Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Обобщенные классы Дирихле в полуплоскости и их применение к аппроксимации, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 147–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:19:14

УДК 517.547.5+517.518.32

А. М. Седлецкий

Обобщенные классы Дирихле в полуплоскости и их применение к аппроксимации

Введены обобщенные классы Дирихле аналитических функций в круге и полуплоскости. Найдена связь между этими классами и их нулевыми множествами. Получено точное достаточное условие нулевого подмножества обобщенного класса Дирихле в полуплоскости. С помощью него доказано (также точное) необходимое условие полноты системы экспонент в пространстве L^2 на полупрямой с правильно меняющимся весом порядка $\alpha \in [-1, 0]$.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: медленно меняющаяся функция, преобразование Лапласа, обобщенные классы Бергмана и Дирихле, нулевое множество, полнота системы экспонент.

DOI: 10.4213/sm8396

§ 1. Введение

Вопрос о распределении нулей аналитических функций различных классов относится к числу основных в комплексном анализе. Среди сфер приложения результатов и методов этого направления важное место занимает та ветвь теории аппроксимации, которая имеет дело с полнотой систем аналитических функций в функциональных пространствах. Показательным примером может служить теорема Саса в [1] (см. также [2]), по которой система экспонент

$$e(\Lambda) = (e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty}, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0, \quad (1.1)$$

полна в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty. \quad (1.2)$$

Доказательство этой теоремы в существенном опирается на описание нулевых множеств класса Харди H^2 .

Интерес к структуре нулевых множеств класса $\mathscr{D}$ функций с конечным интегралом Дирихле и близких к нему классов фактически берет начало с работы Л. Карлесона [3], в которой дано необходимое и (отдельно) достаточное условие нулевого подмножества класса $\mathscr{D}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00281).

Г. Шапиро и А. Шилдс в [4] рассмотрели класс $\mathcal{D}_\varphi$, ассоциированный с функцией

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < 1, \quad (1.3)$$

в предположении логарифмической выпуклости последовательности c_n . По определению класс $\mathcal{D}_\varphi$ состоит из степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

с условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{c_n} < \infty.$$

Если $c_n = 1/n$, то $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}$ и $\varphi(z) = 1 + \log(1/(1-z))$. В статье [4] утверждается, что условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(|z_n|^2)} < \infty, \quad |z_n| < 1, \quad (1.4)$$

достаточно для того, чтобы последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ была нулевым подмножеством класса $\mathcal{D}_\varphi$ и что в случае $c_n = 1/n^{1-\beta}$, $0 \leq \beta < 1$, условие (1.4) является точным.

Недавно результат работы [4] нашел применение к аппроксимационной тематике в статье И. О. Краснобаева [5], где доказано следующее. Пусть $-1 < \alpha < 0$, а $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция такая, что функция $t^\alpha l(t)$, $t \geq 1$, логарифмически выпукла. Пусть последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда для полноты системы (1.1) в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, t^\alpha l(t) dt)$ необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \lambda_n)^{1+\alpha} l^{-1}((\operatorname{Re} \lambda_n)^{-1}) = \infty. \quad (1.5)$$

Отмечая определенную эффективность такого применения, следует вместе с тем признать, что прямое использование пространства степенных рядов диктовало дополнительное требование ограниченности последовательности Λ , а также не позволило сделать утверждение о точности полученного условия (1.5) (хотя бы и при $l(t) \equiv 1$). Это не удивительно по следующей причине. Если $B = B(\mathbb{R}_+)$ – банахово пространство функций на полупрямой $\mathbb{R}_+$ такое, что $e^{-\lambda t} \in B$ для любого λ , $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то неполнота системы (1.1) в B равносильна существованию нетривиального функционала $\psi \in B'$, преобразование Лапласа которого

$$\Psi(w) := (\psi, e^{-wt}) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} \psi(t) dt, \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad (1.6)$$

обращается в нуль в точках λ_n (мы отождествляем функционал с представляющей его функцией). Значит, вопрос о полноте систем (1.1) в пространствах на полупрямой приводит к потребности исследования нулей преобразований

Лапласа специального вида – обобщенных классов Дирихле в полуплоскости (что, впрочем, и без того представляет независимый научный интерес). Использование степенных рядов (1.3) с помощью замены $z = e^{-wt}$ позволяет рассматривать лишь подклассы преобразований Лапласа, когда функции $\psi(t)$ в (1.6) принимают постоянные значения на интервалах $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Цели настоящей статьи состоят в следующем:

- 1) ввести целесообразным способом обобщенные классы Дирихле в круге и в полуплоскости и отыскать связь между ними и их нулевыми множествами;
- 2) получить достаточное условие нулевого подмножества обобщенных классов Дирихле в полуплоскости;
- 3) получить необходимое условие полноты системы (1.1) в пространствах $L^2(\mathbb{R}_+, t^\alpha l(t) dt)$ уже при всех $-1 \leq \alpha \leq 0$ и без каких-либо ограничений на расположение точек λ_n (при $\alpha = -1$ принимается ограничение $l(t)/t \in L^1(0, 1)$, которое диктуется требованием принадлежности функций системы (1.1) пространству $L^2(\mathbb{R}_+, t^\alpha l(t) dt)$);
- 4) доказать точность полученных условий.

Обобщенные классы Дирихле в круге и в полуплоскости мы определяем внутренним образом, а именно как классы аналитических функций с конечными интегралами

$$\iint_{|z|<1} |F'(z)|^2 (1-|z|)^\beta l \left(\frac{1}{1-|z|} \right) dx dy, \quad z = x + iy,$$

$$\iint_{u>0} |F'(w)|^2 u^\beta l \left(\frac{1}{u} \right) du dv, \quad w = u + iv,$$

соответственно. Здесь $\beta \in \mathbb{R}$, $l(t)$ – медленно меняющаяся функция: на бесконечности в первом случае и как на бесконечности, так и в нуле, во втором. Они обозначаются через $\mathcal{D}_{\beta,l}$, $D_{\beta,l}^+$ и через $\mathcal{D}_\beta$, D_β^+ в случае $l(t) \equiv 1$. При $\beta < -1$ эти классы тривиальны. По своим свойствам классы $\mathcal{D}_{\beta,l}$ близки классу $\mathcal{D}$, когда $0 < \beta < 1$, а при подходящих $l(t)$ также и в крайних точках $\beta = 0$, $\beta = 1$. Заметим, что $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$.

Классы $\mathcal{D}_{\beta,l}$, $D_{\beta,l}^+$ допускают описание на языке степенных рядов и преобразований Лапласа соответственно. Указанное описание класса $D_{\beta,l}^+$ повлекло требования $\beta \geq 0$ и $l(t)/t \in L^1(0, 1)$ в случае $\beta = 0$. При их выполнении для каждой функции $F(w) \in D_{\beta,l}^+$ доказано существование предела $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(w) = F(+\infty)$. Окончательно класс $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ мы определяем как *подкласс* в $D_{\beta,l}^+$, состоящий из функций с условием $F(+\infty) = 0$.

С использованием (в том числе) интегрального представления Лапласа функций класса $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ нами получены утверждения о связи классов $\mathcal{D}_{\beta,l}$, $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ и их нулевых множеств. Стоит отметить, что если речь идет о классах $\mathcal{D}_0$, D_0^+ , то подобная связь доказывается прямой заменой переменных в интеграле. Однако в рассматриваемом нами случае дело обстоит далеко не столь просто. После того как указанная связь установлена, достаточное условие нулевого подмножества класса $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$, $0 \leq \beta \leq 1$, вытекает из результата статьи [4]. На основании

этого и интегрального представления класса $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ выводится необходимое условие полноты системы (1.1) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, t^\alpha l(t) dt)$, $-1 \leq \alpha \leq 0$. Оно состоит в том, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{1+\alpha} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty, \quad (1.7)$$

если $-1 < \alpha \leq 0$, а при $\alpha = -1$ в нем $l(t)$ заменяется другой медленно меняющейся функцией, явно выражающейся через $l(t)$. Добавим еще, что предполагается логарифмическая выпуклость функции $t^\alpha l(t)$ при всех достаточно больших t . При $\alpha = 0$, $l(t) \equiv 1$ условие (1.7) переходит в условие Саса (1.2). Если последовательность Λ ограничена, то (1.7) равносильно (1.5).

Результат сформулирован в упрощенном варианте. На самом деле он верен для более широкого класса пространств $L^2(\mathbb{R}_+, \omega(t) dt)$, когда вес $\omega(t)$ лишь при $t \geq 1$ совпадает с $t^\alpha l(t)$, а в интервале $(0, 1)$ имеет довольно общую природу.

Одним из следствий полученного результата стало следующее необходимое условие полноты системы (1.1) в (невесовом) пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{2/p} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty$$

для любой логарифмически выпуклой медленно меняющейся функции $l(t)$ такой, что $t^{-1/p/(p-2)} \in L^1(1, \infty)$.

Далее, используя результат А. Нагеля, У. Рудина и Дж. Шапиро из [6], мы доказываем утверждение о множествах единственности классов $\mathcal{D}_{\beta,l}$ и $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$, а затем – утверждение о точности необходимого условия полноты (1.7) и достаточного условия (1.4) в случае $c_n = l(n)/n^\beta$, $0 \leq \beta \leq 1$.

В исследуемом здесь вопросе полноты систем (1.1) в пространствах $L^2(\mathbb{R}_+, t^\alpha l(t) dt)$ ограничение $-1 \leq \alpha \leq 0$ на параметр α тесно связано с возможностью применения нулевых множеств обобщенных классов Дирихле. В связи с этим добавим, что исследование данного вопроса при $\alpha > 0$, $l(t) \equiv 1$ опирается на структуру нулевых множеств классов Бергмана (см. [7], [8]) и что при $\alpha < -1$ этот вопрос полностью решен в [9] для пространств $L^p(\mathbb{R}_+, (1 + t^2)^{\alpha/2} dt)$, $1 \leq p < \infty$, путем привлечения нулевых множеств классов аналитических функций, гладких вплоть до границы.

§ 2. Медленно меняющиеся функции (свойства и леммы)

2.1. Свойства. Функцию $l(t)$, определенную на некоторой полупрямой $t \geq A$, называют *медленно меняющейся* (или *медленно меняющейся на бесконечности*), если $l(t)$ положительна, измерима и при любом $\lambda > 0$

$$\frac{l(\lambda t)}{l(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Класс таких функций обозначаем через L_∞ . Говорим, что функция $l(t)$, $0 < t \leq A$, медленно меняется в нуле, и пишем $l(t) \in L_0$, если $l(1/t) \in L_\infty$.

В настоящей статье функция $l(t)$ постоянно будет фигурировать как сомножитель в произведении, играющем роль веса. Поэтому договоримся о том, что медленно меняющаяся функция $l(t)$, $t > 1$, подразумевается положительной и интегрируемой на каждом интервале вида $(1, A)$, $1 < A < \infty$, а функция $l(t) \in L_\infty \cap L_0$ подразумевается положительной и интегрируемой на каждом интервале вида (a, A) , $0 < a < A < \infty$.

Нам понадобятся следующие свойства медленно меняющихся функций $l(t)$.

СВОЙСТВО 1. Соотношение (2.1) равномерно по $\lambda \in [a, b]$ при любых $0 < a < b < \infty$.

СВОЙСТВО 2. Если $l(t) \in C^1[A, \infty)$ и

$$tl'(t) = o(l(t)), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

то $l(t) \in L_\infty$.

Для любой функции $l_1(t) \in L_\infty$ найдется функция $l(t) \in L_\infty \cap C^1[A, \infty)$ такая, что $l(t) \sim l_1(t)$, $t \rightarrow +\infty$, и выполнено соотношение (2.2).

Следуя монографии [10], функцию $l(t) \in L_\infty \cap C^1[A, \infty)$ с условием (2.2) будем называть *нормализованной* медленно меняющейся функцией.

СВОЙСТВО 3. Если $\varepsilon > 0$, то $l(t)/t^\varepsilon \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$; если, кроме того, $l(t)$ нормализованная, то $l(t)/t^\varepsilon$ убывает при всех достаточно больших t .

Пусть функция $f(t)$, $t > 0$, такова, что $e^{-\delta t} f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ при любом $\delta > 0$. Через $F(w)$ обозначаем ее преобразование Лапласа

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} f(t) dt, \quad u = \operatorname{Re} w > 0, \quad (2.3)$$

и пусть

$$L(t) = \int_1^t \frac{l(u)}{u} du, \quad t > 1. \quad (2.4)$$

СВОЙСТВО 4 (абелева теорема). 1) Пусть $\gamma > -1$ и

$$f(t) \sim t^\gamma l(t), \quad t \rightarrow +0, \quad l(t) \in L_0.$$

Тогда

$$F(u) \sim \Gamma(1 + \gamma) \frac{1}{u^{1+\gamma}} l\left(\frac{1}{u}\right), \quad u \rightarrow +\infty.$$

2) Пусть $f(t) = t^{-1}l(t)$, $l(t) \in L_\infty$ и $L(\infty) = \infty$. Тогда

$$F(u) \sim L\left(\frac{1}{u}\right), \quad u \rightarrow +0.$$

Свойства 1–3 содержатся, например, в [10], [11], а свойство 4 – в [12], [13] и [7] соответственно при $\gamma > -1$ и $\gamma = -1$.

СВОЙСТВО 5 (абелева теорема для степенных рядов). Пусть $l(t) \in L_\infty$. Обозначим

$$\varphi_{\beta,l}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n^\beta} r^n, \quad 0 < r < 1.$$

Тогда если $\beta < 1$, то

$$\varphi_{\beta,l}(r) \sim \frac{1}{(1-r)^{1-\beta}} l\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \rightarrow 1-0,$$

и если $L(\infty) = \infty$, то

$$\varphi_{1,l}(r) \sim L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \rightarrow 1-0.$$

В случае $\beta < 1$ свойство 5 доказано в [10], [13]. Случай $\beta = 1$ сводится к свойству 4 заменой $r = e^{-t}$ и переходом от ряда к интегралу по полупрямой.

2.2. Леммы. Пусть $a(z), b(z) > 0$, $z \in Z$; будем писать $a(z) \asymp b(z)$, $z \in Z$, если

$$0 < m \leq \frac{a(z)}{b(z)} \leq M < \infty, \quad z \in Z.$$

Символ $\asymp$ также употребляем и для обозначения эквивалентности норм в нормированных пространствах.

ЛЕММА 1. Пусть $\beta > -1$ и $l(t)$, $t \geq 1$, — медленно меняющаяся функция. Тогда

$$I_n = I_n(\beta) := \int_0^1 t^\beta l\left(\frac{1}{t}\right) (1-t)^{2n+1} dt \asymp \frac{l(n)}{n^{1+\beta}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_n = I_n^1 + I_n^2$, где I_n^1, I_n^2 — части интеграла I_n , соответствующие интервалам $(0, \delta)$ и $(\delta, 1)$, $0 < \delta < 1$. Интеграл I_n^2 убывает экспоненциально, поэтому достаточно доказать (2.5) для I_n^1 . Положим $1-t = e^{-x}$. Тогда $t \asymp x$, $0 < t < \delta$, $0 < x < \Delta$. Отсюда $l(1/t) \asymp l(1/x)$ по свойству 1 и, значит,

$$I_n^1 \asymp \int_0^\Delta e^{-Nx} x^\beta l\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad N = 2n + 2 \rightarrow \infty.$$

Остается применить абелеву теорему (свойство 4).

ЛЕММА 2. Пусть $l(t) \in L_0 \cap L_\infty \cap C^1(\mathbb{R}_+)$ и выполнено условие (2.2) как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow 0$. Тогда найдется $M \geq 1$ такое, что для любого $k > 1$

$$(Mk)^{-1} l(t) \leq l(kt) \leq Mkl(t), \quad t > 0. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуемся свойством 3. Найдутся $0 < t_0 < t_1 < \infty$ такие, что функция $l(t)/t$ убывает на $(0, t_0]$ и $[t_1, \infty)$. Фиксируем t_0 столь малым, а t_1 столь большим, чтобы

$$\frac{l(t_0)}{t_0} > \frac{l(t_1)}{t_1},$$

после чего переопределим функцию $l(t)/t$ на отрезке $[t_0, t_1]$ как линейную с сохранением непрерывности в точках t_0, t_1 . Тогда $l(t)/t$ будет убывать всюду, причем сглаживание графика функции $l(t)/t$ в малых окрестностях точек $t_0, 1/t_1$ сохранит ее убывание и (что немаловажно) переопределенная таким образом функция $l(t)$ будет принадлежать классу $C^1(\mathbb{R}_+)$. Это переопределение сохранило и свойство (2.2) как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow +0$. Следовательно,

$$tl'(t) = O(l(t)), \quad 0 < t < \infty. \quad (2.7)$$

Теперь, применяя теорему Лагранжа, а затем последовательно свойство (2.7) и убывание функции $l(t)/t$, получаем (при $t^* \in (t, kt)$)

$$l(kt) = l(t) + l'(t^*)(k-1)t \leq l(t) + M \left(\frac{l(t^*)}{t^*} \right) (k-1)t \leq l(t) + M(k-1)l(t).$$

Это доказывает правое неравенство (2.6).

Функция $l(1/t)$ обладает теми же свойствами, что и $l(t)$ (т.е. принадлежит классам $L_0, L_\infty, C^1(\mathbb{R}_+)$ и для нее выполняется условие (2.2) как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow +0$). Значит, для нее верно доказанное правое неравенство (2.6). Применяя его, получаем

$$l\left(\frac{1}{kt}\right) \leq Mkl\left(\frac{1}{t}\right) \iff l\left(\frac{t}{k}\right) \leq Mkl(t) \iff l(t) \leq Mkl(kt).$$

Двойное неравенство (2.6) доказано полностью. Лемма доказана.

§ 3. Обобщенные пространства Бергмана и Дирихле

3.1. Случай круга. Пусть $0 < q < \infty$, $\beta > -1$ и $l(t)$, $t \geq 1$, — медленно меняющаяся функция. Через $A_{\beta,l}^q$ обозначаем пространство аналитических в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\|F\|_{A,q,\beta,l}^q = \iint_{|z|<1} |F(z)|^q (1-|z|)^\beta l\left(\frac{1}{1-|z|}\right) dx dy < \infty, \quad z = x + iy.$$

При $l(t) \equiv 1$ пространства $A_{\beta,l}^q$ превращаются в хорошо известные пространства Бергмана A_β^q (см., например, [14]). Когда $1 \leq q < \infty$, $A_{\beta,l}^q$ есть банахово пространство с нормой $\|F\|_{A,q,\beta,l}$.

Рассмотрим степенной ряд

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (3.1)$$

Равенство Парсеваля и лемма 1 позволяют установить следующую связь между поведением коэффициентов a_n и принадлежностью функции $F(z)$ пространству $A_{\beta,l}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\beta > -1$, $l(t) \in L_\infty$. Тогда если $F(z)$ – функция (3.1), то $F(z) \in A_{\beta,l}^2$ тогда и только тогда, когда $((l(n)/n^{1+\beta})^{1/2} a_n)_{n=1}^\infty \in l^2$. При этом

$$\|F\|_{A,2,\beta,l}^2 \asymp |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n^{1+\beta}} |a_n|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} \|F\|_{A,2,\beta,l}^2 &= \int_0^1 (1-r)^{\beta} l \left(\frac{1}{1-r} \right) r dr \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^1 (1-r)^{\beta} l \left(\frac{1}{1-r} \right) r^{2n+1} dr = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 I_n(\beta), \end{aligned}$$

и утверждение следует из леммы 1.

При $\beta > -1$ обобщенный класс Дирихле $\mathcal{D}_{\beta,l}$ определим как класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$ и таких, что $f'(z) \in A_{\beta,l}^2$. Пишем $\mathcal{D}$ вместо $\mathcal{D}_{\beta,l}$, когда $l(t) \equiv 1$. Пространство $\mathcal{D}_0$ есть пространство $\mathcal{D}$ функций с конечным интегралом Дирихле.

Из предложения 1 сразу следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\beta > -1$, $l(t) \in L_\infty$. Тогда если $F(z)$ – функция (3.1), то $F(z) \in \mathcal{D}_{\beta,l}$ тогда и только тогда, когда

$$((l(n)n^{1-\beta})^{1/2} a_n)_{n=1}^\infty \in l^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение 2 показывает, что $\mathcal{D}_1 = H^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из предложения 2 следует, что при $\beta < 0$ все функции пространства $\mathcal{D}_{\beta,l}$ непрерывны в замкнутом круге $|z| \leq 1$, а предложения 1 и 2 показывают, что

$$\mathcal{D}_{\beta,l} = A_{\beta-2,l}^2, \quad \beta > 1.$$

Таким образом, самостоятельное изучение классов $\mathcal{D}_{\beta,l}$ целесообразно при $0 \leq \beta \leq 1$.

3.2. Случай полуплоскости. При $0 < q < \infty$, $\beta > 0$, $l(t) \in L_\infty \cap L_0$ обозначим через $A_{\beta,l}^{q,+}$ пространство функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ с условием

$$\|F\|_{A,q,\beta,l,+} = \left(\iint_{u>0} |F(u+iv)|^q u^\beta l \left(\frac{1}{u} \right) du dv \right)^{1/q}.$$

Обобщенные пространства Бергмана $A_{\beta,l}^q$ и $A_{\beta,l}^{q,+}$ впервые появились в статье Л. Н. Бирюкова [15]. Если $q \geq 1$, то $A_{\beta,l}^{q,+}$ есть банахово пространство с нормой $\|F\|_{A,q,\beta,l,+}$.

Пусть $\omega(t)$ – вес на интервале (a, b) . Через $L_\omega^q(a, b) = L^q((a, b), \omega dt)$ обозначаем пространство измеримых функций с нормой

$$\|f\|_{q,\omega} = \left(\int_a^b |f(t)|^q \omega(t) dt \right)^{1/q}, \quad q \geq 1.$$

Через $L_{\beta,l}^q$ обозначаем пространство $L_{\omega}^q(\mathbb{R}_+)$ с $\omega(t) = t^\beta l(t)$; норму в $L_{\beta,l}^q$ обозначаем через $\|f\|_{q,\beta,l}$. Обратим внимание на то, что, несмотря на сходство в обозначениях пространств $A_{\beta,l}^{q,+}$ и $L_{\beta,l}^q$, а также их норм, функция l участвует в них по-разному: $l = l(1/u)$ в первом случае и $l(t)$ во втором.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [15]). Пусть $\beta > -1$, и пусть $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция как в нуле, так и на бесконечности, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда пространство $A_{\beta,l}^{2,+}$ совпадает с классом преобразований Лапласа (2.3), где $f \in L_{-1-\beta,l}^2$. При этом $\|F\| \asymp \|f\|$.

Пусть $\beta > -1$ и $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности. Обозначим через $D_{\beta,l}^+$ класс функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и таких, что $F'(w) \in A_{\beta,l}^{2,+}$. При $l(t) \equiv 1$ пишем D_{β}^+ вместо $D_{\beta,l}^+$.

Считаем выполненными условия предложения 3. Тогда условие $F(w) \in D_{\beta,l}^+$ равносильно представлению

$$F'(\zeta) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\zeta t} \left(\frac{t^{1+\beta}}{l(t)} \right)^{1/2} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

При фиксированных w, w_1 : $\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} w_1 > 0$ проинтегрируем это равенство по отрезку $[w, w_1]$ и изменим порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} F(w_1) - F(w) &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{t^{1+\beta}}{l(t)} \right)^{1/2} f(t) dt \int_w^{w_1} e^{-\zeta t} d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (e^{-wt} - e^{-w_1 t}) \left(\frac{t^{\beta-1}}{l(t)} \right)^{1/2} f(t) dt =: I(w) - I(w_1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для существования интегралов $I(w)$, $I(w_1)$ (а точнее, их частей, взятых по правой окрестности нуля) и законности изменения порядка интегрирования необходимо потребовать, чтобы выполнялось $\beta \geq 0$ и чтобы в случае $\beta = 0$ выполнялось условие

$$(tl(t))^{-1} \in L^1(0, 1). \quad (3.3)$$

Тогда при $\delta > 0$ функция $I(w)$ есть преобразование Лапласа интегрируемой функции

$$e^{-\delta t} (t^{1-\beta} l(t))^{-1/2} f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+), \quad t > 0,$$

и потому

$$I(w) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} w \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из формулы (3.2) следует, что

$$F(w) - F(w_1) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} w, \operatorname{Re} w_1 \rightarrow +\infty.$$

Значит, по критерию Коши для любого $F(w) \in D_{\beta,l}^+$ существует предел

$$\lim_{\operatorname{Re} w \rightarrow +\infty} F(w) =: F(+\infty), \quad (3.4)$$

и тогда предельный переход при $w_1 \rightarrow +\infty$ в формуле (3.2) показывает, что условие $F(w) \in D_{\beta,l}^+$, $\beta \geq 0$, равносильно представлению

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} \left(\frac{t^{\beta-1}}{l(t)} \right)^{1/2} f(t) dt + C, \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad (3.5)$$

где $C = F(+\infty)$. Нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\beta \geq 0$, пусть $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция как в нуле, так и на бесконечности, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, и пусть в случае $\beta = 0$ выполняется условие (3.3). Тогда:

- 1) для любого $F(w) \in D_{\beta,l}^+$ существует предел (3.4);
- 2) класс $D_{\beta,l}^+$ совпадает с классом функций, представимых в виде (3.5), где $C = F(+\infty)$.

Пусть $\beta \geq 0$, причем в случае $\beta = 0$ выполняется условие (3.3). Определим обобщенный класс Дирихле $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ как подкласс в $D_{\beta,l}^+$, состоящий из всех функций с условием $F(+\infty) = 0$. Предложение 4 показывает, что верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\beta \geq 0$, пусть $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция как в нуле, так и на бесконечности, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, и пусть в случае $\beta = 0$ выполняется условие (3.3).

Тогда класс $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} \frac{f(t) dt}{(t^{1-\beta} l(t))^{1/2}}, \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+). \quad (3.6)$$

§ 4. Связь между обобщенными классами Дирихле в круге и в полуплоскости

4.1. Связь между классами $\mathcal{D}_{\alpha,l}$ и $\mathcal{D}_{\alpha,l}^+$. Рассмотрим отображение

$$z = z(w) = \frac{w-1}{w+1} \quad (4.1)$$

полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ на круг $|z| < 1$. Пусть функция $\Phi(z)$ аналитична при $|z| < 1$, и пусть

$$F(w) = \Phi\left(\frac{w-1}{w+1}\right)$$

– образ функции $\Phi(z)$ при обратном отображении $w = w(z)$.

Наоборот, пусть функция $F(w)$ аналитична при $\operatorname{Re} w > 0$; обозначим

$$F_1(w) = \left(\frac{1-e^{-w}}{w} \right)^2 F(w), \quad \Phi_1(z) = F_1\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

т.е. $\Phi_1(z)$ есть образ функции $F_1(w)$ при отображении (4.1).

При фиксированном $s > 0$ введем обозначение

$$G(w) = (w + 1)^{-s} F(w), \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

Важно, что функция $G(w)$ ($\Phi_1(z)$) аналитична при $\operatorname{Re} w > 0$ (при $|z| < 1$) и имеет те же нули, что и $F(w)$ ($\Phi(z)$).

Наша следующая цель состоит в установлении связи между классами $\mathcal{D}_{\beta,l}$ и $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$. Однако если в определении первого из них участвует функция $l(t)$, заданная при $t \geq 1$, то присутствующая в определении класса $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ функция $l(t)$ задана на всей правой полупрямой $\mathbb{R}_+$. Поэтому при переходе от класса $\mathcal{D}_{\beta,l}$ к классу $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ следует продолжить $l(t)$ на интервал $(0, 1)$. Договоримся сделать это так, что доопределенная функция является медленно меняющейся и в нуле.

ТЕОРЕМА 1. 1) Утверждения $\Phi(z) \in \mathcal{D}_0$ и $F(w) \in D_0^+$ эквивалентны.

2) Пусть $\beta \geq 0$ и $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда $\Phi(z) \in \mathcal{D}_{\beta,l}$ влечет $G(w) \in D_{\beta,l}^+$, как только $s \geq 2 + \beta$.

3) Если, кроме того, в случае $\beta = 0$ выполняется условие (3.3), то:

(а) $\Phi(z) \in \mathcal{D}_{\beta,l}$ влечет $G(w) \in D_{\beta,l}^+$, как только $s > 2 + \beta$;

(б) $F(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+$ влечет $\Phi_1(z)(1-z)^\nu \in \mathcal{D}_{\beta,l}$, как только $0 \neq \nu \geq \max(1-\beta, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду в дальнейшем $r = |z|$, а z и w связаны формулой (4.1).

1) Так как якобиан отображения (4.1) есть $J = |z'(w)|^2$, то, используя формулу $1 - r^2 = 4u/|w + 1|^2$ и правило дифференцирования композиции, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|z| < 1} |\Phi'(z)|^2 (1 - r^2)^\beta l\left(\frac{1}{1 - r^2}\right) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| \Phi'\left(\frac{w - 1}{w + 1}\right) \right|^2 \left(\frac{4u}{|w + 1|^2} \right)^\beta l\left(\frac{|w + 1|^2}{4u}\right) |z'(w)|^2 du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} |F'(w)|^2 \left(\frac{4u}{|w + 1|^2} \right)^\beta l\left(\frac{|w + 1|^2}{4u}\right) du dv. \end{aligned}$$

Поскольку $l(t) \in L_\infty$, то отсюда следует, что утверждение $\Phi(z) \in \mathcal{D}_{\beta,l}$ равносильно тому, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|F'(w)|^2}{|w + 1|^{2\beta}} u^\beta l\left(\frac{|w + 1|^2}{u}\right) du dv < \infty. \quad (4.2)$$

В частности, это доказывает утверждение 1).

Можно считать, для функции $l(t)$ выполнены условия леммы 2. Это следует из свойства 2, из ограниченности и отделенности от нуля функции $l(t)$ и из того простого факта, что условие $\omega(t) \asymp \Omega(t)$, $a < t < b$, влечет совпадение весовых пространств $L^p((a, b), \omega(t) dt)$ и $L^p((a, b), \Omega(t) dt)$.

2) Пусть $\Phi(z) \in \mathcal{D}_{\beta,l}$. По предложениям 1 и 2 $\Phi(z) \in A_{\beta,l}^2$. Тогда, снова проводя выкладку с заменой переменных, получаем, что

$$\int_{u > 0} |F(w)|^2 \left(\frac{u}{|w + 1|^2} \right)^\beta l\left(\frac{|w + 1|^2}{u}\right) |z'(w)|^2 du dv < \infty.$$

Подставив сюда выражение $z'(w) = 2/(w+1)^2$, будем иметь

$$\int_{u>0} \frac{|F(w)|^2}{|w+1|^{4+2\beta}} u^\beta l\left(\frac{|w+1|^2}{u}\right) du dv < \infty. \quad (4.3)$$

Далее, так как

$$|G'(w)|^2 = \left| \frac{F'(w)}{(w+1)^s} - s \frac{F(w)}{(w+1)^{s+1}} \right|^2 \leq 2 \left(\frac{|F'(w)|^2}{|w+1|^{2s}} + s^2 \frac{|F(w)|^2}{|w+1|^{2s+2}} \right),$$

то для принадлежности $G(w) \in \mathcal{D}_{\alpha,l}^+$ достаточно доказать конечность двух интегралов

$$\begin{aligned} \iint_{u>0} \frac{|F'(w)|^2}{|w+1|^{2s}} u^\beta l\left(\frac{1}{u}\right) du dv &= A, \\ \iint_{u>0} \frac{|F(w)|^2}{|w+1|^{2s+2}} u^\beta l\left(\frac{1}{u}\right) du dv &= B. \end{aligned}$$

Применяя левое неравенство (2.6) в форме

$$l\left(\frac{1}{u}\right) \leq M|w+1|^2 l\left(\frac{|w+1|^2}{u}\right)$$

и используя условия (4.2) и (4.3), видим, что $A, B < \infty$ соответственно при $s \geq 1+\beta, 2+\beta$. Следовательно, если $s \geq 2+\beta$, то $G(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+$. Утверждение 2) доказано.

3) Пишем $G_s(w)$ вместо $G(w)$, чтобы подчеркнуть зависимость от параметра s . Пусть $\Phi(z) \in \mathcal{D}_{\beta,l}, s \geq 2+\beta$. Тогда по утверждению 2) $G_s(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+$ и $G_{s+\varepsilon}(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+, \varepsilon > 0$. По предложению 4 существует предел $G_s(+\infty)$. Но $G_{s+\varepsilon}(w) = G_s(w)/(1+w)^\varepsilon$ и потому $G_{s+\varepsilon}(+\infty) = 0$. Значит, $G_{s+\varepsilon}(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+, \varepsilon > 0$, и часть (а) утверждения 3) доказана.

Если попробовать доказать часть (б) так же, как 2), только в обратном порядке, то мы столкнемся с некоторым препятствием, состоящим в том, что из $F(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+$, вообще говоря, не следует, что $F(w) \in A_{\beta,l}^{2+}$ (что вытекает из сопоставления предложений 3 и 5). Чтобы его обойти, мы и переходим к “подправленной” функции $F_1(w)$.

Сначала докажем, что

$$F(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+ \implies F_1(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+, A_{\beta,l}^{2+}. \quad (4.4)$$

Пусть $a(t) \equiv 0$ вне $(0, 2)$ и

$$a(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad a(t) = 2-t, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Пусть $b(x)$ есть свертка функции $a(t)$ с участвующей в представлении (3.6) функцией $(t^{\beta-1}l^{-1}(t))^{1/2}f(t)$, т.е.

$$b(x) = \int_{J_x} a(x-t) t^{(\beta-1)/2} l^{-1/2}(t) f(t) dt, \quad x > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

где $J_x = (0, x)$, если $0 < x < 2$, и $J_x = (x - 2, x)$, если $x > 2$. Так как функция $((1 - e^{-w})/w)^2$ есть преобразование Лапласа функции $a(t)$, то с учетом формулы (3.6) делаем вывод, что функция $F_1(w)$ есть преобразование Лапласа свертки $b(t)$, т.е.

$$F_1(w) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} b(t) dt, \quad \operatorname{Re} w > 0. \quad (4.5)$$

Импликация (4.4) будет доказана, если мы покажем следующее: функция (4.5) принадлежит классу интегральных представлений, участвующих как в предложении 5, так и в предложении 3.

При $x > 3$ по свойству 1 медленно меняющихся функций имеем

$$|b(x)| \leq \int_{x-2}^x t^{(\beta-1)/2} l^{-1/2}(t) |f(t)| dt \leq C x^{(\beta-1)/2} l^{-1/2}(x) \int_{x-2}^x |f(t)| dt.$$

Последний интеграл есть сужение на $(3, \infty)$ свертки $|f(t)| \in L^2(\mathbb{R}_+)$ с характеристической функцией $\chi(t)$ интервала $(0, 2)$. Так как $\chi(t) \in L^1$, то, применяя известное свойство свертки

$$\varphi \in L^1, \quad \psi \in L^q, \quad q \geq 1 \implies \varphi * \psi \in L^q,$$

видим, что

$$b(x) = x^{(\beta-1)/2} l^{-1/2}(x) g(x), \quad x > 3, \quad g \in L^2(3, \infty). \quad (4.6)$$

Пусть $0 < x < 2$. Так как $a(t) < t$, то по неравенству Коши получаем

$$|b(x)| \leq \|f\| \left(\int_0^x (x-t) t^{\beta-1} l^{-1}(t) dt \right)^{1/2} \leq C x^{1/2} \left(\int_0^x t^{\beta-1} l^{-1}(t) dt \right)^{1/2}.$$

Если $\beta = 0$, то $|b(x)| = O(x^{1/2})$ по условию (3.3). Если $\beta > 0$, то фиксируем $\gamma \in (0, \min(\beta, 1/2))$. По свойству 3 $l^{-1}(t) = O(t^{-\gamma})$ и, значит,

$$|b(x)| = O(x^{1/2}) \left(\int_0^x t^{\beta-1-\gamma} dt \right)^{1/2} = O(x^{(1+\beta-\gamma)/2}).$$

Следовательно, в обоих случаях ($\beta = 0$ и $\beta > 0$)

$$b(x)|_{(0,2)} \in L^2((0,2), x^{-\beta-1} l(x) dx).$$

Так как свертка $b(x)$ ограничена на $[2, 3]$, то это свойство вместе с (4.6) показывает, что

$$b(x) \in L_{1-\beta, l}^2 \cap L_{-1-\beta, l}^2.$$

Теперь применение к функции (4.5) предложений 5 и 3 дает правую часть импликации (4.4).

Итак, пусть $F(w) \in \mathcal{D}_{\beta, l}^+$. По доказанному $F_1(w) \in \mathcal{D}_{\beta, l}^+, A_{\beta, l}^{2+}$. Поступая так же, как при доказательстве утверждения 1), и учитывая, что $u = (1 - r^2)/|1 - z|^2$, получаем

$$\infty > \iint_{u>0} |F'_1(w)|^2 u^\beta l\left(\frac{1}{u}\right) du dv = \iint_{|z|<1} \frac{|\Phi'_1(z)|^2}{|1 - z|^{2\beta}} (1 - r^2)^\beta l\left(\frac{|1 - z|^2}{1 - r^2}\right) dx dy. \quad (4.7)$$

Если $|1 - z| < 1$, то по левому неравенству (2.6)

$$l\left(\frac{|1 - z|^2}{1 - r^2}\right) \geq \frac{|1 - z|^2}{M} l\left(\frac{1}{1 - r^2}\right) \asymp |1 - z|^2 l\left(\frac{1}{1 - r}\right).$$

Для остальных точек z единичного круга, т.е. для тех, для которых $1 \leq |1 - z| < 2$, эта оценка верна по свойству 1. Применяя ее к неравенству (4.7), получаем, что если $F(w) \in \mathcal{D}_{\beta,l}^+$, то

$$\iint_{|z|<1} |1 - z|^{2-2\beta} |\Phi_1'(z)|^2 (1 - r)^\beta l\left(\frac{1}{1 - r}\right) dx dy < \infty. \quad (4.8)$$

Далее, так как $F_1(w) \in A_{\beta,l}^{2,+}$, а $w'(z) = 2/(1 - z)^2$, то

$$\begin{aligned} \infty &> \iint_{u>0} |F_1(w)|^2 u^\beta l\left(\frac{1}{u}\right) du dv \\ &= 4 \iint_{|z|<1} \frac{|\Phi_1(z)|^2}{|1 - z|^{4+2\beta}} (1 - r^2)^\beta l\left(\frac{|1 - z|^2}{1 - r^2}\right) dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда в силу правого неравенства (2.6) с $k = 1/|1 - z|^2$ получаем, что

$$\iint_{|z|<1} |1 - z|^{-2-2\beta} |\Phi_1(z)|^2 (1 - r)^\beta l\left(\frac{1}{1 - r}\right) dx dy < \infty. \quad (4.9)$$

Далее, при $\nu \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\iint_{|z|<1} |((1 - z)^\nu \Phi_1(z))'|^2 (1 - r)^\beta l\left(\frac{1}{1 - r}\right) dx dy \\ &\leq 2 \iint_{|z|<1} (\nu^2 |1 - z|^{2\nu-2} |\Phi_1(z)|^2 + |1 - z|^{2\nu} |\Phi_1'(z)|^2) (1 - r)^\beta l\left(\frac{1}{1 - r}\right) dx dy. \end{aligned}$$

В силу (4.9) и (4.8) правая часть конечна, как только $0 \neq \nu \geq \max(1 - \beta, 0)$. Часть (б) утверждения 3) доказана.

Теорема 1 доказана.

4.2. Нулевые множества. Пусть $\mathcal{F}(E)$ – некоторый класс функций, аналитических в области E . Последовательность μ_n , $n \in \mathbb{N}$, точек из E называется *нулевым множеством* класса $\mathcal{F}(E)$, если найдется функция $F \in \mathcal{F}(E)$, обращающаяся в нуль в точках μ_n , $n \in \mathbb{N}$, и только в них.

В формулируемом ниже следствии из теоремы 1 последовательности точек (w_n) и (z_n) связаны формулой

$$z_n = \frac{w_n - 1}{w_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.10)$$

т.е. точки (z_n) единичного круга $|z| < 1$ являются образами точек (w_n) правой полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ при отображении (4.1).

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Последовательность точек (w_n) , $\operatorname{Re} w_n > 0$, тогда и только тогда является нулевым множеством класса D_0^+ , когда последовательность точек (z_n) , $|z_n| < 1$, является нулевым множеством класса $\mathcal{D}_0$.

2) Пусть $\beta \geq 0$, $l(t)$, $t > 0$, – медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, и пусть в случае $\beta = 0$ выполняется условие (3.3). Тогда последовательность (w_n) в том и только том случае является нулевым множеством класса $\mathcal{D}_{\beta, l}^+$, если последовательность (z_n) является нулевым множеством класса $\mathcal{D}_{\beta, l}$.

При пользовании следствием 1 надо иметь в виду отмеченное перед формулировкой теоремы 1. А именно, при переходе от класса $\mathcal{D}_{\beta, l}$ к классу $\mathcal{D}_{\beta, l}^+$ функцию $l(t)$ надо считать продолженной с полупрямой $[1, \infty)$ на полупрямую $\mathbb{R}_+$ с сохранением свойств, указанных в следствии 1. Набор нулевых множеств класса $\mathcal{D}_{\beta, l}^+$ не будет зависеть от конкретного продолжения.

4.3. Достаточное условие нулевого подмножества. Напомним понятие логарифмической выпуклости. Положительная функция $g(t)$, $t > t_0$, называется логарифмически выпуклой, если выпукла функция $\log g(t)$, $t > t_0$.

В статье [5] дано следующее достаточное условие логарифмической выпуклости функции $l(t)t^\alpha$, $\alpha < 0$, $l(t) \in L_\infty$, на некоторой полупрямой $t > t_0$: $l(t)$ дважды дифференцируема и

$$t^k l^{(k)}(t) = o(l(t)), \quad t \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2.$$

Сначала применим цитированный в § 1 результат из [4] к случаю

$$c_n = (n^{1-\beta} l(n))^{-1}, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

где $l(t)$, $t \geq 1$, – медленно меняющаяся функция. Пусть $\varphi(z)$ – соответствующая функция (1.3). Сохраняем за $\mathcal{D}_\varphi$ обозначение, принятое в § 1. Тогда предложение 2 показывает, что $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\beta, l}$. Поведение функции $\varphi(r)$ описывается абелевой теоремой для степенных рядов (свойство 5), в которой теперь следует заменить β на $1 - \beta$, а $l(t)$ на $1/l(t)$. Эта замена должна быть произведена и в формуле (2.4), в связи с чем введем обозначение

$$\mathcal{L}(t) = \int_1^t \frac{du}{ul(u)}, \quad t > 1, \quad (4.12)$$

и потребуем, чтобы $\mathcal{L}(\infty) = \infty$ в случае $\beta = 0$. С учетом указанных изменений получим следующее:

$$\varphi(r) \sim \frac{1}{(1-r)^\beta} l^{-1} \left(\frac{1}{1-r} \right), \quad \varphi(r) \sim \mathcal{L} \left(\frac{1}{1-r} \right), \quad r \rightarrow 1-0,$$

соответственно при $0 < \beta \leq 1$ и $\beta = 0$.

Значит, условие (1.4) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2)^{\beta} l\left(\frac{1}{1 - |z_n|^2}\right) < \infty, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1 - |z_n|^2}\right) < \infty, \quad \beta = 0. \quad (4.14)$$

Изменение конечного числа коэффициентов c_n в (1.3) не меняет ни поведения $\varphi(r)$ при $r \rightarrow 1 - 0$, ни класса $\mathcal{D}_{\varphi}$. Поэтому в теореме из [4] достаточно требовать логарифмическую выпуклость последовательности c_n , $n > n_0$, и применение этой теоремы к случаю (4.11) дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$, а $l(t)$, $t \geq 1$, — медленно меняющаяся функция такая, что функция $(t^{1-\beta}l(t))^{-1}$ логарифмически выпукла при всех достаточно больших t , причем $\mathcal{L}(\infty) = \infty$ в случае $\beta = 0$. Пусть при $0 < \beta \leq 1$ выполнено условие (4.13), а при $\beta = 0$ выполнено условие (4.14).

Тогда последовательность z_n , $n \in \mathbb{N}$, является нулевым подмножеством класса $\mathcal{D}_{\beta,l}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\beta = 1$ в предложении 6 содержится условие логарифмической выпуклости функции $1/l(t)$. А из выпуклости медленно меняющейся функции $1/l(t)$ следует, что либо $l(t) \equiv c > 0$, либо $1/l(t) \downarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Пусть точки z_n , w_n соответственно единичного круга $|z| < 1$ и правой полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ связаны формулой (4.10). Тогда

$$\frac{\operatorname{Re} w_n}{1 + |w_n|^2} \asymp 1 - |z_n|^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.15)$$

и условие (4.13) для прообразов w_n точек z_n при отображении полуплоскости на круг принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} w_n}{1 + |w_n|^2} \right)^{\beta} l\left(\left(\frac{\operatorname{Re} w_n}{1 + |w_n|^2} \right)^{-1} \right) < \infty, \quad \operatorname{Re} w_n > 0. \quad (4.16)$$

При $\beta = 0$ в нем $l(t)$ заменяется на $\mathcal{L}^{-1}(t)$. Значит, из предложения 6 и следствия 1 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$, а $l(t)$, $t > 0$, — медленно меняющаяся функция в нуле и на бесконечности такая, что функция $(t^{1-\beta}l(t))^{-1}$ логарифмически выпукла при всех достаточно больших t , причем в случае $\beta = 0$ имеет место условие (3.3) и $\mathcal{L}(\infty) = \infty$. Пусть $l(t)$ ограничена и отделена от нуля на каждом интервале вида (a, b) , $0 < a < b < \infty$.

Тогда если при $0 < \beta \leq 1$ выполнено условие (4.16), а при $\beta = 0$ выполнено условие (4.16), в котором функция $l(t)$ заменена на функцию $\mathcal{L}^{-1}(t)$, то последовательность w_n , $n \in \mathbb{N}$, является нулевым подмножеством класса $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$.

§ 5. Необходимое условие полноты системы экспонент в весовом пространстве

5.1. Необходимое условие полноты. Весовые пространства $L_{\omega}^p(a, b)$ и $L_{\alpha, l}^p$, $\alpha \geq -1$, введены в начале п. 3.2. Пространство $(L_{\omega}^p(\mathbb{R}_+))'$ всех функционалов на $L_{\omega}^p(\mathbb{R}_+)$ (пишем “функционал” вместо “непрерывный линейный функционал”) трактуется как пространство $L^q(\mathbb{R}_+)$, $pq = p + q$, при следующей реализации функционала $\psi \in (L_{\omega}^p(\mathbb{R}_+))' = L^q(\mathbb{R}_+)$:

$$(\psi, f) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \omega^{1/p}(t) \psi(t) dt \quad \forall f \in L_{\omega}^p(a, b). \quad (5.1)$$

Преобразованием Лапласа функционала ψ на $L_{\omega}^p(\mathbb{R}_+)$ называют функцию

$$\Psi(w) := (\psi(t), e^{-wt}), \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

Всюду в этом пункте $l(t)$ – медленно меняющаяся функция. В соответствии с формулой (5.1) преобразование Лапласа функционала на $L_{\alpha, l}^p$, $\alpha \geq -1$, имеет вид

$$\Psi(w) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} (t^{\alpha} l(t))^{1/p} \psi(t) dt, \quad \psi \in L^q, \quad pq = p + q, \quad \operatorname{Re} w > 0. \quad (5.2)$$

В случае $\alpha = -1$ мы должны потребовать выполнения условия

$$t^{-1} l(t) \in L^1(0, 1). \quad (5.3)$$

Функция (5.2) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$.

Переходим к вопросу о полноте системы экспонент

$$e(\Lambda) = (e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty}, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0,$$

в пространствах $L_{\alpha, l}^p$, $\alpha \geq -1$. Так как неполнота системы элементов банахова пространства B равносильна существованию нетривиального функционала на B , аннулирующего эту систему, то неполнота системы $e(\Lambda)$ в $L_{\alpha, l}^p$ равносильна существованию нетривиальной функции $\Psi(w)$ вида (5.2) такой, что $\Psi(\Lambda) = 0$ (т.е. $\Psi(\lambda_n) = 0$ для любого n).

Сравнивая формулы (5.2) и (3.6), по предложению 5 делаем вывод, что в случае $p = 2$, $\alpha \geq -1$ класс преобразований Лапласа (5.2) совпадает с классом $D_{1+\alpha, 1/l}^+$; при $\alpha = -1$ условие (3.3) предложения 5 переходит в принятое нами уже условие (5.3).

Следовательно, неполнота системы $e(\Lambda)$ в $L_{\alpha, l}^2$, $\alpha \geq -1$, равносильна существованию нетривиальной функции $\Phi(w) \in D_{1+\alpha, 1/l}^+$ такой, что $\Psi(\Lambda) = 0$, т.е. тому, что последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ является подмножеством нулевого множества класса $D_{1+\alpha, 1/l}^+$.

Воспользуемся предложением 7 с $\beta = 1 + \alpha$ и с заменой $l(t)$ на $1/l(t)$. Это повлечет ограничение $\alpha \leq 0$ и замену функции $\mathcal{L}(t)$ (см. (4.12)) на функцию $L(t)$ (см. (2.4)); условие $\mathcal{L}(\infty) = \infty$ запишется как $L(\infty) = \infty$.

Итак, со ссылкой на предложение 7 доказано следующее. Пусть $-1 \leq \alpha \leq 0$. Пусть $l(t) \in L_0 \cap L_\infty$, а $t^\alpha l(t)$ – логарифмически выпуклая функция при $t > t_0$, и пусть в случае $\alpha = -1$ выполнено условие (5.3) и $L(\infty) = \infty$. Пусть $l(t)$ ограничена и отделена от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда если при $-1 < \alpha \leq 0$ выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{1+\alpha} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0, \quad (5.4)$$

а при $\alpha = -1$ в нем $l(t)$ заменено на $L(t)$, то система $e(\Lambda)$ неполна в $L_{\alpha, l}^2$.

Расширим класс рассматриваемых пространств. Пусть $E_1 = E_1(0, 1)$, $E_2 = E_2(1, \infty)$ – банаховы пространства функций, определенных соответственно на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. Обозначим через $E = (E_1, E_2)$ пространство функций на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_E = \|f|_{(0,1)}\|_{E_1} + \|f|_{(1,\infty)}\|_{E_2}.$$

Следующее утверждение представляет собой сильно упрощенный вариант теоремы 3 из [9].

ЛЕММА 3. Пусть $\Omega(t)$, $t > 0$, – положительный вес такой, что $\Omega(t) \asymp \Omega(t+1)$ и $\Omega(t) = O(1+t)^s$ при некотором $s > 0$. Пусть вес $\omega(t)$, $0 < t < 1$, таков, что

$$\omega|_{(0,1)} \in L^1(0, 1), \quad \inf(\omega(t) : \delta < t < 1) > 0 \quad \forall \delta \in (0, 1). \quad (5.5)$$

Тогда система $e(\Lambda)$ полна в пространствах

$$(L_\omega^s(0, 1), L_\Omega^p(1, \infty)), \quad L_\Omega^p(\mathbb{R}_+), \quad 1 \leq p, s < \infty,$$

одновременно.

Это утверждение показывает, что свойство полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$ не зависит от поведения веса $\Omega(t)$ в интервале $(0, 1)$ (в указанном классе весов). Ссылаясь на рассуждение, проведенное перед доказательством утверждения 2) в теореме 1, можно считать, что вес $\omega(t) = t^\alpha l(t)$ при сформулированных выше условиях удовлетворяет требованию (5.5). Поэтому доказанное достаточное условие неполноты (5.4) может быть переформулировано как необходимое условие полноты следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $-1 \leq \alpha \leq 0$. Пусть $l(t)$, $t \geq 1$, – медленно меняющаяся функция, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[1, b]$, $b > 1$, такая, что функция $t^\alpha l(t)$, $t > t_0 \geq 1$, логарифмически выпукла, и, кроме того, если $\alpha = -1$, то $L(\infty) = \infty$. Пусть вес $\omega(t)$, $0 < t < 1$ удовлетворяет условию (5.5).

Тогда для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве

$$(L_\omega^s(0, 1), L^2((1, \infty), t^\alpha l(t) dt)), \quad 1 \leq s < \infty, \quad (5.6)$$

при $-1 < \alpha \leq 0$ необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{1+\alpha} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty, \quad (5.7)$$

а при $\alpha = -1$ необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} L^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty. \quad (5.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Введем обозначение

$$L^{p,\alpha,l} := L^p(\mathbb{R}_+, (1+t^2)^{\alpha/2} l(t) dt), \quad l(t) \in L_{\infty}. \quad (5.9)$$

Тогда пространство $L^{2,\alpha,l}$ входит в класс пространств (5.6).

Будем писать $L^{p,\alpha}$ вместо $L^{p,\alpha,l}$, когда $l(t) \equiv 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $\alpha = 0$ в условиях теоремы 2 либо $l(t) \equiv c > 0$, либо $l(t) \downarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$ (см. замечание 3). Если $\alpha = 0$, $l(t) \equiv c > 0$, то теорема 2 содержит в себе необходимую часть теоремы Саса.

5.2. Следствия. Пусть ω , Ω – веса на $\mathbb{R}_+$, и пусть $p > 2$. По неравенству Гёльдера имеем

$$\|f\|_{2,\omega}^2 = \int_{\mathbb{R}_+} (|f|^2 \Omega^{2/p}) (\Omega^{-2/p} \omega) dt \leq \|f\|_{p,\Omega}^2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \Omega^{-2/(p-2)} \omega^{p/(p-2)} dt \right)^{(p-2)/p}.$$

Эта оценка показывает, что условие

$$(\omega^p \Omega^{-2})^{1/(p-2)} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad (5.10)$$

влечет топологическое вложение $L_{\Omega}^p(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow L_{\omega}^2(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим случай

$$\omega = (1+t^2)^{\alpha/2} l(t), \quad \Omega = (1+t^2)^{\beta/2} b(t), \quad l(t), b(t) \in L_{\infty}. \quad (5.11)$$

Положим $\alpha = -1 + 2(1+\beta)/p$. Так как $-1 \leq \alpha \leq 0$, то $-1 \leq \beta \leq p/2 - 1$ и $\alpha = -1 \iff \beta = -1$.

Условие (5.10) перейдет в условие

$$t^{-1} l^{p/(p-2)}(t) b^{2/(2-p)}(t) \in L^1(1, \infty). \quad (5.12)$$

Очевидно, в случае (5.11) вложение $L_{\Omega}^p(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow L_{\omega}^2(\mathbb{R}_+)$ плотное. Но тогда полнота системы $e(\Lambda)$ в $L_{\Omega}^p(\mathbb{R}_+)$ влечет ее полноту в $L_{\omega}^2(\mathbb{R}_+)$. Значит, теорема 2 и замечание 4 дают

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $p > 2$, $b(t) \in L_{\infty}$. Тогда для полноты системы $e(\Lambda)$ в $L^{p,\beta,b}$ при $-1 < \beta \leq p/2 - 1$ необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{(2/p)(1+\beta)} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty \quad (5.13)$$

для любой функции $l(t) \in L_\infty$, удовлетворяющей условию (5.12) и условиям теоремы 2 с $\alpha = -1 + 2(1 + \beta)/p$, а при $\beta = -1$ необходимо выполнение условия (5.13), в котором $l(t)$ заменяется на $L(t)$; при $\beta = -1$ предполагается также, что $L(\infty) = \infty$.

В частности, для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$, необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{2/p} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty$$

для любой логарифмически выпуклой при $t \geq 1$ функции $l(t) \in L_\infty$, удовлетворяющей условию

$$t^{-1} l^{p/(p-2)}(t) \in L^1(1, \infty).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При $p > 2$, $\beta > p/2 - 1$ необходимым условием полноты системы (1.1) в L_β^p является условие Саса (1.2) (см. [16]); здесь L_β^p обозначает пространство $L_{\beta,b}^2$ в случае $b(t) \equiv 1$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $b(t)$ – непрерывная, положительная на $[0, \infty)$, медленно меняющаяся функция. Определим $C_{0,\beta,b}$ как пространство непрерывных на $[0, \infty)$ функций таких, что

$$f(t)(1 + t^2)^{\beta/2} b(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

с нормой

$$\|f\|_{C_{0,\beta,b}} = \max(|f(t)|(1 + t^2)^{\beta/2} b(t) : t \geq 0).$$

Имеем

$$\|f\|_{2,\alpha,l}^2 \leq \|f\|_{C_{0,\beta,b}}^2 \int_{\mathbb{R}_+} (1 + t^2)^{\alpha/2 - \beta} l(t) b^{-2}(t) dt.$$

Положив здесь $\alpha = 2\beta - 1$, делаем вывод, что условие

$$t^{-1} l(t) b^{-2}(t) \in L^1(1, \infty) \tag{5.14}$$

влечет (очевидно, плотное) вложение $C_{0,\beta,b} \hookrightarrow L^{2,\alpha,l}$.

Если $-1 \leq \alpha \leq 0$, то $0 \leq \beta \leq 1/2$, причем $\alpha = -1 \iff \beta = 0$. Значит, как и в случае следствия 2, из теоремы 2 и замечания 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $b(t)$ – непрерывная, положительная на $[0, \infty)$, медленно меняющаяся функция. Тогда для полноты системы $e(\Lambda)$ в $C_{0,\beta,b}$ при $0 < \beta \leq 1/2$ необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{2\beta} l^{-1} \left(\left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right)^{-1} \right) = \infty \tag{5.15}$$

для любой функции $l(t) \in L_\infty$, удовлетворяющей условию (5.14) и условиям теоремы 2 с $\alpha = 2\beta - 1$, а при $\beta = 0$ необходимо выполнение условия (5.15), в котором $l(t)$ заменяется на $L(t)$; при $\beta = 0$ предполагается также, что $L(\infty) = \infty$.

Пишем $C_{0,\beta}$ вместо $C_{0,\beta,b}$, когда $b(t) \equiv 1$, и C_0 вместо $C_{0,\beta}$, когда $\beta = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Условия (5.13) и (5.15) можно загрузить, записав их “с точностью до ε ”, и одновременно упростить, отказавшись от функции $l(t)$. Для этого следует положить в них $l(t) \equiv 1$ и заменить $(2/p)(1+\beta)$ и 2β на $(2/p)(1+\beta) - \varepsilon$ и $2\beta - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При $\beta > 1/2$ для полноты системы $e(\Lambda)$ в $C_{0,\beta}$ необходимо выполнение условия (1.2) (см. [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пространство C_0 не попадает в сферу действия следствия 3. Действительно, тогда $\beta = 0$, а это содержит требование $L(\infty) = \infty$, противоречащее условию (5.14) при $b(t) \equiv 1$.

В связи с последним замечанием возникает вопрос: существует ли необходимое условие полноты системы $e(\Lambda)$ в C_0 , выраженное лишь в терминах последовательности $\operatorname{Re} \lambda_n / (1 + |\lambda_n|^2)$? Известно, что условие (1.2) таким условием не является (см. [17]).

Покажем, что никакое условие, выраженное в терминах (сколь угодно медленного) стремления к нулю последовательности $\operatorname{Re} \lambda_n / (1 + |\lambda_n|^2)$, не может быть необходимым для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве C_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\eta(t)$, $t > 0$, – произвольная положительная функция такая, что $\eta(t) \downarrow 0$, $t \rightarrow +0$. Тогда найдется последовательность $\Lambda = (\lambda_n)$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right) < \infty, \quad (5.16)$$

и система $e(\Lambda)$ полна в пространстве C_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упрощая прием из [17], последовательность Λ ищем в виде

$$\Lambda = \left(\left(\alpha_n + \frac{ik}{l_n} \right)_{k=1}^{l_n} \right)_{n=1}^{\infty},$$

где

$$\alpha_1 > \dots > \alpha_n \downarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad l_n \in \mathbb{N}, \quad l_n \uparrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Множество предельных точек последовательности Λ совпадает с отрезком $[0, i]$ мнимой оси, вследствие чего (см. [10; § 10.3]) система $e(\Lambda)$ полна в пространстве C_0 .

Проверим выполнение условия (5.16). В силу монотонности $\eta(t)$ имеем

$$\sum_{\lambda_n \in \Lambda} \eta \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} \right) < \sum_{\lambda_n \in \Lambda} \eta(\operatorname{Re} \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \eta(\alpha_n),$$

и остается (пользуясь условием $\eta(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +0$) при заданных $l_n \uparrow \infty$ фиксировать $\alpha_n \rightarrow 0$ такими, чтобы последний ряд сходиллся.

§ 6. Множества единственности обобщенных классов Дирихле

6.1. Множества единственности классов аналитических потенциалов. Если функция $N(t)$ неотрицательна и $N \in L^1(\mathbb{R})$, то через $\mathcal{L}_N^p$ будем обозначать класс всех N -потенциалов функций из $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, т.е. класс свертков $f * N$, $f \in L^p(\mathbb{R})$. Через h_N^p обозначаем класс гармонических расширений на верхнюю полуплоскость всех функций из $\mathcal{L}_N^p$, т.е. класс свертков

$$(f * N * P_y)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \quad f \in L^p(\mathbb{R}),$$

где $P_y(x)$ – ядро Пуассона для полуплоскости, $P_y(x) = (y/\pi)/(x^2 + y^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Через H_N^p обозначается подкласс в h_N^p , состоящий из аналитических функций.

Следуя [6], назовем функцию $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *ядром*, если $K(t)$ четна, неотрицательна и не возрастает при $t > 0$ и $K \in L^1(\mathbb{R})$. Формально условие $K(0) = \infty$ в понятие ядра не входит, но все сказанное ниже без него большого смысла не имеет. Обозначим

$$K_y(x) = (K * P_y)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (см. [6; пп. 5.10, 2.16]). Пусть неотрицательная измеримая функция N мажорируется некоторым ядром K , т.е. $N(t) \leq K(t)$, $t \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{y_n}\|_q^{-p} = \infty, \quad pq = p + q, \quad y_n > 0,$$

то найдется последовательность $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что последовательность $x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, является множеством единственности для класса H_N^p .

Доказанные в статье [6] результаты для классов гармонических расширений потенциалов на полуплоскость и их аналитических подклассов верны и для случая круга. При этом следует произвести естественные изменения. А именно, теперь речь идет уже о периодических свертках с ядром Пуассона $P_r(t)$ для круга, $P_r(t) = (1 - r^2)/(1 - 2r \cos t + r^2)$, $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq t < \pi$. В формулировках x, y заменяются соответственно на r, t , а под ядром понимается 2π -периодическая неотрицательная интегрируемая на $(-\pi, \pi)$ функция $K(t)$ такая, что $K(t)$, $|t| < \pi$, четна и $K(t)$ не возрастает при $0 < t < \pi$. В [6; введение и пп. 5.6–5.8] с учетом указанных изменений сформулирован ряд утверждений для классов $h_N^p(|z| < 1)$, $H_N^p(|z| < 1)$ в круге, определяемых аналогично. Нам понадобится (не выделенная в [6] отдельно) переформулировка теоремы 3 для круга. Она состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4. Пусть 2π -периодическая неотрицательная измеримая функция $N(t)$ мажорируется ядром K . Тогда если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{r_n}\|_q^{-p} = \infty, \quad pq = p + q, \quad 0 < r_n < 1, \quad (6.1)$$

то найдется последовательность $t_n \in (-\pi, \pi]$ такая, что последовательность точек $z_n = r_n e^{it_n}$, $n \in \mathbb{N}$, является множеством единственности класса $H_N^p(|z| < 1)$.

Здесь

$$\|K_r\|_q = \|(K * P_r)(t)\|_{L^q(-\pi, \pi)}. \quad (6.2)$$

Напомним, что множество $X \subset Y$ называется *множеством единственности* класса $\mathcal{F}$ функций, определенных на Y , если в $\mathcal{F}$ нет функции, обращающейся в нуль на X .

6.2. Множества единственности классов $\mathcal{D}_{\beta, l}$ и $\mathcal{D}_{\beta, l}^+$. Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$, пусть $b(t)$, $t \geq 1$, – нормализованная медленно меняющаяся функция, и пусть $b(t) \downarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, если $\gamma = 0$. Рассмотрим тригонометрический ряд

$$N(t) = N_{\gamma, b}(t) = \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{b(|n|)}{|n|^\gamma} e^{int} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^\gamma} \cos nt, \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

По свойству 3 и сделанному предположению $b(t)/t^\gamma \downarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, при всех $0 \leq \gamma \leq 1$ (монотонность при $t > t_0$). Как сумма ряда по косинусам с монотонными коэффициентами функция $N(t)$ непрерывна на $(0, \pi]$. Если к тому же функция $b(t)/t^\gamma$ выпукла (что мы будем также предполагать при всех $0 \leq \gamma \leq 1$), то функция $N(t)$ интегрируема и положительна (см. [18; гл. 5, теорема 1.5]).

Поведение функции $N(t)$ при $t \rightarrow +0$ известно (см. [18; гл. 5, теоремы 2.6, 2.15, 2.17]):

$$N_{\gamma, b}(t) \asymp \frac{b(1/t)}{t^{1-\gamma}}, \quad t \rightarrow +0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (6.3)$$

$$N_{0, b}(t) \asymp \frac{1}{t^2} b' \left(\frac{1}{t} \right), \quad t \rightarrow +0. \quad (6.4)$$

При $\gamma = 0$ есть дополнительное требование: $-tb'(t)$ также есть нормализованная медленно меняющаяся функция.

Покажем, что существует ядро $K(t) = K_{\gamma, b}(t)$, мажорирующее $N_{\gamma, b}(t)$ и такое, что

$$K(t) \asymp N_{\gamma, b}(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (6.5)$$

Остановимся для определенности на случае $0 < \gamma < 1$. Функция $b(1/t)t^{\gamma-1}$ убывает на $(0, \delta)$ при некотором $0 < \delta < \pi$. А из непрерывности $N(t)$ следует, что $|N(t)| \leq C_2$, $\delta \leq |t| \leq \pi$. Значит, если $C_1 > 0$ достаточно велико, то функция

$$K(t) = C_1 \frac{b(1/|t|)}{|t|^{1-\gamma}}, \quad 0 < |t| < \delta, \quad K(t) = C_2, \quad \delta \leq |t| < \pi,$$

в силу (6.3) является искомой.

Нам надо оценить норму (6.2) для $q = 2$ при r , близких к единице. Интеграл Пуассона от ограниченной функции есть также ограниченная функция. И так

как сужения функций $K(t)$, $N(t)$ на множество $0 < \delta < |t| < \pi$ ограничены, то поведение нормы (6.2) при $r \rightarrow 1 - 0$ диктуется поведением $K(t)$ при малых t . Следовательно, в силу (6.5)

$$\|K_r\|_2 \asymp \|(N * P_r)(t)\|_2, \quad r \rightarrow 1 - 0.$$

Применяя это, равенство Парсеваля, явный вид функции $N(t)$, разложение

$$P_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \quad (6.6)$$

и свойство коэффициентов Фурье свертки, получаем

$$\|K_r\|_2^2 \asymp \|(N * P_r)(t)\|_2^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^2(n)}{n^{2\gamma}} r^{2n}, \quad r \rightarrow 1 - 0.$$

Теперь применение абелевой теоремы для степенных рядов (свойство 5) дает следующее: при $r \rightarrow 1 - 0$

$$\|K_r\|_2^2 \asymp (1 - r^2)^{2\gamma-1} b^2\left(\frac{1}{1 - r^2}\right), \quad 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \quad (6.7)$$

$$\|K_r\|_2^2 \asymp B\left(\frac{1}{1 - r^2}\right), \quad B(t) = \int_1^t \frac{b^2(u)}{u} du, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad (6.8)$$

при условии, что $B(\infty) = \infty$.

При заданных $l(t) \in L_\infty$ и $\beta \in [0, 1]$ обозначим

$$b(t) = l^{-1/2}(t), \quad \gamma = \frac{1 - \beta}{2}. \quad (6.9)$$

Тогда если $F(z) \in \mathcal{D}_{\beta, l}$, то по предложению 2

$$F(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^\gamma} a_n z^n, \quad (a_n) \in l^2.$$

Значит,

$$F(re^{it}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^\gamma} a_n r^n e^{int}.$$

Обозначив

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}, \quad f \in L^2(-\pi, \pi),$$

и снова применяя формулу (6.6) и свойство свертки, получаем

$$F(re^{it}) = (N * f * P_r)(t), \quad 0 < r < 1, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Это означает, что $F \in H_N^2(|z| < 1)$, т.е. $\mathcal{D}_{\beta, l} \subset H_N^2(|z| < 1)$.

В силу формул (6.7)–(6.9) условие (6.1) с $p = 2$ запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - r_n^2)^\beta l((1 - r_n^2)^{-1}) = \infty, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (6.10)$$

а если $\beta = 0$, то функция $l(t)$ в нем заменяется функцией $\mathcal{L}^{-1}(t)$ (см. (4.12)).

Значит, при сделанных выше предположениях относительно $b(t)$ и при выполнении условия (6.10) (с указанной заменой) по теореме 4 верно следующее: найдется последовательность $t_n \in (-\pi, \pi]$ такая, что последовательность точек $z_n = r_n e^{it_n}$, $n \in \mathbb{N}$, является множеством единственности для класса $H_N^2(|z| < 1)$, а значит, и класса $\mathcal{D}_{\beta, l}$.

Используя формулу (6.9), переформулируем условия на $b(t)$ как условия на $l(t)$. Для этого заметим, что, во-первых, свойство быть нормализованной медленно меняющейся для одной из функций $l(t)$, $l^s(t)$, $s \in \mathbb{R}$, влечет это же свойство для другой (что следует из (2.2)). Во-вторых, логарифмическая выпуклость функции $f(t)$ в интервале I влечет выпуклость функции $f^{1/2}(t)$ в I . Проверим последнее.

По предположению функция $\log f(t)$, $t \in I$, выпукла. Используя это и неравенство Коши, получаем

$$\frac{f(t_1 + t_2)}{2} \leq \sqrt{f(t_1)f(t_2)} \leq \frac{(\sqrt{f(t_1)} + \sqrt{f(t_2)})^2}{4}, \quad t_1, t_2 \in I,$$

т.е.

$$\sqrt{\frac{f(t_1 + t_2)}{2}} \leq \frac{\sqrt{f(t_1)} + \sqrt{f(t_2)}}{2}, \quad t_1, t_2 \in I.$$

Так как f непрерывна (по выпуклости $\log f$), то это и означает выпуклость $\sqrt{f}$.

Указанная выше переформулировка дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$, и пусть $l(t)$, $t \geq 1$, — нормализованная медленно меняющаяся функция, причем при $\beta = 1$ — вместе с функцией $-t(l^{-1/2}(t))'$. Пусть функция $(l(t)t^{1-\beta})^{-1}$ выпукла, и пусть $l(t) \uparrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, если $\beta = 1$, и $\mathcal{L}(\infty) = \infty$, если $\beta = 0$.

Тогда если выполнено условие (6.10) при $0 < \beta \leq 1$, а при $\beta = 0$ в нем функция $l(t)$ заменена на функцию $\mathcal{L}^{-1}(t)$, то найдется такое $(t_n) \in (-\pi, \pi]$, что последовательность точек $z_n = r_n e^{it_n}$, $n \in \mathbb{N}$, является множеством единственности класса $\mathcal{D}_{\beta, l}$.

Отсюда по следствию 1 и с учетом соотношения (4.15) получаем утверждение о нулевых подмножествах класса $\mathcal{D}_{\beta, l}^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$, $l(t) \in L_0 \cap L_\infty$ и для функции $l(t) \geq 1$ выполнены все условия предложения 9. Пусть, кроме того, функция $l(t)$ ограничена и отделена от нуля на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, и пусть в случае $\beta = 0$ выполнено условие (3.3). Предположим, что для положительной последовательности R_n , $n \in \mathbb{N}$, выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^\beta l(R_n^{-1}) = \infty, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (6.11)$$

а если $\beta = 0$, то функция $l(t)$ в нем заменена функцией $\mathcal{L}^{-1}(t)$.

Тогда найдется последовательность $\Lambda = (\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, являющаяся множеством единственности класса $\mathcal{D}_{\beta,l}^+$ и такая, что

$$\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda|^2} = R_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.12)$$

Напомним, что функция $\mathcal{L}(t)$ определена формулой (4.12).

Предложение 9 подтверждает точность предложения 6 (а тем самым и точность цитированного в § 1 результата из [4] в случае $c_n = l(n)/n^\beta$, $0 \leq \beta \leq 1$, $l(t) \in L_\infty$), а предложение 10 – точность предложения 7.

Как мы видели в процессе доказательства теоремы 2, неполнота системы $e(\Lambda)$ в $L_{\alpha,l}^2$, $-1 \leq \alpha \leq 0$, равносильна тому, что последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ является подмножеством нулевого множества класса $\mathcal{D}_{1+\alpha,1/l}^+$. Но если выполнены условия предложения 10 с $\beta = 1 + \alpha$ и с заменой $l(t)$ на $1/l(t)$ (а значит, и с заменой $\mathcal{L}(t)$ на $L(t)$; см. (2.4)), то найдется последовательность $\Lambda = (\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, такая, что верно (6.12) и в классе $\mathcal{D}_{1+\alpha,1/l}^+$ нет функции, обращающейся в нуль в точках λ_n . Поэтому система $e(\Lambda)$ полна в $L_{\alpha,l}^2$. При указанной выше замене условие (3.3) превращается в условие (5.3). Но лемма 3 освобождает нас от этого условия, давая возможность перейти к эквивалентному (с точки зрения полноты) пространству (5.6) с довольно общим весом ω , в том числе к пространству $L^{2,\alpha,l}$ в обозначении (5.9). В итоге верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $-1 \leq \alpha \leq 0$, а $l(t)$, $t \geq 1$, – нормализованная медленно меняющаяся функция, причем при $\alpha = 0$ – вместе с функцией $-t(l^{1/2}(t))'$, ограниченная и отделенная от нуля на каждом отрезке $[1, b]$, $b > 1$. Пусть функция $l(t)t^\alpha$, $t \geq 1$, выпукла, и пусть $l(t) \downarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, если $\alpha = 0$, и $L(\infty) = \infty$, если $\alpha = -1$. Предположим, что для положительной последовательности R_n выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{1+\alpha} l^{-1}(R_n^{-1}) = \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

а если $\alpha = -1$, то функция $l(t)$ в нем заменена функцией $L(t)$.

Тогда найдется последовательность $\Lambda = (\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, такая, что

$$\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda|^2} = R_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и система $e(\Lambda)$ полна в пространстве $L^{2,\alpha,l}$.

Таким образом, в терминах последовательности (6.12) теорема 2 дает окончательное необходимое условие полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^{2,\alpha,l}$, $-1 \leq \alpha \leq 0$, $l(t) \in L_\infty$.

Но за исключением классического случая $\alpha = 0$, $l(t) \equiv 1$ оно не является достаточным. Действительно, в предположении, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log \operatorname{dist}(iv, \Lambda)}{1 + v^2} dv > -\infty, \quad (6.13)$$

для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^{p,\alpha}$, $p \geq 1$, $\alpha > -1$, необходимо и достаточно выполнение условия (1.2) (это доказано в [16] для пространств L_α^p , но по лемме 3 система $e(\Lambda)$ полна в L_α^p и $L^{p,\alpha}$, $\alpha > -1$, одновременно).

Добавим, что условие (6.13) характеризует “не слишком тесный” контакт последовательности Λ с мнимой осью и что при $\alpha < -1$ критерий полноты системы $e(\Lambda)$ в $L^{p,\alpha}$ состоит в выполнении хотя бы одного из следующих двух условий: условие (1.2) и условие, противоположное (6.13) (см. [9]).

Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение текста, способствовавшее устранению ряда неточностей.

Список литературы

- [1] O. Szász, “Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen”, *Math. Ann.*, **77**:4 (1916), 482–496.
- [2] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles*, 2ième éd., Actualités Sci. Ind., Hermann, Paris, 1959, 151 pp.
- [3] L. Carleson, “On the zeros of functions with bounded Dirichlet integral”, *Math. Z.*, **56**:3 (1952), 289–295.
- [4] H. S. Shapiro, A. L. Shields, “On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces”, *Math. Z.*, **80**:1 (1962), 217–229.
- [5] И. О. Краснобаев, “Необходимое условие полноты системы экспонент в пространстве квадратично интегрируемых функций со степенным весом”, *Anal. Math.*, **38**:3 (2012), 187–202.
- [6] A. Nagel, W. Rudin, J. H. Shapiro, “Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces”, *Ann. of Math.* (2), **116**:2 (1982), 331–360.
- [7] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005, 503 с.
- [8] Б. Н. Хабибуллин, “Полнота систем экспонент в пространствах функций на луче и характеристика Коренблума–Сейпа”, *Уфимск. матем. журн.*, **1**:1 (2009), 77–83.
- [9] А. М. Седлецкий, “Аппроксимация типа Мюнца–Саса в весовых пространствах”, *Матем. сб.*, **204**:7 (2013), 97–126; англ. пер.: A. M. Sedletskii, “Approximation of Müntz–Szász type in weighted spaces”, *Sb. Math.*, **204**:7 (2013), 1028–1055.
- [10] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia Math. Appl., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, xx+491 pp.
- [11] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985, 142 с.; пер. с англ.: E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, v+112 pp.
- [12] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, v. I: *Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation*, Verlag Birkhäuser, Basel, 1950, 581 pp.
- [13] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, 2-е изд., Мир, М., 1984, 752 с.; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, v. II, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1971, xxiv+669 pp.
- [14] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Grad. Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000, x+286 pp.
- [15] L. Biryukov, “Some theorems on integrability of Laplace transforms and their applications”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **18**:7–8 (2007), 459–469.

- [16] А. М. Седлецкий, “Аппроксимация типа Мюнца–Саса в прямых произведениях пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 179–198; англ. пер.: А. М. Sedletskii, “Müntz–Szász type approximation in direct products of spaces”, *Izv. Math.*, **70**:5 (2006), 1031–1050.
- [17] A. R. Siegel, “On the Müntz–Szász theorem for $C[0, 1]$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1972), 161–166.
- [18] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965, 615 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp.

Анатолий Мечиславович Седлецкий
(Anatolii M. Sedletskii)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sedlet@mail.ru

Поступила в редакцию
25.06.2014 и 14.10.2014