(\infty, \infty)$

5.1. Линейные сечения конечномерных грассманианов. Пусть $G = G(k, V)$, $GO(k, V)$, $GS(k, V)$. Предположим, что $1 \leq k < \dim V - 1$ для $G = G(k, V)$ и $1 \leq k < [\dim V/2]$ для $G = GO(k, V)$, $GS(k, V)$. Положим $N := \dim H^0(\mathcal{O}_G(1))$ и $V_N := H^0(\mathcal{O}_G(1))^*$. Ниже мы рассматриваем G как подмногообразие в $\mathbb{P}(V_N)$ посредством отображения Плюккера. Для заданного целого числа c , $1 \leq c \leq k - 1$, положим

$$X := G \cap \mathbb{P}(U),$$

где $U \subset V_N$ – подпространство коразмерности c . Назовем X *линейным сечением коразмерности c грассманиана G* .

Заметим, что на G имеется единственное семейство максимальных проективных подпространств размерности k с базой $\tilde{G}$, где $\tilde{G} = G(k+1, V)$, если $G = G(k, V)$, соответственно $\tilde{G} = GO(k+1, V)$, если $G = GO(k, V)$, и $\tilde{G} = GS(k+1, V)$, если $G = GS(k, V)$ (см. [12; леммы 2.2, (i) и 2.5, (i)]). Рассмотрим график инциденции $\Sigma := \{(V_k, V_{k+1}) \in G \times \tilde{G} \mid V_k \subset V_{k+1}\}$ с проекциями $\tilde{G} \xleftarrow{p} \Sigma \xrightarrow{q} G$ и положим $\pi := p|_{q^{-1}(X)}: q^{-1}(X) \rightarrow \tilde{G}$. Из условия $1 \leq c \leq k - 1$ следует, что π – сюръективный проективный морфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для подпространства $U \subset V_N$ коразмерности c в общем положении справедливы следующие утверждения.

(i) Многообразия X и $q^{-1}(X)$ являются гладкими и

$$\pi_* \mathcal{O}_{q^{-1}(X)} = \mathcal{O}_{\tilde{G}}. \quad (5.1)$$

(ii) $Z(U) := \{x \in \tilde{G} \mid \dim \pi^{-1}(x) > k - c\}$ является собственным замкнутым подмножеством в $\tilde{G}$ и

$$\text{codim}_{\tilde{G}} Z(U) \geq 3, \quad \text{codim}_{q^{-1}(X)} \pi^{-1}(Z(U)) \geq 2. \quad (5.2)$$

(iii) Проекция $\pi: q^{-1}(X) \setminus \pi^{-1}(Z(U)) \rightarrow \tilde{G} \setminus Z(U)$ является проективным $\mathbb{P}^{k-c}$ -расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы дадим доказательство для случая $G = GO(k, V)$. Остальные случаи вполне аналогичны, и мы оставляем их читателю.

(i) Так как проективное подпространство $\mathbb{P}(U)$ находится в общем положении в $\mathbb{P}(V_N)$, то $\text{codim}_G X = c$, и поэтому имеет место резольвента Кошуля $\mathcal{O}_G$ -пучка $\mathcal{O}_X$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_G(-c) \rightarrow \cdots \rightarrow \binom{c}{i} \mathcal{O}_G(-i) \rightarrow \cdots \rightarrow c \mathcal{O}_G(-i) \rightarrow \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Обратный образ (5.3) относительно проекции q является $\mathcal{O}_\Sigma$ -резольвентой пучка $\mathcal{O}_{q^{-1}(X)} = \pi^* \mathcal{O}_{\tilde{G}}$ вида

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_c \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma \rightarrow \pi^* \mathcal{O}_{\tilde{G}} \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

где $\mathcal{L}_i := q^* \left(\binom{c}{i} \mathcal{O}_G(-i) \right)$, $i = 1, \dots, c$.

Для любого $x \in \tilde{G}$ выполнено $p^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^k$, так что условие $c \leq k - 1$ влечет

$$H^j(p^{-1}(x), \mathcal{L}_i|_{p^{-1}(x)}) \simeq H^j(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-i)) = 0$$

для $j \geq 0$, $i = 1, \dots, c$. Поэтому из теоремы о замене базы [13; гл. III, теорема 12.11] для плоского проективного морфизма p вытекает, что $R^j p_* \mathcal{L}_i = 0$. Вдобавок по той же причине $R^j p_* \mathcal{O}_\Sigma = 0$ при $j > 0$, и, очевидно, $p_* \mathcal{O}_\Sigma = \mathcal{O}_{\tilde{G}}$. Поэтому, применяя функтор $R^* p_*$ к (5.4), получаем (5.1).

(ii) Теперь докажем (5.2). Зафиксируем произвольную точку $V_{k+1} \in \tilde{G}$. Так как $p^{-1}(x) = \mathbb{P}(V_{k+1}^*)$ (см. [12; лемма 2.2, (i)]), то имеем индуцированное инъективное линейное отображение

$$0 \rightarrow V_{k+1}^* \rightarrow V_N. \quad (5.5)$$

Рассмотрим многообразия

$$\Gamma_i := \{(W, V_{k+1}) \in G(N - c, V_N) \times \tilde{G} \mid \dim(W \cap V_{k+1}^*) \geq k - c + i + 2\}, \\ 0 \leq i \leq c - 1,$$

вместе с естественными проекциями

$$G(N - c, V_N) \xleftarrow{p_i} \Gamma_i \xrightarrow{q_i} \tilde{G}.$$

Для произвольного $U \in G(N - c, V_N)$ обозначим

$$Z_i(U) := q_i(p_i^{-1}(U)), \quad 0 \leq i \leq c - 1.$$

По построению $Z_0(U) = Z(U)$, $Z_i(U)$ – замкнутые подмногообразия в $\tilde{G}$, образующие фильтрацию

$$\emptyset =: Z_c(U) \subset Z_{c-1}(U) \subset \dots \subset Z_0(U) = Z(U) \quad (5.6)$$

такую, что $Z_i(U)' := Z_i(U) \setminus Z_{i+1}(U)$ суть локально замкнутые подмногообразия в $\tilde{G}$. Следовательно, $B_i(U)' := \pi^{-1}(Z_i(U)')$ – локально замкнутые подмногообразия в $q^{-1}(X)$. Более того,

$$\pi|_{B_i(U)'} : B_i(U)' \rightarrow Z_i(U)'$$

есть $\mathbb{P}^{k+1-c+i}$ -расслоение, так что

$$\dim B_i(U)' = \dim Z_i(U)' + k + 1 - c + i.$$

Это равносильно равенству

$$\text{codim}_{q^{-1}(X)} B_i(U)' = \text{codim}_{\tilde{G}} Z_i(U)' - (i + 1). \quad (5.7)$$

Заметим также, что $Z(U) = \bigcup_{i=0}^{c-1} Z_i(U)'$, а значит,

$$\pi^{-1}(Z(U)) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{c-1} Z_i(U)'\right) = \bigcup_{i=0}^{c-1} B_i(U)'. \quad (5.8)$$

Теперь подсчитаем размерности множеств $Z_i(U)$ в предположении, что U находится в общем положении. Для этого пусть $Y := q_i^{-1}(x)$ – слой проекции q_i над точкой $x = V_{k+1} \in Z_i(U)$. Рассмотрим многообразие

$$\tilde{Y} = \{(W, V_{k-c+i+2}) \in G(N - c, V_N) \times G(k - c + i + 2, V_{k+1}^*) \mid W \supset V_{k-c+i+2} \subset V_{k+1}^*\}.$$

Естественная проекция $\tilde{Y} \rightarrow G(k - c + i + 2, V_{k+1}^*)$ есть расслоение со слоем грассманиан $G(N - k - i - 2, \mathbb{C}^{N-k-i-2+c})$. С другой стороны, имеем сюръективный бирациональный морфизм $\tilde{Y} \rightarrow Y$, $(W, V_{k-c+i+2}) \mapsto W$. Поэтому ввиду (5.5) получаем

$$\dim Y = \dim \tilde{Y} = \dim G(k - c + i + 2, V_{k+1}^*) + \dim G(N - k - i - 2, \mathbb{C}^{N-k-i-2+c}) \\ = cN - c^2 + (i + 1)(c - k - i - 2).$$

Поскольку q_i сюръективно, из этого вытекает

$$\dim \Gamma_i = \dim \tilde{G} + \dim Y = \dim \tilde{G} + cN - c^2 + (i + 1)(c - k - i - 2).$$

Поскольку p_i также сюръективно, для точки $U \in G(N - c, V_N)$ в общем положении имеем

$$\dim Z_i(U) = \dim \Gamma_i - \dim G(N - c, V_N) = \dim \tilde{G} - (i + 1)(k + i + 2 - c),$$

т.е.

$$\text{codim}_{\tilde{G}} Z_i(U) = (i + 1)(k + i + 2 - c), \quad 0 \leq i \leq c - 1. \quad (5.9)$$

Это вместе с (5.7) дает $\text{codim}_{q^{-1}(X)} B_i(U)' = (i + 1)(k + i + 1 - c)$, $0 \leq i \leq c - 1$. Поэтому ввиду (5.8) и предположения $c \leq k - 1$ получаем

$$\text{codim}_{q^{-1}(X)} \pi^{-1}(Z(U)) = \min_{0 \leq i \leq c-1} \text{codim}_{q^{-1}(X)} B_i(U)' = k + 1 - c \geq 2. \quad (5.10)$$

Неравенство $\text{codim}_{\tilde{G}} Z(U) \geq 3$ вытекает теперь из (5.7), и предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 2 пусть $\mathcal{E}$ – векторное расслоение на $q^{-1}(X)$, тривиальное на слоях морфизма $\pi: q^{-1}(X) \rightarrow \tilde{G}$. Тогда имеет место изоморфизм $\text{ev}: \pi^* \pi_* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем предложение 7 из §7 ниже к морфизму $\pi: q^{-1}(X) \rightarrow \tilde{G}$, подмногообразию $Z(U)$ в $\tilde{G}$ и векторному расслоению $\mathcal{E}$ на $q^{-1}(X)$.

ЛЕММА 2. Пусть $X = G \cap \mathbb{P}(U)$ – линейное сечение коразмерности c грассманиана G для $1 \leq c \leq (k - 1)/2$, и пусть $\mathbb{P}^1$ – проективная прямая в $\tilde{G}$. Тогда существует рациональная кривая $C \subset q^{-1}(X)$ такая, что $\pi|_C$ – изоморфизм C с $\mathbb{P}^1$, а $q|_C$ – либо изоморфизм, либо постоянное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только случай $G = GO(k, V)$. Ясно, что

$$\mathbb{P}^1 = \{V_{k+1} \in \tilde{G} \mid V_k \subset V_{k+1} \subset V_{k+2}\}$$

для единственного изотропного флага $V_k \subset V_{k+2}$ в V . Если $V_k \in X$, положим

$$C := \{(V_k, V_{k+1}) \in \Sigma \mid V_k \subset V_{k+1} \subset V_{k+2}\}.$$

Тогда $\pi|_C: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ – изоморфизм и $q(C)$ – точка $\{V_k\} \in G$.

Предположим, что $V_k \notin X$. Непосредственно проверяется, что если $\mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}(V_N)$ – гиперплоскость такая, что $V_k \notin \mathbb{P}^{N-2}$, то пересечение $q(p^{-1}(\mathbb{P}^1)) \cap \mathbb{P}^{N-2}$ изоморфно прямому произведению $\mathbb{P}(V_k^*) \times \mathbb{P}(V_{k+2}/V_k)$, вложенному по Серге

$\mathbb{P}^{N-2}$. Пусть $\mathbb{P}_a^{k-1}, \mathbb{P}_b^{k-1}$ суть слои в $\mathbb{P}(V_k^*) \times \mathbb{P}(V_{k+2}/V_k)$ над двумя точками $a, b \in \mathbb{P}(V_{k+2}/V_k)$. Проекция

$$\mathrm{pr}_1: \mathbb{P}(V_k^*) \times \mathbb{P}(V_{k+2}/V_k) \rightarrow \mathbb{P}(V_k^*)$$

индуцирует изоморфизм $f: \mathbb{P}_a^{k-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_b^{k-1}$.

Положим

$$\mathbb{P}_a^{k-c-1} := \mathbb{P}_a^{k-1} \cap \mathbb{P}(U), \quad \mathbb{P}_b^{k-c-1} := \mathbb{P}_b^{k-1} \cap \mathbb{P}(U).$$

Так как $1 \leq c \leq (k-1)/2$, то пересечение $\mathbb{P}_b^{k-c-1} \cap f(\mathbb{P}_a^{k-c-1}) \subset \mathbb{P}_b^{k-1}$ непусто. Рассмотрим точку x из этого последнего пересечения. По построению слой $\mathbb{P}_x^1 := \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ лежит в $q(p^{-1}(\mathbb{P}^1)) \cap X$. Наконец, прообраз прямой $\mathbb{P}_x^1$ в $p^{-1}(\mathbb{P}^1)$ есть искомая рациональная кривая C .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – линейное сечение коразмерности c грассманиана G при $1 \leq c \leq (k-1)/2$. Тогда линейно тривиальное векторное расслоение E на X тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{E} := q^*E$ на $q^{-1}(X)$. Поскольку E линейно тривиально, для любого $x \in \tilde{G}$ $\mathcal{E}|_{\pi^{-1}(x)}$ является линейно тривиальным расслоением на проективном пространстве $\pi^{-1}(x)$. В этом случае хорошо известная теорема [14; гл. I, теорема 3.2.1] гласит, что $\mathcal{E}|_{\pi^{-1}(x)}$ тривиально. Поэтому $\mathrm{ev}: \pi^* \pi_* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ является изоморфизмом по следствию 1.

Далее, лемма 2 позволяет заключить, что $\pi_* \mathcal{E}$ линейно тривиально. В самом деле, если $\mathbb{P}^1 \subset \tilde{G}$ – проективная прямая и $C \subset q^{-1}(X)$ – рациональная кривая, как и в лемме 2, то $\pi_* \mathcal{E}|_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{E}|_C$, и, значит, $\mathcal{E}|_C$ тривиально ввиду линейной тривиальности E .

Следовательно, $\pi_* \mathcal{E}$ тривиально по предложению 9 ниже. Тогда $\mathcal{E} \simeq \pi^* \pi_* \mathcal{E}$ также тривиально. Наконец, поскольку $q: q^{-1}(X) \rightarrow X$ – плоский проективный морфизм с неприводимыми слоями, $E = q_* \mathcal{E}$ тривиально по предложению 6 ниже.

5.2. Линейные сечения малой коразмерности инд-грассманианов $\mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$, в частности, $\mathbf{G} = \varinjlim G(k_m, V_{n_m})$, $\varinjlim \mathbf{GO}(k_m, V_{n_m})$, $\varinjlim \mathbf{GS}(k_m, V_{n_m})$ (см. определение 1). Зафиксируем неубывающую последовательность $\{c_m\}_{m \geq 1}$ целых чисел, удовлетворяющих условию

$$1 \leq c_m \leq \frac{k_m - 1}{2}. \quad (5.11)$$

Рассмотрим инд-многообразие $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ такое, что для любого $m \geq 1$ X_m – гладкое линейное сечение коразмерности c_m одного из грассманианов $G_m = G(k_m, V_{n_m})$, $\mathbf{GO}(k_m, V_{n_m})$, $\mathbf{GS}(k_m, V_{n_m})$, а вложение $\phi_m: X_m \hookrightarrow X_{m+1}$ индуцировано вложением $G_m \hookrightarrow G_{m+1}$. В дальнейшем мы называем такие инд-многообразия *линейными сечениями $\mathbf{G}$ малой коразмерности*.

Существование линейных сечений $\mathbf{X}$ инд-грассманиана $\mathbf{G}$ малой коразмерности есть следствие теоремы Бертини. Более того, такое линейное сечение $\mathbf{X}$ является инд-многообразием и группа $\mathrm{Pic} \mathbf{X}$ порождена классом пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1) := \varprojlim \mathcal{O}_{X_m}(1)$. Это следует из наблюдения о том, что $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ порождает $\mathrm{Pic} X_m$ по теореме Лефшеца, и из линейности вложений $G_m \hookrightarrow G_{m+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$. Существует линейное сечение $\mathbf{X}$ инд-грассманиана $\mathbf{G}$ малой коразмерности, которое не изоморфно ни одному из инд-многообразий $\mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$ или $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbf{G} = \varinjlim G_m$, где $G_m = G(k_m, V_{n_m})$, $GO(k_m, V_{2n_m+1})$, $GS(k_m, V_{2n_m})$. Зафиксируем $m \geq 1$, и пусть $\mathbb{P}^1$ – проективная прямая на G_m . Тогда существуют единственные максимальные проективные подпространства $\mathbb{P}^{k_m}$ и $\mathbb{P}^{s_m}$ на G_m , пересекающиеся вдоль $\mathbb{P}^1$, где $s_m = n_m - k_m$ для $G_m = G(k_m, V_{n_m})$ и соответственно $s_m = \lfloor n_m/2 \rfloor - k_m$ для $G_m = GO(k_m, V_{n_m})$, $GS(k_m, V_{n_m})$ (см. [12; леммы 2.3, (iii) и 2.6, (ii)]).

При $\tilde{m} \geq m$ вложения $\phi_{\tilde{m}}: G_{\tilde{m}} \hookrightarrow G_{\tilde{m}+1}$ в прямом пределе $\varinjlim G_m$ задаются формулой (4.1), с помощью которой легко проверить, что $\mathbb{P}^{k_m}$ и $\mathbb{P}^{s_m}$ допускают расширения $\mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}} \subset G_{\tilde{m}}$, $\mathbb{P}^{s_{\tilde{m}}} \subset G_{\tilde{m}}$ такие, что $\mathbb{P}^{k_m} \subset \mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}}$, $\mathbb{P}^{s_m} \subset \mathbb{P}^{s_{\tilde{m}}}$ и

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}} \cap \mathbb{P}^{s_{\tilde{m}}}, \quad \tilde{m} \geq m.$$

Обозначая $\mathbf{P}_{\alpha}^{\infty} := \varinjlim \mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}}$, $\mathbf{P}_{\beta}^{\infty} := \varinjlim \mathbb{P}^{s_{\tilde{m}}}$, имеем

$$\mathbb{P}^1 = \mathbf{P}_{\alpha}^{\infty} \cap \mathbf{P}_{\beta}^{\infty}. \quad (5.12)$$

Теперь выберем $n_{\tilde{m}}$ и $k_{\tilde{m}}$ надлежащим образом. А именно предположим, что $n_{\tilde{m}} = 3t_{\tilde{m}}$ для $G_m = G(k_m, V_{n_m})$ и $\lfloor n_{\tilde{m}}/2 \rfloor = 3t_{\tilde{m}}$ для $G_m = GO(k_m, V_{n_m})$, $GS(k_m, V_{n_m})$, $k_{\tilde{m}} = 2t_{\tilde{m}}$, $t_{\tilde{m}} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Пусть $c_{\tilde{m}} := t_{\tilde{m}} - 1$. Тогда

$$s_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}} = 1 \quad (5.13)$$

и выполняются неравенства (5.11) вместе с условиями

$$\lim_{\tilde{m} \rightarrow \infty} k_{\tilde{m}} = \lim_{\tilde{m} \rightarrow \infty} s_{\tilde{m}} = \infty.$$

Далее, используя (5.13) и теорему Бертини, выберем башню проективных подпространств $\mathbb{P}^{N_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}} - 1} \subset \mathbb{P}(V_{N_{\tilde{m}}})$ для $\tilde{m} \geq m$ в общем положении, так что $\mathbb{P}^{N_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}} - 1} \cap \mathbb{P}^{s_{\tilde{m}}} = \mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}^{N_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}} - 1} \cap \mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}} = \mathbb{P}^{(k_{\tilde{m}}/2) + 1}$ для некоторых проективных подпространств $\mathbb{P}^{(k_{\tilde{m}}/2) + 1} \subset G_{\tilde{m}}$. В результате получим линейное сечение $\mathbf{X} := \varinjlim (\mathbb{P}^{N_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}} - 1} \cap G_{\tilde{m}})$ инд-грассманиана $\mathbf{G}$ малой коразмерности и проективную прямую $\mathbb{P}^1 \subset \mathbf{X}$ такие, что $\mathbb{P}^1$ содержится в единственном линейном инд-проективном подпространстве $\mathbf{P}^{\infty}$ в $\mathbf{X}$, а именно $\mathbf{P}^{\infty} := \varinjlim \mathbb{P}^{(k_{\tilde{m}}/2) + 1}$. Если бы $\mathbf{X}$ было изоморфно $\mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$, то это противоречило бы (5.12).

Покажем теперь, что линейное сечение $\mathbf{X}$ инд-грассманиана $\mathbf{G}$ малой коразмерности удовлетворяет свойствам Л, А и Т. Свойство Л следует из того, что группа $\mathrm{Pic} \mathbf{X}$ порождена классом пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)$, и $H^1(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(a))$ обращается в нуль при $\dim X_m > 1$ и $a < 0$ по теореме Кодаиры. Свойство Т установлено в предложении 3. Осталось установить свойство А. Часть (A.i) вытекает из того, что пучок $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ очень обилен. Что касается частей (A.ii)–(A.iv), то рассмотрим подробно лишь случай, когда $\mathbf{X}$ есть линейное сечение $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$.

Пусть $B(G_m)$ – семейство проективных прямых в $G_m = GO(k_m, V_{n_m})$, и пусть B_m – его подсемейство, состоящее из тех проективных прямых, которые лежат в X_m . По определению X_m есть пересечение G_m с подпространством $\mathbb{P}(U_m)$ в $\mathbb{P}(V_{N_m})$ для фиксированного пространства $U_m \in G(N_m - c_m, V_{N_m})$

в общем положении. Грассманианы $G(2, V_{N_m})$ и $G(2, U_m)$ можно рассматривать как грассманианы проективных прямых в $\mathbb{P}(V_{N_m})$ и $\mathbb{P}(U_m)$ соответственно. Тем самым, $B_m = B(G_m) \cap G(2, U_m)$, где пересечение берется в $G(2, V_{N_m})$. Покажем далее, что B_m неприводимо.

Пусть B – неприводимая компонента B_m . Так как $G(2, V_{N_m})$ гладко, субаддитивность коразмерности (см. [15; теорема 17.24]) влечет неравенство

$$\text{codim}_{B(G_m)} B \leq \text{codim}_{G(2, V_{N_m})} G(2, U_m) = 2c_m. \quad (5.14)$$

Рассмотрим график инциденции $\Sigma_m := \{(x, \mathbb{P}^{k_m}) \in G_m \times \tilde{G}_m \mid x \in \mathbb{P}^{k_m}\}$ с проекциями $\tilde{G}_m \xleftarrow{p_m} \Sigma_m \xrightarrow{q_m} G_m$, где $\tilde{G}_m := GO(k_m + 1, V_{N_m})$. Пусть $B(\Sigma_m)$ – семейство всех проективных прямых на Σ_m , лежащих в слоях проекции p_m . Обозначим через $B(q_m^{-1}(X_m))$ подсемейство в $B(\Sigma_m)$, состоящее из тех проективных прямых, которые лежат в $q_m^{-1}(X_m)$. Проекция $q_m: \Sigma_m \rightarrow G_m$ индуцирует морфизм $r_{G_m}: B(\Sigma_m) \rightarrow B(G_m)$, который биективен, поскольку всякая проективная прямая на G_m лежит в единственном максимальном проективном пространстве $\mathbb{P}^{k_m}$ (см. [12; § 2]). Пространство $\mathbb{P}^{k_m}$ является изоморфным образом при проекции q_m некоторого слоя проекции p_m . Соответственно морфизм

$$r_{X_m} := r_{G_m}|_{B(q_m^{-1}(X_m))}: B(q_m^{-1}(X_m)) \rightarrow B_m$$

– биекция. Поэтому для любой неприводимой компоненты B' в $B(q_m^{-1}(X_m))$ (5.14) приводит к неравенству

$$\text{codim}_{B(\Sigma_m)} B' \leq \text{codim}_{G(2, V_{N_m})} G(2, U_m) = 2c_m. \quad (5.15)$$

Проекция p_m индуцирует проекцию $\rho_m: B(\Sigma_m) \rightarrow \tilde{G}_m$. Пусть

$$\emptyset = Z_{c_m}(U_m) \subset Z_{c_m-1}(U_m) \subset \cdots \subset Z_0(U_m) \subset \tilde{G}_m$$

– фильтрация (5.6) грассманиана $\tilde{G}_m$ замкнутыми подмногообразиями $Z_i(U_m)$ коразмерностей в $\tilde{G}_m$, указанных в (5.9), где мы полагаем $c = c_m$, $k = k_m$. Эта фильтрация приводит к разложению

$$B(q_m^{-1}(X_m)) = \bigsqcup_{0 \leq i \leq c_m} B_i,$$

где

$$B_0 := B(q_m^{-1}(X_m)) \cap \rho_m^{-1}(\tilde{G}_m \setminus Z_0(U_m)), \\ B_i := B(q_m^{-1}(X_m)) \cap \rho_m^{-1}(Z_{i-1}(U_m) \setminus Z_i(U_m)), \quad i = 1, \dots, c_m.$$

Из формулы (5.9) вытекает, что $\text{codim}_{B(\Sigma_m)} B_0 = 2c_m$, $\text{codim}_{B(\Sigma_m)} B_i > 2c_m$ для $i = 1, \dots, c_m$. Отсюда и из (5.15) следует неприводимость многообразия $B(q_m^{-1}(X_m))$, а значит, и многообразия B_m .

Пусть теперь $\Pi(G_m)$ – семейство проективных пространств $\mathbb{P}^{k_m-1}$, лежащих в $B(G_m)$ и определяемых правыми частями (4.6). Положим

$$\Pi := \varinjlim \Pi_m, \quad (5.16)$$

где

$$\Pi_m := \{\mathbb{P}^{k_m-c_m-1} \subset B_m \mid \mathbb{P}^{k_m-c_m-1} \text{ – проективное подпространство} \\ \text{некоторого пространства } \mathbb{P}^{k_m-1} \in \Pi(G_m)\}.$$

Зафиксируем m , и пусть $\pi := p_m|_{q_m^{-1}(X_m)}: q_m^{-1}(X_m) \rightarrow \tilde{G}_m$ – проекция. Рассмотрим относительный грассманиан $G_\pi := \{\mathbb{P}^1 \subset q_m^{-1}(X_m) \mid \mathbb{P}^1 \text{ линейно вложено в слой проекции } \pi\}$ с индуцированными проекциями $\rho: G_\pi \rightarrow \tilde{G}_m$ и $q_\pi: G_\pi \rightarrow B_m$. По определению слой $\rho^{-1}(x)$ над произвольной точкой $x \in \tilde{G}_m$ есть грассманиан проективных прямых в проективном пространстве $\pi^{-1}(x)$. (Заметим, что для точки $x \in \tilde{G}_m$ в общем положении слой $\pi^{-1}(x)$ – это проективное пространство $\mathbb{P}^{k_m-c_m}$, а следовательно, $\rho^{-1}(x) \simeq G(2, \mathbb{C}^{k_m-c_m+1})$.) Кроме того, проекция q_π бирациональна.

По построению проективные пространства $\mathbb{P}^{k_m-c_m-1} \in \Pi_m$ являются изоморфными образами при проекции q_π проективных пространств $\mathbb{P}^{k_m-c_m-1}$, лежащих линейно в слоях проекции $\rho: G_\pi \rightarrow \tilde{G}_m$. Рассматривая многообразие

$$G_\rho := \{\mathbb{P}^{k_m-c_m} \subset q_m^{-1}(X_m) \mid \mathbb{P}^{k_m-c_m} \text{ лежит линейно в слое проекции } \pi: q_m^{-1}(X_m) \rightarrow \tilde{G}_m\},$$

получаем $\mathbb{P}^{k_m-c_m}$ -расслоение $q_\rho: \Pi_m \rightarrow G_\rho$ со слоем $q_\rho^{-1}(y) = \mathbb{P}^{k_m-c_m}$ над произвольной точкой $y = \{\mathbb{P}^{k_m-c_m}\} \in G_\rho$. Поэтому для проверки неприводимости Π_m достаточно проверить неприводимость G_ρ . Заметим, что π индуцирует проекцию $\tau: G_\rho \rightarrow \tilde{G}_m$, слой которой над точкой $V_{k_m+1} \in \tilde{G}_m$ совпадает с грассманианом $G(k_m - c_m + 1, W)$, где $W \subset V_{k_m+1}$ подпространство, определяемое условием $\mathbb{P}(W) = \pi^{-1}(x)$. Как и выше, из (5.9) следует, что при $i \geq 1$ локально замкнутые подмножества $\tau^{-1}(Z_i(W))$ в G_ρ имеют размерности строго меньшие, чем размерность открытого подмножества $\tau^{-1}(Z(W) \setminus Z_i(W))$. Это доказывает неприводимость G_ρ , а значит, и неприводимость Π_m .

Далее, из (4.7) вытекает, что для любой точки $x = V_{k_m} \in X_m$ при условии $\tilde{m} \geq m$ база $B_{\tilde{m}}(x)$ семейства проективных прямых на $X_{\tilde{m}}$, проходящих через x , является пересечением подмногообразия

$$\mathbb{P}((\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})^*) \times GO(1, (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m})^\perp / (\phi_{\tilde{m}-1} \circ \dots \circ \phi_m)(V_{k_m}))$$

в $\mathbb{P}(V_{k_m}^* \otimes V_{k_m}^\perp / V_{k_m})$ с проективным подпространством коразмерности $c_{\tilde{m}}$ в

$$\mathbb{P}(V_{k_m}^* \otimes V_{k_m}^\perp / V_{k_m}).$$

Пусть

$$b_{\tilde{m}}(x): B_{\tilde{m}}(x) \rightarrow Q_{(\tilde{m})}(x) := GO(1, V_{k_m}^\perp / V_{k_m})$$

– естественная проекция. Заметим, что слои морфизма $b_{\tilde{m}}(x)$ – проективные пространства размерности не меньше чем $k_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}} - 1$, и для точек x в X_m и $z \in Q_{(\tilde{m})}(x)$ в общем положении слой $b_{\tilde{m}}(x)^{-1}(z)$ – это проективное пространство $\mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}-c_{\tilde{m}}-1}$ по теореме Бертини. Более того, инд-многообразие $B(x) = \varinjlim B_{\tilde{m}}(x)$, $\tilde{m} \geq m$, корректно определено.

Аналогичным образом получаем, что $\Pi(x) := \{\mathbf{P}^\infty \in \Pi \mid \mathbf{P}^\infty \ni x\}$ – это инд-многообразие $\varinjlim \Pi_{\tilde{m}}(x)$, $\tilde{m} \geq m$, где

$$\Pi_{\tilde{m}}(x) := \{\mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}-c_{\tilde{m}}-1} \subset B_m \mid \mathbb{P}^{k_{\tilde{m}}-c_{\tilde{m}}-1} \text{ лежит как линейное проективное подпространство в слое проекции } b_{\tilde{m}}(x)\}.$$

Пусть $p(x): \Pi_{\tilde{m}}(x) \rightarrow Q_{(\tilde{m})}(x)$ – индуцированная проекция. По конструкции для любой точки $z \in Q_{(\tilde{m})}(x)$ слой $p(x)^{-1}(z)$ – грассманиан

$$G(k_{\tilde{m}} - c_{\tilde{m}}, \mathbb{C}^{\dim(b_{\tilde{m}}(x)^{-1}(z))+1}).$$

(В частности, этот грассманиан является точкой, если $x \in X_{\tilde{m}}$ и $z \in Q_{(\tilde{m})}(x)$ находятся в общем положении.) Отсюда вытекает свойство (A.ii), поскольку $Q_{(\tilde{m})}(x)$ – неприводимая гиперквадрика.

Свойство (A.iii) очевидно. Что касается свойства (A.iv), пусть Y – многообразие и $f: \Pi_{\tilde{m}}(x) \rightarrow Y$ – морфизм. При $\tilde{m} \rightarrow \infty$ слои проекции $p(x)$ являются либо грассманианами, размерность которых стремится к бесконечности, либо точками. Поэтому f отображает каждый слой проекции $p(x)$ в точку, т.е. f пропускается через индуцированный морфизм $g: Q_{(\tilde{m})}(x) \rightarrow Y$. Так как $Q_{(\tilde{m})}(x)$ – гладкая гиперквадрика, размерность которой стремится к бесконечности при $\tilde{m} \rightarrow \infty$, то для достаточно большого $\tilde{m}$ морфизм g является постоянным отображением. Поэтому f – также постоянное отображение, и (A.iv) доказано.

Из теоремы 1 теперь вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Векторное расслоение на линейном сечении $\mathbf{X}$ инд-грассманиана $\mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$ малой коразмерности изоморфно прямой сумме линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(a_i)$, где $a_i \in \mathbb{Z}$.*

§ 6. Инд-произведения и их подмногообразия со свойствами Л, А, Т

6.1. Конечные либо счетные инд-произведения со свойствами Л, А, Т. Пусть $\mathbf{X}^\xi = \varinjlim X_m^\xi$, $\xi \in \Xi$, – счетная совокупность инд-многообразий. Будем предполагать, что для каждого $\xi \in \Xi$ и любого $m \geq 1$ зафиксировано включение $X_m^\xi \subset X_{m+1}^\xi$. В каждом $\mathbf{X}^\xi$ выберем точку x_0^ξ . Без ограничения общности можно считать, что $x_0^\xi \in X_1^\xi$. Зафиксируем биекцию $\nu: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \Xi$ и обозначим $\underline{m} := \{1, 2, \dots, m\}$. Положим

$${}_\nu X_m := \times_{\xi \in \nu(\underline{m})} X_m^\xi$$

и рассмотрим вложения

$${}_\nu X_m \hookrightarrow {}_\nu X_{m+1} = {}_\nu X_m \times X_m^{\nu(m+1)}, \quad x \mapsto (x, x_0^{\nu(m+1)}), \quad m \geq 1.$$

Назовем инд-многообразие $\mathbf{X} := \varinjlim {}_\nu X_m$ инд-произведением инд-многообразий $\{\mathbf{X}^\xi\}_{\xi \in \Xi}$ и обозначим его через

$$\mathbf{X} = \times_{\xi \in \Xi} \mathbf{X}^\xi. \quad (6.1)$$

Заметим, что $\mathbf{X}$ не зависит, с точностью до изоморфизма инд-многообразий, от выбора биекции $\nu: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \Xi$, и поэтому обозначение (6.1) корректно. В самом деле, пусть $\nu': \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \Xi$ – другая биекция, и пусть $\psi := \nu'^{-1} \circ \nu: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ – индуцированная биекция. Изоморфизм

$$\mathbf{f}: \lim {}_\nu X_m \xrightarrow{\sim} \lim {}_{\nu'} X_m, \quad \mathbf{f} = \{f_m: {}_\nu X_m \rightarrow {}_{\nu'} X_{\tilde{m}(m)}\},$$

и обратный к нему

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}^{-1}: \lim {}_{\nu'} X_m \xrightarrow{\sim} \lim {}_\nu X_m, \quad \mathbf{g} = \{g_m: {}_{\nu'} X_m \rightarrow {}_\nu X_{\tilde{m}(m)}\},$$

где $\tilde{m}(m) := \min_{m' > m} \{m' \mid \psi(\underline{m}) \subset \underline{m'}\}$, задаются формулами

$$\begin{aligned} f_m: {}_\nu X_m &= \times_{\xi \in \nu(\underline{m})} X_m^\xi \rightarrow {}_\nu X_{\tilde{m}(m)} = (\times_{\xi \in \nu(\underline{m})} X_{\tilde{m}(m)}^\xi) \\ &\quad \times (\times_{\xi \in \nu'(\tilde{m}(\underline{m})) \setminus \nu(\underline{m})} X_{\tilde{m}(m)}^\xi), \quad x \mapsto (x, \{x_0^\xi\}_{\xi \in \nu'(\tilde{m}(\underline{m})) \setminus \nu(\underline{m})}), \\ g_m: {}_{\nu'} X_m &= \times_{\xi \in \nu'(\underline{m})} X_m^\xi \rightarrow {}_\nu X_{\tilde{m}(m)} = (\times_{\xi \in \nu'(\underline{m})} X_{\tilde{m}(m)}^\xi) \\ &\quad \times (\times_{\xi \in \nu(\tilde{m}(\underline{m})) \setminus \nu'(\underline{m})} X_{\tilde{m}(m)}^\xi), \quad x \mapsto (x, \{x_0^\xi\}_{\xi \in \nu(\tilde{m}(\underline{m})) \setminus \nu'(\underline{m})}). \end{aligned}$$

Заметим вдобавок, что, вообще говоря, $\mathbf{X}$ зависит от выбора точек x_0^ξ , однако мы опускаем эту зависимость в обозначении (6.1).

Причина, по которой мы называем $\mathbf{X}$ инд-произведением, а не произведением, состоит в том, что $\mathbf{X}$ не является прямым произведением в категории инд-многообразий. Конечно, корректно определены проекции инд-многообразий $\mathbf{p}_\xi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^\xi$, $\mathbf{p}_\xi = \varinjlim p_{\xi m}$, где $p_{\xi m}: {}_\nu X_m \rightarrow X_m^\xi$ – проекция на ξ -сомножитель для $\xi \in \nu(\underline{m})$, и постоянное отображение $p_{\xi m}: {}_\nu X_m \rightarrow x_0^{\nu(m)}$ для $\xi \notin \nu(\underline{m})$. Однако $\mathbf{X}$ не удовлетворяет свойству универсальности произведения.

Если Ξ конечно, то мы определим инд-произведение $\times_{\xi \in \Xi} \mathbf{X}^\xi$ как теоретико-множественное прямое произведение инд-многообразий $\mathbf{X}^\xi$. Тогда $\times_{\xi \in \Xi} \mathbf{X}^\xi$ совпадает с прямым пределом $\varinjlim (\times_{\xi \in \Xi} X_m^\xi)$, тем самым являясь инд-многообразием. Далее, $\times_{\xi \in \Xi} \mathbf{X}^\xi$, очевидно, удовлетворяет свойству универсальности прямого произведения в категории инд-многообразий.

Пусть теперь Ξ конечно либо счетно, и пусть инд-многообразия $\mathbf{X}^\xi = \varinjlim X_m^\xi$ удовлетворяют свойствам Л, А и Т. Это означает, что на каждом $\mathbf{X}^\xi$ имеется совокупность $\mathbf{L}^\xi := \{\mathbf{L}_\theta^\xi \mid \theta \in \Theta_{\mathbf{X}^\xi}\}$ линейных расслоений и совокупность $\mathbf{B}^\xi := \{\mathbf{B}_\theta^\xi = \varinjlim B_{\theta m}^\xi \mid \theta \in \Theta_{\mathbf{X}^\xi}\}$ инд-многообразий проективных прямых такие, что $\mathbf{X}^\xi$ удовлетворяет свойствам Л, А и Т. Совокупности $\{\mathbf{L}^\xi\}_{\xi \in \Xi}$ определяют следующую счетную совокупность линейных расслоений на $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{p}_\xi^* \mathbf{L}_\theta^\xi \mid \theta \in \Theta_{\mathbf{X}^\xi}, \xi \in \Xi\}. \quad (6.2)$$

Более того, любая проективная прямая $\mathbb{P}^1$ на $\mathbf{X}^\xi$ определяет проективную прямую $\mathbb{P}_\mathbf{X}^1$ на $\mathbf{X}$ такую, что $\mathbf{p}_\xi(\mathbb{P}_\mathbf{X}^1) = \mathbb{P}^1$ и $\mathbf{p}_{\xi'}(\mathbb{P}_\mathbf{X}^1) = \{x_0^{\xi'}\}$ для $\xi' \neq \xi$. Поэтому каждое инд-многообразие $\mathbf{B}_\theta^\xi$ проективных прямых на $\mathbf{X}^\xi$ “поднимается” до инд-многообразия проективных прямых на $\mathbf{X}$. Таким образом мы получаем совокупность $\mathbf{B}$ инд-многообразий проективных прямых на $\mathbf{X}$. Так как каждое $\mathbf{X}^\xi$ удовлетворяет свойствам Л, А и Т, то легко проверить, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тем же свойствам по отношению к совокупностям $\mathbf{L}$ и $\mathbf{B}$.

Это вместе с теоремой 1 приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. *Векторное расслоение на $\mathbf{X} = \times_{\xi \in \Xi} \mathbf{X}^\xi$, где каждое инд-многообразие $\mathbf{X}^\xi$ удовлетворяет свойствам Л, А и Т, изоморфно прямой сумме линейных расслоений.*

6.2. Линейные сечения инд-произведений. В этом пункте мы предполагаем, что Ξ конечно, $\Xi = \{1, 2, \dots, l\}$, и что инд-многообразия $\mathbf{X}^i = \varinjlim X_m^i$, $i \in \Xi$, являются копиями стандартных инд-грассманианов $\mathbf{G}(\infty)$, $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$, $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$. По предыдущему $\times_{i \in \Xi} \mathbf{X}^i$ есть не что иное как прямой предел $\varinjlim (\times_{i \in \Xi} X_m^i)$. Каждое X_m^i является (возможно, изотропным) грассманианом,

лежащим по Плюккеру в проективном пространстве $\mathbb{P}^{N_{im}-1} = \mathbb{P}(V_{N_{im}})$, а вложения

$$\times_{i \in \Xi} X_m^i \hookrightarrow \times_{i \in \Xi} X_{m+1}^i$$

индуцированы стандартными расширениями $X_m^i \hookrightarrow X_{m+1}^i$. Предположим также, что $\times_{i \in \Xi} X_m^i$ лежит в проективном пространстве $\mathbb{P}^{N_m-1}$ посредством вложения Серге $\times_{i \in \Xi} \mathbb{P}^{N_{im}-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_m-1}$.

Для каждого $m \geq 1$ и $i \in \Xi$ положим

$$\hat{X}_m^i := X_m^1 \times \cdots \times X_m^{i-1} \times X_m^{i+1} \times \cdots \times X_m^l,$$

и, кроме того, для $X_m^i = G(k_{im}, V_{n_{im}})$ (соответственно $X_m^i = GO(k_{im}, V_{n_{im}})$ либо $X_m^i = GS(k_{im}, V_{n_{im}})$) положим $X_m^{i+} := G(k_{im} + 1, V_{n_{im}})$ (соответственно $X_m^{i+} = GO(k_{im} + 1, V_{n_{im}})$ либо $X_m^{i+} = GS(k_{im} + 1, V_{n_{im}})$). Рассмотрим многообразие флагов

$$\Sigma_{im} := \{(V_{k_{im}}, V_{k_{im}+1}) \in X_m^i \times X_m^{i+} \mid V_{k_{im}} \subset V_{k_{im}+1}\}$$

с естественными проекциями $X_m^{i+} \leftarrow \Sigma_{im} \rightarrow X_m^i$. Имеем естественные проекции

$$X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i \xleftarrow{p_{im}} \Sigma_{im} \times \hat{X}_m^i \xrightarrow{q_{im}} X_m^i \times \hat{X}_m^i \simeq \hat{X}_m, \quad i \in \Xi, \quad (6.3)$$

и полагаем

$$\pi_{im} := p_{im}|_{q_{im}^{-1}(X_m)}: q_{im}^{-1}(X_m) \rightarrow X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i, \quad i \in \Xi. \quad (6.4)$$

Теперь положим, что $\{c_m\}_{m \geq 1}$ – неубывающая последовательность целых чисел, удовлетворяющая условиям

$$1 \leq c_m \leq \min \left\{ \frac{k_{im} - 1}{2} \mid i \in \Xi \right\}, \quad (6.5)$$

где $X_m^i = G(k_{im}, V_{n_{im}})$, $GO(k_{im}, V_{n_{im}})$, $GS(k_{im}, V_{n_{im}})$. Для каждого $m \geq 1$ рассмотрим линейное сечение X_m многообразия $\times_{i \in \Xi} X_m^i$

$$X_m := (\times_{i \in \Xi} X_m^i) \cap \mathbb{P}^{N_m - c_m - 1},$$

где $\mathbb{P}^{N_m - c_m - 1} = \mathbb{P}(U_m)$ для $U_m \in G(N_m - c_m, V_{N_m})$. Назовем X_m линейным сечением коразмерности c_m многообразия $\times_{i \in \Xi} X_m^i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для заданного $m \geq 1$ такого, что $k_{im} \geq 2$ для всех $i \in \Xi$, зафиксируем целое число c_m , удовлетворяющее (6.5). Тогда для проективного подпространства $\mathbb{P}^{N_m - c_m - 1} = \mathbb{P}(U_m)$ общего положения в $\mathbb{P}^{N_m - 1}$, $U_m \in G(N_m - c_m, V_{N_m})$, и любого $i \in \Xi$ выполнены следующие утверждения:

1) многообразия X_m и $q_{im}^{-1}(X_m)$ – гладкие;

2) $\text{codim}_{\times_{i \in \Xi} X_m^i} X_m = \text{codim}_{\Sigma_{im} \times \hat{X}_m^i} q_{im}^{-1}(X_m) = c_m$, $\pi_{im*} \mathcal{O}_{q_{im}^{-1}(X_m)} = \mathcal{O}_{X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i}$,

и для точки $x = (x_1, x_2) \in X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i$ общего положения проективное подпространство $\mathbb{P}^{k_{im}} = q_{im} p_{im}^{-1}(x)$ многообразия $X_m^i \times \{x_2\}$ удовлетворяет условию

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^{k_{im}}} (\mathbb{P}^{k_{im}} \cap \mathbb{P}^{N_m - c_m - 1}) = c_m;$$

следовательно, $Z_m^i(U_m) := \{x \in X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i \mid \dim \pi_{im}^{-1}(x) > k_{im} - c_m\}$ – собственное замкнутое подмножество в $X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i$;

3) пусть $B_m^i(U_m) := \pi_{im}^{-1}(Z_m^i(U_m))$; тогда

$$\mathrm{codim}_{q_{im}^{-1}(X_m)} B_m^i(U_m) \geq 2, \quad \mathrm{codim}_{X_m^i + \times \hat{X}_m^i} Z_m^i(U_m) \geq 3;$$

4) проекция

$$\pi_{im}: q_{im}^{-1}(X_m) \setminus B_m^i(U_m) \rightarrow X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i \setminus Z_m^i(U_m)$$

является проективным $\mathbb{P}^{k_{im}-c_m}$ -расслоением.

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях предложения 5 пусть $i \in \Xi$, и пусть $\mathcal{E}$ – векторное расслоение на $q_{im}^{-1}(X_m)$, тривиальное вдоль слоев морфизма

$$\pi_{im}: q_{im}^{-1}(X_m) \rightarrow X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i.$$

Тогда пучок $\pi_{im*}\mathcal{E}$ локально свободен и, кроме того, канонический морфизм $\mathrm{ev}: \pi_{im}^* \pi_{im*}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 5 следует, что $X = X_m^{i+} \times \hat{X}_m^i$, $Y = q_{im}^{-1}(X_m)$, $B = B_m^i(U_m)$, $Z = Z_m^i(U_m)$ и $E = \mathcal{E}$ удовлетворяют условиям предложения 7 ниже, из которого вытекает настоящее следствие.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 2.

ЛЕММА 3. Для $i = 1, 2$ пусть $X_i = G(k_i, V_i)$, $GO(k_i, V_i)$, $GS(k_i, V_i)$, и пусть X – линейное сечение коразмерности s многообразия $X_1 \times X_2$, где $1 \leq s \leq \min\{(k_1 + 1)/2, (k_2 + 1)/2\}$. Тогда для любой проективной прямой $\mathbb{P}_i^1 \subset X_i$ существует проективная прямая $\mathbb{P}^1$ такая, что $\mathrm{pr}_i|_{\mathbb{P}^1}$ – изоморфизм $\mathbb{P}^1$ с $\mathbb{P}_i^1$. Здесь pr_i обозначает естественную проекцию $X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$.

Рассмотрим инд-многообразие $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ такое, что для каждого $m \geq 1$ многообразие X_m – линейное сечение коразмерности c_m многообразия $\times_{i \in \Xi} X_{im}$, где c_m удовлетворяет (6.5), а вложения $\phi_m: X_m \hookrightarrow X_{m+1}$ индуцированы соответствующими вложениями $\times_{i \in \Xi} X_m^i \hookrightarrow \times_{i \in \Xi} X_{m+1}^i$. Ниже мы будем называть $\mathbf{X}$ линейным сечением малой коразмерности инд-многообразия $\times_{i \in \Xi} \mathbf{X}^i$. Существование линейных сечений $\mathbf{X}$ малой коразмерности инд-многообразия $\times_{i \in \Xi} \mathbf{X}^i$ непосредственно следует из теоремы Бертини.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathbf{X}$ – линейное сечение малой коразмерности инд-многообразия $\times_{i \in \Xi} \mathbf{X}^i$. Тогда векторное расслоение на $\mathbf{X}$ является прямой суммой линейных расслоений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим доказательство для случая, когда все $\mathbf{X}^i$ изоморфны $\mathbf{GO}(\infty, \infty)$. Случай, когда некоторые $\mathbf{X}^i$ изоморфны $\mathbf{G}(\infty)$ либо $\mathbf{GS}(\infty, \infty)$, рассматривается аналогично.

Сначала построим семейства $\mathbf{B}_i$, $i \in \Xi$, на $\mathbf{X}$. Для каждого $m \geq 1$ и каждого i , $1 \leq i \leq l$, рассмотрим естественную проекцию $p_{im}: X_m \rightarrow \hat{X}_m^i$, и положим $X_m^i(y) := p_{im}^{-1}(y)$ для переменной точки $y \in \hat{X}_m^i$. По определению $X_m^i(y)$ есть линейное сечение грассманиана $GO(k_{im}, V_{n_{im}})$. Пусть $B_i(m)(y)$ – семейство проективных прямых на $GO(k_{im}, V_{n_{im}})$, лежащих в $X_m^i(y)$, и пусть $B_i(m) :=$

$\bigcup_{y \in \widehat{X}_m^i} B_i(m)(y)$. Тогда $\mathbf{B}_i := \varinjlim B_i(m)$, $i \in \Xi$. Кроме того, инд-многообразия Π_i , $i \in \Xi$, параметризующие подходящие семейства инд-проективных пространств $\mathbb{P}^\infty$ в $\mathbf{B}_i$, определяются таким же образом, как и инд-многообразие Π (см. (5.16)).

Далее, напомним, что на $\times_{i \in \Xi} \mathbf{X}^i$ имеется совокупность линейных расслоений (6.2). В нашем случае $\Theta_{\mathbf{X}\Xi}$ состоит из единственной точки для каждого i , поэтому мы можем записать эту совокупность как $\mathbf{L} = \{\mathbf{L}_i\}_{i \in \Xi}$. Определим теперь совокупность линейных расслоений $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$, полагая $\mathbf{L}_{\mathbf{X}} := \{\mathbf{L}_i|_{\mathbf{X}}\}_{i \in \Xi}$. Тогда по теореме Лефшеца $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}$ свободно порождает $\text{Pic } \mathbf{X}$; вдобавок очевидным образом выполняется соотношение (2.2). Чтобы увидеть, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Л, осталось заметить, что $H^1(X_m, \bigotimes_{i \in \Xi} \mathbf{L}_i^{\otimes a_i}|_{X_m}) = 0$ для всех a_i . В самом деле, зануление $H^1(\times_{i \in \Xi} \widehat{X}_m^i, \bigotimes_{i \in \Xi} \mathbf{L}_i^{\otimes a_i}|_{\times_{i \in \Xi} \widehat{X}_m^i})$ вытекает из формул Кюннета и Ботта. Поскольку $\bigotimes_{i \in \Xi} \mathbf{L}_i^{\otimes a_i}|_{X_m}$ допускает резольвенту Кошуля, аналогичную (5.3), этого достаточно, чтобы заключить, что $H^1(X_m, \bigotimes_{i \in \Xi} \mathbf{L}_i^{\otimes a_i}|_{X_m}) = 0$.

Используя предложение 5 и повторяя рассуждение из пункта 5.2, легко проверяем, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству А. Покажем, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Т. Случай $|\Xi| = 1$ был рассмотрен в доказательстве теоремы 4. Достаточно дать доказательство для случая $|\Xi| = 2$; доказательство для $|\Xi| \geq 3$ проводится подобным же образом. Поэтому предположим, что X_m – линейное сечение многообразия $X_m^1 \times X_m^2$. В соответствии с (6.3) и (6.4) мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} q_{1m}^{-1}(X_m) & \xrightarrow{q_{1m}} & X_m \\ \pi_{1m} \downarrow & & \downarrow \rho \\ X_m^1 \times X_m^2 & \xrightarrow{\lambda} & X_m^2, \end{array} \quad (6.6)$$

где $l = 2$, $i = 1$, так что $\widehat{X}_m^1 = X_m^2$, а λ и ρ – естественные проекции.

Пусть $\varinjlim E_m$ – $\mathbf{B}_i$ -тривиальное векторное расслоение на $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ для $i = 1, 2$. Это означает, что каждое векторное расслоение E_m является $B_i(m)$ -тривиальным расслоением на X_m , т.е. $E_m|_{\mathbb{P}^1}$ тривиально для любого $\mathbb{P}^1 \in B_i(m)$, $i = 1, 2$. Рассмотрим векторное расслоение

$$\widetilde{E}_m := q_{1m}^* E_m.$$

Поскольку E_m является $B_1(m)$ -тривиальным, т.е. линейно тривиальным на слоях проекции ρ , расслоение E_m тривиально по предложению 3. Отсюда следует, что $\widetilde{E}_m$ тривиально вдоль слоев проекции π_{1m} . Поэтому по следствию 2 имеется изоморфизм

$$\text{ev}: \pi_{1m}^* \pi_{1m*} \widetilde{E}_m \xrightarrow{\sim} \widetilde{E}_m.$$

Более того, как и в доказательстве предложения 3, мы получаем, что расслоение $\pi_{1m*} \widetilde{E}_m|_{\lambda^{-1}(y)}$ тривиально для любого $y \in X_m^2$.

Тем самым, из предложения 6 ниже и диаграммы (6.6) следует, что $E_m^\lambda := \lambda_* \pi_{1m*} \widetilde{E}_m$ – векторное расслоение на X_m^2 такое, что

$$\widetilde{E}_m \simeq \pi_{1m}^* \lambda^* E_m^\lambda \simeq q_{1m}^* \rho^* E_m^\lambda.$$

Применяя снова предложение 6, мы получаем

$$E_m \simeq q_{1m*} \widetilde{E}_m \simeq q_{1m*} q_{1m}^* \rho^* E_m^\lambda \simeq \rho^* E_m^\lambda. \quad (6.7)$$

Поскольку $E_m B_2(m)$ -тривиально, из (6.7) и леммы 3 следует, что E_m^λ – линейно тривиальное расслоение на X_m^2 . Следовательно, E_m^λ тривиально в силу предложения 9 ниже, и E_m также тривиально. Таким образом, мы показали, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет свойству Т.

6.3. Инд-многообразия обобщенных флагов. Напомним сначала несколько основных определений, относящихся к обобщенным флагам в векторном пространстве (см. [16; § 3–5]). Пусть V – счетномерное векторное пространство. Множество $\mathcal{C}$ попарно различных подпространств в V называется *цепочкой*, если оно линейно упорядочено по включению. Цепочка $\mathcal{F}$ подпространств в V называется *обобщенным флагом* в V , если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) каждое подпространство $F \in \mathcal{F}$ имеет непосредственного последователя либо непосредственного предшественника, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ (соответственно $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}$) – множество подпространств из $\mathcal{F}$, имеющих непосредственного последователя (соответственно предшественника);

(ii) $V \setminus \{0\} = \bigsqcup_{F' \in \mathcal{F}'} (F'' \setminus F')$, где $F'' \in \mathcal{F}''$ – непосредственный последователь подпространства $F' \in \mathcal{F}'$.

Определим *флаг* в V как обобщенный флаг в V , изоморфный как упорядоченное множество подмножеству в $\mathbb{Z}$. Эквивалентным образом флаг можно определить как цепочку подпространств в V таких, что

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = 0, \quad \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = V$$

и существует строго монотонное отображение упорядоченных множеств

$$\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Если $\mathcal{F}$ – обобщенный флаг в V и $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – базис в V (где A – счетное множество), то будем говорить, что $\mathcal{F}$ и $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *согласованы*, если существует строгий частичный порядок $\prec$ на A такой, что для любого $F' \in \mathcal{F}'$ справедливо равенство $F' = \text{Span}\{e_\beta \mid \beta \prec \alpha\}$ для некоторого $\alpha \in A$ и $F'' = F' \oplus \text{Span}\{e_\gamma \mid \gamma \text{ не является } \prec\text{-сравнимым с } \alpha\}$.

В оставшейся части этого параграфа зафиксируем базис $E = \{e_n\}$ в V . Назовем обобщенный флаг $\mathcal{F}$ *слабо согласованным* с E , если $\mathcal{F}$ согласован с базисом L в V таким, что $E \setminus (E \cap L)$ – конечное множество. Далее, будем называть два обобщенных флага $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в V *E -соизмеримыми*, если оба флага $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ слабо согласованы с E и существует сохраняющая включение биекция $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ и конечномерное подпространство U в V такие, что для любого $F \in \mathcal{F}$

(i) $F \subset \phi(F) + U$, $\phi(F) \subset F + U$,

(ii) $\dim(F \cap U) = \dim(\phi(F) \cap U)$.

Пусть $\mathcal{FI}(\mathcal{F}, E)$ – множество всех обобщенных флагов в V , E -соизмеримых с $\mathcal{F}$. Следуя [16; предложение 5.2], снабдим $\mathcal{FI}(\mathcal{F}, E)$ структурой инд-многообразия следующим образом. Для каждого $m \geq 1$ обозначим $E_m := \{e_\alpha\}_{\alpha \leq m}$, $V_m := \text{Span}(E_m)$, $E_m^c := \{e_\alpha\}_{\alpha > m}$, $V_m^c := \text{Span}(E_m^c)$. Далее, для каждого $\mathcal{G} \in \mathcal{FI}(\mathcal{F}, E)$ выберем положительное целое число $m_{\mathcal{G}}$ такое, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ согласованы с базисами, содержащими $E_{m_{\mathcal{G}}}^c$, и $V_{m_{\mathcal{G}}}$ содержит конечномерное

подпространство U , которое вместе с соответствующей сохраняющей включение биекцией $\phi_{\mathcal{G}}: \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ делает $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ E -соизмеримыми. Мы можем выбрать целое число $n_{\mathcal{F}}$ такое, что $n_{\mathcal{F}} \leq m_{\mathcal{G}}$ для любого $\mathcal{G} \in \mathcal{F}l(\mathcal{F}, E)$. Положим

$$\mathcal{G}_m := \{G \cap V_m \mid G \in \mathcal{G}\}, \quad m \geq m_{\mathcal{G}}.$$

Тип флага $\mathcal{F}_m$ определяет последовательность целых чисел

$$0 < d_{m,1} < \dots < d_{m,s_{m-1}} < d_{m,s_m} = m.$$

Пусть $\mathcal{F}l(d_m, V_m)$ – обычное многообразие флагов типа $d_m = (d_{m,1}, \dots, d_{m,s_{m-1}})$ в V_m . Заметим, что $s_{m+1} = s_m$ либо $s_{m+1} = s_m + 1$. Далее, в обоих случаях определим целое число j_m следующим образом: в первом случае $d_{m+1,i} = d_{m,i}$ для $0 \leq i < j_m$ и $d_{m+1,i} = d_{m,i} + 1$ для $j_m \leq i < s_m$, а в последнем случае $d_{m+1,i} = d_{m,i}$ для $0 \leq i < j_m$ и $d_{m+1,i} = d_{m,i-1} + 1$ для $j_m \leq i < s_m$.

Теперь определим отображение $\iota_m: \mathcal{F}l(d_m, V_m) \rightarrow \mathcal{F}l(d_{m+1}, V_{m+1})$ для любого $m \geq m_{\mathcal{F}}$. Для заданного флага

$$\mathcal{G}_m = \{0 = G_0^m \subset G_1^m \subset \dots \subset G_{s_m}^m = V_m\} \in \mathcal{F}l(d_m, V_m)$$

положим

$$\iota_m(\mathcal{G}_m) = \mathcal{G}_{m+1} := \{0 = G_0^{m+1} \subset G_1^{m+1} \subset \dots \subset G_{s_{m+1}}^{m+1} = V_{m+1}\},$$

где

$$G_i^{m+1} = \begin{cases} G_i^m, & \text{если } 0 \leq i < j_m, \\ G_i^m \oplus ke_{m+1}, & \text{если } j_m \leq i \leq s_{m+1} \text{ и } s_{m+1} = s_m, \\ G_{i-1}^m \oplus ke_{m+1}, & \text{если } j_m \leq i \leq s_{m+1} \text{ и } s_{m+1} = s_m + 1. \end{cases}$$

Отображения ι_m – замкнутые вложения алгебраических многообразий, поэтому $\varinjlim \mathcal{F}l(d_m, V_m)$ является инд-многообразием. Биекция между $\mathcal{F}l(\mathcal{F}, E)$ и $\varinjlim \mathcal{F}l(d_m, V_m)$ задается так:

$$\tau: \mathcal{F}l(\mathcal{F}, E) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathcal{F}l(d_m, V_m), \quad \mathcal{G} \mapsto \varinjlim \mathcal{G}_m$$

(см. [16; предложение 5.2]).

Предположим теперь, что $\mathcal{F}$ – флаг подпространств в V . Тогда $\mathcal{F} = \{\dots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \dots\}_{i \in \Theta}$, где Θ – одно из четырех линейно упорядоченных множеств $\{1, \dots, n\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{Z}_{<0}$. Предположим вдобавок, что

$$\dim(F''/F') = \infty \tag{6.8}$$

для всех $i \in \Theta$ таких, что $i+1 \in \Theta$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{F}}(i)$ флаг

$$\widehat{\mathcal{F}} \setminus \{F_i\} = \{\dots \subset F_{i-1} \subset F_{i+1} \subset \dots\}.$$

Имеется естественная проекция $\pi_i: \mathcal{F}l(\mathcal{F}, E) \rightarrow \mathcal{F}l(\widehat{\mathcal{F}}(i), E)$. Пусть

$$\widehat{\mathcal{G}} = \{\dots \subset G_{i-1} \subset G_{i+1} \subset \dots\} \in \mathcal{F}l(\widehat{\mathcal{F}}(i), E),$$

$$\mathcal{G} = \{\dots \subset G_{i-1} \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \dots\} \in \pi_i^{-1}(\widehat{\mathcal{G}}).$$

Тогда слой $\pi_i^{-1}(\widehat{\mathcal{G}})$ есть инд-многообразие флагов $\mathcal{F}l(G_i/G_{i-1}, E(i))$, где

$$E(i) = (E \cap G_{i+1}) \setminus (E \cap G_{i-1}).$$

Заметим, что инд-многообразие флагов $\mathcal{Fl}(G_i/G_{i-1}, E(i))$ изоморфно инд-грассманиану $\mathbf{G}(\infty)$.

Более того, корректно определено линейное расслоение $\mathbf{L}_i := \mathcal{O}_{\pi_i}(1) := \varprojlim \mathcal{O}_{\pi_{im}}(1)$ на $\mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)$, где $\pi_{im}: \mathcal{Fl}(d_m, V_m) \rightarrow \mathcal{Fl}(\widehat{d}_m(i), V_m)$ – естественная проекция, а целое число $\widehat{d}_m(i)$ определяется таким же образом, как и d_m с использованием флага $\widehat{\mathcal{F}}(i)$ вместо флага $\mathcal{F}$. Тот факт, что линейные расслоения $\mathcal{O}_{\pi_{im}}(1)$ определяют корректно линейное расслоение $\mathcal{O}_{\pi_i}(1)$, устанавливается прямой проверкой, использующей явный вид вложений ι_m .

Обозначим через $\mathbf{B}_i(\mathcal{G})$ инд-многообразие проективных прямых на $\mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)$, проходящих через точку $\mathcal{G} \in \mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)$ и лежащих в слое проекции π_i , содержащем $\mathcal{G}$. Наконец, определим инд-многообразие $\Pi_i(\mathcal{G})$ как инд-многообразие $\Pi(\mathcal{G})$ для инд-грассманиана $\mathcal{Fl}(G_i/G_{i-1}, E(i)) \simeq \mathbf{G}(\infty)$, определенное в п. 4.3.

Легко проверить, что $\mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)$ удовлетворяет свойствам Л, А и Т по отношению к данным

$$\Theta_{\mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)} := \Theta, \quad \mathbf{L}_i, \quad \mathbf{B}_i := \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)} \mathbf{B}_i(\mathcal{G}), \quad \Pi_i := \bigcup_{\mathcal{G} \in \mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)} \Pi_i(\mathcal{G}).$$

В результате из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть V – счетномерное векторное пространство с базисом E . Пусть $\mathcal{F}$ – флаг в V , удовлетворяющий (6.8) и слабо согласованный с E . Тогда любое векторное расслоение на $\mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

Интересен вопрос о том, выполняется ли теорема БВТС для любого инд-многообразия обобщенных флагов $\mathcal{Fl}(\mathcal{F}, E)$ в предположении, что обобщенный флаг $\mathcal{F}$ удовлетворяет (6.8) для всех $F' \in \mathcal{F}'$ и их соответствующих последователей F'' .

§ 7. Приложение

В этом приложении собраны некоторые общие факты о когерентных пучках на проективных многообразиях и их поведении при плоских проективных морфизмах, используемые в статье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $p: Y \rightarrow X$ – гладкий проективный морфизм проективных многообразий с неприводимыми слоями.

1) Если E – векторное расслоение на Y , тривиальное на слоях проекции p , то канонический морфизм $\mathrm{ev}: p^*p_*E \rightarrow E$ – изоморфизм.

2) Если F – векторное расслоение на X , то канонический морфизм $F \xrightarrow{\sim} p_*p^*F$ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это легко следует из теоремы о замене базы (см. [13; гл. III, следствие 12.9]).

2) Рассмотрим разложение Штейна $p: Y \xrightarrow{p'} X' \xrightarrow{g} X$ морфизма p , где $X' = \mathrm{Spec}(p_*\mathcal{O}_Y)$ и $p'_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X'}$ (см. [13; гл. III, следствие 12.9]). Поскольку $p_*\mathcal{O}_Y$ – обратимый пучок по 1), то, следовательно, g – изоморфизм. Поэтому $p_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$. Это вместе с формулой проекции [13; гл. III, упражнение 8.3] приводит к требуемому утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ – сюръективный морфизм гладких неприводимых проективных многообразий такой, что

- (i) слои проекции π – проективные пространства;
- (ii) многообразие $Z := \{x \in X \mid \dim \pi^{-1}(x) > \dim Y - \dim X\}$ имеет коразмерность по крайней мере 3 в X , а многообразие $B := \pi^{-1}(Z)$ имеет коразмерность по крайней мере 2 в Y ;
- (iii) существует векторное расслоение F на $X \setminus Z$ такое, что $\pi: Y \setminus B \simeq \mathbb{P}(F) \rightarrow X \setminus Z$ совпадает со структурным морфизмом проективизированного векторного расслоения F .

Далее, пусть E – векторное расслоение на Y , тривиальное на слоях проекции π . Тогда $\mathcal{O}_X$ -пучок π_*E локально свободен, и канонический морфизм $\text{ev}: \pi^*\pi_*E \rightarrow E$ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\text{ev}: \pi^*\pi_*E \rightarrow E$ – изоморфизм. Для этого рассмотрим произвольное открытое подмножество $U \subset X$ и его замкнутое подмногообразие $A \subset U$ такое, что

$$\text{codim}_U A \geq 2. \quad (7.1)$$

Так как X гладко и Z имеет коразмерность ≥ 3 в X , то $\text{codim}_U(Z \cap A) \geq 3$ и $\text{codim}_{\pi^{-1}(U)} \pi^{-1}(Z \cap A) \geq 2$. Далее, из условия (iii) и (7.1) вытекает, что $\text{codim}_{\pi^{-1}(U)} \pi^{-1}(Z \setminus Z \cap A) \geq 2$. Следовательно,

$$\text{codim}_{\pi^{-1}(U)} \pi^{-1}(A) \geq 2. \quad (7.2)$$

Пусть $s \in H^0(U \setminus A, \pi_*E|_{U \setminus A})$ и пусть $\tilde{s} := \phi(s)$, где

$$\phi: H^0(U \setminus A, \pi_*E|_{U \setminus A}) \xrightarrow{\sim} H^0(\pi^{-1}(U \setminus A), E|_{\pi^{-1}(U \setminus A)})$$

– канонический изоморфизм. Поскольку E – локально свободный пучок на гладком многообразии Y , то E нормален в силу [17; предложение 1.6, (ii)], так что из (7.2) следует, что $\tilde{s}$ единственным образом продолжается до сечения $\tilde{s}' \in H^0(\pi^{-1}(U), E|_{\pi^{-1}(U)})$. Тогда s продолжается до сечения $s' := \psi(\tilde{s}') \in H^0(U, \pi_*E|_U)$, где

$$\psi: H^0(\pi^{-1}(U), E|_{\pi^{-1}(U)}) \xrightarrow{\sim} H^0(U, \pi_*E|_U)$$

– канонический изоморфизм. Ввиду (7.1) это означает, что пучок π_*E нормален.

Заметим, что π_*E не имеет кручения. В самом деле, если бы подпучок кручения $\text{Tors}(\pi_*E)$ пучка π_*E был ненулевым, то поскольку E локально свободен, в силу условия (iii) любое сечение $0 \neq s \in H^0(Y, \text{Tors}(\pi_*E))$ имело бы носитель в Z . Тогда сечение $0 \neq \tilde{s} := \psi^{-1}(s)$ имело бы носитель в B , т.е. $\text{Tors}(E) \neq 0$. Но это противоречило бы тому, что E локально свободен и Y гладко и неприводимо.

Следовательно, π_*E рефлексивен согласно [17; предложение 1.6]. Положим

$$\tilde{E} := \pi^*\pi_*E / \text{Tors}(\pi^*\pi_*E).$$

Предложение 6 вместе с условием (iii) показывает, что существует изоморфизм

$$\alpha: \tilde{E}|_{Y \setminus B} \xrightarrow{\sim} E|_{Y \setminus B}. \quad (7.3)$$

Теперь в силу [17; предложение 1.1] пучок π_*E включается локально по X в точную последовательность

$$0 \rightarrow \pi_*E \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \quad (7.4)$$

с локально свободными пучками L_1 и L_2 . Применяя к (7.4) функтор π^* , мы получаем последовательность

$$0 \rightarrow \tilde{E} \rightarrow \pi^*L_1 \rightarrow \pi^*L_2,$$

которая является точной, будучи ограниченной на $Y \setminus B$. Следовательно, сама эта последовательность точна, так как $\tilde{E}$ – пучок без кручения, а пучки π^*L_1 и π^*L_2 локально свободны. В силу [17; предложение 1.1] отсюда следует, что $\tilde{E}$ рефлексивен. Поэтому, обозначая через i вложение $Y \setminus B \hookrightarrow Y$ и используя изоморфизм (7.3) и [17; предложение 1.6, (iii)], получаем изоморфизм

$$\pi^*\pi_*E = \tilde{E} \cong i_*(\tilde{E}|_{Y \setminus B}) \xrightarrow[\cong]{i_*^\alpha} i_*(E|_{Y \setminus B}) \cong E.$$

Этот изоморфизм есть не что иное как канонический морфизм ev .

Осталось показать, что π_*E локально свободен. Изоморфизм ev показывает, что пучок $\pi^*\pi_*E$ локально свободен. Поэтому для любого $y \in Y$ $r := \dim_{\mathbb{C}(y)}(\pi^*\pi_*E \otimes \mathbb{C}(y))$ не зависит от y , а значит, $\dim_{\mathbb{C}(x)}(\pi_*E \otimes \mathbb{C}(x)) = r$, $x \in X$. Так как X гладко, то согласно [18; §5, лемма 1] из условия, что $\dim_{\mathbb{C}(x)}(\pi_*E \otimes \mathbb{C}(x))$ не зависит от $x \in X$, вытекает, что π_*E локально свободен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть Q_n – гладкая n -мерная квадрака в $\mathbb{P}^{n+1}$ при $n \geq 2$, и пусть E – линейно тривиальное векторное расслоение на Q_n . Тогда E тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем рассуждение индукцией по n . Для $n = 2$ доказательство легкое и совпадает с доказательством для случая проективного пространства, данным в [14; гл. I, теорема 3.2.1]. Поэтому предположим, что $n \geq 3$. Рассмотрим подпространство $\mathbb{P}^{n-1}$ коразмерности 2 в $\mathbb{P}^{n+1}$ такое, что $Q_{n-2} := Q_n \cap \mathbb{P}^{n-1}$ – гладкая квадрака размерности $n - 2$. Если $n \geq 4$, то $E|_l$ тривиально для любой проективной прямой $l \subset Q_{n-2}$, а следовательно, $E|_{Q_{n-2}}$ тривиально по предположению индукции. Для $n = 3$ квадрака Q_{n-2} – гладкая коника C . По теореме Бертини существует гладкая квадратичная поверхность Q_2 на Q_3 , содержащая конику C . Поскольку $E|_{Q_2}$ тривиально (будучи линейно тривиально), $E|_C$ также тривиально, т.е. наше утверждение выполняется для $n = 3$.

Теперь воспользуемся тривиальностью расслоения $E|_{Q_{n-2}}$ при $n \geq 4$, чтобы доказать тривиальность E . Пусть $\sigma_Q: \tilde{Q}_n \rightarrow Q_n$ – раздутие Q_n с центром в Q_{n-2} , и пусть $D := \sigma_Q^{-1}(Q_{n-2})$ – исключительный дивизор. Ясно, что $D \simeq Q_{n-2} \times \mathbb{P}^1$ и существует плоский сюръективный морфизм $\pi: \tilde{Q}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$, входящий в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} D = Q_{n-2} \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{i} & \tilde{Q}_n \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}^1, \end{array} \quad (7.5)$$

где i – вложение исключительного дивизора. По построению найдутся две различные точки $t_1, t_2 \in \mathbb{P}^1$ такие, что слой $Q_{n-1}(t) = \pi^{-1}(t)$ – гладкая квадрика для $t \in U := \mathbb{P}^1 \setminus \{t_1 \cup t_2\}$, а $Q_{n-1}(t_j) := \pi^{-1}(t_j)$ для $j = 1, 2$ – квадратичный конус с вершиной в точке.

Рассмотрим векторное расслоение $\tilde{E} := \sigma_Q^* E$ на $\tilde{Q}_n$. По конструкции $\tilde{E}$ тривиально на любой проективной прямой $l \subset Q_{n-1}(t)$, $t \in U$. Отсюда по предположению индукции получаем тривиальность расслоения $E|_{Q_{n-1}(t)}$, $t \in U$. Как следствие,

$$\begin{aligned} H^i(Q_{n-1}(t), \tilde{E}(-D)|_{Q_{n-1}(t)}) &= 0, \quad i \geq 0, \\ \dim H^i(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}) &= \begin{cases} r, & \text{если } i = 0, \\ 0, & \text{если } i \geq 1, \end{cases} \quad t \in U. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Далее, для $j = 1, 2$ пусть $\sigma: K_j \rightarrow Q_{n-1}(t_j)$ – раздутие конуса $Q_{n-1}(t_j)$ с центром в особой точке. Пусть $f_j: K_j \rightarrow Q_{n-2}$ – индуцированное $\mathbb{P}^1$ -расслоение, слои которого отображаются в проективные прямые на $Q_{n-1}(t_j)$ при морфизме σ . Так как $\tilde{E}_{t_j} := \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t_j)}$ тривиально вдоль проективных прямых на $Q_{n-1}(t_j)$, то, следовательно, расслоение $\tilde{E}_{K_j} := \sigma^* \tilde{E}_{t_j}$ тривиально вдоль слоев проекции f_j . Поэтому для произвольной точки $x \in Q_{n-2}$ получаем

$$\begin{aligned} H^i(Q_{n-2}, \tilde{E}_{K_j} \otimes \mathbb{C}_x) &= H^i(\mathbb{P}^1, r\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0, \quad i \geq 1, \\ H^i(Q_{n-2}, \tilde{E}_{K_j}(-\sigma^* D) \otimes \mathbb{C}_x) &= H^i(\mathbb{P}^1, r\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0, \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Это вместе с теоремой о замене базы для f_j показывает, что $R^i f_{j*} \tilde{E}_{K_j} = 0$ при $i \geq 1$ и $R^i f_{j*}(\tilde{E}_{K_j}(-\sigma^* D)) = 0$ при $i \geq 0$. Таким образом, из спектральной последовательности для проекции f_j находим

$$H^i(K_j, \tilde{E}_{K_j}) = 0, \quad i \geq 1, \quad H^i(K_j, \tilde{E}_{K_j}(-\sigma^* D)) = 0, \quad i \geq 0, \quad j = 1, 2. \quad (7.7)$$

Далее, рассмотрев раздутие вложенного в $\mathbb{P}^n$ конуса $Q_{n-1}(t_j)$, можно показать, что $\sigma_* \mathcal{O}_{K_j} = \mathcal{O}_{Q_{n-1}(t_j)}$ и $R^i \sigma_* \mathcal{O}_{K_j} = 0$, $i \geq 1$. Поэтому, полагая $\tilde{E}_{t_j} := \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t_j)}$ и пользуясь формулой проекции, получаем: $\sigma_* \tilde{E}_{K_j} = \tilde{E}_{t_j}$, $R^i \sigma_* \tilde{E}_{K_j} = 0$, $i \geq 1$, и

$$\sigma_*(\tilde{E}_{K_j}(-\sigma^* D)) = \tilde{E}_{t_j}(-D), \quad R^i \sigma_*(\tilde{E}_{K_j}(-\sigma^* D)) = 0, \quad i \geq 1.$$

Теперь спектральная последовательность Лере, примененная к σ , с учетом (7.7) показывает, что

$$\begin{aligned} H^i(Q_{n-1}(t_j), \tilde{E}_{t_j}) &= H^i(K_j, \tilde{E}_{K_j}) = 0, \quad i \geq 1, \\ H^i(Q_{n-1}(t_j), \tilde{E}_{t_j}(-D)) &= H^i(K_j, \tilde{E}_{K_j}(-\sigma^* D)) = 0, \quad i \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из равенств (7.6) и (7.8) следует ввиду замены базы для плоского морфизма π , что

$$R^i \pi_* \tilde{E} = 0, \quad i \geq 1, \quad R^i \pi_*(\tilde{E}(-D)) = 0, \quad i \geq 0. \quad (7.9)$$

Это же рассуждение дает изоморфизмы замены базы

$$b_t: \pi_* \tilde{E} \otimes \mathbb{C}_t \xrightarrow{\sim} H^0(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}), \quad t \in \mathbb{P}^1. \quad (7.10)$$

Рассмотрим дивизор $D = Q_{n-2} \times \mathbb{P}^1$ на $\tilde{Q}_n$ (см. диаграмму (7.5)) и проекции $Q_{n-2} \xleftarrow{\text{pr}_1} Q_{n-2} \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{P}^1$. По определению $\tilde{E}|_D = \text{pr}_1^*(\tilde{E}|_{Q_{n-2}})$, а значит, поскольку $\tilde{E}|_{Q_{n-2}}$ тривиально, замена базы для плоского морфизма pr_2 дает изоморфизмы

$$b': \text{pr}_{2*}(\tilde{E}|_D) \xrightarrow{\sim} H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathbb{C}^r \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \quad (7.11)$$

$$b'_t: \text{pr}_{2*}(\tilde{E}|_D) \otimes \mathbb{C}_t \xrightarrow{\sim} H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \simeq \mathbb{C}^r, \quad t \in \mathbb{P}^1. \quad (7.12)$$

Теперь рассмотрим точную тройку

$$0 \rightarrow \tilde{E}(-D) \rightarrow \tilde{E} \rightarrow E|_D \rightarrow 0 \quad (7.13)$$

и ее ограничение

$$0 \rightarrow \tilde{E}(-D)|_{Q_{n-1}(t)} \rightarrow \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)} \rightarrow (E|_{Q_{n-2}}) \otimes \mathbb{C}_t \rightarrow 0 \quad (7.14)$$

на слой $Q_{n-1}(t)$ проекции π над произвольной точкой $t \in \mathbb{P}^1$. Применяя функтор $R^i\pi_*$ к (7.13) и используя (7.9) и (7.11), получаем изоморфизм пучков

$$r_D: \pi_*\tilde{E} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{2*}(\tilde{E}|_D) \simeq \mathbb{C}^r \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}. \quad (7.15)$$

В частности, $\pi_*\tilde{E}$ – тривиальное расслоение. Соответственно, переходя к когомологиям в точной последовательности (7.14) и пользуясь (7.6), (7.8) и (7.12), получаем изоморфизмы

$$\text{res}_t: H^0(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}) \xrightarrow{\sim} H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}), \quad t \in \mathbb{P}^1. \quad (7.16)$$

По построению изоморфизмы (7.10), (7.12), (7.15) и (7.16) образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_*\tilde{E} \otimes \mathbb{C}_t & \xrightarrow[r_D \otimes \mathbb{C}_t]{\simeq} & \text{pr}_{2*}(\tilde{E}|_D) \otimes \mathbb{C}_t \\ b_t \downarrow \simeq & & b'_t \downarrow \simeq \\ H^0(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}) & \xrightarrow[\text{res}_t]{\simeq} & H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) = \mathbb{C}^r \end{array} \quad (7.17)$$

для $t \in \mathbb{P}^1$. Далее, так как $E|_{Q_{n-2}}$ тривиально, каноническое отображение $H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \otimes \mathcal{O}_{Q_{n-2}} \rightarrow E|_{Q_{n-2}}$ – изоморфизм, так что его композиция e_t с ограничением

$$H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \otimes \mathcal{O}_{Q_{n-1}(t)} \rightarrow H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \otimes \mathcal{O}_{Q_{n-2}}$$

эпиморфна для любого $t \in \mathbb{P}^1$ и входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}) \otimes \mathcal{O}_{Q_{n-1}(t)} & \xrightarrow[\pi^*\text{res}_t]{\simeq} & H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \otimes \mathcal{O}_{Q_{n-1}(t)} \\ \text{ev}_t \downarrow & & e_t \downarrow \\ \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)} & \xrightarrow{\text{res}_{Q_{n-2}}} & E|_{Q_{n-2}}. \end{array} \quad (7.18)$$

Здесь квадрика Q_{n-2} понимается как дивизор в $Q_{n-1}(t)$. В частности, через любую точку в $Q_{n-1}(t) \setminus Q_{n-2}$ проходит прямая, скажем, l , пересекающая Q_{n-2}

в точке, скажем, y . Поэтому, так как расслоение $\tilde{E}|_l$ тривиально, имеем коммутативную диаграмму отображений ограничения

$$\begin{array}{ccc} H^0(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}) & \xrightarrow[\simeq]{\text{res}_t} & H^0(Q_{n-2}, E|_{Q_{n-2}}) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H^0(l, \tilde{E}|_l) & \xrightarrow{\simeq} & H^0(y, \tilde{E}|_y). \end{array}$$

Следовательно, ρ – изоморфизм, и поэтому каноническое отображение ev_t в (7.18) – изоморфизм пучков. Беря его композицию с изоморфизмом

$$\pi^* b_t: \pi^* \pi_* \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)} \xrightarrow{\simeq} H^0(Q_{n-1}(t), \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}) \otimes \mathcal{O}_{Q_{n-1}(t)},$$

вытекающим из левого вертикального изоморфизма в (7.17), получаем канонический изоморфизм $\text{ev}|_{Q_{n-1}(t)}: \pi^* \pi_* \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)} \xrightarrow{\simeq} \tilde{E}|_{Q_{n-1}(t)}$. Так как этот изоморфизм имеет место для любого $t \in \mathbb{P}^1$, то имеем изоморфизм $\text{ev}: \pi^* \pi_* \tilde{E} \xrightarrow{\simeq} \tilde{E}$, который вместе с (7.15) дает тривиальность расслоения $\tilde{E}$. Поскольку, очевидно, $\sigma_{Q*} \mathcal{O}_{\tilde{Q}} = \mathcal{O}_Q$, то отсюда следует, что $E = \sigma_{Q*} \tilde{E} = \sigma_{Q*}(r \mathcal{O}_{\tilde{Q}}) = r \mathcal{O}_Q$, т.е. получаем утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть E – линейно тривиальное векторное расслоение на $GO(k, V)$ либо $GS(k, V)$. Тогда E тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $GO(k, V)$. Дадим доказательство по индукции в предположении, что $n := \dim V/2 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Случай, когда $\dim V$ нечетно, рассматривается аналогично.

Для $n = 2$ имеем $GO(1, V) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $GO(2, V) \simeq \mathbb{P}^1$, и для этих многообразий наше утверждение, очевидно, выполнено. Поэтому предположим, что $n \geq 3$, и проведем рассуждение индукцией по k . Если $k = 1$, то $GO(k, V)$ является $(2n - 2)$ -мерной квадрикой в $\mathbb{P}^{2n-1}$, так что наше утверждение выполняется в силу предложения 8. Теперь предположим, что $1 \leq k \leq n - 2$, и рассмотрим график инциденции Σ с естественными проекциями

$$GO(k, V) \xleftarrow{q} \Sigma \xrightarrow{p} GO(k+1, V) \quad (7.19)$$

(см. п. 5.1).

Пусть E – линейно тривиальное векторное расслоение на $GO(k+1, V)$. Тогда расслоение p^*E линейно тривиально на слоях проекции q . Поскольку эти слои являются квадриками, из предложения 8 следует, что p^*E тривиально на слоях проекции q . Кроме того, из предложения 6 вытекает изоморфизм $q_* q^* p^* E \xrightarrow{\simeq} p^* E$. Заметим, что расслоение p^*E тривиально на слоях проекции p , отображаемых проекцией q изоморфно на проективные пространства $\mathbb{P}^k$ на $GO(k, V)$. Поэтому расслоение $q_* p^* E$ тривиально вдоль этих проективных подпространств $\mathbb{P}^k$ на $GO(k, V)$. Тем самым, $q_* p^* E$ линейно тривиально на $GO(k, V)$. Таким образом, по предположению индукции расслоение $q_* p^* E$ тривиально. Поэтому p^*E и $E = p_* p^* E$ тривиальны.

Осталось рассмотреть случай $GO(n, V)$. Здесь мы проведем индукцию по n . При $n = 3$ $GO(n, V) \simeq \mathbb{P}^3$, а следовательно, утверждение в этом случае выполнено. При $n \geq 4$ рассмотрим график инциденции

$$\Pi_n := \{(V_1, V_n) \in Q_{2n-2} \times GO(n, V) \mid V_1 \subset V_n\}$$

с естественными проекциями

$$Q_{2n-2} \xleftarrow{p} \Pi_n \xrightarrow{q} GO(n, V). \quad (7.20)$$

Пусть E – линейно тривиальное векторное расслоение на $GO(n, V)$. Тогда q^*E тривиально вдоль прямых, лежащих в слоях проекции p , изоморфных $GO(n-1, \mathbb{C}^{2n-2})$. Следовательно, q^*E тривиально вдоль слоев проекции p по предположению индукции. Далее, из предложения 6 вытекает изоморфизм $p^*p_*q^*E \xrightarrow{\sim} q^*E$. Поскольку q^*E тривиально на слоях проекции p , то, значит, расслоение p_*q^*E тривиально на проективных подпространствах $\mathbb{P}^{n-1}$ на квадрике Q_{2n-2} . Поэтому p_*q^*E тривиально на прямых в Q_{2n-2} , так что оно тривиально по предложению 8. Наконец, $q^*E \simeq p^*p_*q^*E$ и $E = q_*q^*E$ также тривиальны.

Перейдем к случаю $GS(k, V)$. Заменяя GO на GS в диаграмме (7.19), получаем диаграмму $GS(k, V) \xleftarrow{q} \Sigma' \xrightarrow{p} GS(k+1, V)$, где p – $\mathbb{P}^k$ -расслоение, а q – $\mathbb{P}^{2n-2k-1}$ -расслоение. Соответственно, заменяя GO на GS и Q_{2n-2} на $\mathbb{P}(V_n)$ в диаграмме (7.20), получаем диаграмму $\mathbb{P}(V_n) \xleftarrow{p} \Pi'_n \xrightarrow{q} GS_n$. Это позволяет провести рассуждение, вполне аналогичное проведенному выше для случая $GO(k, V)$.

Список литературы

- [1] W. Barth, A. Van de Ven, “A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces”, *Invent. Math.*, **25**:1 (1974), 91–106.
- [2] А. Н. Тюрин, “Конечномерные расслоения на бесконечных многообразиях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:6 (1976), 1248–1268; англ. пер.: A. N. Tjurin, “Vector bundles of finite rank over infinite varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:6 (1976), 1187–1204.
- [3] E. Sato, “On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **17**:1 (1977), 127–150.
- [4] J. Donin, I. Penkov, “Finite rank vector bundles on inductive limits of Grassmannians”, *Int. Math. Res. Not.*, **2003**:34 (2003), 1871–1887.
- [5] I. Penkov, A. S. Tikhomirov, “Rank-2 vector bundles on ind-Grassmannians”, *Algebra, arithmetic, and geometry*, v. II, In honor of Yu. I. Manin, **270**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009, 555–572.
- [6] И. Б. Пенков, А. С. Тихомиров, “Тривиальность векторных расслоений на скрученных инд-грассманианах”, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011), 65–104; англ. пер.: I. Penkov, A. S. Tikhomirov, “Triviality of vector bundles on twisted ind-Grassmannians”, *Sb. Math.*, **202**:1 (2011), 61–99.
- [7] E. Sato, “On infinitely extendable vector bundles on G/P ”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **19**:1 (1979), 171–189.
- [8] E. Sato, “The decomposability of an infinitely extendable vector bundle on the projective space. II”, *Proceedings of the International symposium on algebraic geometry* (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya, Tokyo, 1978, 663–672.
- [9] W. Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed., *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, xiv+470 pp.
- [10] R. Hartshorne, “On the De Rham cohomology of algebraic varieties”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **45** (1975), 5–99.
- [11] I. Dimitrov, I. Penkov, J. A. Wolf, “A Bott–Borel–Weil theory for direct limits of algebraic groups”, *Amer. J. Math.*, **124**:5 (2002), 955–998.

- [12] I. Penkov, A. S. Tikhomirov, “Linear ind-Grassmannians”, *Pure Appl. Math. Q.*, **10**:2 (2014), 289–323.
- [13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, xvi+496 pp.
- [14] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progr. Math., **3**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980, vii+389 pp.
- [15] J. Harris, *Algebraic geometry. A first course*, Corrected reprint of the 1992 original, Grad. Texts in Math., **133**, Springer-Verlag, New York, 1995, xx+328 pp.
- [16] I. Dimitrov, I. Penkov, “Ind-varieties of generalized flags as homogeneous spaces for classical ind-groups”, *Int. Math. Res. Not.*, **55** (2004), 2935–2953.
- [17] R. Hartshorne, “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254**:2 (1980), 121–176.
- [18] Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971, 299 с.; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, 2nd ed., Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math., **5**, Oxford Univ. Press, London, 1974, x+279 pp.

Иван Боянович Пенков

(Ivan B. Penkov)

Jacobs University Bremen, Germany

E-mail: i.penkov@jacobs-university.de

Поступила в редакцию

08.05.2014 и 04.02.2015

Александр Сергеевич Тихомиров

(Aleksandr S. Tikhomirov)

Факультет математики

Национального исследовательского университета

“Высшая школа экономики”, г. Москва

E-mail: astikhomirov@mail.ru