Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Илюшечкин, Субдискриминанты симметрической матрицы и якобианы ее инвариантных отображений, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 6, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:32:28

УДК 512.643.5

Н. В. Илюшечкин

Субдискриминанты симметрической матрицы и якобианы ее инвариантных отображений

Приводятся выражения субдискриминантов симметрической матрицы через суммы квадратов якобианов некоторых ее инвариантных отображений. Даются простые, но сравнительно общие достаточные условия на упомянутые отображения, с тем чтобы они порождали все субдискриминанты, включая и дискриминант. В частности, на этом пути субдискриминанты могут быть порождены системой всех инвариантов симметрической матрицы, т.е. коэффициентами ее характеристического многочлена.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: субдискриминанты, якобианы, суммы квадратов.

DOI: 10.4213/sm8385

§ 1. Введение

1.1. Напомним вкратце важнейшие сведения о субдискриминантах симметрической матрицы. Пусть $\text{Sym}(n)$ – пространство вещественных симметрических матриц порядка n . Пусть матрица $X \in \text{Sym}(n)$, а $P = P_X(\lambda)$ – ее характеристический многочлен. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – полный набор корней многочлена P с учетом их кратностей, то k -м субдискриминантом $\text{sDis}_k(P)$ этого многочлена называется выражение

$$\text{sDis}_k(P) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, \#(I)=n-k} \prod_{(i,j) \in I, i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^2,$$

где символ $\#$ обозначает число элементов конечного множества. Кроме того, по определению

$$\text{sDis}_{n-1}(P) = n, \quad \text{sDis}_n(P) = 1.$$

Очевидно, субдискриминанты являются неотрицательными симметрическими многочленами от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, так что должны выражаться через элементы матрицы X . Поэтому уместно ввести для них обозначение

$$\text{sDis}_k(X) = \text{sDis}_k(P).$$

Заметим также, что $\text{sDis}_0(X)$ – это дискриминант матрицы X , который мы будем обозначать более простым символом $\text{Dis}(X)$.

1.2. В работе [1] приводится выражение дискриминанта симметрической матрицы в виде суммы квадратов некоторых многочленов, названных автором дискриминантными многочленами. Некоторые свойства этих многочленов автор рассматривал в работах [2]–[4]. Исследованию их свойств уделили внимание и другие авторы [5]–[7]. Мари-Франсуаза Рой в [8] обобщила результаты автора, представив в виде сумм квадратов также и все субдискриминанты симметрической матрицы.

При этом все слагаемые дискриминанта и субдискриминантов получались чисто алгебраическим путем – как миноры некоторой матрицы, элементами которой являются многочлены от элементов исходной матрицы.

1.3. Введем некоторые обозначения. Через E_{ij} будем обозначать квадратную матрицу порядка n , на пересечении i -й строки и j -го столбца которой стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Определим также симметрические матрицы Γ_{ii} при $i = 1, \dots, n$ и Γ_{ij} при $i < j$ равенствами

$$\Gamma_{ii} = E_{ii}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}).$$

Тогда $\text{Sym}(n)$ можно рассматривать как евклидово пространство размерности $N = n(n+1)/2$ с ортонормированным базисом Γ_{kl} , расположенным в порядке

$$11, 22, \dots, nn, 12, 13, \dots, 1n, 23, \dots, 2n, \dots, n-1n. \quad (1.1)$$

Координатами матрицы $X = (x_{ij})$ в этом базисе будут числа

$$x'_{ii} = x_{ii}, \quad x'_{ij} = \sqrt{2}x_{ij}, \quad i < j. \quad (1.2)$$

Формула для скалярного произведения в этом пространстве примет вид

$$\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY),$$

где символ Tr обозначает след матрицы.

С произвольной матрицей $X \in \text{Sym}(n)$ можно связать матрицу $X!$ размера $N \times n$. Делается это следующим образом. Матрицу $X = (x_{ij})$ мы впредь будем рассматривать как столбец $\widehat{X}$ размерности N , элементы которого суть x_{ii} и $\sqrt{2}x_{ij}$, расположенные в порядке (1.1). Пусть X^m – матрица X , возведенная в целую неотрицательную степень m , а $\widehat{X^m}$ – соответствующий ей столбец размерности N . Тогда матрица $X!$ образована столбцами $\widehat{X^0}, \widehat{X^1}, \dots, \widehat{X^{n-1}}$, расположенными в естественном порядке.

Выбор множителя $\sqrt{2}$ в предыдущих определениях обусловлен тем, что преобразование подобия

$$X = C^{-1}YC, \quad (1.3)$$

где X и Y – переменные симметрические матрицы, а C – постоянная ортогональная матрица, сохраняет квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} x_{ij}^2.$$

Далее, если $X = (x_{ij}) \in \text{Sym}(n)$, то элементы матрицы X^m обозначим через $x_{ij}^{(m)}$. Таким образом, в строке матрицы $X_!$ с номером ii стоят элементы

$$1, x_{ii}, x_{ii}^{(2)}, \dots, x_{ii}^{(n-1)},$$

а строка с номером ij при $i < j$ образована элементами

$$0, \sqrt{2}x_{ij}, \sqrt{2}x_{ij}^{(2)}, \dots, \sqrt{2}x_{ij}^{(n-1)}.$$

В дальнейшем будем нумеровать строки матрицы $X_!$ двойными индексами в порядке (1.1). Например, в случае $n = 3$ матрица $X_!$ имеет вид

$$X_! = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{11}^{(2)} \\ 1 & x_{22} & x_{22}^{(2)} \\ 1 & x_{33} & x_{33}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}x_{12} & \sqrt{2}x_{12}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}x_{13} & \sqrt{2}x_{13}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}x_{23} & \sqrt{2}x_{23}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Максимальные миноры матрицы $X_!$ будем называть дискриминантными многочленами. Минор, образованный строками с двойными индексами $i_1j_1, \dots, i_nj_n$, обозначим через $\langle i_1j_1, \dots, i_nj_n \rangle(X)$. Например, при $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \langle 11, 22, 33 \rangle(X) &= (x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{11})(x_{33} - x_{22}) \\ &\quad - (x_{22} - x_{11})x_{12}^2 + (x_{33} - x_{11})x_{13}^2 - (x_{33} - x_{22})x_{23}^2, \\ \langle 33, 12, 23 \rangle(X) &= 2x_{12}x_{23}(x_{33} - x_{11}) + 2x_{13}(x_{12}^2 - x_{23}^2). \end{aligned}$$

1.4. Как показано в [1], дискриминант $\text{Dis}(X)$ равен сумме квадратов всех дискриминантных многочленов. В [8] этот результат был распространен на субдискриминанты. Для пояснения введем некоторые обозначения. Пусть W – какая-либо вещественная матрица. Обозначим через $\mathfrak{M}_r(W)$ сумму квадратов всех миноров порядка r матрицы W . Пусть также $X_!(k)$ – подматрица матрицы $X_!$, образованная ее первыми k столбцами. Разумеется, $X_!(n) = X_!$. Тогда, как показано в [8],

$$\text{sDis}_{n-k}(X) = \mathfrak{M}_k(X_!(k)), \quad (1.4)$$

т.е. субдискриминанты симметрической матрицы также являются суммами квадратов некоторых многочленов.

Из представления (1.4) можно получить еще одно доказательство вещественности всех собственных чисел симметрической матрицы [9; п. 4.3.1].

Далее, так как преобразование (1.3) сохраняет сумму квадратов элементов столбца $\hat{X}$, то его можно рассматривать как линейное преобразование

$$\hat{X} = C^\wedge \hat{Y}$$

с ортогональной матрицей $C^\wedge$ порядка N . При этом как строки, так и столбцы матрицы $C^\wedge$ пронумерованы двойными индексами, расположенными в порядке (1.1).

Кроме того, из (1.3) следует, что для любой степени $m \geq 0$ справедливо

$$X^m = C^{-1}Y^mC,$$

что можно записать также в виде

$$\widehat{X^m} = C^\wedge \widehat{Y^m}.$$

Объединяя эти равенства при $m = 0, 1, \dots, k-1$, получаем формулу преобразования для матриц $X_!(k)$:

$$X_!(k) = C^\wedge Y_!(k). \quad (1.5)$$

Отсюда можно вывести формулы, по которым преобразуются максимальные миноры матриц $X_!(k)$ при выполнении преобразования (1.3).

1.5. Еще один способ (см. [2], [3]) построения дискриминантных многочленов связан с матрицей линейного отображения

$$X^\square: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \text{Sym}(n),$$

определенного формулой

$$X^\square(A) = AX - XA.$$

Максимальные миноры матрицы $X^\square$ этого отображения при подходящим образом выбранных базисах в $\mathfrak{so}(n)$ и $\text{Sym}(n)$ с точностью до знаков совпадают с многочленами $\langle i_1 j_1, \dots, i_n j_n \rangle(X)$.

§ 2. Формулировка основного результата

2.1. Итак, все субдискриминанты симметрической матрицы являются суммами квадратов некоторых многочленов от ее элементов. При этом все слагаемые субдискриминантов могут быть получены чисто алгебраическим путем. Ниже мы увидим, что упомянутые слагаемые можно получить и другим способом – как якобианы некоторых отображений пространства симметрических матриц в евклидово пространство подходящей размерности.

Пусть $X \in \text{Sym}(n)$ – симметрическая матрица,

$$I_1(X), I_2(X), \dots, I_n(X)$$

– ее инварианты, т.е., с точностью до знаков, – коэффициенты ее характеристического многочлена.

Пусть также $f_1(X), \dots, f_n(X)$ – набор n скалярных гладких класса C^1 функций от элементов матрицы X , определенных на всем пространстве $\text{Sym}(n)$, и являющихся одновременно функциями от инвариантов $I_1(X), I_2(X), \dots, I_n(X)$. Иначе говоря, мы будем выбирать функции f_i таким образом, чтобы существовали скалярные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ от n переменных $I_1, \dots, I_n$, удовлетворяющие условиям

$$f_m(X) = \varphi_m(I_1(X), \dots, I_n(X))$$

при всех $m = 1, \dots, n$. Для простоты будем предполагать, что каждая функция $\varphi_m \in C^1(R^n)$.

Конечно, все определенные таким образом функции f_m являются инвариантными, т.е. для любой матрицы $X \in \text{Sym}(n)$ и любой ортогональной матрицы $C \in O(n)$ имеет место равенство

$$f_m(C^{-1}XC) = f_m(X).$$

2.2. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F}: \text{Sym}(n) \rightarrow R^n,$$

которое каждой матрице X сопоставляет точку

$$\mathcal{F}(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$$

пространства R^n . Наряду с отображением $\mathcal{F}$ можно рассмотреть его проекции $\mathcal{F}_k$ на подпространства меньшей размерности

$$\mathcal{F}_k: \text{Sym}(n) \rightarrow R^k,$$

где $k \leq n$ и

$$\mathcal{F}_k(X) = (f_1(X), \dots, f_k(X)).$$

Разумеется, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$. Как мы увидим ниже, при определенных, не слишком жестких ограничениях, наложенных на функции $f_m(X)$, максимальные миноры матрицы $X_!(k)$ при всех $k = 1, \dots, n$ с точностью до постоянных множителей совпадают с максимальными минорами матрицы Якоби отображения $\mathcal{F}_k$. Точнее, при $k = 1, \dots, n$ мы будем рассматривать матрицу $J_{\mathcal{F}_k}(X)$, транспонированную к матрице Якоби этого отображения, и, кроме того, потребуем деления некоторых строк этой матрицы на $\sqrt{2}$. Окончательно, матрица $J_{\mathcal{F}_k}(X)$ имеет размер $N \times k$, как и матрица $X_!(k)$. Ее строки пронумерованы двойными индексами ij , расположенными в порядке (1.1). В строке с номером ii стоят элементы

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{ii}}, \frac{\partial f_2}{\partial x_{ii}}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_{ii}},$$

а строка с номером ij при $i < j$ образована элементами

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f_1}{\partial x_{ij}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f_2}{\partial x_{ij}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f_k}{\partial x_{ij}}.$$

Матрицу $J_{\mathcal{F}_n}(X)$ будем обозначать просто $J_{\mathcal{F}}(X)$. Нас интересуют максимальные миноры матриц $J_{\mathcal{F}_k}(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если инвариантные функции $f_1(X), \dots, f_n(X)$ таковы, что все максимальные миноры матриц $J_{\mathcal{F}_k}(X)$ совпадают с соответствующими минорами матриц $X_!(k)$ при всех $k = 1, \dots, n$ и $X \in \text{Sym}(n)$, то систему функций $f_1, \dots, f_n$ будем называть системой, порождающей субдискриминанты.

Теперь, если f_m – одна из инвариантных функций, упомянутых в формулировке теоремы 1, то, обозначив через $\partial f_m / \partial X'$ столбец производных

$$\frac{\partial f_m}{\partial X'} = \left(\frac{\partial f_m}{\partial x'_{11}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x'_{n-1n}} \right)^T,$$

получим формулу его преобразования как градиента при ортогональных заменах переменных

$$\frac{\partial f_m}{\partial X'} = C^\wedge \frac{\partial f_m}{\partial Y'}.$$

Частные производные по старым и новым переменным связаны соотношениями

$$\frac{\partial f_m}{\partial x'_{ii}} = \frac{\partial f_m}{\partial x_{ii}}, \quad \frac{\partial f_m}{\partial x'_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f_m}{\partial x_{ij}}, \quad i < j.$$

Поэтому градиенты $\partial f_m / \partial X'$ – это в точности столбцы определенной ранее матрицы $J_{\mathcal{F}}(X)$. Следовательно, эта матрица, а также все ее подматрицы $J_{\mathcal{F}_k}(X)$ преобразуются по той же самой формуле, что и матрица X_1 :

$$J_{\mathcal{F}_k}(X) = C^\wedge J_{\mathcal{F}_k}(Y). \quad (3.1)$$

3.2. Из формул (1.5) и (3.1) следует, что максимальные миноры матриц $X_1(k)$ и $J_{\mathcal{F}_k}(X)$ преобразуются по одним и тем же формулам, вытекающим из формулы Бине–Коши [10; гл. I, § 2]. Напомним эти формулы. Максимальный минор матрицы $J_{\mathcal{F}_k}(X)$, образованный строками с двойными индексами $i_1 j_1, \dots, i_n j_n$, будем обозначать через $J_{\mathcal{F}_k}(i_1 j_1, \dots, i_n j_n)(X)$.

Далее, миноры порядка k матрицы $C^\wedge$, образованные строками $p_1 q_1, \dots, p_k q_k$ и столбцами $r_1 t_1, \dots, r_k t_k$, обозначим через

$$C^\wedge(p_1 q_1, \dots, p_k q_k \mid r_1 t_1, \dots, r_k t_k).$$

Тогда из (1.5) и (3.1) вытекают следующие формулы преобразования максимальных миноров:

$$\begin{aligned} & \langle i_1 j_1, \dots, i_k j_k \rangle(X) \\ &= \sum C^\wedge(i_1 j_1, \dots, i_k j_k \mid p_1 q_1, \dots, p_k q_k) \langle p_1 q_1, \dots, p_k q_k \rangle(Y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & J_{\mathcal{F}_k}(i_1 j_1, \dots, i_k j_k)(X) \\ &= \sum C^\wedge(i_1 j_1, \dots, i_k j_k \mid p_1 q_1, \dots, p_k q_k) J_{\mathcal{F}_k}(p_1 q_1, \dots, p_k q_k)(Y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где в обоих случаях суммирование распространено на все возможные комбинации столбцов $p_1 q_1, \dots, p_k q_k$, расположенные в порядке (1.1).

3.3. Теперь предположим, что инвариантные функции $f_1, \dots, f_n$ определяются формулами (2.2). Нам нужно доказать равенства

$$J_{\mathcal{F}_k}(i_1 j_1, \dots, i_k j_k)(X) = \langle i_1 j_1, \dots, i_k j_k \rangle(X) \quad (3.4)$$

при всех $k = 1, \dots, n$ и всех сочетаниях индексов $i_1 j_1, \dots, i_k j_k$. В силу одинаковости формул преобразования (3.2) и (3.3) это достаточно сделать для случая

диагональной матрицы Y . При дальнейшем проведении доказательства мы всегда будем предполагать, что матрицы X и Y связаны формулой (1.3), и что матрица Y диагональна. Матрица Y в этом случае устроена просто. Ненулевыми у нее могут быть только первые n строк, причем i -я строка состоит из элементов

$$1, y_{ii}, y_{ii}^2, \dots, y_{ii}^{n-1}.$$

Таким образом, в первых n строках матрицы Y стоит матрица Вандермонда, образованная элементами $y_{11}, \dots, y_{nn}$, а все последующие ее строки равны нулю.

Перейдем к матрице $J_{\mathcal{F}}(Y)$. Пусть $Z = (z_{ij}) \in \text{Sym}(n)$ – переменная симметрическая матрица. Первым делом найдем производные от сумм Ньютона $S_m(Z)$ по всем переменным z_{ij} при $Z = Y$. Любая такая сумма для произвольной матрицы Z равна следу матрицы Z^m :

$$S_m(Z) = \text{Tr}(Z^m) = z_{11}^{(m)} + \dots + z_{nn}^{(m)}.$$

Далее в силу некоторой разницы в свойствах мы будем отличать диагональные переменные z_{ii} от недиагональных переменных z_{ij} при $i < j$. Индукцией по m нетрудно доказать, что

$$z_{ii}^{(m)} = z_{ii}^m + \tilde{z}_{ii}^{(m)}, \quad z_{ij}^{(m)} = z_{ij} \frac{z_{ii}^m - z_{jj}^m}{z_{ii} - z_{jj}} + \tilde{z}_{ij}^{(m)},$$

где каждый одночлен многочленов $\tilde{z}_{ii}^{(m)}$ и $\tilde{z}_{ij}^{(m)}$ имеет степень не менее 2 по совокупности недиагональных переменных z_{pq} .

Применительно к случаю диагональной матрицы $Z = Y$ первая из этих формул означает, что

$$\left. \frac{\partial z_{ii}^{(m)}}{\partial z_{ii}} \right|_{Z=Y} = m y_{ii}^{m-1},$$

а частные производные этого многочлена по всем остальным переменным равны нулю. Суммируя, получим

$$\left. \frac{\partial S_m(Z)}{\partial z_{ii}} \right|_{Z=Y} = m y_{ii}^{m-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial S_m(Z)}{\partial z_{ij}} \right|_{Z=Y} = 0, \quad i < j. \quad (3.6)$$

3.4. Займемся доказательством равенства (3.4) при $X = Y$. Прежде всего, во всех строках матрицы $J_{\mathcal{F}}(Y)$ с недиагональными номерами стоят нули. В самом деле, дифференцирование по переменной z_{ij} при $i < j$ дает

$$\left. \frac{\partial f_m}{\partial z_{ij}} \right|_{Z=Y} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial S_l} \frac{\partial S_l}{\partial z_{ij}} \Big|_{Z=Y} = 0$$

в силу формулы (3.6).

Поэтому осталось рассмотреть подматрицу, образованную первыми n строками. Мы докажем, что, выполняя только элементарные преобразования над

столбцами этой подматрицы, причем только слева направо (прибавление к столбцу одного из предыдущих столбцов, умноженного на какой-либо коэффициент), эту подматрицу можно привести к той же самой матрице Вандермонда, что стоит в первых строках матрицы Y_1 .

Применим индукцию по номеру k столбца. При $k = 1$ по предположению теоремы должно быть

$$f_1(Z) = S_1(Z) = z_{11} + \dots + z_{nn},$$

так что

$$\left. \frac{\partial f_1(Z)}{\partial z_{ii}} \right|_{Z=Y} = 1,$$

и первый столбец интересующей нас подматрицы состоит из одних единиц.

Далее, предположим, что для первых k столбцов наше утверждение верно, т.е. их можно элементарными преобразованиями слева направо привести к первым k столбцам матрицы Вандермонда, и рассмотрим столбец с номером $k + 1$. По предположению теоремы должно быть

$$f_{k+1}(Z) = \frac{S_{k+1}(Z)}{k+1} + \psi_{k+1}(S_1(Z), \dots, S_k(Z)).$$

Дифференцирования первого слагаемого в точке $Z = Y$ согласно (3.5) дают столбец

$$(y_{11}^k, y_{22}^k, \dots, y_{nn}^k)^T, \quad (3.7)$$

совпадающий с $(k + 1)$ -м столбцом матрицы Вандермонда.

Дифференцирования второго слагаемого по переменным z_{ii} в той же точке приводят к суммам

$$\sum_{m=1}^k \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial S_m} \frac{\partial S_m}{\partial z_{ii}} \Big|_{Z=Y} = \sum_{m=1}^k m \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial S_m} y_{ii}^{m-1}.$$

Следовательно, если при $m = 1, \dots, k$ столбец с номером m умножить на $m \partial \psi_{k+1} / \partial S_m$ и вычесть из $(k + 1)$ -го столбца, то он примет вид (3.7), что и доказывает возможность приведения интересующей нас подматрицы к матрице Вандермонда.

Так как при каждом k применяемые нами преобразования не выводят за пределы подматрицы $J_{\mathcal{F}_k}(Y)$, то все ее максимальные миноры не изменяются вследствие этих преобразований. А так как на конечном этапе эти максимальные миноры совпадают с соответствующими минорами матрицы $Y_1(k)$, то это совпадение имело место и до преобразований. Следовательно, система функций (2.2) является системой, порождающей субдискриминанты, и теорема 1 доказана.

§ 4. Примеры

4.1. Из доказательства теоремы 1 видно, что если в равенстве (2.2) положить

$$f_m(X) = \frac{S_m(X)}{m}$$

для всех $m = 1, \dots, n$, т.е. отбросить слагаемые, зависящие от сумм Ньютона с индексами, меньшими m , то, в случае если матрица Y диагональна, матрица $J_{\mathcal{F}}(Y)$ окажется равной матрице $Y!$ и преобразования столбцов для приведения первой из них ко второй здесь не нужны. В силу формул (3.2) и (3.3) в случае произвольной матрицы X также будет верным равенство $J_{\mathcal{F}}(X) = X!$ при, разумеется, описанном выше выборе функций $f_m(X)$, а именно

$$f_1(X) = \text{Tr}(X), \quad f_2(X) = \frac{\text{Tr}(X^2)}{2}, \quad \dots, \quad f_n(X) = \frac{\text{Tr}(X^n)}{n}.$$

Учитывая множители $\sqrt{2}$ в обеих матрицах, получаем отсюда простые соотношения

$$\frac{\partial \text{Tr}(X^m)}{\partial x_{ii}} = mx_{ii}^{(m-1)}, \quad \frac{\partial \text{Tr}(X^m)}{\partial x_{ij}} = 2mx_{ij}^{(m-1)}, \quad i < j,$$

не противоречащие теореме Эйлера об однородных функциях.

Таким образом, матрица $X!$ принадлежит семейству матриц $J_{\mathcal{F}}(X)$.

4.2. Из соотношений (2.1) нетрудно вывести, что инварианты симметрической матрицы (с точностью до знаков) выражаются через ее суммы Ньютона по формулам (2.2):

$$(-1)^{m+1} I_m(X) = \frac{S_m(X)}{m} + \psi_m(S_1(X), \dots, S_{m-1}(X)),$$

где все ψ_m – многочлены. Следовательно, функции

$$I_1(X), -I_2(X), I_3(X), \dots, (-1)^{n+1} I_n(X)$$

образуют систему, порождающую субдискриминанты.

Если же теперь убрать знаки минус у инвариантов с четными индексами, то от этого в матрице $J_{\mathcal{F}}(X)$ изменятся знаки у столбцов с четными номерами. Это приведет к изменению знаков у максимальных миноров матриц $J_{\mathcal{F}_k}(X)$ при некоторых k . Суммы квадратов всех таких миноров по-прежнему будут равны субдискриминантам $\text{sDis}_{n-k}(X)$.

Поэтому порождать субдискриминанты матрицы X удобно и с помощью системы инвариантов $I_1(X), \dots, I_n(X)$. Соответствующую этой системе матрицу будем обозначать просто через X_I . В ее строках с номерами ii стоят элементы

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_{ii}}, \frac{\partial I_2}{\partial x_{ii}}, \dots, \frac{\partial I_n}{\partial x_{ii}},$$

а строки с номерами ij при $i < j$ образованы элементами

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial I_1}{\partial x_{ij}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial I_2}{\partial x_{ij}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial I_n}{\partial x_{ij}}.$$

Максимальный минор этой матрицы, образованный строками с двойными индексами $i_1 j_1, \dots, i_n j_n$, будем обозначать через $I(i_1 j_1, \dots, i_n j_n; X)$. Из доказанного ранее следует, что этот минор только знаком (причем одним и тем

же для всех сочетаний индексов $i_1 j_1, \dots, i_n j_n$) может отличаться от дискриминантного многочлена $\langle i_1 j_1, \dots, i_n j_n \rangle(X)$. Например, при $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} I_1(X) &= x_{11} + x_{22} + x_{33}, \\ I_2(X) &= x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2, \\ I_3(X) &= x_{11}x_{22}x_{33} + 2x_{12}x_{13}x_{23} - x_{11}x_{23}^2 - x_{22}x_{13}^2 - x_{33}x_{12}^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$X_I = \begin{pmatrix} 1 & x_{22} + x_{33} & x_{22}x_{33} - x_{23}^2 \\ 1 & x_{11} + x_{33} & x_{11}x_{33} - x_{13}^2 \\ 1 & x_{11} + x_{22} & x_{11}x_{22} - x_{12}^2 \\ 0 & -\sqrt{2}x_{12} & \sqrt{2}(x_{13}x_{23} - x_{33}x_{12}) \\ 0 & -\sqrt{2}x_{13} & \sqrt{2}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}) \\ 0 & -\sqrt{2}x_{23} & \sqrt{2}(x_{12}x_{13} - x_{11}x_{23}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I(11, 22, 33; X) &= \begin{vmatrix} 1 & x_{22} + x_{33} & x_{22}x_{33} - x_{23}^2 \\ 1 & x_{11} + x_{33} & x_{11}x_{33} - x_{13}^2 \\ 1 & x_{11} + x_{22} & x_{11}x_{22} - x_{12}^2 \end{vmatrix} \\ &= x_{12}^2(x_{22} - x_{11}) - x_{13}^2(x_{33} - x_{11}) + x_{23}^2(x_{33} - x_{22}) \\ &\quad - (x_{22} - x_{11})(x_{33} - x_{11})(x_{33} - x_{22}) = -\langle 11, 22, 33 \rangle(X), \\ I(33, 12, 23; X) &= \begin{vmatrix} -\sqrt{2}x_{12} & \sqrt{2}(x_{13}x_{23} - x_{33}x_{12}) \\ -\sqrt{2}x_{23} & \sqrt{2}(x_{12}x_{13} - x_{11}x_{23}) \end{vmatrix} \\ &= 2x_{13}(x_{23}^2 - x_{12}^2) - 2x_{12}x_{23}(x_{33} - x_{11}) = -\langle 33, 12, 23 \rangle(X). \end{aligned}$$

Подматрицу матрицы X_I , образованную ее первыми k столбцами, будем обозначать через $X_I(k)$. Для этой подматрицы выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_k(X_I(k)) = \text{sDis}_{n-k}(X).$$

Так, при $n = 3$ максимальные миноры матрицы $X_I(2)$ таковы:

$$x_{11} - x_{22}, x_{11} - x_{33}, x_{22} - x_{33}$$

(однократно), а также

$$-\sqrt{2}x_{12}, -\sqrt{2}x_{13}, -\sqrt{2}x_{23}$$

(трехкратно). Поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2(X_I(2)) &= (x_{11} - x_{22})^2 + (x_{11} - x_{33})^2 + (x_{22} - x_{33})^2 + 6x_{12}^2 + 6x_{13}^2 + 6x_{23}^2 \\ &= 2I_1^2(X) - 6I_2(X) = \text{sDis}_1(X). \end{aligned}$$

Подводя итог, можно сказать следующее. Как известно [9; п. 4.2.2], субдискриминанты симметрической матрицы могут быть выражены через ее инварианты чисто алгебраически, как миноры матрицы Сильвестра–Хабихта. Как мы видели, их можно выразить также через частные производные инвариантов.

Список литературы

- [1] Н. В. Илюшечкин, “Об одном классе гладких матричнозначных функций”, *УМН*, **40:1**(241) (1985), 201–202; англ. пер.: N. V. Ilyushechkin, “On a certain class of smooth matrix-valued functions”, *Russian Math. Surveys*, **40:1** (1985), 223–224.
- [2] Н. В. Илюшечкин, “Дискриминант характеристического многочлена нормальной матрицы”, *Матем. заметки*, **51:3** (1992), 16–23; англ. пер.: N. V. Ilyushechkin, “Discriminant of the characteristic polynomial of a normal matrix”, *Math. Notes*, **51:3** (1992), 230–235.
- [3] Н. В. Илюшечкин, “О некоторых тождествах над элементами симметрической матрицы”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 31, Зап. научн. сем. ПОМИ, **303**, ПОМИ, СПб., 2003, 119–144; англ. пер.: N. V. Ilyushechkin, “On some identities for elements of a symmetric matrix”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **129:4** (2005), 3994–4008.
- [4] Н. В. Илюшечкин, “О соотношениях между слагаемыми дискриминанта симметрической матрицы”, *Матем. заметки*, **93:2** (2013), 310–312; англ. пер.: N. V. Ilyushechkin, “On relations between summands in the discriminant of a symmetric matrix”, *Math. Notes*, **93:2** (2013), 337–339.
- [5] B. N. Parlett, “The (matrix) discriminant as a determinant”, *Linear Algebra Appl.*, **355:1-3** (2002), 85–101.
- [6] Х. Д. Икрамов, “О размерности многообразия симметричных матриц с кратными собственными значениями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44:6** (2004), 963–967; англ. пер.: Kh. D. Ikramov, “On the dimension of the variety of symmetric matrices with multiple eigenvalues”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44:6** (2004), 911–915.
- [7] М. Дана, Х. Д. Икрамов, “О коразмерности многообразия симметричных матриц с кратными собственными значениями”, *Численные методы и вопросы организации вычислений. XVIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **323**, ПОМИ, СПб., 2005, 34–46; англ. пер.: M. Dana, Kh. D. Ikramov, “On the codimension of the variety of symmetric matrices with multiple eigenvalues”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137:3** (2006), 4780–4786.
- [8] M.-F. Roy, *Subdiscriminants of symmetric matrices are sums of squares*, Mathematics, algorithms, proofs (2005), Dagstuhl Seminar Proceedings, **05021**, IBFI, Dagstuhl, Germany, 2006, 4 с., <http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2006/347>.
- [9] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry*, Algorithms Comput. Math., **10**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, viii+602 с.
- [10] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 4-е изд., Наука, М., 1988, 549 с.; англ. пер. 1-го изд.: F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, v. 1, 2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959, x+374 pp., ix+276 pp.

Никита Васильевич Илюшечкин
(Nikita V. Ilyushechkin)
 ОАО “Концерн “Моринформсистема – Агат”,
 г. Москва
E-mail: ilyush55@mail.ru

Поступила в редакцию
 13.05.2014 и 01.10.2014