Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Паршин, Голоморфный вариант метода Тейта–Ивасава для неразветвленных L -функций. I, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 10, 107–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:06:55

УДК 511.68+512.626

А. Н. Паршин

Голоморфный вариант метода Тейта–Ивасава для неразветвленных L -функций. I

Метод Тейта–Ивасава позволяет решить задачу мероморфного продолжения и существования функционального уравнения для дзета- и L -функций одномерных арифметических схем. Мы предлагаем новый вариант этого метода, рассматривая случай кривых над конечным полем и неразветвленные L -функции. В основе доказательства лежит редукция задачи к проблеме Кузена на комплексной сфере, связанной с рассматриваемой кривой.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: дзета-функция, аналитическое продолжение, формула Пуассона, сумма вычетов, проблема Кузена.

DOI: 10.4213/sm8397

В 1924 г. Эмиль Артин определил аналог $\zeta_C(s)$ дзета-функции Римана для алгебраических кривых C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов [1]. В этой работе он поставил вопрос о справедливости для них основных свойств дзета-функции Римана: аналитическое (точнее, мероморфное) продолжение на всю s -плоскость, существование функционального уравнения и описание вычетов в полюсах.¹

Дзета-функцию $\zeta_C(s)$ можно определить для $\operatorname{Re}(s) > 1$ двумя эквивалентными способами:

$$\zeta_C(s) = \sum_{D \geq 0} \operatorname{Nm}(D)^{-s}, \quad \text{где } \operatorname{Nm}(D) = q^{\deg D} \quad (\text{ряд Дирихле}),$$

$$\zeta_C(s) = \prod_{x \in C} (1 - q^{-s \deg(x)})^{-1} \quad (\text{эйлеровское произведение}),$$

где D пробегает все эффективные дивизоры на кривой C , а $\deg(x)$ – это степень поля вычетов $k(x)$ точки x над основным полем $\mathbb{F}_q$. Поставленные выше вопросы были полностью разрешены в 1931 г. Ф.-К. Шмидтом [2], который исходил из первого определения дзета-функции и использовал в качестве основного инструмента теорему Римана–Роха (и содержащуюся в ней двойственность). Теорема Римана–Роха для кривых над полями конечной характеристики была им доказана в этой же работе (см. также [3]).

Для числовых полей и дзета-функций Дедекинда эти вопросы были к тому времени уже решены Э. Гекке [4]. В 1950 г. в своей диссертации [5] Дж. Тейт

¹Он также предположил справедливость аналога гипотезы Римана о нулях в этой ситуации, но в этой работе мы ограничимся первыми тремя вопросами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 14-01-00178-а, 13-01-12420 офи-м2) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2998.2014.1).

(и независимо от него К. Ивасава [6] (краткое изложение), [7]) предложил аналитический подход, развивающий подходы Римана [8] и Гекке [4]. Он исходил из адельного формализма, построенного К. Шевалле и А. Вейлем для любых глобальных полей (размерности 1) как числовых, так и функциональных (= поля функций на кривых C). Этот метод использует определение дзета-функции с помощью эйлеровского произведения, применяет гармонический анализ на пространстве аделей и работает единым образом для глобальных полей обоих типов. Место теоремы Римана–Роха занимает в нем формула Пуассона.

С тех пор эта техника нашла многочисленные применения в арифметике для изучения дзета- и L -функций самого разного вида. В работе [9] мы предложили рассмотреть случай неразветвленных L -функций (дзета-функция $\zeta_C(s)$ является таковой), перейти от групп аделей к их дискретным факторам и, что наиболее важно, к их голоморфно двойственным группам. В результате с кривой над конечным полем можно связать комплексное многообразие (в этом случае, весьма простое, объединение конечного числа проективных прямых $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ на поле комплексных чисел) и использовать технику комплексного анализа. Оказалось, что формула Пуассона на пространстве аделей кривой C , лежащая в основе метода Тейта–Ивасава, превращается при таком подходе в формулу для суммы вычетов в четырех точках на комплексной сфере $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, а преобразование Фурье – в инволюцию на этой же сфере, переставляющую эти точки.

Независимо в работе [10] М. М. Капранов предлагает видоизменение доказательства Шмидта существования аналитического продолжения и функционального уравнения. Он также исходит из ряда Дирихле и использует теорему Римана–Роха, но окончательный результат получается из новой алгебраической леммы о формальных степенных рядах от одной переменной (лемма 1.3.4²).

Формулировка этой леммы подсказывает, что в основе аналитического продолжения дзета-функции может лежать какой-то вариант классической задачи – проблемы Кузена построения рациональной функции на компактной римановой поверхности по локальным данным, ее главным частям. При этом необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы Кузена является равенство нулю некоторой суммы вычетов, связанной с локальными данными. Результаты работы [9] о сумме вычетов как эквиваленте формулы Пуассона позволяют реализовать эту идею в настоящей работе с использованием адельной техники уже на кривой $\mathbb{P}^1$.

Таким образом, в нашем подходе пространство аделей возникает совершенно независимо два раза: первый раз, обычным образом, для кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и второй раз для проективной прямой над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, также канонически связанной с кривой C . В обоих случаях существенно используется то, что аннулятор дискретной подгруппы K (= полю функций на кривой) совпадает с ней самой (см. формулу (1) и пп. 8, 11 ниже).

Появление содержательного комплексного анализа в нашем подходе является дальнейшим развитием использования А. Вейлем комплексной структуры на множестве характеров группы идеалов со значениями в $\mathbb{C}^*$ (см. [11]). Заметим, что, тем не менее, доказательство основной теоремы нашей работы является чисто алгебраическим. Нам не нужно использовать локальную сходимост

²Она дана без доказательства и, по-видимому, связана с техникой формальных распределений из теории вертексных алгебр.

ряда Дирихле и достаточно рассматривать формальные ряды Лорана. Поэтому можно заменить поле $\mathbb{C}$ на любое другое, скажем алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Необходимость именно комплексного анализа появится при перенесении нашего подхода на случай дзета-функций полей алгебраических чисел.

Для удобства читателя мы приводим в пп. 1–3, 10, 11 сводку основных понятий теории аделей и в пп. 4–6 изложение необходимых результатов из [9]. Основные результаты настоящей работы излагаются в пп. 7–9.

§ 1. Адели для кривых над конечным полем. Метод Тейта–Ивасава

1. Пусть C – гладкая проективная геометрически неприводимая кривая, определенная над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$. Пусть $K = k(C)$ – поле рациональных функций на C . Обозначим через $\mathbb{A}$ кольцо аделей C

$$\mathbb{A} := \prod'_{x \in C} K_x,$$

где x пробегает все замкнутые точки кривой C , K_x – пополнение поля K в точке x и ограниченное (адельное) произведение берется относительно подколец $\widehat{\mathcal{O}}_x$ дискретного нормирования ν_x в K_x . Локальный параметр t_x в точке $x \in C$ определяет изоморфизмы

$$K_x \cong k(x)((t_x)), \quad \widehat{\mathcal{O}}_x \cong k(x)[[t_x]],$$

где $k(x)$ – поле вычетов точки x . Все эти группы являются локально компактными топологическими группами. Группа $\mathbb{A}$ содержит дискретную компактную группу K и компактные подгруппы

$$\mathbb{A}(D) := \{(a_x) \in \mathbb{A} \mid \nu_x(a_x) \geq -\nu_x(D) \text{ для всех } x \in C\}$$

для каждого дивизора $D = \sum_{x \in C} n_x \cdot x = \sum_{x \in C} \nu_x(D) \cdot x$ на кривой C . В частности, $\mathbb{A}(0) = \mathcal{O} = \prod_{x \in C} \mathcal{O}_x$ (см. подробнее [11], [12]).

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ – пространство всех комплекснозначных функций Брюа–Шварца на $\mathbb{A}$, т.е. комплекснозначных локально постоянных функций с компактным носителем. Для каждого дивизора D на C характеристическая функция $\delta_{\mathbb{A}(D)}$ подмножества $\mathbb{A}(D)$ принадлежит пространству $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ и оно порождено конечными линейными комбинациями таких функций [11; гл. VII-2, предложение 2].

Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{A})$ – векторное пространство всех комплекснозначных линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{A})$, т.е. пространство всех обобщенных функций. Тогда $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{A})$, где $\delta_0(f) = f(0)$ для $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$. Также имеется дельта-функция $\delta_K \in \mathcal{D}'(\mathbb{A})$ дискретного подмножества K , где для любой функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$

$$\delta_K(f) = \sum_{a \in K} f(a).$$

Обозначим через $\mathbb{A}^*$ группу идеалей на C , т.е. обратимых элементов кольца $\mathbb{A}$. Она является адельным произведением мультипликативных групп K_x^* полей K_x по отношению к подгруппам $\widehat{\mathcal{O}}_x^*$ в K_x^* .

Существует сюръективный гомоморфизм степеней

$$\deg: \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (a_x) \mapsto \deg(a_x) := \sum_{x \in C} \nu_x(a_x) \deg(x),$$

где $\deg(x)$ – степень поля вычетов $k(x)$ над $k = \mathbb{F}_q$ для замкнутых точек $x \in C$. Имеем $q_x := \#k(x) = q^{\deg(x)}$. Пусть $(\mathbb{A}^*)^{(1)}$ – ядро гомоморфизма степени. Тогда подгруппа K^* дискретна и факторгруппа $(\mathbb{A}^*)^{(1)}/K^*$ компактна.

Мы будем также рассматривать комплекснозначные характеры χ группы $\mathbb{A}^*$, ограничения которых на K^* тривиальны. В частности, гомоморфизм нормы $|\cdot| := q^{-\deg(\cdot)}$ является характером такого типа. На характерах имеется следующая инволюция:

$$\check{\chi} := |\cdot| \chi^{-1}.$$

Каждый характер χ рассматриваемого типа можно записать как $\chi = \chi_0 |\cdot|^s$ для некоторого $s \in \mathbb{C}$, где $|\chi_0(a)| = 1$ для всех $a \in \mathbb{A}^*$. Отсюда вытекает, что вещественная часть $\operatorname{Re}(s)$ числа s не зависит от приведенного разложения. Обозначим ее через $\operatorname{Re}(\chi)$.

2. Двойственность и преобразование Фурье. Выберем ненулевую рациональную дифференциальную форму ω степени 1 на C и рассмотрим непрерывное и невырожденное спаривание на $\mathbb{A}$, задаваемое формулой

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{U}(1), \quad \langle (a_x), (b_x) \rangle := \sum_{x \in C} \Psi(\operatorname{Tr}_{k(x)/k} \operatorname{res}_x(a_x b_x \omega)),$$

где $\mathbf{U}(1) = \{z \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ и $\Psi: k = \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^*$ – инъективный гомоморфизм, определяемый выбором q -го корня из единицы в $\mathbb{C}^*$. Тогда группа $\mathbb{A}$ является двойственной самой себе по Понтрягину. При этом легко видеть, что аннулятор $\mathbb{A}(D)^\perp$ подгруппы $\mathbb{A}(D)$ по отношению к этому спариванию равен $\mathbb{A}((\omega) - D)$, где (ω) – дивизор дифференциальной формы ω . Нетривиальный факт состоит в том, что дискретная подгруппа $K \subset \mathbb{A}$ ортогональна самой себе относительно спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$K^\perp = K. \quad (1)$$

Отсюда следует, что для любого $g \in \mathbb{A}^*$ аннулятор подгруппы gK совпадает с $g^{-1}K$, $(gK)^\perp = g^{-1}K$.

Выберем еще аддитивную меру Хаара μ на $\mathbb{A}$. Преобразование Фурье определяется обычной формулой

$$(\mathbf{F}f)(a) = \int_{\mathbb{A}} \langle a, b \rangle f(b) d\mu(b).$$

Преобразование Фурье $\mathbf{F}$ определено на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{A})$ и переводит его в себя.

Заметим, что каждый идеаль $g \in \mathbb{A}^*$ определяет такие обобщенные функции $\delta_{gK} \in \mathscr{D}'(\mathbb{A})$ и $\delta_{gK^*} \in \mathscr{D}'(\mathbb{A})$, что для функций $f \in \mathscr{D}(\mathbb{A})$ имеем $\delta_{gK}(f) = \sum_{a \in gK} f(a)$, $\delta_{gK^*}(f) = \sum_{a \in gK^*} f(a) = \delta_{gK}(f) - \delta_0(f)$. В этой ситуации в силу равенства (1) формула суммирования Пуассона выглядит следующим образом:

$$\delta_{gK}(f) = |g|^{-1} \delta_{g^{-1}K}(\mathbf{F}f), \quad (2)$$

если нормировать меру Хаара так, чтобы $\mu(\mathcal{O}) = q^{1-g(C)}$, где $g(C)$ – род кривой C . Кроме того, имеем

$$\mathbf{F}\delta_{\mathbb{A}(D)} = q^{1-g(C)+\deg(D)} \delta_{\mathbb{A}((\omega)-D)},$$

где (ω) – дивизор формы ω .

3. Дзета-функции. Метод Тейта–Ивасава. Если $\operatorname{Re}(\chi) > 1$, то можно ввести сходящийся интеграл

$$\Delta_\chi(f) = \int_{\mathbb{A}^*} \chi(g) f(g) d\mu^*(g), \quad (3)$$

где μ^* – мультипликативная мера Хаара на группе $\mathbb{A}^*$, которую мы нормализуем так, чтобы $\mu^*(\mathcal{O}^*) = 1$. Прямое вычисление показывает, что

$$\Delta_{|\cdot|^s}(\delta_{\mathbb{A}(D)}) = q^{\deg(D)s} \zeta_C(s). \quad (4)$$

В частности, $\Delta_{|\cdot|^s}(\delta_{\mathcal{O}}) = \zeta_C(s)$.

Чтобы преодолеть проблему расходимости интеграла (3) при $\operatorname{Re}(\chi) < 1$, сначала используется некоторая его регуляризация.

Именно, пусть φ – функция на $\mathbb{A}^*/K^*$, индуцированная комплекснозначной функцией с конечным носителем на $\mathbb{Z}$ с помощью гомоморфизма степени $\deg: \mathbb{A}^*/K^* \rightarrow \mathbb{Z}$. Тогда функция φ имеет компактный носитель и локально постоянна на $\mathbb{A}^*/K^*$, иначе говоря, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^*/K^*)$. Положим

$$\Delta_\chi^\varphi := \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) \chi(g) \delta_{gK^*} d\mu^*(g).$$

Легко видеть, что Δ_χ^φ корректно определена для любого характера χ и что для любой функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ значение функционала $\Delta_\chi^\varphi(f)$ является многочленом Лорана от q^{-s} .

Удобно рассмотреть разложение $\varphi = \varphi_- + \varphi_+$, где для $g \in \mathbb{A}^*/K^*$ имеем $\varphi_-(g) = \varphi(g)$, если $\deg(g) < 0$, $\varphi_-(g) = \varphi(g)/2$, если $\deg(g) = 0$, и $\varphi_-(g) = 0$, если $\deg(g) > 0$. Вторая функция φ_+ определяется этим однозначно. Предположим, что функция φ симметрична, т.е. $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$. Отсюда следует, что $\varphi_\pm(g) = \varphi_\mp(g^{-1})$.

Имеем

$$\Delta_\chi^\varphi = \Delta_\chi^{\varphi_-} + \Delta_\chi^{\varphi_+} = \Delta_\chi^{\varphi_-} + \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi_+(g) \chi(g) \delta_{gK} d\mu^*(g) - \delta_0 \cdot c(\varphi_+, \chi),$$

где

$$c(\varphi_+, \chi) := \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi_+(g) \chi(g) d\mu^*(g) \in \mathbb{C}.$$

Используя формулу Пуассона (2) и разложение $g^{-1}K = g^{-1}K^* \cup \{0\}$, находим, что

$$\Delta_\chi^\varphi = \Delta_\chi^{\varphi_-} + F\Delta_{\check{\chi}}^{\varphi_-} + (F\delta_0) \cdot c(\varphi_+, \check{\chi}^{-1}) - \delta_0 \cdot c(\varphi_+, \chi). \quad (5)$$

Поскольку интеграл Δ_χ^φ сходится для любого характера χ , пределы $\Delta_\chi^- := \lim_{\varphi \rightarrow 1} \Delta_\chi^{\varphi_-}$ и $F\Delta_\chi^- = \lim_{\varphi \rightarrow 1} F\Delta_\chi^{\varphi_-}$ имеют смысл для любого характера χ . Это дает аналитическое продолжение интеграла (3), функциональное уравнение в виде

$$\Delta_\chi(f) = \Delta_{\check{\chi}}(Ff) \quad (6)$$

и описание структуры полюсов в точках $\operatorname{Re} \chi = 0$ и $\operatorname{Re} \chi = 1$ (детали см. в [9; 2.4]).

Описанные конструкции имеют следующее применение к дзета-функции кривой C . Сначала, поскольку $\Delta_{|\cdot|^s}(\delta_{\mathcal{O}}) = \zeta_C(s)$ при $\operatorname{Re}(s) > 1$, находим, что $\zeta_C(s)$

имеет мероморфное продолжение на всю s -плоскость. Кроме того, формулы (6) и (4) влекут функциональное уравнение

$$\zeta_C(s) = q^{g(C)-1} q^{(2-2g(C))(s)} \zeta_C(1-s),$$

так как $\deg((\omega)) = 2g(C) - 2$. Наконец, легко видеть, что

$$\mu^*((\mathbb{A}^*)^{(1)}/K^*) = \frac{|\mathrm{Pic}^0(C)(\mathbb{F}_q)|}{q-1},$$

поскольку $\mu^*(\mathcal{O}^*) = 1$. Здесь $\mathrm{Pic}^0(C)$ – группа классов изоморфизма линейных расслоений степени нуль на C и $\mathrm{Pic}^0(C)(\mathbb{F}_q)$ – группа ее рациональных точек. Следовательно, единственными особенностями дзета-функции $\zeta_C(s)$ являются полюсы первого порядка в $s = 0$ и $s = 1$ (и соответственно во всех точках арифметических прогрессий $2\pi im/\ln q$, $m \in \mathbb{Z}$, и $1 + 2\pi im/\ln q$, $m \in \mathbb{Z}$) с вычетами

$$\mathrm{res}_{s=0} \zeta_C(s) = -\frac{|\mathrm{Pic}^0(C)(\mathbb{F}_q)|}{q-1} \ln^{-1} q \quad (7)$$

и

$$\mathrm{res}_{s=1} \zeta_C(s) = q^{1-g(C)} \frac{|\mathrm{Pic}^0(C)(\mathbb{F}_q)|}{q-1} \ln^{-1} q. \quad (8)$$

В дополнение получаем без труда следующее представление для $\zeta_C(s)$:

$$\zeta_C(s) = \frac{P(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})},$$

где $P(q^{-s})$ – многочлен от переменной $t = q^{-s}$ степени $2g(C)$ (см. детали в [11; гл. VII, § 6, теорема 4] и [9; 2.5]). Этот многочлен удовлетворяет функциональному уравнению $P(q^{-1}t^{-1}) = q^{-g(C)} t^{-2g(C)} P(t)$.

§ 2. Дискретные группы и голоморфные торы

4. Пусть $C/\mathbb{F}_q$ – снова алгебраическая кривая, определенная над конечным полем $\mathbb{F}_q$. На C имеются следующие (дискретные) группы дивизоров:

$$\Gamma = \mathrm{Div}(C) \supset \Gamma_0 = \mathrm{Div}^0(C) \supset \Gamma_l = \mathrm{Div}_l(C),$$

где $\mathrm{Div}^0(C)$ – группа дивизоров степени 0 и $\mathrm{Div}_l(C)$ – группа дивизоров, линейно эквивалентных нулю. Как хорошо известно, Γ_0/Γ_l – конечная группа $\mathrm{Pic}^0(C)(\mathbb{F}_q)$.

Профильруем группу Γ подгруппами $\Gamma_S := \mathrm{Div}_S(C) = \{\text{дивизоры с носителями в } S\}$:

$$\Gamma = \varinjlim_S \Gamma_S = \varinjlim_S \bigoplus_{x \in S} \Gamma_{(x)} = \bigoplus_{x \in C} \Gamma_{(x)},$$

где S – конечные подмножества в C и $\Gamma_{(x)} = \mathbb{Z}$ – группа нормирования в точке x .

На $\mathbb{Z}$ имеются два пространства: пространство $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ функций с конечным носителем и пространство $\mathcal{D}_+(\mathbb{Z})$ таких функций f , что $f(n) = 0$ для $n \ll 0$ и $f(n) = \text{const}$ для $n \gg 0$.

Пространство $\mathcal{D}_+(\mathbb{Z})$ является линейной оболочкой функций

$$\delta_{(\geq m)}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Группа $\mathbb{Z} = \Gamma_{(x)}$ появляется как $K_x^*/\widehat{\mathcal{O}}_x^*$. Тогда $K_x = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} t_x^n \widehat{\mathcal{O}}_x^* \cup \{0\}$. Следовательно, имеем изоморфное отображение

$$\mathcal{D}(K_x)^{\widehat{\mathcal{O}}_x^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_+(\mathbb{Z}), \quad \{f \mapsto f(t_x^n)\},$$

подпространства функций на K_x , инвариантных относительно умножения на $\widehat{\mathcal{O}}_x^*$, на пространство функций на группе $\mathbb{Z}$.

Преобразование Фурье $F = F_x: \mathcal{D}(K_x) \rightarrow \mathcal{D}(K_x)$ перестановочно с действием группы $\widehat{\mathcal{O}}_x^*$ и индуцирует, следовательно, аналог преобразования Фурье на группе $\mathbb{Z} = \Gamma_{(x)}$ в точке x :

$$F_x: \mathcal{D}_+(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}_+(\mathbb{Z}).$$

Нетрудно найти формулы для $F(\delta_{(\geq m)})$ (см. [9; 3.3]).

Теперь мы глобализуем эти чисто локальные конструкции. Нам нужны пространства $\mathcal{D}(\Gamma)$ и $\mathcal{D}_+(\Gamma)$ на группе всех дивизоров Γ . Сначала изменим обозначения для стандартных функций:

$$f_{x,D}(n_x) = \begin{cases} 1, & n_x \geq \nu_x(D), \\ 0, & n_x < \nu_x(D), \end{cases}$$

где $n_x \in \Gamma_{(x)}$ и D пробегает дивизоры на кривой C . Иногда мы будем обозначать эту функцию старым символом $\delta_{(\geq n)}$, где $n = \nu_x(D)$.

Положим

$$\mathcal{D}_+(\Gamma) := \left\{ \text{линейная оболочка функций } f_D = \bigotimes_{x \in \text{Supp } D} f_{x,D} \bigotimes_{x \notin \text{Supp } D} \delta_{(\geq 0)} \right\},$$

что равно пространству инвариантов $\mathcal{D}(\mathbb{A}^*)^{\mathcal{O}^*}$, где $\mathcal{O}^* = \prod_{x \in C} \mathcal{O}_x^*$. Функции f_D соответствуют функциям $\delta_{\mathbb{A}(-D)} \in \mathcal{D}(\mathbb{A})^{\mathcal{O}^*}$.

Формула Пуассона

$$\delta_{gK}(f) = \delta_{(0)}(f) + \delta_{gK^*}(f) = |g|^{-1} \delta_{(0)}(Ff) + |g|^{-1} \delta_{g^{-1}K^*}(Ff) = |g|^{-1} \delta_{g^{-1}K}(Ff)$$

для функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ может быть переписана для дискретной группы Γ как

$$\delta_{(0)}(f) + (q-1)\delta_{\gamma+\Gamma_l}(f) = q^{-n}\delta_{(0)}(Ff) + (q-1)q^{-n}\delta_{-\gamma+\Gamma_l}(Ff) \quad (9)$$

с $\gamma \in \Gamma$ (равным образом элемента g из (2) относительно естественного отображения $\mathbb{A}^* \rightarrow \Gamma$). Здесь мы использовали функционал

$$\delta_{(0)}(f) = \prod_x \delta_{(0)}(f_x), \quad f = \bigotimes_{x \in C} f_x, \quad \delta_{(0)}(f_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_x(n).$$

Детали см. в [9; 3.1].

5. Голоморфные торы. Следующий этап нашей конструкции состоит в рассмотрении групп, двойственных к таким группам, как $\mathbb{Z} = \Gamma_{(x)}$ или Γ_C . Обычная двойственность Понтрягина $\Gamma \mapsto \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{U}(1))$ не подходит для целей арифметики. Группами, двойственными к нашим дискретным группам, будут комплексные торы:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(x)} &:= \text{Hom}(\Gamma_{(x)}, \mathbb{C}^*), \\ \mathbb{T}_\Gamma \text{ (или просто } \mathbb{T}) &= \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) := \varprojlim_S \text{Hom}(\Gamma_S, \mathbb{C}^*), \\ \mathbb{T}_{\text{Pic}} &:= \text{Hom}(\Gamma/\Gamma_l, \mathbb{C}^*) \supset \mathbb{T}_0 := \text{Hom}(\Gamma/\Gamma_0, \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*, \end{aligned}$$

где включение индуцировано отображением степени: $\Gamma \xrightarrow{\deg} \Gamma/\Gamma_0 = \mathbb{Z}$.

Имеем короткую точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{T}_0 \rightarrow \mathbb{T}_{\text{Pic}} \rightarrow \text{Hom}(\text{Div}^0(C)/\text{Div}_l(C), \mathbb{C}^*) \rightarrow 0 \quad (*)$$

и, следовательно, $\mathbb{T}_{\text{Pic}} \cong \mathbb{C}^* \times \{\text{конечная группа}\}$. В дальнейшем будем обозначать конечную группу $\text{Div}^0(C)/\text{Div}_l(C)$ через Φ , а группу, к ней двойственную, через $\check{\Phi}$.

Чтобы рассматривать тор $\mathbb{T}_\Gamma$ как многообразие, нужно лишь знать кольцо регулярных функций на $\mathbb{T}_\Gamma$. Для этого введем проективную систему торов $\mathbb{T}_S := \text{Hom}(\text{Div}_S(C), \mathbb{C}^*) = \prod_{x \in S} \text{Hom}(\Gamma_{(x)}, \mathbb{C}^*) =: \prod_{x \in S} \mathbb{T}_{(x)}$ с естественными проекциями

$$\mathbb{T}_S \leftarrow \mathbb{T}_{S'}, \quad \text{если } S \subset S',$$

индуцированными вложениями $\text{Div}_S(C) \subset \text{Div}_{S'}(C)$.

Определим теперь дивизор D_S с нормальными пересечениями на $\mathbb{T}_S$, состоящий из тех точек в произведении $\mathbb{T}_S$, для которых по меньшей мере одна компонента является единичным элементом в группе $\mathbb{T}_{(x)}$. Пусть $\mathbb{C}_+[\mathbb{T}_S]$ – пространство рациональных функций на $\mathbb{T}_S$, которые регулярны вне D_S и лишь могут иметь полюсы первого порядка на D_S . В частности, $\mathbb{C}_+[\mathbb{T}_{(x)}] = \mathbb{C}[\mathbb{T}_{(x)}](1 - z_x)^{-1}$. Здесь z_x – координата на $\mathbb{T}_{(x)}$, именно, для $\chi \in \mathbb{T}_{(x)}$ имеем $z_x = \chi(1)$.

Тогда $\mathbb{T} := \varprojlim_S \mathbb{T}_S$ и можно положить

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathbb{T}] &:= \varinjlim_S \mathbb{C}[\mathbb{T}_S] = \bigotimes'_{x \in C} \mathbb{C}[\mathbb{T}_{(x)}] \\ &:= \left\{ \left(\bigotimes_{x \in C} f_x \right) : f_x \in \mathbb{C}[\mathbb{T}_{(x)}] \text{ \& } f_x = 1 \text{ для почти всех } x \right\}, \\ \mathbb{C}_+[\mathbb{T}] &:= \varinjlim_S \mathbb{C}_+[\mathbb{T}_S] = \bigotimes'_{x \in C} \mathbb{C}_+[\mathbb{T}_{(x)}] \\ &:= \left\{ \left(\bigotimes_{x \in C} f_x \right) : f_x \in \mathbb{C}_+[\mathbb{T}_{(x)}] \text{ \& } f_x = (1 - z_x)^{-1} \text{ для почти всех } x \right\}. \end{aligned}$$

Кольцо $\mathbb{C}[\mathbb{T}]$ является по определению кольцом регулярных функций на торе $\mathbb{T}$, а $\mathbb{C}_+[\mathbb{T}]$ будет свободным модулем над ним с образующей (f_x) , где $f_x = (1 - z_x)^{-1}$ для всех x .

Предположим теперь, что мы имеем алгебраическую группу $\mathbb{T}$, которая необязательно связна, но связной компонентой $\mathbb{T}_e$ единицы e которой является тор, и для которой $\pi_0(\mathbb{T}) = \mathbb{T}/\mathbb{T}_e$ – дискретная группа. Тогда

$$\mathbb{C}[\mathbb{T}] = \bigoplus_{h \in \pi_0(\mathbb{T})} \mathbb{C}[h\mathbb{T}]$$

и можно положить

$$\mathbb{C}_+[\mathbb{T}] = \mathbb{C}_+[\mathbb{T}_e] \bigoplus_{h \in \pi_0(\mathbb{T}), h \neq e} \mathbb{C}[h\mathbb{T}].$$

Теперь мы хотим описать связь между функциями на дискретных группах и функциями на группах, к ним двойственным. Это можно сделать, используя преобразование Меллина, аналог преобразования Фурье в нашей ситуации.

Если $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ принадлежит какому-то пространству функций на $\mathbb{Z}$, то преобразование Меллина Mf равно

$$(Mf)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)z^n, \quad (10)$$

где $z \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ и z^n – это $z(n)$. Преобразование Меллина отображает изоморфно пространство $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ функций с конечным носителем и пространство $\mathcal{D}_+(\mathbb{Z})$ на пространства $\mathbb{C}[\mathbb{T}_{(x)}]$ и $\mathbb{C}_+[\mathbb{T}_{(x)}]$ соответственно. Эти изоморфизмы позволяют определить преобразование Фурье, F_{new} , на пространствах $\mathbb{C}_+[\mathbb{T}_{(x)}]$ таким образом, что $M \circ F_{\text{old}} = F_{\text{new}} \circ M$.³

Перейдем теперь к глобальной конструкции. Применяя преобразование Меллина к стандартным функциям, проверяем, что

$$\mathbb{C}_+[\mathbb{T}_S] = \{\text{линейная оболочка функций } Mf_D, D \in \text{Div}_S(C)\}.$$

Также видим, что для почти всех $x \in C$ $F_x((1 - z_x)^{-1}) = (1 - z_x)^{-1}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbb{T}_x]$. Эти факты позволяют нам соединить локальные преобразования Фурье F_x для всех x в одно глобальное преобразование F на торе $\mathbb{T}_\Gamma$

$$F: \mathbb{C}_+[\mathbb{T}_\Gamma] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_+[\mathbb{T}_\Gamma]$$

так, чтобы $F(f_x) = (F_x f_x)$ и $F \circ F = \text{Id}$.

Точная последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma/\Gamma_0 \rightarrow 0$$

определяет вложение торов:

$$\check{\pi}: \mathbb{T}_0 \rightarrow \mathbb{T}.$$

Если $z_x \in \mathbb{T}_x = \text{Hom}(\mathbb{Z}_{(x)}, \mathbb{C}^*)$ и $\text{Div}(C) = \bigoplus_{x \in C} \mathbb{Z}_{(x)}$, то вложение $\check{\pi}: \mathbb{T}_0 \rightarrow \mathbb{T}$ можно записать как $z \mapsto z_x = z^{\deg(x)}$, где $\#k(x) = q_x = q^{\deg(x)}$.

Это вложение индуцирует отображение (= ограничение на $\mathbb{T}_0$) пространства $\mathbb{C}_+[\mathbb{T}_\Gamma]$ в некоторое функциональное пространство

$$\mathbb{C}_+[\mathbb{T}] \xrightarrow{\check{\pi}^*} \mathcal{F}(\mathbb{T}_0). \quad (11)$$

Прямой подстановкой получаем

$$\begin{aligned} \check{\pi}^*(Mf_D) &= \prod_{x \in C} (z^{\deg(x)})^{\nu_x(D)} (1 - z^{\deg(x)})^{-1} \\ &= z^{\deg D} \prod_x (1 - z^{\deg(x)})^{-1} = z^{\deg(D)} F(z) =: F_D(z), \end{aligned}$$

где произведение сходится, когда $|z| < q^{-1}$. Кроме того, $F(z) = \zeta_C(s)$ для $z = q^{-s}$ и функция $F(z)$ будет функцией $Z_C(t)$ из теории этальных когомологий Гротендика, когда мы применим подстановку $t = q^{-s}$.

Из теории когомологий или метода Тейта–Ивасава (который мы кратко описали выше в п. 3) мы знаем, что

$$\check{\pi}^*(Mf_D) = z^{\deg D} \frac{P(z)}{(1 - z)(1 - qz)} \quad (12)$$

и образом отображения в (11) будет пространство $\mathbb{C}_{++}[\mathbb{T}_0]P$, где $\mathbb{C}_{++}[\mathbb{T}_0]$ – пространство рациональных функций на $\mathbb{P}^1$ с полюсами не выше первого порядка в точках $z = 1$ и $z = q^{-1}$ и регулярных вне этих точек и точек (0) и (∞) .

³Здесь F_{old} – преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{D}_+(\mathbb{Z})$. В дальнейшем мы будем использовать одно и то же обозначение F для преобразований Фурье на всех пространствах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9; 3.3]. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_+[\mathbb{T}] & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}_+[\mathbb{T}] \\ \tilde{\pi}^* \downarrow & & \tilde{\pi}^* \downarrow \\ C_{++}[\mathbb{T}_0] & \xrightarrow{i^*} & C_{++}[\mathbb{T}_0] \end{array}$$

коммутативна. Здесь $i: \mathbb{T}_0 \rightarrow \mathbb{T}_0$ – инволюция $i(z) = q^{-1}z^{-1}$ тора $\mathbb{T}_0$.

Мы видим, что функциональное уравнение является по существу симметрией относительно инволюции $i: z \mapsto q^{-1}z^{-1}$, как только мы отождествим координату z на торе $\mathbb{T}_0$ с параметром $t = q^{-s}$ из теории Гротендика. Тогда $i(z) = q^{-1}z^{-1}$ соответствует отображению $s \mapsto 1 - s$, поскольку $z = q^{-s}$.

До сих пор мы рассматривали, что происходит с функциями на торе $\mathbb{T}_\Gamma$, когда они ограничиваются на связную компоненту $\mathbb{T}_0$ единичного элемента тора $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$. Вообще же в силу (*)

$$\mathbb{T}_{\text{Pic}} = \coprod_{\chi \in \check{\Phi}} \chi \mathbb{T}_0 = \coprod_{\chi \in \check{\Phi}} (\mathbb{T}_{\text{Pic}})_\chi.$$

Тор $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$ обладает инволюцией $i: \mathbb{T}_{\text{Pic}} \rightarrow \mathbb{T}_{\text{Pic}}$, которая посылает характер $\chi: \Gamma/\Gamma_l \rightarrow \mathbb{C}^*$ в характер $\check{\chi} := |\cdot| \chi^{-1}$ с $|a| = q^{-\deg(a)}$. Эта инволюция совпадает с предыдущей инволюцией i на торе $\mathbb{T}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [9; 3.3]. *Имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_+[\mathbb{T}] & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}_+[\mathbb{T}] \\ \tilde{\pi}^* \downarrow & & \tilde{\pi}^* \downarrow \\ C_{++}[\mathbb{T}_{\text{Pic}}] & \xrightarrow{i^*} & C_{++}[\mathbb{T}_{\text{Pic}}]. \end{array}$$

6. Формула Пуассона и вычеты. Инволюция $i: \mathbb{T}_0 \rightarrow \mathbb{T}_0$ однозначно продолжается до отображения проективной компактификации $\overline{\mathbb{T}}_0 = \mathbb{P}^1$ тора $\mathbb{T}_0 = \mathbb{C}^*$. Пусть $\omega = dz/z$. Тогда

$$i^*(\omega) = \frac{d(q^{-1}z^{-1})}{q^{-1}z^{-1}} = \frac{dz^{-1}}{z^{-1}} = -\omega.$$

Пусть $h \in \mathbb{C}_{++}[\mathbb{T}_0]$. Дивизор полюсов имеет носитель

$$\text{Supp}(h)_\infty \subset \{z = 0\} \cup \{z = q^{-1}\} \cup \{z = 1\} \cup \{z = \infty\}.$$

Следовательно,

$$\text{res}_{(0)}(h\omega) + \text{res}_{(q^{-1})}(h\omega) + \text{res}_{(1)}(h\omega) + \text{res}_{(\infty)}(h\omega) = 0.$$

Так как $\text{res}_P(\eta) = \text{res}_{i(P)}(i^*\eta)$ для любой дифференциальной формы η и любой точки P , то

$$\text{res}_{(0)}(h\omega) + \text{res}_{(1)}(h\omega) = \text{res}_{(0)}(i^*h \cdot \omega) + \text{res}_{(1)}(i^*h \cdot \omega). \quad (13)$$

Тор $\mathbb{T}_0$ является связной компонентой тора $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$, и при этом

$$\mathbb{T}_{\text{Pic}} = \coprod_{\chi \in \check{\Phi}} (\mathbb{T}_{\text{Pic}})_\chi \subset \overline{\mathbb{T}}_{\text{Pic}},$$

где граница компактификации $\overline{\mathbb{T}}_{\text{Pic}}$ имеет следующую структуру:

$$\partial\overline{\mathbb{T}}_{\text{Pic}} = \coprod_{\chi \in \check{\Phi}} (\{0_\chi\} \cup \{\infty_\chi\}).$$

Каждая компонента $\chi\mathbb{T}_0$ изоморфна $\mathbb{C}^*$ с координатой z_χ ,⁴ и точки 0_χ и ∞_χ определены как $z_\chi = 0$ и $z_\chi = \infty$ соответственно. Форма ω на $\mathbb{T}_0$ инвариантна относительно сдвигов и потому определяет каноническую инвариантную форму ω на $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$, равную dz_χ/z_χ на каждой χ -компоненте.

Введем, наконец, на $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$ функциональное пространство $\mathbb{C}_{++}[\mathbb{T}_{\text{Pic}}]$ как прямую сумму пространств $\mathbb{C}_{++}[\mathbb{T}_0]$ и пространств $\mathbb{C}[(\mathbb{T}_{\text{Pic}})_\chi]$, где $\chi \in \check{\Phi}$ и $\chi \neq 1$.

Пусть $f \in \mathcal{D}_+(\Gamma)$. Тогда имеется последовательность преобразований

$$f \mapsto Mf \in \mathbb{C}_+[\mathbb{T}]_\Gamma \mapsto \tilde{f} := \tilde{\pi}^* Mf \in \mathbb{C}_{++}[\mathbb{T}_{\text{Pic}}], \quad (14)$$

где отображение π снова является естественной проекцией на большую группу Γ/Γ_l .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [9; 3.4]. *Имеет место равенство, в котором вычеты в точке $z = 1$ производятся на торе $\mathbb{T}_0$:*

$$\sum_{\chi \in \check{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(z_\chi^n \cdot \tilde{f}\omega) + \text{res}_{(1)}(\tilde{f}\omega) = q^{-n} \sum_{\chi \in \check{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(z_\chi^{-n} \cdot i^* \tilde{f} \cdot \omega) + q^{-n} \text{res}_{(1)}(i^* \tilde{f} \cdot \omega).$$

Здесь $n = \deg \gamma$. Если $\gamma \in \Gamma$ является образом элемента $g \in \mathbb{A}^*$ в группе $\Gamma_C = \mathbb{A}^*/\mathcal{O}^*$, то это равенство эквивалентно формулам Пуассона (2) и (9) для функции f из $\mathcal{D}(\mathbb{A})^{\mathcal{O}^*}$ и из $\mathcal{D}_+(\Gamma)$ соответственно.

Поскольку $\#\check{\Phi} = \#\Phi$, это, как показано в [9; 3.3], вытекает из следующих равенств:

- 1) $i^*(\tilde{f}) = \tilde{F}f$;
- 2) $\sum_{\chi \in \check{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(\tilde{f}\omega) = \#\check{\Phi}\delta_{\Gamma_l}(f)$;
- 3) $\text{res}_{(1)}(\tilde{f}\omega) = \#\Phi/(q-1)\delta_{(0)}(f)$.

§ 3. Аналитическое продолжение как решение проблемы Кузена

7. Предыдущие результаты являются переформулировками двойственности Фурье и формулы Пуассона на новом языке, и чтобы получить их, мы использовали уже имеющиеся методы и теории. Без них мы не смогли бы получить аналитическое продолжение функции $\tilde{\pi}^* Mf$ с диска $|z| < q^{-1}$ на всю кривую $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ и написать формулу (13) для суммы вычетов.

Теперь мы покажем, что введенные выше конструкции дают новое решение основных проблем, связанных с аналитическим продолжением дзета- и L -функций. Как и в методе Тейта–Ивасава, мы начинаем с некоторой функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$, применяем к ней формулу Пуассона (2) и интегрируем с функцией φ

⁴Выбор координаты z_χ определяется расщеплением точной последовательности $0 \rightarrow \Phi \rightarrow \Gamma/\Gamma_l \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, т.е. выбором дивизора степени 1 на C . При переходе к другому расщеплению координата z_χ умножается на ненулевой корень из единицы.

по пространству иделей $\mathbb{A}^*$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{A}^*} \varphi(g) f(g) d\mu^*(g) &= \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) \delta_{gK^*}(f) d\mu^*(g) \\
 &= \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) \delta_{gK}(f) d\mu^*(g) - \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) \delta_0(f) d\mu^*(g) \\
 &= \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) |g|^{-1} \delta_{g^{-1}K}(Ff) d\mu^*(g) - \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) \delta_0(f) d\mu^*(g) \\
 &= \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) |g|^{-1} \delta_{g^{-1}K^*}(Ff) d\mu^*(g) + \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) |g|^{-1} \delta_0(f) d\mu^*(g) \\
 &\quad - \int_{\mathbb{A}^*/K^*} \varphi(g) \delta_0(f) d\mu^*(g).
 \end{aligned}$$

Здесь функция $\varphi(g)$ берется в форме $\varphi(g) = \deg^{-1} \varphi_0(g)$ с $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$. Последнее равенство может быть следующим образом переписано на дискретной группе Γ (см. (9)):

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \varphi(\gamma) \delta_{(0)}(f) + (q-1) \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \varphi(\gamma) \delta_{\gamma+\Gamma_l}(f) \\
 &= \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} q^{-\deg \gamma} \varphi(\gamma) \delta_{(0)}(Ff) + (q-1) \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \varphi(\gamma) q^{-\deg \gamma} \delta_{-\gamma+\Gamma_l}(Ff). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Рассматривая функцию φ на Γ/Γ_l , можно ввести ее преобразование Меллина $(M\varphi)(\chi) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \varphi(\gamma) \chi(\gamma)$. Пусть $\chi_0(\gamma) = 1$ и $\chi_1(\gamma) = q^{-\deg \gamma}$ – характеры из $\mathbb{T}_0$. Перепишем (15) как

$$\begin{aligned}
 (M\varphi)(\chi_0) \delta_{(0)}(f) + (q-1) \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \varphi(\gamma) \pi_*(f)(\gamma) \\
 = (M\varphi)(\chi_1) \delta_{(0)}(Ff) + (q-1) \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \chi_1(\gamma) \varphi(\gamma) \pi_*(Ff)(-\gamma).
 \end{aligned}$$

Для любой функции f имеет место соотношение (преобразование Меллина, будучи преобразованием Фурье, переставляет прямые и обратные образы функций):

$$M \circ \pi_* = \tilde{\pi}^* \circ M,$$

где π – как и выше, отображение проекции группы Γ на факторгруппу Γ/Γ_l . Поэтому для функции $\tilde{f}$ из (14) имеем $\tilde{f}(\chi) = (M \circ \pi_*)(f)(\chi)$. Здесь M – преобразование Меллина между группами Γ/Γ_l и $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$, и для него имеется формула обращения (см. [9; 3.4]):

$$\pi_*(f)(\gamma) = \int_{\mathbb{T}_{\text{Pic}}} \tilde{f}(\chi) \chi(\gamma) d\chi = \sum_{\chi \in \tilde{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(\chi(\gamma) \tilde{f}\omega).$$

Поскольку Ff превращается на $\mathbb{T}_{\text{Pic}}$ в $i^*(\tilde{f})$, используя равенства 1)–3) в конце § 2 и соединяя все вместе, получаем

$$\begin{aligned}
 (q-1) \sum_{\chi \in \tilde{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(M(\varphi) \tilde{f}\omega) + M(\varphi)(\chi_0) \text{res}_{(1)}(\tilde{f}\omega) \\
 = (q-1) \sum_{\chi \in \tilde{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(i^*(M\varphi \tilde{f}) \cdot \omega) + M(\varphi)(\chi_1) \text{res}_{(1)}(i^* \tilde{f} \cdot \omega),
 \end{aligned}$$

где мы еще использовали, что

$$\sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_l} \varphi(\gamma) \chi_1(\gamma) \chi(-\gamma) = (M\varphi)(\check{\chi}) = (i^*(M\varphi))(\chi).$$

Отметим, что здесь $\tilde{f}$ входит в вычеты в точках (0_χ) как элемент $\tilde{f}_{(0_\chi)}$ из $K_{(0_\chi)}$, который можно определить как формальный ряд Лорана *без* всяких условий сходимости (в случае дзета-функции после подстановки $z = q^{-s}$ этот ряд является рядом Дирихле). Также вычеты формы $i^*(M(\varphi)\tilde{f}) \cdot \omega$ в точках (0_χ) могут быть преобразованы в вычеты форм $M(\varphi)\tilde{f}_{(\infty)} \cdot \omega$ в точках (∞_χ) , где

$$\tilde{f}_{(\infty)} = i^*(\widetilde{(Ff)}_{(0)}) \in K_{(\infty)} \quad (16)$$

можно найти (в силу предложений 1 и 2) из разложения в ряд Лорана в точке $z = 0$.

Предположим теперь, что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_0(n) = 0$ и $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_0(n) q^{-n} = 0$. Это означает $M(\varphi)(\chi_0) = 0$ и $M(\varphi)(\chi_1) = 0$. Следовательно, для функций P с этими условиями на $X = \mathbb{T}_{\text{Pic}}$ (= объединение прямых $\mathbb{P}^1$) мы имеем, поскольку $i^*\omega = -\omega$, следующее равенство:

$$\sum_{\chi \in \check{\Phi}} \text{res}_{(0_\chi)}(P\tilde{f}_{(0)}\omega) + \sum_{\chi \in \check{\Phi}} \text{res}_{(\infty_\chi)}(P\tilde{f}_{(\infty)}\omega) = 0. \quad (17)$$

Мы видим, что это равенство может быть получено непосредственно из формулы Пуассона (без использования аналитического продолжения).

8. Адельная двойственность для кривой X над $\mathbb{C}$. Здесь мы используем адельную двойственность для кривой X , являющейся дизъюнктным объединением конечного числа проективных прямых $\mathbb{P}_\chi^1$, $\chi \in \pi_0(X)$, над $\mathbb{C}$. Каждая χ -компонента имеет вид $\mathbb{P}_\chi^1 = \mathbb{C}_\chi^* \cup (z_\chi = 0) \cup (z_\chi = \infty)$, где z_χ – координата на $\mathbb{P}_\chi^1$. Выберем подмножество $\mathbb{C}^*$ на одной из компонент, и пусть D – дивизор на ней. Пусть $K = \sum_{\chi \in \pi_0(X)} \mathbb{C}(\mathbb{P}_\chi^1)$ – кольцо рациональных функций на X . Обозначим через $A(D)$ пространство $\{f \in K : (f) + D \geq 0 \text{ на } \bigcup_{\chi \in \pi_0(X)} \mathbb{C}_\chi^*\}$. Пространство $A(D)$ может быть вложено диагональным образом в пространство аделей $\mathbb{A}_X = \prod'_{x \in X} K_x$, которое самодвойственно по отношению к спариванию

$$\langle Q, Q' \rangle = \sum_{x \in X} \text{res}_x(Q_x Q'_x \omega)$$

с $Q = (Q_x)$, $Q' = (Q'_x) \in \mathbb{A}_X$, $\omega = dz_\chi/z_\chi$ на компоненте $\mathbb{P}_\chi^1$. Это то же самое спаривание, использованное нами в п. 2, но для кривой C , определенной над $\mathbb{F}_q$, а не над $\mathbb{C}$.

Если $D = \sum_x n_x x$, то

$$A(D) = K \cap \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{-n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right],$$

и спаривание вычетов, как и выше в п. 2, приводит к равенству (1): $K^\perp = K$. См. его доказательство в п. 11.

Далее, учитывая соотношения (20), (21) из п. 10 ниже, получаем

$$\begin{aligned}
 A(D) &= K^\perp \cap \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \right]^\perp \\
 &= \left(K + \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \right] \right)^\perp \\
 &= \left(\mathbb{A} / \left(K + \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \right] \right) \right)^* \\
 &\cong \left\{ \left(K + \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right] \right) \right. \\
 &\quad \left. / \left(K + \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} (0) \right] \right) \right\}^* \\
 &= \left\{ \left(\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right) \right. \\
 &\quad \left. / \left(K \cap \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right] \right) \right\}^* \\
 &= \left\{ \left(\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right) / A(-D) \right\}^*.
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали теорему о сильной аппроксимации для аделей

$$\left\{ K + \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \prod_{x \in \mathbb{C}^*} m_x^{n_x} \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right] \right\} \cong \mathbb{A}$$

(см. в [12; гл. 2] доказательство для арифметического случая, но его можно перенести и на случай кривых над $\mathbb{C}$, см. ниже п. 11).

Тем самым мы имеем невырожденную двойственность

$$A(D) \times \left[\bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right] / A(-D) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Полученную двойственность можно переформулировать как вариант классической проблемы Кузена на X .⁵

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место следующая точная последовательность:*

$$0 \rightarrow A(D) \rightarrow \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \bigoplus_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \rightarrow \text{Hom}(A(-D), \mathbb{C}), \quad (18)$$

где правая стрелка посылает

$$(\tilde{f}_{(0_\chi)}, \tilde{f}_{(\infty_\chi)}, \chi \in \pi_0(X))$$

⁵Она возникла у автора в связи с описанием пространства модулей представлений конечно порожденных абелевых групп в рамках голоморфной двойственности (доклад автора на семинаре в МИАН 29 декабря 2010 г.).

6

$$a \mapsto \sum_{\chi \in \pi_0(X)} \operatorname{res}_{(0_\chi)}(a\tilde{f}_{(0_\chi)}) + \operatorname{res}_{(\infty_\chi)}(a\tilde{f}_{(\infty_\chi)}) \in \mathbb{C} \quad \text{для } a \in A(-D).$$

9. Пусть теперь $D = (z = 1) + (z = q^{-1}) \subset \mathbb{T}_0 \subset \mathbb{T}_{\text{Pic}}$. Тогда P из (17) пробегает пространство $A(-D)$ и формула (17) влечет, что образ элемента $(\tilde{f}_{(0_\chi)}, \tilde{f}_{(\infty_\chi, \chi \in \pi_0(X))})$ из (18) равен нулю в $\operatorname{Hom}(A(-D), \mathbb{C})$. Следовательно, мы получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА. *Существует единственная рациональная функция F на X такая, что $F = \tilde{f}_{(0_\chi)}$ в $K_{(0_\chi)}$ и $F = \tilde{f}_{(\infty_\chi)}$ в $K_{(\infty_\chi)}$ для всех $\chi \in \check{\Phi}$. Более того, F регулярна вне точек $0_\chi, \infty_\chi, \chi \in \check{\Phi}, z = 1, z = q^{-1}$ на $\mathbb{T}_0$ и может иметь полюсы порядка ≤ 1 в $z = 1, z = q^{-1}$ на $\mathbb{T}_0$.*

Это дает нам аналитическое продолжение рядов Дирихле дзета- и L -функций, функциональное уравнение (симметрия относительно i^*) и формулы для вычетов в точках $s = 0$ ($z = 1$) и $s = 1$ ($z = q^{-1}$).

СЛЕДСТВИЕ 1. $\Delta_\chi(f) = \Delta_{\check{\chi}}(Ff)$.

В самом деле, если характер χ отвечает точке $z \in \mathbb{T}_{\text{Pic}}$, то $\Delta_\chi(f) = \tilde{f}(z)$, $\Delta_{\check{\chi}}(f) = \tilde{f}(i(z))$ и $\widetilde{Ff} = i^*(\tilde{f})$ дают требуемое равенство: симметрия данных задачи Кузена (соотношение (16)) влечет симметрию ее единственного решения.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $f = \delta_\sigma$, то для $\Delta_{|\cdot|s}(\delta_\sigma) = \zeta_C(s)$ справедливы равенства (7) и (8).*

В силу полученной нами информации об аналитическом продолжении функции $F(z) = \zeta_C(s)$, $z = q^{-s}$, для F имеет место на $\mathbb{T}_0$ распространение формулы вычетов (17) на любые функции $P \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$:

$$\operatorname{res}_{(0)}(PF\omega) + \operatorname{res}_{(1)}(PF\omega) + \operatorname{res}_{(q^{-1})}(PF\omega) + \operatorname{res}_{(\infty)}(PF\omega) = 0.$$

Отсюда, используя соотношения между вычетами и функционалами на $\mathbb{A}^*$ (см. конец п. 6), легко извлечь требуемые равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В стандартной версии метода Тейта–Ивасава ([5]–[7], [13], [11; гл. VII]) используется разложение области интегрирования, восходящее к Риману [8]. В случае дзета-функции Римана область интегрирования $0 < t < \infty$ разбивается на две части $0 < t < 1$ и $1 < t < \infty$. В общем случае ту же роль играет представление функции $\varphi(g)$, введенной для целей регуляризации, в виде суммы двух функций $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ ([11; гл. VII], [9; 2.4] и выше п. 3). Мы не используем это соображение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все же функция $\varphi(g)$ не исчезает в нашем подходе; напротив, ее роль кардинально меняется. Теперь она является не вспомогательным параметром, но принадлежит новому функциональному пространству тестовых функций на $\mathbb{A}^*$ или $\mathbb{A}$, которое заменяет пространство $\mathcal{D}(\mathbb{A})$, использованное в качестве пространства тестовых функций $\mathbb{A}$. Вейлем в его изложении в докладе [14]. Релевантным пространством будет теперь пространство функций на $\mathbb{A}^*$, которое является обратным образом пространства $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ функций с конечным носителем на группе $\mathbb{Z}$. Функции же из пространства

$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \mathcal{D}_+(\Gamma)$ следует рассматривать как функционалы на новом пространстве тестовых функций, т.е. как элементы нового пространства обобщенных функций.

Если начинать рассмотрение на дискретной группе Γ , то можно получить такую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{D}'(\Gamma, \Gamma_l) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{D}'(\Gamma/\Gamma_l) & \xrightarrow{M} & \mathbb{C}[\mathrm{TPic}]^* = \left[\sum_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(0_\chi)} \oplus \sum_{\chi \in \pi_0(X)} K_{(\infty_\chi)} \right] / A(0) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{D}_+(\Gamma) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{D}_{++}(\Gamma/\Gamma_l) & \xrightarrow{M} & A(D)
 \end{array} \tag{19}$$

Здесь:

$\mathcal{D}(\Gamma, \Gamma_l)$ – пространство функций с носителем в объединении конечного числа классов смежности по подгруппе Γ_l ;

$\mathcal{D}'(\Gamma, \Gamma_l)$ – пространство линейных функционалов на $\mathcal{D}(\Gamma, \Gamma_l)$;

$\mathcal{D}_{++}(\Gamma/\Gamma_l)$ – пространство функций, определенное в [9; 3.3] для группы $\mathbb{Z}$, что легко переносится на группу Γ/Γ_l .

Композиция двух верхних стрелок совпадает с использованным ранее отображением (14), поскольку, как мы видели, $\pi_* \circ M = M \circ \tilde{\pi}^*$. Крайняя правая вертикальная стрелка состоит в сопоставлении рациональной функции на X ее формальных локальных разложений в ряды Лорана в точках X . Это отображение есть немного измененное отображение (18) и его коядро является набором условий для разрешимости задачи Кузена. Композиция двух нижних стрелок сопоставляет $f \in \mathcal{D}_+(\Gamma)$ функцию $\tilde{f} \in A(D)$.

§ 4. Адели для кривых над полем $\mathbb{C}$

10. Двойственность Лефшеца. Основные результаты теории аделей, имеющие место для кривых, определенных над конечными полями, можно перенести на кривые X , определенные над произвольным полем k . Классическую теорию локально компактных абелевых групп и их двойственности по Понтрягину следует заменить теорией векторных пространств с линейной топологией, построенной С. Лефшецом [15].⁶ Мы предположим, что $k = \mathbb{C}$ и топология на $\mathbb{C}$ дискретна.

Векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$ *линейно топологизировано*, если в нем задана топология топологической группы (относительно сложения), в которой имеется фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из векторных пространств. Пространство V *линейно компактно*, если для любого семейства V_α , $\alpha \in I$, сдвигов линейных подпространств в V такого, что $\bigcap_{\alpha \in I'} \neq \emptyset$ для всех конечных подмножеств $I' \subset I$, имеем $\bigcap_{\alpha \in I} \neq \emptyset$. Пространство V называется *локально линейно компактным*, если оно обладает фундаментальной системой окрестностей нуля из линейно компактных подпространств.

⁶ Другой способ состоит в том, чтобы вывести эти результаты из теории когомологий обратимых пучков на X , см. [16].

Имеют место аналоги известных фактов из теории локально компактных групп. Проективный предел линейно компактных пространств линейно компактен. Векторное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда оно одновременно линейно компактно и дискретно. Наиболее глубокими являются результаты теории двойственности для локально линейно компактных пространств V .

Пусть V^* – пространство всех непрерывных линейных функционалов на V , в котором окрестностями нуля будут подпространства

$$E^\perp := \{v^* \in V^* : v^*(v) = 0 \text{ для всех } v \in E\},$$

где E пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля в V . Тогда V^* будет снова локально линейно компактным и каноническое отображение $V \rightarrow (V^*)^*$ будет изоморфизмом [15; 29.1]. Отсюда вытекают следующие факты:

$$(E^\perp)^\perp = E, \quad \text{если } E \text{ – замкнутое подпространство в } V; \quad (20)$$

$$(E/F)^* = F^\perp/E^\perp, \quad \text{если } E, F \text{ замкнуты}; \quad (21)$$

$$(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp, \quad \text{если } E, F, E + F \text{ замкнуты}; \quad (22)$$

$$(E \cap F)^\perp = E^\perp + F^\perp. \quad (23)$$

Кроме того, пространство V дискретно (линейно компактно) тогда и только тогда, когда пространство V^* линейно компактно (дискретно).

11. Пусть теперь $\mathbb{A}_X$ – пространство аделей на кривой X , проективной и гладкой над $\mathbb{C}$. Тогда подпространства $\mathbb{A}(D)$ (см. п. 1) определяют линейную топологию в $\mathbb{A}_X$, в которой они будут линейно компактными (как проективные пределы конечномерных пространств). Спаривание из п. 2 даст двойственность между $\mathbb{A}_X$ и им самим, откуда следует, что $(\mathbb{A}_X)^* = \mathbb{A}_X$. Так же как в локально компактном случае, получается, что $K = \mathbb{C}(X)$ – дискретное подпространство в $\mathbb{A}_X$ и пространство $\mathbb{A}/K$ линейно компактно. Тогда $K + \mathbb{A}(D)$ будет замкнутым подпространством в $\mathbb{A}_X$ как сумма дискретного и линейно компактного подпространств. Наконец, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. $K^\perp = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция спаривания и теорема о сумме вычетов на проективной кривой влекут, что $K^\perp \supset K$. Кроме того, пространство $K^\perp$ дискретно, поскольку оно двойственно линейно компактному пространству $\mathbb{A}/K$. Вложение $K^\perp/K \rightarrow \mathbb{A}/K$ показывает, что пространство $K^\perp/K$ одновременно линейно компактно и дискретно, следовательно, конечномерно над $\mathbb{C}$. Если $K^\perp/K \neq (0)$, то любой ненулевой элемент $x \in K^\perp \setminus K$ дает соотношение $K^\perp \supset K \oplus xK$, которое противоречит конечномерности (над $\mathbb{C}$!) фактора $K^\perp/K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (теорема о сильной аппроксимации).

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_S + K + \mathbb{A}(D),$$

где S – непустое конечное подмножество в X , $\mathbb{A}_S = \prod_{x \in S} K_x$, D – дивизор на X .

Провести доказательство, используя [12; гл. 2], оставляем читателю.

Список литературы

- [1] E. Artin, “Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen. I”, *Math. Z.*, **19**:1 (1924), 153–206; II, 207–246.
- [2] F. K. Schmidt, “Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p ”, *Math. Z.*, **33**:1 (1931), 1–32.
- [3] M. Deuring, *Lectures on the theory of algebraic functions of one variable*, Lecture Notes in Math., **314**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, vi+151 pp.
- [4] Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел*, Гостехиздат, М.–Л., 1940, 260 с.; пер. с нем.: E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akad. Verlagsges., Leipzig, 1923, viii+265 pp.
- [5] J. T. Tate, Jr., *Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta-functions*, Thesis (Ph.D.), Princeton Univ., Princeton, 1950, 60 pp.
- [6] K. Iwasawa, “A note on L -functions”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 2 (Cambridge, Mass., 1950), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1952, 322.
- [7] K. Iwasawa, “Letter to J. Dieudonné”, *Zeta functions in geometry* (Tokyo, 1990), Adv. Stud. Pure Math., **21**, Kinokuniya, Tokyo, 1992, 445–450.
- [8] Б. Риман, “О числе простых чисел, не превышающих данной величины”, *Сочинения*, ОГИЗ, М.–Л., 1948, 216–224; пер. с нем.: B. Riemann, “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”, *Monatsb. der Berliner Akad.*, 1859/1860, 671–680; *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, No. VII, 2. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig, 1892, 145–155.
- [9] А. Н. Паршин, “Записки о формуле Пуассона”, *Алгебра и анализ*, **23**:5 (2011), 1–54; англ. пер.: A. N. Parshin, “Notes on the Poisson formula”, *St. Petersburg Math. J.*, **23**:5 (2012), 781–818; arXiv: 1011.3392.
- [10] М. М. Капранов, *The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups*, arXiv: math/0001005.
- [11] А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972, 408 с.; пер. с англ. 1-го изд.: A. Weil, *Basic number theory*, 3rd ed., Grundlehren Math. Wiss., **144**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1974, xviii+325 pp.
- [12] *Алгебраическая теория чисел*, ред. Дж. Касселс, А. Фрелих, Мир, М., 1969, 483 с.; пер. с англ.: *Algebraic number theory*, eds. J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, Academic Press, London; Thompson Book Co., Inc., Washington, D.C., 1967, xviii+366 pp.
- [13] С. Ленг, *Алгебраические числа*, Мир, М., 1966, 225 с.; пер. с англ.: S. Lang, *Algebraic numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.–Palo Alto–London, 1964, ix+163 pp.
- [14] A. Weil, *Séminaire Bourbaki*, v. 9, 18e année: 1965/1966, Soc. Math. France, Paris, 1966, 523–531, Exp. No. 312.
- [15] С. Лефшец, *Алгебраическая топология*, ИЛ, М., 1949, 505 с.; пер. с англ.: S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **27**, Amer. Math. Soc., New York, 1942, vi+389 pp.
- [16] Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968, 285 с.; пер. с фр.: J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, **VII**, Hermann, Paris, 1959, 202 pp.

Алексей Николаевич Паршин
(Aleksey N. Parshin)

Поступила в редакцию
25.06.2014

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: parshin@mi.ras.ru