Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Кокурин, Свойства выпуклости образов нелинейных интегральных операторов, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 99–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:05:32

УДК 517.988

М. Ю. Кокурин

Свойства выпуклости образов нелинейных интегральных операторов

Для общих вполне непрерывных нелинейных интегральных операторов получены условия, при которых образ данного множества под действием такого оператора имеет выпуклое замыкание. С использованием этих результатов устанавливается единственность квазирешений нелинейных интегральных уравнений первого рода. Результаты применяются также для доказательства разрешимости уравнений первого рода на плотном подмножестве правых частей.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: нелинейный интегральный оператор, образ множества, замыкание, выпуклость, уравнение первого рода.

DOI: 10.4213/sm8386

§ 1. Введение

Рассмотрим интегральный оператор Урысона

$$F(u)(t) = \int_{\Delta} f(t, s, u(s)) ds, \quad t \in \Delta = [a, b]. \quad (1)$$

Пусть $X = \{u\}$ – нормированное пространство функций на Δ и оператор $F: X \rightarrow C(\Delta)$ вполне непрерывен. Таким образом, F непрерывен из X в $C(\Delta)$ и компактен, т.е. преобразует любое ограниченное множество в компактное. Пусть $D \subset X$ – заданное множество в X , случай $D = X$ не исключается. В этой статье нас интересуют условия, при которых образ $F(D) \subset C(\Delta)$ множества D имеет выпуклое замыкание $\overline{F(D)}$. Тот же вопрос будет изучен и в более общей ситуации, когда оператор F вполне непрерывно действует в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. Известные нам утверждения о свойствах выпуклости образов нелинейных операторов общего вида ограничиваются теоремой [1] о выпуклости замыкания $\overline{\mathcal{F}(X)}$ для максимально монотонного по Минти–Браудеру оператора $\mathcal{F}: X \rightarrow 2^{X^*}$ в рефлексивном банаховом пространстве X . Для ϕ -аккретивных операторов $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$ в паре банаховых пространств (X, Y) аналогичное утверждение см. в [2]. В то же время неизвестно сколько-нибудь широких классов интегральных операторов вида (1) со свойством (максимальной) монотонности или аккретивности. Впрочем, из упомянутой теоремы [1] нетрудно извлечь утверждения о выпуклости $\overline{\mathcal{F}(X)}$ для различных пар пространств (X, Y) и операторов Гаммерштейна $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$,

$$\mathcal{F}(u)(t) = \int_{\Delta} K(t, s)g(s, u(s)) ds, \quad t \in \Delta,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00239а).

порожденных максимально монотонным оператором Немыцкого

$$\mathcal{N}(u)(t) = g(t, u(t)), \quad t \in \Delta.$$

Для отображений $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ специальной квадратичной структуры интересные факты о свойствах выпуклости образа пространства X и сферы $S = \{u \in X : \|u\|_X = 1\}$ в нем установлены в [3]. При этом образом невыпуклого множества S оказывается множество $\mathcal{F}(S)$, близкое в определенном смысле к выпуклому. С аналогичным явлением мы встретимся ниже применительно к операторам (1) и невыпуклым множествам D достаточно общего вида.

Излагаемые далее результаты в основном относятся к свойствам выпуклости образов собственных, не обязательно выпуклых, подмножеств D основного пространства X . Случай $D = X$ зачастую также охватывается развиваемой теорией, что отмечается по ходу изложения.

Через Σ ниже обозначаем σ -алгебру измеримых по Лебегу подмножеств Δ , I_A есть индикаторная функция множества $A \subset \Delta$. Следующее условие описывает наши основные требования к пространству X и множеству D .

УСЛОВИЕ 1. Для любого множества $A \in \Sigma$ и любых функций $u, v \in D$ выполняется $uI_A + vI_{\Delta \setminus A} \in D$.

Обратимся вначале к случаю ограниченного множества D .

В приложениях интерес представляют прежде всего банаховы пространства X . Условию 1 удовлетворяют, например, пространства $X = L_p(\Delta)$, $1 \leq p \leq \infty$, и ограниченные множества вида

$$D = \{u \in L_p(\Delta) : u_0(t) \leq u(t) \leq u_1(t) \text{ для п.в. } t \in \Delta\}.$$

Здесь $u_0, u_1 \in L_p(\Delta)$ и $u_0(t) \leq u_1(t)$ п.в. на Δ . Эти множества, очевидно, непусты и выпуклы. Данная конструкция допускает следующее обобщение:

$$D = \{u \in L_p(\Delta) : u(t) \in U(t) \text{ для п.в. } t \in \Delta\}.$$

Здесь $U(t) \subset \mathbb{R}$ – замкнутые множества такие, что $\text{dist}_{\mathbb{R}}(0, U(t)) \leq \varphi(t)$, $\varphi \in L_p(\Delta)$ и точечно-множественное отображение $t \rightarrow U(t)$ измеримо на Δ . Требование измеримости равносильно тому, что для любого фиксированного $u \in \mathbb{R}$ функция $t \rightarrow \text{dist}_{\mathbb{R}}(u, U(t))$, $t \in \Delta$, измерима. При выполнении этих условий $D \neq \emptyset$ [4; добавление]. Ясно, что такое множество D невыпукло, если $U(t)$ невыпукло для t из множества положительной меры. В пространстве $X = L_\infty(\Delta)$ условию 1 удовлетворяют шары

$$D = \{u \in L_\infty(\Delta) : \|u\|_{L_\infty(\Delta)} \leq R\}.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть определяемый (1) оператор $F: X \rightarrow C(\Delta)$ вполне непрерывен, X – нормированное пространство функций на Δ , $D \subset X$ – ограниченное множество и выполняется условие 1. Тогда множество $\overline{F(D)}$ является выпуклым.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие 1 удобно представить в виде

$$I_A u + (1 - I_A) v \in D \quad \forall u, v \in D, \quad \forall A \in \Sigma.$$

В такой форме наше требование к D напоминает условие выпуклости

$$\alpha u + (1 - \alpha)v \in D \quad \forall u, v \in D, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

и получается из него заменой произвольной постоянной $\alpha \in [0, 1]$ на индикаторную функцию I_A произвольного измеримого множества $A \subset \Delta$. Следуя [5], множества D , удовлетворяющие условию 1, называем *выпуклыми по переключению*. Утверждение теоремы 1 теперь может быть сформулировано следующим образом: вполне непрерывный оператор (1) преобразует ограниченные выпуклые по переключению множества в “почти выпуклые”, т.е. во множества с выпуклым замыканием. Таким образом, теорема 1 устанавливает своеобразную инвариантность свойства выпуклости множеств при действии оператора (1). Очевидно, что ни условие полной непрерывности F , ни условие 1 теоремы 1 не являются необходимыми для того, чтобы прийти к заключению о выпуклости $\overline{F(D)}$. Действительно, интересующее нас свойство выполняется для произвольного линейного непрерывного оператора F при выборе в качестве D шара в пространстве $X = L_p$, $1 \leq p < \infty$, который условию 1 не удовлетворяет.

Работа организована следующим образом. В § 2 приводится доказательство основной теоремы 1. В § 3 результат теоремы 1 адаптируется к случаю, когда оператор (1) действует в банахово пространство, непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. Кроме того показано, что класс ограниченных выпуклых по переключению множеств D , выделяемый условиями теоремы 1, может быть расширен с включением в него и неограниченных множеств, в том числе совпадающих со всем пространством X . В § 4 обсуждаются некоторые приложения предыдущей теории к некорректным задачам с уравнениями, включающими операторы вида (1).

§ 2. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую теорему А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной меры [6; следствие 3], [7; п. 4.3.2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p(s) = (p_1(s), \dots, p_n(s))$, – фиксированная вектор-функция с интегрируемыми на Δ компонентами. Тогда множество

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \left(\int_A p_1(s) ds, \dots, \int_A p_n(s) ds \right), A \in \Sigma \right\}$$

является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Нам потребуется также следующая лемма, аналогичная лемме о выпуклости образа [7; п. 4.3.3].

ЛЕММА 1. Пусть выполняется условие 1. Тогда для любого конечного набора $T = \{t_i\}_{i=1}^n \subset \Delta$ множество

$$F_T(D) = \left\{ \left(\int_{\Delta} f(t_1, s, u(s)) ds, \dots, \int_{\Delta} f(t_n, s, u(s)) ds \right) : u \in D \right\}$$

выпукло в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $\xi^{(0)}, \xi^{(1)} \in F_T(D)$, так что

$$\xi^{(k)} = \left(\int_{\Delta} f(t_1, s, u^{(k)}(s)) ds, \dots, \int_{\Delta} f(t_n, s, u^{(k)}(s)) ds \right), \\ u^{(k)} \in D, \quad k = 0, 1.$$

Компоненты вектор-функции $\bar{p}(s) = (\bar{p}_1(s), \dots, \bar{p}_n(s))$

$$\bar{p}_i(s) = f(t_i, s, u^{(0)}(s)) - f(t_i, s, u^{(1)}(s)), \quad i = 1, \dots, n,$$

интегрируемы на Δ , поскольку $f(t, \cdot, u(\cdot))$ интегрируема для всех $t \in \Delta$ и всех $u \in D$. По теореме 2 множество

$$M_T = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \left(\int_A \bar{p}_1(s) ds, \dots, \int_A \bar{p}_n(s) ds \right), A \in \Sigma \right\}$$

выпукло. Оно содержит точки $x = 0$ и $x = \xi^{(0)} - \xi^{(1)}$, получающиеся соответственно при $A = \emptyset$ и $A = \Delta$. Поэтому для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется такое измеримое множество $A_\alpha \subset \Delta$, что

$$\alpha(\xi^{(0)} - \xi^{(1)}) = \left(\int_{A_\alpha} \bar{p}_1(s) ds, \dots, \int_{A_\alpha} \bar{p}_n(s) ds \right).$$

Но

$$\int_{A_\alpha} \bar{p}_i(s) ds = \int_{A_\alpha} [f(t_i, s, u^{(0)}(s)) - f(t_i, s, u^{(1)}(s))] ds = \int_{A_\alpha} f(t_i, s, u^{(0)}(s)) ds \\ + \int_{\Delta \setminus A_\alpha} f(t_i, s, u^{(1)}(s)) ds - \xi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\alpha \xi_i^{(0)} + (1 - \alpha) \xi_i^{(1)} \\ = \int_{A_\alpha} f(t_i, s, u^{(0)}(s)) ds + \int_{\Delta \setminus A_\alpha} f(t_i, s, u^{(1)}(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Определим функцию

$$u_\alpha(s) = u^{(0)}(s)I_{A_\alpha}(s) + u^{(1)}(s)I_{\Delta \setminus A_\alpha}(s), \quad s \in \Delta.$$

Поскольку $u^{(0)}, u^{(1)} \in D$ и $A_\alpha \in \Sigma$, по условию 1 имеем $u_\alpha \in D$. Согласно (2)

$$\alpha \xi_i^{(0)} + (1 - \alpha) \xi_i^{(1)} = \int_{\Delta} f(t_i, s, u_\alpha(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому

$$\alpha \xi^{(0)} + (1 - \alpha) \xi^{(1)} = \left(\int_{\Delta} f(t_1, s, u_\alpha(s)) ds, \dots, \int_{\Delta} f(t_n, s, u_\alpha(s)) ds \right) \in F_T(D).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим противное, тогда найдутся такие функции $\bar{g}_0, \bar{g}_1 \in \overline{F(D)}$, что

$$\bar{g}_\alpha = \alpha \bar{g}_0 + (1 - \alpha) \bar{g}_1 \notin \overline{F(D)}$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Поскольку $\overline{F(D)}$ — замкнутое множество в $C(\Delta)$, это влечет за собой $\text{dist}_{C(\Delta)}(\bar{g}_\alpha, \overline{F(D)}) = \omega > 0$. Зафиксируем $0 < \varepsilon < \omega/6$ и выберем функции $g_0, g_1 \in F(D)$ так, что

$$\|\bar{g}_0 - g_0\|_{C(\Delta)} \leq \varepsilon, \quad \|\bar{g}_1 - g_1\|_{C(\Delta)} \leq \varepsilon.$$

Тогда для функции

$$g_\alpha = \alpha g_0 + (1 - \alpha) g_1$$

выполняется $\|\bar{g}_\alpha - g_\alpha\|_{C(\Delta)} \leq \alpha \varepsilon + (1 - \alpha) \varepsilon = \varepsilon$. Следовательно,

$$\|g_\alpha - g\|_{C(\Delta)} \geq \|\bar{g}_\alpha - g\|_{C(\Delta)} - \|\bar{g}_\alpha - g_\alpha\|_{C(\Delta)} \geq \omega - \varepsilon \quad \forall g \in F(D). \quad (3)$$

Имеем $g_k = F(u_k)$, $u_k \in D$, $k = 0, 1$, т.е.

$$g_k(t) = \int_{\Delta} f(t, s, u_k(s)) ds, \quad k = 0, 1.$$

Зафиксируем на Δ сетку $T = \{t_i\}_{i=1}^n$ и образуем векторы $(g_0(t_i))_{i=1}^n$, $(g_1(t_i))_{i=1}^n$, где

$$g_k(t_i) = \int_{\Delta} f(t_i, s, u_k(s)) ds, \quad k = 0, 1.$$

Из леммы 1 следует, что для выбранной сетки T найдется функция $u^T \in D$ такая, что

$$\alpha g_0(t_i) + (1 - \alpha) g_1(t_i) = \int_{\Delta} f(t_i, s, u^T(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Введем обозначение $g^T = F(u^T)$, т.е.

$$g^T(t) = \int_{\Delta} f(t, s, u^T(s)) ds, \quad t \in \Delta.$$

Таким образом, $g^T \in F(D)$ и согласно (4)

$$\alpha g_0(t_i) + (1 - \alpha) g_1(t_i) = g^T(t_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Рассмотрим последовательность равномерных сеток $T_m = \{t_{m,i}\}_{i=1}^m$ на Δ с шагами $h_m = (b-a)/(m-1)$, $m \rightarrow \infty$. Поскольку $u^{T_m} \in D$, множество D ограничено, а оператор F вполне непрерывный, у последовательности сеток $\{T_m\}$ найдется подпоследовательность, вдоль которой функции $g^{T_m} = F(u^{T_m})$ имеют предел в $C(\Delta)$. Не уменьшая общности, можем считать, что такова сама исходная последовательность $\{T_m\}$ и при этом

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|g^{T_m} - g^*\|_{C(\Delta)} = 0, \quad g^* \in C(\Delta).$$

Итак, при достаточно большом m , $m \geq m_1$,

$$|g^{T_m}(t) - g^*(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \Delta. \quad (6)$$

Поскольку функция g^* непрерывна, она и равномерно непрерывна на отрезке $\Delta = [a, b]$, поэтому при $m \geq m_2 \geq m_1$ будет также

$$|g^*(t) - g^*(t_{m,i})| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1}], \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (7)$$

В силу (6) и (7) при $t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$, выполняется

$$\begin{aligned} & |g^{T_m}(t_{m,i}) - g^{T_m}(t)| \\ & \leq |g^{T_m}(t_{m,i}) - g^*(t_{m,i})| + |g^*(t_{m,i}) - g^*(t)| + |g^*(t) - g^{T_m}(t)| \leq 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку функции g_0, g_1 непрерывны на Δ , для них при $m \geq m_3 \geq m_2$ справедливо аналогичное (7) утверждение

$$|g_k(t) - g_k(t_{m,i})| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1}], \quad i = 1, \dots, m-1, \quad k = 0, 1. \quad (9)$$

Положим в (3) $g = g^{T_m} \in F(D)$ при фиксированном $m \geq m_3$. Тогда для $t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$, ввиду (5) имеем

$$\begin{aligned} |g_\alpha(t) - g^{T_m}(t)| &= |[\alpha g_0(t) + (1-\alpha)g_1(t)] - g^{T_m}(t)| \\ &= |\alpha(g_0(t) - g_0(t_{m,i})) + (1-\alpha)(g_1(t) - g_1(t_{m,i})) - (g^{T_m}(t) - g^{T_m}(t_{m,i}))| \\ &\leq |g_0(t) - g_0(t_{m,i})| + |g_1(t) - g_1(t_{m,i})| + |g^{T_m}(t) - g^{T_m}(t_{m,i})|. \end{aligned}$$

Используя (8) и (9), находим

$$|g_\alpha(t) - g^{T_m}(t)| \leq 5\varepsilon \quad \forall t \in \Delta = \bigcup_{i=1}^{m-1} [t_{m,i}, t_{m,i+1}].$$

Таким образом,

$$\|g_\alpha - g^{T_m}\|_{C(\Delta)} \leq 5\varepsilon, \quad m \geq m_3. \quad (10)$$

Из (3), (10) теперь следует

$$\omega - \varepsilon \leq \|g_\alpha - g^{T_m}\|_{C(\Delta)} \leq 5\varepsilon,$$

откуда $\omega \leq 6\varepsilon$. Полученное неравенство противоречит первоначальному предположению о том, что $\varepsilon < \omega/6$. Теорема доказана.

Условия на ядро $f(t, s, u)$ оператора (1), обеспечивающие компактность этого оператора в паре пространств $(L_p(\Delta), C(\Delta))$, $1 \leq p \leq \infty$, см., например, в [8; гл. X, § 1].

§ 3. Некоторые обобщения

В приложениях возникают операторы вида (1), действующие в различные вложенные в $C(\Delta)$ пространства, в том числе в гильбертовы пространства. Покажем, как предыдущая теория адаптируется к этой ситуации. Предположим, что оператор F , определяемый формулой (1), вполне непрерывно действует

из нормированного пространства X в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. В качестве Y могут выступать, например, соболевские пространства. Непрерывность вложения $Y \subset C(\Delta)$ означает, что

$$\|u\|_{C(\Delta)} \leq M \|u\|_Y \quad \forall u \in Y \quad (11)$$

с подходящей константой M . Ввиду (11) оператор F вполне непрерывен из X в $C(\Delta)$. В рассматриваемом случае $F(D) \subset Y \subset C(\Delta)$. Как и выше, D есть ограниченное множество в X , и нас интересует замыкание $\overline{F(D)}^Y$ образа $F(D)$ в метрике Y . Непосредственно из (11) следует

$$\overline{F(D)}^Y \subset \overline{F(D)}^C,$$

где через $\overline{F(D)}^C$ обозначено замыкание $F(D)$ в метрике $C(\Delta)$. Убедимся, что в наших условиях верно и обратное включение. Пусть $g \in \overline{F(D)}^C$. Тогда найдется последовательность $\{u_n\} \subset D$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(u_n) - g\|_{C(\Delta)} = 0, \quad g \in C(\Delta). \quad (12)$$

Поскольку оператор $F: X \rightarrow Y$ вполне непрерывен, $\{u_n\}$ ограничена в X , а Y — полное пространство, найдется подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, для которой $\{F(u_{n_k})\}$ сходится в Y . Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(u_{n_k}) - \tilde{g}\|_Y = 0, \quad \tilde{g} \in Y. \quad (13)$$

Из (11) тогда следует $\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(u_{n_k}) - \tilde{g}\|_{C(\Delta)} = 0$. Отсюда с учетом (12) получаем $\tilde{g} = g \in Y$. Согласно (13) элемент g является пределом последовательности $\{F(u_{n_k})\} \subset F(D)$ в метрике Y и, значит, $g \in \overline{F(D)}^Y$. Таким образом, $\overline{F(D)}^Y = \overline{F(D)}^C$, и ввиду выпуклости множества $\overline{F(D)}^C$ получаем следующий результат, обобщающий теорему 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть определяемый (1) оператор F вполне непрерывно действует из нормированного пространства X в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. Пусть $D \subset X$ — ограниченное множество и выполняется условие 1. Тогда замыкание $\overline{F(D)}^Y$ образа $F(D)$ в метрике Y является выпуклым множеством.

Утверждение теоремы 1 получается отсюда при $Y = C(\Delta)$.

В дальнейшем изложении все встречающиеся замыкания берутся в метрике пространства Y , поэтому индекс Y в обозначении замыкания для краткости опускается.

Предыдущие результаты допускают распространение на более широкий класс множеств D по сравнению с семейством ограниченных выпуклых по переключению множеств, выделяемым условиями теоремы 1. Считая, что пространства X, Y такие же, как в теореме 3, подчиним D следующему условию.

УСЛОВИЕ 2. Имеет место представление

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \quad D_n \subset D_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в котором ограниченные множества $D_n \subset X$ удовлетворяют условию 1.

В случае $X = L_\infty(\Delta)$ можно положить $D = X$ и

$$D_n = \{u \in L_\infty(\Delta) : \|u\|_{L_\infty(\Delta)} \leq n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В пространстве $X = L_p(\Delta)$, $1 \leq p \leq \infty$, условию 2 удовлетворяет, например, неограниченное множество

$$D = \{u \in L_p(\Delta) : u(t) \geq u_0(t) \text{ для п.в. } t \in \Delta, \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Delta} u(t) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

где $u_0 \in L_p(\Delta)$ – заданная функция, $\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Delta} u_0(t) < \infty$ и

$$D_n = \{u \in L_p(\Delta) : u_0(t) \leq u(t) \leq n \text{ для п.в. } t \in \Delta\}.$$

При выполнении условия 2 справедливо

$$F(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(D_n). \quad (14)$$

Если выполнены условия теоремы 3, то множества $F(D_n)$ имеют выпуклые замыкания $\overline{F(D_n)}$ в метрике Y . Нас интересует выпуклость замыкания $\overline{F(D)}$. Нетрудно видеть, что каждое множество D , удовлетворяющее условию 2, удовлетворяет и условию 1. Как показывает следующая теорема, при выполнении условия 2 требование ограниченности D может быть снято.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор (1) вполне непрерывно действует из нормированного пространства X в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. Предположим, что D удовлетворяет условию 2. Тогда множество $\overline{F(D)}$ является выпуклым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив противное, найдем такие $\bar{p}_0, \bar{p}_1 \in \overline{F(D)}$ и $\alpha \in (0, 1)$, что $\bar{p}_\alpha = \alpha \bar{p}_0 + (1 - \alpha) \bar{p}_1 \notin \overline{F(D)}$. Следовательно,

$$\operatorname{dist}_Y(\bar{p}_\alpha, \overline{F(D)}) = \omega > 0.$$

Выбрав $p_0, p_1 \in F(D)$ так, что $\|\bar{p}_0 - p_0\|_Y, \|\bar{p}_1 - p_1\|_Y \leq \omega/2$, аналогично доказательству теоремы 1 построим элемент $p_\alpha = \alpha p_0 + (1 - \alpha) p_1 \in Y$, для которого

$$\|p_\alpha - p\|_Y \geq \frac{\omega}{2} \quad \forall p \in \overline{F(D)}. \quad (15)$$

В силу (14) имеем $p_0 \in F(D_{n_0}), p_1 \in F(D_{n_1})$ для некоторых n_0, n_1 , поэтому

$$p_0, p_1 \in F(D_{\bar{n}}) \subset \overline{F(D_{\bar{n}})}, \quad \bar{n} = \max\{n_0, n_1\}.$$

По теореме 3 замыкания $\overline{F(D_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) выпуклы, следовательно,

$$p_\alpha \in \overline{F(D_{\bar{n}})} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F(D_n)}.$$

Ввиду очевидного включения

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F(D_n)} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F(D_n)}$$

с учетом (14) имеем $p_\alpha \in \overline{F(D)}$, что противоречит неравенству (15). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть оператор (1) вполне непрерывно действует из $L_\infty(\Delta)$ в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. Тогда множество $\overline{F(L_\infty(\Delta))}$ выпукло.

При анализе прикладных обратных задач интегральные операторы вида (1) часто рассматриваются на множествах D , состоящих из непрерывных функций и функций соболевских классов. Следующее замечание позволяет адаптировать теоремы 3 и 4 к этому случаю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть в условиях теорем 3 и 4 выполняется одно из включений

$$D \subset \mathcal{D} \subset X, \quad \mathcal{D} \subset D \subset X,$$

причем в первом случае множество D плотно в $\mathcal{D}$, а во втором $\mathcal{D}$ плотно в D . Тогда ввиду непрерывности оператора F справедливо $\overline{F(\mathcal{D})} = \overline{F(D)}$. Поэтому при выполнении требований указанных теорем множество $\overline{F(\mathcal{D})}$ выпукло.

Приведем несколько примеров использования замечания 2.

1. Полагая $\mathcal{D} = X = L_p(\Delta)$, $1 \leq p < \infty$, и $D = L_\infty(\Delta)$, заключаем, что если оператор (1) вполне непрерывно действует из $L_p(\Delta)$ в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$, то множество $\overline{F(L_p(\Delta))}$ выпукло. Мы воспользовались плотностью $L_\infty(\Delta)$ в $L_p(\Delta)$, $1 \leq p < \infty$, и тем, что рассматриваемый оператор вполне непрерывно действует из $L_\infty(\Delta)$ в Y . Использовалось также следствие 1. Выбирая в том же X , например, множества

$$\begin{aligned} D &= \{u \in L_\infty(\Delta) : u(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in \Delta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \\ D_n &= \{u \in L_\infty(\Delta) : 0 \leq u(t) \leq n \text{ для п.в. } t \in \Delta\}, \\ \mathcal{D} &= \{u \in L_p(\Delta) : u(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in \Delta\}, \quad 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

и пользуясь теоремой 4, получаем, что $\overline{F(\mathcal{D})}$ выпукло.

2. Выберем теперь $\mathcal{D} = W_2^1(\Delta)$, $D = X = L_2(\Delta)$, либо

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{u \in W_2^1(\Delta) : u(t) \geq 0, t \in \Delta\}, \\ D &= \{u \in L_2(\Delta) : u(t) \geq 0 \text{ для п.в. } t \in \Delta\}, \quad X = L_2(\Delta). \end{aligned}$$

Тогда выполняется второе включение из замечания 2: $\mathcal{D}$ плотно в D . В силу сказанного в п. 1 множество $\overline{F(\mathcal{D})}$ выпукло, если оператор (1) вполне непрерывно действует из $L_2(\Delta)$ в Y . В частности, при этом условии выпукло $\overline{F(W_2^1(\Delta))}$.

§ 4. Приложения к уравнениям первого рода

Утверждения теорем 1, 3, 4 применимы к интегральным уравнениям первого рода

$$F(u) = g, \quad u \in D, \quad (16)$$

с операторами $F: D \subset X \rightarrow Y$ вида (1). К уравнениям этого вида приводит широкий спектр прикладных обратных задач (см., например, [9] и имеющиеся там ссылки). Здесь D имеет смысл множества, которому искомое решение принадлежит из априорных соображений. Уравнения (16) с вполне непрерывными операторами F относятся в общем случае к классу некорректных задач [9], [10]. Содержательный анализ моделируемой обратной задачи зачастую позволяет установить единственность решения уравнения (16) для любого $g \in F(D)$. Вместо элемента $g \in F(D)$ на практике обычно бывает доступна некоторая его аппроксимация $\tilde{g}$, не обязательно лежащая в $F(D)$. В результате задача (16) с заменой g на $\tilde{g} \in Y$, вообще говоря, не имеет решений. В этой связи в теории некорректных задач вводится понятие квазирешения уравнения (16) на D , под которым понимается решение вариационной задачи

$$\min_{u \in D} \|F(u) - g\|_Y \quad (17)$$

с произвольным $g \in Y$. Если $g \in F(D)$, то множество квазирешений уравнения (16) на D совпадает с множеством решений (16). В то же время задача (17) может иметь решения и для элементов $g \notin F(D)$. С теоретической и вычислительной точек зрения представляет интерес вопрос о том, наследует ли задача (17) свойство однозначной разрешимости уравнения (16) в случае инъективности отображения $F: D \rightarrow Y$. В том случае, когда (16) – линейное уравнение первого рода, а D – выпуклое замкнутое множество, вопрос о единственности и устойчивости квазирешений допускает исчерпывающее исследование [11; гл. 1, § 6]. Доказанные выше теоремы позволяют перенести часть этих результатов на нелинейные уравнения (16) с интегральным оператором вида (1).

Пусть для определенности выполнены условия теоремы 3, тогда $\overline{F(D)}$ есть выпуклое множество в Y . Если (17) имеет решение $u^* \in D$, то элемент $y^* = F(u^*)$ является решением задачи

$$\min_{y \in \overline{F(D)}} \|y - g\|_Y. \quad (18)$$

Пусть банахово пространство Y является строго выпуклым, т.е. для всех $y_1, y_2 \in Y$ таких, что $y_1 \neq y_2$, $\|y_1\|_Y = \|y_2\|_Y = 1$, выполняется $\|y_1 + y_2\|_Y < 2$. Тогда в силу выпуклости замкнутого множества $\overline{F(D)}$ задача (18) имеет единственное решение y^* . Ввиду инъективности отображения $F: D \rightarrow Y$ элемент $u^* = F^{-1}(y^*)$ также определяется однозначно. Мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия теоремы 3, пространство Y является строго выпуклым и $F: D \subset X \rightarrow Y$ – инъективный оператор. Тогда для любого $g \in Y$ уравнение (16) имеет не более одного квазирешения на множестве D .

Поскольку в доказательстве теоремы 5 существенна лишь выпуклость $\overline{F(D)}$, ее вывод относится и к другим рассмотренным выше случаям, где это свойство имеет место. Таким образом, строгая выпуклость Y является достаточным дополнителем условием, гарантирующим положительный ответ на поставленный выше вопрос. Условиям теорем 3 и 5 удовлетворяют, например, пространства $Y = W_p^m(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$, $m \geq 1$.

Характерной чертой прикладных уравнений (16) с вполне непрерывным оператором F , представляющих собой некорректные задачи, является отсутствие для них конструктивного описания образа $F(D)$ и – как следствие – практически применимых теорем существования решения. Это же относится и к уравнениям с произвольными монотонными по Минти–Браудеру операторами. Поэтому при создании численных методов для таких уравнений существование искомого решения обычно постулируется [10], [11]. Тем не менее теоремы 1, 3, 4 при определенных условиях позволяют получать новые утверждения о разрешимости некорректных операторных уравнений вида (1), (16) на всюду плотном множестве правых частей. Поясним это на примере уравнения (16), оператор которого вполне непрерывно действует из $X = L_p(\Delta)$ в банахово пространство Y , непрерывно вложенное в $C(\Delta)$. Как мы видели в § 3, в этом случае замыкание $\overline{F(L_p(\Delta))}$ выпукло в Y .

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что уравнение $F(u) = g$, $u \in L_p(\Delta)$, разрешимо для всех $g \in \tilde{K} \cup \tilde{L}$, где $\tilde{K} \subset K$ и $\tilde{L} \subset L$ всюду плотны в конусах $K = \{g \in Y : g(t) \geq 0, t \in \Delta\}$ и $L = \{g(t) \equiv -C : C \geq 0\}$ соответственно. Тогда указанное уравнение разрешимо для всех g из всюду плотного множества в Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\tilde{K}, \tilde{L} \subset F(L_p(\Delta))$, поэтому

$$\overline{F(L_p(\Delta))} \supset \overline{\tilde{K} \cup \tilde{L}} = K \cup L.$$

Ввиду выпуклости $\overline{F(L_p(\Delta))}$ выполняется

$$\text{conv}(K \cup L) \subset \overline{F(L_p(\Delta))}.$$

Остается заметить, что $\text{conv}(K \cup L) = Y$. Последнее соотношение вытекает из представления

$$g(t) = \frac{1}{2}(2g(t) + C) + \frac{1}{2}(-C), \quad t \in \Delta, \quad g \in Y,$$

где $2g + C \in K$ для всех $C \geq 2\|g\|_{C(\Delta)}$. Таким образом, требуемым всюду плотным в Y множеством является $\overline{F(L_p(\Delta))}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты работы остаются в силе, если в качестве Δ в (1) взято замыкание ограниченной кусочно гладкой области в пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Они обобщаются также на случай, когда в (1) $u = (u_1, \dots, u_k)$ и $f = (f_1, \dots, f_l)$ являются вектор-функциями своих аргументов.

Предыдущие результаты могут быть применены и к уравнениям (16), включающим операторы более общего по сравнению с (1) вида:

$$F(u)(t) = \varphi(t, u(t)) + \int_{\Delta} f(t, s, u(s)) ds, \quad t \in \Delta = [a, b]. \quad (19)$$

К таким уравнениям приводят, в частности, задачи отыскания собственных функций и неподвижных точек нелинейных интегральных операторов. На искомую функцию могут быть наложены ограничения принадлежности множествам D различной геометрии, в том числе конусам неотрицательных функций. Операторы (19) в отличие от (1) не являются вполне непрерывными в типичных парах пространств. Подействовав на обе части уравнений (16), (19) инъективным линейным интегральным вполне непрерывным оператором, получаем эквивалентное уравнение вида (1), к которому может быть применима развитая выше теория, в том числе теоремы 5 и 6.

Список литературы

- [1] R. T. Rockafellar, “Convexity properties of nonlinear maximal monotone operators”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**:1 (1969), 74–77.
- [2] F. E. Browder, “Normal solvability and ϕ -accretive mappings of Banach spaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**:2 (1972), 186–192.
- [3] А. С. Матвеев, “О выпуклости образов квадратичных отображений”, *Алгебра и анализ*, **10**:2 (1998), 159–196; англ. пер.: A. S. Matveev, “On the convexity of the images of quadratic mappings”, *St. Petersburg Math. J.*, **10**:2 (1999), 343–372.
- [4] В. Л. Левин, *Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике*, Наука, М., 1985, 352 с.
- [5] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, КомКнига, М., 2005, 215 с.
- [6] А. А. Ляпунов, “О вполне аддитивных вектор-функциях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:6 (1940), 465–478.
- [7] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, 2-е изд., Физматлит, М., 2005, 384 с.; англ. пер. 1-го изд.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987, xiv+309 pp.
- [8] П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, *Интегральные уравнения*, Наука, М., 1968, 448 с.; англ. пер.: P. P. Zabrejko, A. I. Koshelev, M. A. Krasnosel'skij, S. G. Mikhlin, L. S. Rakovshchik, V. Ya. Stet'senko, *Integral equations*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975, xix+443 pp.
- [9] С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Сиб. науч. изд-во, Новосибирск, 2008, 460 с.
- [10] А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами*, Едиториал УРСС, М., 2002, 192 с.
- [11] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М., 1978, 206 с.; англ. пер.: V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana, *Theory of linear ill-posed problems and its applications*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2002, xiii+281 pp.

Михаил Юрьевич Кокурин
(Mikhail Yu. Kokurin)

Марийский государственный университет,
г. Йошкар-Ола
E-mail: kokurinmn@yandex.ru

Поступила в редакцию
19.05.2014 и 07.09.2014