Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Тюленев, О некоторых новых пространствах функций переменной гладкости, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 6, 85–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:41:09

УДК 517.51

А. И. Тюленев

О некоторых новых пространствах функций переменной гладкости

Рассматривается новое пространство Бесова переменной гладкости, норма в котором определяется с помощью разностных соотношений. Показано, что это пространство является следом весового пространства Соболева с весом, принадлежащим соответствующему классу Макенхаупта. С помощью методов нелинейной сплайн-аппроксимации получена теорема об атомарном разложении функций из пространства Бесова переменной гладкости. Получено полное описание следов на гиперплоскости пространства Бесова переменной гладкости и весового пространства Бесова с весом, принадлежащим соответствующему классу Макенхаупта.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: веса Макенхаупта, весовые пространства Соболева, весовые пространства Бесова, пространства Бесова переменной гладкости.

DOI: 10.4213/sm8399

§ 1. Введение

В этой статье мы рассмотрим некоторые новые модификации функциональных пространств типа пространств Бесова переменной гладкости, которые являются обобщением пространств $\tilde{B}_{p,q}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ из [1].

Пространствам функций переменной гладкости (типа пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля) и их различным обобщениям посвящена обширная литература. Укажем лишь работы [2]–[10] (см. также многочисленные ссылки в этих работах).

Интересно отметить, что в большей части имеющихся к настоящему времени работ изучались пространства переменной гладкости, элементами которых являются распределения из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что весовая последовательность (задающая переменную гладкость) $\{s_k\} = \{s_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$, если для $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{C_1} 2^{\alpha_1(k-l)} \leq \frac{s_k(x)}{s_l(x)} \leq C_1 2^{\alpha_2(k-l)} \quad \text{при } l \leq k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \\ 2) \quad & s_k(x) \leq C_2 s_k(y) (1 + 2^k |x - y|)^{\alpha_3} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Константы $C_1, C_2 > 0$ в (1.1) не зависят ни от индексов k, l , ни от точек x, y .

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00443).

Для дальнейшего нам понадобится стандартное разложение единицы. Пусть B^n – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $\Psi_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, $\Psi_0(x) = 1$ при $x \in B^n$, $\text{supp } \Psi_0 \subset 2B^n$. Для $j \in \mathbb{N}$ положим $\Psi_j(x) := \Psi_0(2^{-j}x) - \Psi_0(2^{-j+1}x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

В работах [5]–[7], [9] пространства Бесова переменной гладкости определялись следующим образом (мы рассматриваем случай только постоянных показателей интегрируемости).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\{s_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Через $B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех распределений $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n)} := \|s_j F^{-1}(\Psi_j F[f])\|_{l_q(L_p(\mathbb{R}^n))}. \quad (1.2)$$

В (1.2) через F и F^{-1} обозначены прямое и обратное преобразование Фурье соответственно. Заменив формально в определении 1.1 весовую последовательность $\{s_k\}$ на последовательность $\{2^{ks}\gamma\}$ при $s \in \mathbb{R}$, $\gamma \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$, получим определение весового пространства Бесова (см. [11], [12]) с весом из класса Макенхаупта.

Следует отметить работы [8], [10], [13] в которых развивался аксиоматический подход к функциональным пространствам (как постоянной, так и переменной гладкости). Вместо базового пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ в норме (1.2) рассматривалось более общее функциональное пространство, удовлетворяющее определенному набору аксиом. Пространства, изучаемые в [8], [10] включают в себя шкалу пространств переменной гладкости из [6], [7] как частный случай.

На наш взгляд интерес представляют также пространства переменной гладкости, элементами которых являются локально интегрируемые в некоторой степени функции, а не распределения. Такие пространства активно изучались О. В. Бесовым. Укажем лишь работы [2]–[4] (см. также ссылки в этих работах). Отметим, что в указанных статьях были использованы классические методы теории функций и норма в пространстве функций переменной гладкости изначально определялась с помощью классических разностей (2.5).

В работах [5], [8] были доказаны теоремы о характеристизации различных пространств функций переменной гладкости (и их обобщений) с помощью усредненных (только по шагу) разностей (2.6), изначально же нормы в этих пространствах определялись с помощью декомпозиции Литлвуда–Пэли (см. [5]) или с помощью максимальных функций Петре (см. [8]). Предполагалось, что весовая последовательность $\{s_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ и дополнительно требовалось условие

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < l. \quad (1.3)$$

В [3], [4] изучались пространства переменной гладкости при $p, q \in (1, \infty)$. Предполагалось также, что весовая последовательность $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ при (1.3). Класс ${}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ отличается от класса $Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ заменой условия 2) на условие

$$2') \quad s_k(x) \leq 2^{\alpha_3} s_k(y) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad |x - y| \leq 2^{-k}. \quad (1.4)$$

Очевидно $Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3} \subset {}^{\text{loc}}\widetilde{Y}_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$, где $\widetilde{\alpha_3}$ зависит лишь от α_3 и константы C_2 из (1.1). Весовой класс ${}^{\text{loc}}\widetilde{Y}_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ строго шире класса $Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$, поскольку содержит экспоненциально растущие на бесконечности функции.

Важно отметить также, что методы, использованные в работах [3]–[10] для доказательства различных утверждений, касающихся пространств $B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n)$, опирались на поточечные оценки весовой последовательности $\{s_k\}$. С помощью таких методов в работах [13], [7], [8], [10] были доказаны теоремы об атомарных разложениях (а также молекулярных и вейвлет-разложениях) при условии наличия нулевых моментов высокого порядка у атомов из представления данного распределения. Число нулевых моментов, которые должны иметь атомы, определялось показателями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Эти условия невозможно проверить в конкретных задачах. Так, например, если мы имеем информацию о равенстве нулю моментов высокого порядка у атомов из представления функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то мы не можем, вообще говоря, утверждать, что равны нулю соответствующие моменты следов этих атомов на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$. В работе [9] задача о следах для пространств Бесова переменной гладкости была решена при помощи теоремы об атомарном разложении при определенных ограничениях на весовую последовательность $\{s_k\}$. Эти ограничения позволяют избежать проверки наличия нулевых моментов у атомов из разложения следа. Мы увидим, в пункте 6, что эти условия могут быть существенно ослаблены.

Кроме того, из анализа определений пространств Бесова переменной гладкости, которые использовались в [3]–[5], [8] мы видим, что в этих работах требовалось достаточно жесткое условие (1.3) (в том случае, если элементами этих пространств были локально интегрируемые в некоторой степени функции). Ограничение $\alpha_1 > 0$ естественно в случае, когда $s_k \equiv C_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ (C_k – положительные константы), поскольку иначе мы вынуждены прибегать к теории распределений. В случае же переменной гладкости это весьма грубое условие. Ограничение $l > \alpha_2$ использовалось для доказательства независимости нормы в пространстве Бесова от порядка разности. Это условие также является грубым в случае переменной гладкости. Действительно, в работе [1] при $p, q \in (1, \infty)$ автором были введены новые модификации пространств Бесова переменной гладкости $\tilde{B}_{p,q}^l(\mathbb{R}^d, \{t_k\})$ (в [1] эти пространства обозначались через $\bar{B}_{p,q}^l(\mathbb{R}^d, \{t_k\})$) и показано, что пространство $\tilde{B}_{p,p}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ является следом весового пространства Соболева $\widetilde{W}_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ на плоскости размерности $1 \leq d < n$, в случае если вес $\gamma \in A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. При этом весовая последовательность $\{\gamma_k\}$ принадлежит весовому классу $^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Однако условие (1.3) может не выполняться для последовательности $\{\gamma_k\}$ в случае достаточно “плохого веса” (см. замечания 4.2, 4.4 ниже).

Очевидно, требуется более тонкий подход к самому понятию переменной гладкости. Определение весового класса $^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ нуждается в корректировке. Также требуются новые методы, позволяющие, в частности, исследовать пространство $\tilde{B}_{p,p}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$, являющееся следом весового пространства Соболева $\widetilde{W}_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ с весом $\gamma \in A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. При этом новые методы не должны опираться на поточечное поведение весовой последовательности $\{\gamma_k\}$.

В настоящей статье мы вводим при $p, q, r \in (0, \infty]$, $l \in \mathbb{N}$ пространство Бесова переменной гладкости $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, которое является более тонкой модификацией пространства $\tilde{B}_{p,q}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ из [1]. Норма в этом пространстве опреде-

ляется с помощью разностей $\delta_r^l(Q^n)f$ (см. (2.7)). При этом весовая последовательность $\{t_k\}$ принадлежит новому весовому классу $X_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$ (см. определение 2.4). Весовой класс $X_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$ оказывается более тонким (и вместе с тем более естественным!), чем класс ${}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1,\alpha_2}^{\alpha_3}$, для наших целей инструментом. Необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\{t_k\}$ весовому классу $X_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$ выражаются в терминах не поточечных, а в некотором смысле интегральных оценок.

Важно отметить, что разности $\delta_r^l(Q^n)f$ использовались в работе [13] при построении эквивалентных нормировок в пространствах типа пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля. Однако наши пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ не вписываются в аксиоматику работы [13] по причине слабых ограничений, которые мы налагаем на весовую последовательность $\{t_k\}$. Также разности $\delta_r^l(Q^n)f$ были использованы недавно О. В. Бесовым в работах [14], [15] при изучении пространств функций нулевой гладкости.

Для исследования пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ мы модифицируем методы нелинейной сплайн-аппроксимации, развитые в работе [16], где они применялись при изучении классических пространств Бесова. Отметим, что изучение пространств функций переменной гладкости методами нелинейной аппроксимации ранее не проводилось и поэтому может представлять самостоятельный интерес. С помощью этих методов мы докажем различные теоремы об эквивалентных нормировках пространств $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, докажем теорему об атомарном разложении этих пространств. Также мы охарактеризуем след пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Этот результат обобщает в случае постоянно $p \in (1, \infty)$ результаты работ [9], [11].

Работа организована следующим образом: в § 2 даются некоторые вспомогательные утверждения и изучаются простейшие свойства новых пространств $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, § 3 содержит обобщение результатов работы [1] (этот параграф можно рассматривать как мотивировку для дальнейших построений, приведенных в § 4–6 настоящей работы). Параграф 4 содержит центральные результаты работы, в частности, теорему об атомарном разложении, из которой в § 5 и § 6 выводятся различные теоремы вложения и теоремы о следах.

§ 2. Вспомогательные утверждения

На протяжении всей работы мы будем придерживаться следующего соглашения. Будем использовать символ C для обозначения, вообще говоря, различных “несущественных” констант, фигурирующих в различных оценках. Иногда мы будем специально подчеркивать (если это важно для понимания оценки) от каких параметров зависит та или иная константа.

Будем называть весовой функцией (весом) измеримую функцию $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Положим

$$\gamma(E) := \int_E \gamma(x) dx.$$

Для измеримого множества E через $L_p(E)$ обозначим множество всех функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{L_p(E)} := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{если } 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(E)} := \operatorname{ess\,sup} |f(x)|.$$

Для измеримого множества E и веса γ через $L_p(E, \gamma)$ обозначим множество всех функций $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной квазинормой $\|g\|_{L_p(E, \gamma)} := \|\gamma g\|_{L_p(E)}$.

Через Q^n обозначим открытый куб в пространстве $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям, через $r(Q^n)$ обозначим длину ребра куба Q^n , а через $|Q^n|$ – его лебегову n -мерную меру. При $\delta > 0$ через δQ^n обозначим куб, центром которого является центр куба Q^n , а длина ребра $r(\delta Q^n) := \delta r(Q^n)$. Для $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$, пусть

$$Q_{k,m}^n := \prod_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k} \right)$$

– открытый двоичный куб с длиной ребра 2^{-k} , и пусть

$$\tilde{Q}_{k,m}^n := \prod_{i=1}^n \left[\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k} \right).$$

Положим также $I^n := \prod_{i=1}^n (-1, 1)$. Через δB^n (δS^n) будем обозначать n -мерный шар (сферу) радиуса δ с центром в начале координат.

При $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ положим $x + E := \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + z, z \in E\}$.

В работе [12] В. С. Рычковым был введен весовой класс $A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, обобщающий известный весовой класс Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^n)$ (при $1 < p \leq \infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (см. [12]). Пусть $p \in (1, \infty)$, $a > 0$. Будем говорить, что вес $\gamma \in A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если

$$C_{\gamma,p,a}^{\text{loc}} := \sup_{Q^n: r(Q^n) \leq a} \frac{1}{|Q^n|} \int_{Q^n} \gamma(x) dx \left[\frac{1}{|Q^n|} \int_{Q^n} \gamma^{-\frac{p'}{p}}(x) dx \right]^{\frac{p}{p'}} < +\infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (см. [17]). Пусть $a > 0$. Будем говорить, что вес $\gamma \in A_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если существует не зависящая от куба Q^n константа $C_{\gamma,1,a}^{\text{loc}} > 0$ такая, что для всех кубов с длиной ребра $r(Q^n) \leq a$

$$\frac{1}{|Q^n|} \int_{Q^n} \gamma(\tilde{x}) d\tilde{x} \leq A \gamma(x) \quad \text{для почти всех точек } x \in Q^n.$$

Через $C_{\gamma,1,a}^{\text{loc}}$ обозначим наименьшую из констант A , для которых справедливо вышеприведенное неравенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 (см. [12]). Пусть $a > 0$. Будем говорить, что вес $\gamma \in A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если для некоторого $\alpha \in (0, 1)$

$$\sup_{r(Q^n) \leq a} \left(\sup_{F \subset Q^n, |F| \geq \alpha |Q^n|} \frac{\gamma(Q^n)}{\gamma(F)} \right) < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1 (см. [12]). Если вес $\gamma \in A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то существует число $p_0 \in [1, \infty)$ такое, что $\gamma \in A_{p_0}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. При $p \in (1, +\infty]$ определение класса $A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ не зависит от выбора параметра a . При различных $a > 0$ константы $C_{\gamma, p, a}^{\text{loc}}$ оцениваются одна через другую (см. [12]). Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо и для $A_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Для $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$, через $M_{\leq a} f$ обозначим локальную максимальную функцию Харди–Литтлвуда, т.е.

$$M_{\leq a} f(x) := \sup_{x \in Q^n, r(Q^n) \leq a} \frac{1}{|Q^n|} \int_{Q^n} |f(y)| dy.$$

Следующая теорема обобщает классический результат Макенхаупта (который можно найти, например, в [18; гл. 5, § 3, теорема 1]).

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [12]). Пусть $p \in (1, \infty)$, $\gamma \in A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$. Тогда существует константа $C = C(n, p, a, \gamma) > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) \{M_{\leq a}[f](x)\}^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) |f(x)|^p dx$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \gamma^{\frac{1}{p}})$.

ТЕОРЕМА 2.2 (неравенство Харди для последовательностей). Пусть $0 < q \leq \infty$, $\mu \leq q$, $\beta \geq 0$, $\{a_k\}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда неравенство (с очевидными модификациями для $q = \infty$ или $\mu = \infty$)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{qk\beta} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{qk\beta} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.1)$$

справедливо с константой $C > 0$, не зависящей от последовательности $\{a_k\}$ в случаях

$$|b_k| \leq C \left(\sum_{j=k}^{\infty} |a_j|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \quad \text{при условии, что } \beta > 0 \quad (2.2)$$

либо

$$|b_k| \leq C 2^{-k\lambda} \left(\sum_{j=0}^k 2^{j\mu\lambda} |a_j|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \quad \text{при условии, что } \lambda > \beta. \quad (2.3)$$

Также в дальнейшем нам понадобится следующее элементарное утверждение.

ЛЕММА 2.1. Пусть $r \in (0, \infty]$, $f_j \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $j \in \mathbb{N}_0$. Тогда при $\mu \leq \min\{1, r\}$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \mid L_r(\mathbb{R}^n) \right\| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j \mid L_r(\mathbb{R}^n)\|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}. \quad (2.4)$$

Доказательство этой леммы легко следует из монотонности l_q нормы по q при $q \geq 1$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty]$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Для функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\Omega)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ и куба Q^n определим разности l -го порядка формулами (с соответствующими модификациями $r = \infty$)

$$\Delta^l(h, \Omega)\varphi(x) := \begin{cases} \sum_{j=0}^l C_l^j (-1)^{l+j} \varphi(x + jh) & \text{при } [x, x + hl] \subset \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\bar{\Delta}_r^l(t, \Omega)\varphi(x) := \left(\frac{1}{t^n} \int_{tI^n} |\Delta^l(h, \Omega)\varphi(x)|^r dh \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n; \quad (2.6)$$

$$\delta_r^l(Q^n, \Omega)\varphi := \left(\frac{1}{[r(Q^n)]^{2n}} \int_{r(Q^n)I^n} \int_{Q^n} |\Delta^l(h, \Omega)\varphi(x)|^r dx dh \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (2.7)$$

Положим

$$\Delta^l(h)\varphi := \Delta^l(h, \mathbb{R}^n)\varphi, \quad \bar{\Delta}_r^l(t)\varphi := \bar{\Delta}_r^l(t, \mathbb{R}^n)\varphi, \quad \delta_r^l(Q^n)\varphi := \delta_r^l(Q^n, \mathbb{R}^n)\varphi.$$

Для куба Q^n при $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty]$ через $\omega_l(\varphi, Q^n)_r$ обозначим модуль непрерывности функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ на кубе Q^n в метрике $L_r(Q^n)$, т.е.

$$\omega_l(\varphi, Q^n)_r := \sup_{|h| > 0} \|\Delta^l(h, Q^n)\varphi \mid L_r(\mathbb{R}^n)\|.$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty]$. Для куба Q^n определим локальное наилучшее приближение функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в метрике $L_r(Q^n)$ полиномами степени ниже l равенством

$$E_l(\varphi, Q^n)_r := \inf_{\deg(P) < l} \|\varphi - P \mid L_r(Q^n)\|.$$

Определим также для куба Q^n локальное наилучшее приближение функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в метрике $L_r(Q^n)$ полиномами *координатной степени* ниже l (суммарная степень полинома при этом, очевидно, не превосходит $n(l-1)$) равенством

$$\hat{E}_l(\varphi, Q^n)_r := \inf_{\deg_i(P) < l} \|\varphi - P \mid L_r(Q^n)\|,$$

где нижняя грань взята по всем полиномам P , степень которых по переменной x_i меньше l при каждом $i \in \{1, \dots, n\}$.

Хорошо известны (см. [19] в случае $r \geq 1$, [20] – общий случай) двусторонние оценки

$$C_1 \delta_r^l(Q^n, Q^n)\varphi \leq |Q^n|^{-\frac{1}{r}} \omega_l(\varphi, Q^n)_r \leq C_2 \delta_r^l(Q^n, Q^n)\varphi. \quad (2.8)$$

$$C_3 \delta_r^l(Q^n, Q^n)\varphi \leq |Q^n|^{-\frac{1}{r}} E_l(\varphi, Q^n)_r \leq C_4 \delta_r^l(Q^n, Q^n)\varphi. \quad (2.9)$$

При этом константы C_1, C_2 в (2.8) и C_3, C_4 в (2.9) не зависят ни от функции φ , ни от куба Q^n .

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty]$, Q^n – куб. Будем говорить, что многочлен P_{Q^n} является многочленом почти наилучшего приближения полиномами степени ниже l функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в метрике $L_r(Q^n)$ с константой $A \geq 1$, если

$$\|\varphi - P_{Q^n} \mid L_r(Q^n)\| \leq AE_l(\varphi, Q^n)_r.$$

Аналогичным образом определяется понятие многочлена почти наилучшего приближения полиномами *координатной степени* ниже l функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в метрике $L_r(Q^n)$ с константой $A \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. При $p \in (0, \infty]$ весовую последовательность $\{t_k\}$ назовем p -допустимой, если $t_k \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $0 < p, q, r \leq \infty$, $\{t_k\}$ – p -допустимая весовая последовательность. Положим (с очевидными модификациями в случае $p = \infty$ или $q = \infty$)

$$\begin{aligned} \bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) &:= \{\varphi : \varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \|\varphi \mid \bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| < +\infty\}, \\ \text{где } \|\varphi \mid \bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| &:= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k \bar{\Delta}_r^l(2^{-k})\varphi \mid L_p(\mathbb{R}^n)\|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n} t_0^p(x) \|\varphi \mid L_r(x + I^n)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) &:= \{\varphi : \varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| < +\infty\}, \\ \text{где } \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| &:= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k \delta_r^l(\cdot + 2^{-k} I^n) \varphi \mid L_p(\mathbb{R}^n)\|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^n} t_0^p(x) \|\varphi \mid L_r(x + I^n)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Пусть γ – вес, $l > s > 0$. Положим

$$\tilde{B}_{p,q,r}^s(\mathbb{R}^n, \gamma) := \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{2^{ks}\gamma\}), \quad \bar{B}_{p,q,r}^s(\mathbb{R}^n, \gamma) := \bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{2^{ks}\gamma\}).$$

Соответствующие пространства будем называть весовыми пространствами Бесова с весом γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пространство $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ ($\bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$) может оказаться тривиальным, т.е. содержать лишь функции почти всюду равные нулю. Укажем условие на параметры l , p , q и p -допустимую последовательность $\{t_k\}$, достаточное для нетривиальности соответствующего пространства. Пусть $p, q \in (0, \infty]$ для любого куба Q^n (с соответствующими модификациями в случае $p, q = \infty$)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{Q^n} 2^{-klp} t_k^p(x) dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

При выполнении вышеприведенного условия множество

$$C_0^\infty \subset \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \quad (\bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})),$$

что легко следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, записанной для функции φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пространство $\tilde{B}_{p,q,1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ было введено в работе [1] при $p, q \in (1, \infty)$, для весовых последовательностей $\{t_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ без ограничений на параметры α_1, α_2 . Пространство $\bar{B}_{p,q,1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ рассматривалось в [5] для весовых последовательностей $\{t_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ при $p, q \in (0, \infty]$ и ограничении (1.3). Пространство, близкое пространству $\bar{B}_{p,q,1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ (но не совпадающее с ним!), изучалось О. В. Бесовым в [3], [4] при $p, q \in (1, \infty)$, $\{t_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ и ограничении (1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $p \in (0, \infty]$. Для p -допустимой весовой последовательности $\{t_k\}$ положим (в случае $p = \infty$ считаем $\frac{kn}{p} = 0$)

$$t_{k,m} := \|t_k \mid L_p(Q_{k,m}^n)\| \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n, \quad (2.12)$$

$$\bar{t}_k(x) := 2^{\frac{kn}{p}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m} \chi_{\bar{Q}_{k,m}^n}(x) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

При этом кратную последовательность $\{t_{k,m}\}$ (весовую последовательность $\{\bar{t}_k\}$), определяемую формулой (2.12), ((2.13)), будем в дальнейшем называть кратной последовательностью (весовой последовательностью), p -ассоциированной с весовой последовательностью $\{t_k\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty]$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Через $X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3} = X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество p -допустимых весовых последовательностей $\{t_k\}$, для которых выполнены следующие условия:

1) существуют числа $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\left(2^{kn} \int_{Q_{k,m}^n} \bar{t}_k^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(2^{kn} \int_{Q_{k,m}^n} (\bar{t}_j)^{-\sigma_1}(x) dx\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \leq C_1 2^{\alpha_1(k-j)}, \quad (2.14)$$

$$0 \leq k \leq j, \quad m \in \mathbb{Z}^n,$$

$$\left(2^{kn} \int_{Q_{k,m}^n} \bar{t}_k^p(x) dx\right)^{-\frac{1}{p}} \left(2^{kn} \int_{Q_{k,m}^n} \bar{t}_j^{\sigma_2}(x) dx\right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \leq C_2 2^{\alpha_2(j-k)}, \quad (2.15)$$

$$0 \leq k \leq j, \quad m \in \mathbb{Z}^n$$

(если $\sigma_1 = \infty$ или $\sigma_2 = \infty$, нужно провести соответствующие модификации выражений (2.6) или (2.7));

2) для всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$0 < t_{k,m} \leq 2^{\alpha_3} t_{k, \tilde{m}} \quad \text{при} \quad m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}^n, \quad |m_i - \tilde{m}_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Обозначим через $\tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ подмножество в $X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$, состоящее только из p -допустимых весовых последовательностей $\{t_k\} = \{\bar{t}_k\}$. Очевидно $\tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3} = {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ при $p \in (0, \infty]$, $-\infty < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \infty$, $\alpha_3 \geq 0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \infty$.

Зафиксируем $-\infty < \alpha_1^i \leq \alpha_2^i < \infty$, $\alpha_3 \geq 0$, $\sigma_1^i, \sigma_2^i \in (0, \infty]$, $i = 1, 2$, и положим

$$\alpha^i := (\alpha_1^i, \alpha_2^i), \quad \sigma^i = (\sigma_1^i, \sigma_2^i) \quad \text{при} \quad i = 1, 2.$$

Тогда элементарные рассуждения, основанные на неравенстве Гёльдера и монотонности l_q (по q) нормы, приводят к вложению $\tilde{X}_{\alpha^1, \sigma^1, p}^{\alpha_3} \subset \tilde{X}_{\alpha^2, \sigma^2, p}^{\alpha_3}$ при условии

$$\alpha_1^2 = \alpha_1^1 + n \min \left\{ \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^1}, 0 \right\}, \quad \alpha_2^2 = \alpha_2^1 + n \max \left\{ \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_2^1}, 0 \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Очевидно, кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ может оказаться p -ассоциированной с несколькими различными p -допустимыми весовыми последовательностями. Однако это обстоятельство не будет препятствием для дальнейших построений, если $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$. Действительно, из условия (2.16) при помощи элементарных рассуждений имеем (с соответствующими модификациями в случае $p = \infty$)

$$\begin{aligned} \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| &\sim \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\bar{t}_k\})\| \sim \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|^{(1)} \\ &:= \left\| \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n \varphi)^p] \right)^{\frac{1}{p}} \mid l_q \right\| + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом константа, с которой одна норма оценивается через другую в (2.17), будет зависеть лишь от α_3, l, p, n .

При фиксированном $p \in (0, \infty]$, очевидно, будет существовать биекция между кратными последовательностями $\{t_{k,m}\}$ и множествами весовых последовательностей $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$, для которых кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p -ассоциирована с весовой последовательностью $\{t_k\}$.

Учитывая (2.17), в дальнейшем пространство $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ будем обозначать также через $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Пусть $p \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A_{\infty}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$. Положим

$$\Xi_{k,m}^{d,n} := Q_{k,m}^n \times (2^{-k} B^d \setminus 2^{-k-1} B^d) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Кратную последовательность $\hat{\gamma}_{k,m}$, определяемую по формуле

$$\hat{\gamma}_{k,m} := \|\gamma \mid L_p(\Xi_{k,m}^{d,n})\| \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n,$$

будем называть кратной последовательностью, порожденной весом γ .

Отметим важные для дальнейшего свойства последовательности $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $p \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A_{\infty}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$, кратная последовательность $\hat{\gamma}_{k,m}$ порождена весом γ . Пусть $m \in \mathbb{Z}^n$, $k, j \in \mathbb{N}_0$, $j \geq k$, $G_{j,k,m}$ – произвольное множество кубов $Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n$, тогда:

1) справедливо неравенство

$$\sum_{Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n} \hat{\gamma}_{j,\tilde{m}}^p \leq C 2^{(k-j)d\delta} \hat{\gamma}_{k,m}^p, \quad (2.18)$$

в котором константы $C > 0$ и $\delta > 0$ зависят лишь от γ, n, d ;

2) справедливо неравенство

$$\sum_{Q_{j,\tilde{m}}^n \in G_{j,k,m}} \hat{\gamma}_{j,\tilde{m}}^p \leq C \left(\frac{|\bigcup_{Q_{j,\tilde{m}}^n \in G_{j,k,m}} Q_{j,\tilde{m}}^n|}{|Q_{k,m}^n|} \right)^{\delta'} \sum_{Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n} \hat{\gamma}_{j,\tilde{m}}^p, \quad (2.19)$$

в котором константы $C > 0$ и $\delta' > 0$ зависят лишь от γ, n, d ;

3) при $a \geq 1$, $|t - \tilde{m}| \leq a$, $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$2^{-\delta_3} \hat{\gamma}_{k,m} \leq \hat{\gamma}_{k,\tilde{m}} \leq 2^{\delta_3} \hat{\gamma}_{k,m},$$

в котором число $\delta_3 \geq 0$ зависит лишь от γ , n , p , d ;

4) для любого куба $Q_{k,m}^n$ и любого куба $Q_{k+1,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n$ при $k \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ справедливо неравенство

$$\hat{\gamma}_{k,m} \leq C \hat{\gamma}_{k+1,\tilde{m}},$$

в котором константа $C > 0$ зависит лишь от γ , n , d , p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства 3) достаточно взять некоторый куб Q^{n+d} , содержащий оба множества $\Xi_{k,m}^{d,n}$ и $\Xi_{k,\tilde{m}}^{d,n}$ и воспользоваться тем, что γ^p обладает свойством удвоения на кубе Q^{n+d} с константой удвоения, зависящей лишь от константы $C_{\gamma,p,r(Q^{n+d})}^{\text{loc}}$ (доказательство последнего факта аналогично доказательству соответствующего результата в [18; гл. 5]). Доказательство свойства 4) аналогично доказательству свойства 3).

Докажем свойство 1), свойство 2) доказывается аналогично. Легко видеть, что

$$\frac{|\bigcup_{Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n} \Xi_{j,\tilde{m}}^{d,n}|}{|\Xi_{k,m}^{d,n}|} \leq C 2^{(k-j)d}. \quad (2.20)$$

Пользуясь определением 2.3 и замечанием 2.1 нетрудно показать, что для некоторого $\delta(\gamma) > 0$, для любого куба Q^n , $r(Q^n) \leq a$ и любого измеримого множества $F \subset Q^n$ справедливо неравенство

$$\frac{\gamma^p(F)}{\gamma^p(Q^n)} \leq C \left(\frac{|F|}{|Q^n|} \right)^{\delta(\gamma)}, \quad (2.21)$$

в котором константа $C > 0$ не зависит ни от куба Q^n , ни от множества F .

Из (2.20), (2.21) следует (2.18).

Лемма доказана.

Через $\delta_1(\gamma) := \delta_1(\gamma, n, d)$ обозначим верхнюю грань множества всех δ , для которых справедливо (2.18), а через $\delta_2(\gamma) := \delta_2(\gamma, n, d)$ – верхнюю грань множества всех δ' , для которых справедливо (2.19).

Отметим, что, вообще говоря, $\delta_1 \neq \delta_2$. Действительно, пусть $\gamma^p(x_1, x_2) := |x_1|^\beta$ при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\beta > 0$. Тогда, очевидно, $\gamma^p \in A_\infty(\mathbb{R}^2)$. При этом $\delta_1(\gamma) = 1$ ($n = d = 1$) при любом $\beta > 0$, в то время как $\delta_2(\gamma)$ зависит от числа $\beta > 0$.

ПРИМЕР 2.1. Приведем важный для дальнейшего пример весовой последовательности $\{t_k\} \in \tilde{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$. Отметим, что именно этот пример послужил основной мотивацией для введения весового класса $X_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$.

Пусть $d \in \mathbb{N}_0$, $p \in (0, \infty)$, вес $\gamma^p \in A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$, кратная последовательность $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ . В силу замечания 2.1 имеем $\gamma^p \in A_{p_0}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$ при некотором $p_0 \in [1, \infty)$. Пусть весовая последовательность $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{\alpha'_3}$. Положим

$$\{s_{k,m}\} = \|s_k \mid L_p(Q_{k,m}^n)\|, \quad t_{k,m} := \hat{\gamma}_{k,m}(2^{\frac{kn}{p}} s_{k,m})$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Тогда весовая последовательность $\{t_k\} = \{\bar{t}_k\} \in \tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ при

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha'_3 + \delta_3(\gamma), & \alpha_2 &= \alpha'_2 - \frac{d(\delta_1(\gamma) - \varepsilon)}{p}, \\ \alpha_1 &= \alpha'_1 + \frac{n}{\sigma_1} + \frac{n}{p} - \frac{(n+d)p_0}{p} + \frac{dp_0}{pp'_0} (\delta_1(\gamma^{-\frac{pp'_0}{p_0}}, n, d) - \varepsilon), \\ \sigma_2 &= p, & \sigma_1 &= p \frac{p'_0}{p_0}\end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Действительно, соотношения (2.15) и (2.16) легко следуют из пунктов 1) и 3) леммы 2.2. Проверим (2.14) при $p_0 > 1$, случай $p_0 = 1$ рассматривается аналогично. Имеем в силу определения 2.2

$$\begin{aligned}& \left(2^{kn} \int_{Q_{k,m}^n} \bar{t}_k^p(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(2^{kn} \int_{Q_{k,m}^n} (\bar{t}_j)^{-\sigma_1}(x) \right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \\ & \leq C_1 2^{(k-j)(\alpha'_1 + \frac{n}{\sigma_1} + \frac{n}{p})} \hat{\gamma}_{k,m} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n}} \frac{1}{(\hat{\gamma}_{j,\tilde{m}})^{p \frac{p'_0}{p_0}}} \right)^{\frac{p_0}{pp'_0}} \\ & \leq C_2 2^{(k-j)(\alpha'_1 + \frac{n}{\sigma_1} + \frac{n}{p})} \hat{\gamma}_{k,m} 2^{j(n+d)\frac{p_0}{p}} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n}} \int_{\Xi_{j,\tilde{m}}^{d,n}} \gamma^{-p \frac{p'_0}{p_0}}(x) dx \right)^{\frac{p_0}{pp'_0}} \\ & \leq C_3 2^{(k-j)(\alpha'_1 + \frac{n}{\sigma_1} + \frac{n}{p} + \frac{dp_0}{pp'_0} (\delta_1(\gamma^{-\frac{pp'_0}{p_0}}, n, d) - \varepsilon))} \hat{\gamma}_{k,m} 2^{j(n+d)\frac{p_0}{p}} \\ & \quad \times \left(\int_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^{-p \frac{p'_0}{p_0}}(x) dx \right)^{\frac{p_0}{pp'_0}} \leq C_4 2^{(k-j)\alpha_1}.\end{aligned}$$

Интересно отметить, что в случае $d = 0$ получим $\alpha_i = \alpha'_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty]$, $\{t_{k,m}\}$ – кратная последовательность, p -ассоциированная с p -допустимой весовой последовательностью $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$, $c > 1$. Рассмотрим в пространстве $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ следующие квазинормы, определяемые кратной последовательностью $\{t_{k,m}\}$:

$$\begin{aligned}\|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\}, c)\|^{(2)} &:= \left\| \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(cQ_{k,m}^n, cQ_{k,m}^n)\varphi]^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid l_q \right\| \\ &\quad + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\}, c)\|^{(3)} &:= \left\| \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \left[2^{\frac{kn}{r}} E_l(\varphi, cQ_{k,m}^n)_r \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid l_q \right\| \\ &\quad + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\}, c)\|^{(4)} := \left\| \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} t_{k,m}^p [2^{\frac{kn}{r}} \omega_l(\varphi, cQ_{k,m}^n)_r]^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid l_q \right\| + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.24)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty]$, p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$, а $\{t_{k,m}\}$ – p -ассоциированная с ней кратная последовательность. Тогда при $i = 1, 2, 3, 4$ квазинормы $\|\cdot \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\}, c)\|^{(i)}$ являются эквивалентными квазинормами в пространстве $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема была доказана в [1] в случае $r = 1$, $p, q \in (1, \infty)$, $\{t_k\} \in \text{loc}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. В общем случае доказательство можно осуществить при помощи аналогичных рассуждений, если учесть (2.8), (2.9), (2.17), замечание (2.5) и воспользоваться следующей оценкой:

$$\delta_r^l(cQ_{k,m}^n, cQ_{k,m}^n)\varphi \leq C \sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{k-j(c), \tilde{m}}^n \cap cQ_{k,m}^n \neq \emptyset}} \delta_r^l(Q_{k-j(c), \tilde{m}}^n)\varphi, \quad (2.25)$$

где $c > 1$ взято из условий теоремы, а индекс $j(c) \geq 1$ – наименьшее натуральное число, для которого выполняется $2^{-k+j(c)} > c2^{-k}$. Константа C в (2.25) зависит лишь от n, r, l, c .

Положим

$$\tilde{B}_{p,q}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) := \tilde{B}_{p,q,1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}), \quad \tilde{B}_p^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) := \tilde{B}_{p,p,1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}).$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, $l \in \mathbb{N}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty]$, p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$. Тогда пространство $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ – полно.

Доказательство с идейной точки зрения близко доказательству полноты классического пространства Бесова [21] и основано на полноте пространства $L_r(Q^n)$ для любого куба Q^n , а также на замечании 2.5 и эквивалентной нормировке (2.17). Мы опускаем эти достаточно стандартные рассуждения.

ЛЕММА 2.3. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, $l \in \mathbb{N}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty]$, p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in \tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$. Тогда

$$\overline{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем лишь для случая $p, q \in (0, \infty)$, поскольку рассуждения в случае $p = \infty$ или $q = \infty$ аналогичны. Сравним первые слагаемые в квазинормах (2.10) и (2.11) соответственно. Применяя неравенство Гёльдера

к интегралу по y и учитывая (2.13), получим для $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n) \varphi]^p &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{npk}{r} + nk} \int_{Q_{k,m}^n} \left[\int_{I^n/2^k} |\Delta^l(h) \varphi(y)|^r dh \right]^{\frac{p}{r}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} t_k^p(y) [\bar{\Delta}_r^l(2^{-k}) \varphi(y)]^p dy. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Возводя обе части (2.26) в степень $\frac{q}{p}$ и суммируя по всем k , завершаем доказательство вложения.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $p \neq \infty$, $p_0 \in [1, \infty)$, $0 < r_1 \leq r_2 \leq \frac{p}{p_0}$, $l \in \mathbb{N}$, $\gamma^p \in A_{p_0}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\alpha_3 \geq 0$, $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < l$ и весовая последовательность $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Положим

$$t_k(x) = \gamma(x) s_k(x) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\bar{B}_{p,q,r_1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \tilde{B}_{p,q,r_2}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Доказательство этой теоремы будет основано на теореме об атомарном разложении функций из пространства $\tilde{B}_{p,q,r_2}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, поэтому мы отложим его до конца § 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Если $\gamma \equiv 1$, то утверждение теоремы 2.5 можно распространить и на случай $p = \infty$.

В работе [5] доказана следующая теорема. Мы приведем ее упрощенный вариант в случае постоянных p и q .

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $\alpha_1 > n(\frac{1}{\min\{p,1\}} - 1)[1 + \frac{\alpha_3}{n}p]$, $l > \alpha_2$, $\{s_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Тогда

$$B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n) = \bar{B}_{p,q,1}^l(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$$

и соответствующие квазинормы эквивалентны.

Комбинируя теоремы 2.5, 2.6 и замечание 2.7, получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $p, q \in [1, \infty]$, $r_1, r_2 \in [1, p]$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$, $l > \alpha_2$, $\{s_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Тогда

$$B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n) = \bar{B}_{p,q,r_1}^l(\mathbb{R}^n, \{s_k\}) = \tilde{B}_{p,q,r_2}^l(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Вопрос о совпадении (или несовпадении) пространств $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$, $\bar{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$ и $B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n)$ при более слабых (чем в теоремах 2.5, 2.6 или следствии 2.1) ограничениях на переменную гладкость $\{s_k\}$ остается открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Комбинируя теорему 2.5 с теоремой 3.14 работы [13] при $p \in (0, \infty)$, $0 < r \leq p$, $q \in (0, \infty]$, $s > 0$, $l > s$, $\gamma^p \in A_{p/r}(\mathbb{R}^n)$, получим

$$\bar{B}_{p,q,r}^s(\mathbb{R}^n, \gamma) = \tilde{B}_{p,q,r}^s(\mathbb{R}^n, \gamma) = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \gamma)$$

с эквивалентностью соответствующих норм.

§ 3. Следы весовых пространств Соболева

Как отмечалось во введении, основной мотивацией для изучения пространств $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ является их применение в задаче о следах весовых пространств Соболева.

Краткий обзор, имеющихся в литературе результатов по проблеме следов весовых пространств Соболева имеется в [1]. Мы не будем останавливаться здесь на этом.

Пусть $p \in [1, \infty]$, $l \in \mathbb{N}$, γ – вес. Зафиксируем $n, d \in \mathbb{N}$. Точку $(n+d)$ -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+d} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ будем записывать как пару (x, y) . Плоскость, задаваемую в $\mathbb{R}^{n+d}$ уравнением $y = 0$, отождествим с пространством $\mathbb{R}^n$. При $a > 0$ положим

$${}^n R_a^d := \mathbb{R}^{n+d} \setminus (\mathbb{R}^n \times aB^d).$$

Положим

$$\Xi_{k,m}^{d,n} := Q_{k,m}^n \times \left(\frac{B^d}{2^k} \setminus \frac{B^d}{2^{k+1}} \right) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Через $W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$ обозначим линейное пространство классов эквивалентных функций, имеющих на $\mathbb{R}^n$ обобщенные по Соболеву производные до порядка l включительно, с нормой

$$\|f \mid W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)\| = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f \mid L_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)\|.$$

В работе [1] задача о следах была решена для пространств $\widetilde{W}_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$, которые немного отличаются от пространств $W_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ видом нормы. Точнее, в норму пространства $\widetilde{W}_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ не входят некоторые смешанные производные.

Для дальнейшего нам понадобится специальный оператор усреднения, построенный в [1]. Мы не станем подробно описывать детали конструкции этого оператора. Для функции $\varphi \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$E_\varepsilon[\varphi](x) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \sum_{j=1}^l \mu_j \int_{\mathbb{R}^n} \Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \Theta\left(\frac{z-y}{j\varepsilon}\right) \varphi(z) dz dy \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

В формуле (3.1) функция (специально подобранная) $\Theta \in C_0^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} \Theta(x) dx = 1$, а μ_j – специально подобранные константы (см. [1]). При $k \in \mathbb{N}_0$ пусть $E_k[g] := E_{2^{-k}}[g]$.

ЛЕММА 3.1. Пусть функция $\varphi \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и мультииндекса α , $|\alpha| = l$, при $x \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$|D_x^\alpha E_\varepsilon[\varphi](x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^l} \delta^l(x + \varepsilon I^n) \varphi, \quad (3.2)$$

а для любых чисел $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и мультииндекса β при $x \in \mathbb{R}^n$ – оценка

$$|D^\beta E_{\varepsilon_1}[\varphi](x) - D^\beta E_{\varepsilon_2}[\varphi](x)| \leq C \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{t^{1+|\beta|}} \delta^l(x + t I^n) \varphi dt. \quad (3.3)$$

Доказательство в случае $\beta = 0$ имеется в [1], общий случай доказывается аналогично.

В этом параграфе мы не будем приводить точного определения следа функции $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$ на плоскости $y = 0$. Оно стандартно и имеется, например, в монографии [22; гл. 5].

Пусть кратная последовательность $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом $\gamma \in A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$. Пусть фиксированы параметры $l \in \mathbb{N}$ и $p \in (1, \infty)$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma_k^l(x) &:= \gamma_k(x) := 2^{k(l+\frac{n}{p})} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\tilde{Q}_{k,m}^n}(x) \hat{\gamma}_{k,m} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \gamma_{k,m} &:= 2^{kl} \hat{\gamma}_{k,m} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $p \in (1, \infty)$, $r \in [1, p)$, $\gamma^p \in A_{p/r}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$, $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$, $l > \frac{d}{r}$. Тогда существует след $\varphi \in \tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$ функции f и справедливо неравенство

$$\|\varphi \mid \tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})\| \leq C_1 \|f \mid W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)\|. \quad (3.4)$$

Константа C_1 в (3.4) не зависит от функции f .

Обратно, если функция $\varphi \in \tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$, то существует функция $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$ такая, что φ – след f на $\mathbb{R}^n$ и справедливо неравенство

$$\|f \mid W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)\| \leq C_2 \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})\|. \quad (3.5)$$

Константа C_2 в (3.5) не зависит от функции φ .

Важным шагом в доказательстве теоремы 3.1 является следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Пусть $p \in (1, \infty)$, $r \in [1, p)$, $\gamma^p \in A_{p/r}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$, $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$, $l > \frac{d}{r}$. Тогда существует след φ функции f на $\mathbb{R}^n$. Более того, для произвольного куба $Q_{k,m}^n$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \delta_r^l(Q_{k,m}^n) \varphi &\leq \frac{C_3}{2^{k(l-(n+d)/r)}} \left\{ \left\| D_x^\alpha f \mid L_r \left(C_4 Q_{k,m}^n \times \frac{C_5}{2^k} B^d \right) \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| D_y^\beta f \mid L_r \left(C_4 Q_{k,m}^n \times \frac{C_5}{2^k} B^d \right) \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Константы C_3 , C_4 , C_5 в (3.6) не зависят ни от функции f , ни от куба $Q_{k,m}^n$.

Доказательство этого утверждения является несложной модификацией доказательства леммы 3.1 в работе [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Шаг 1. Пусть $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$. Тогда в силу леммы 3.2 существует след φ функции f на плоскости $\mathbb{R}^n$, поэтому нам достаточно установить оценку (3.4). Но эта оценка получается несложной модификацией рассуждений, использованных в доказательстве теоремы 3.1 работы [1] (стоит лишь использовать в соответствующем месте оценку (3.6)).

Шаг 2. Эту часть доказательства мы проведем детально, поскольку здесь, в отличие от [1], нам понадобится оценка всех смешанных производных.

Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ – разбиение единицы, построенное для шара B^d , т.е. $\psi_k(y) \geq 0$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $y \in B^d$ и $\sum_{k=0}^\infty \psi_k(y) = 1$ при $y \in B^d$. При этом

$$\psi_0 \in C^\infty\left(B^d \setminus \frac{1}{2}B^d\right), \quad \psi_k \in C_0^\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}B^d \setminus \frac{1}{2^{k+1}}B^d\right) \quad \text{при } k \in \mathbb{N},$$

$$|D^\beta \psi_k(y)| \leq \frac{C_1}{(\delta_k)^{|\beta|}} \quad \text{для } y \in B^d, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть также для любого $k \in \mathbb{N}_0$ только две функции ψ_k и ψ_{k+1} отличны от нуля на множестве $2^{-k}B^d \setminus 2^{-k-1}B^d$, поэтому $D^\beta \psi_k(y) = -D^\beta \psi_{k+1}(y)$ при $y \in 2^{-k}B^d \setminus 2^{-k-1}B^d$. Существование последовательности $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ с указанными выше свойствами может быть доказано аналогично тому, как это сделано, например, в [22; гл. 5, § 4] при доказательстве теоремы о следах для невесовых пространств Соболева.

Положим

$$f(x, y) := \sum_{k=1}^\infty \psi_k(y) E_{2^{-k}}[\varphi](x) \quad \text{при } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times B^d,$$

где оператор E_ε (при $\varepsilon > 0$) определен формулой (2.26). Доопределим функцию f нулем на множестве ${}^n\mathbb{R}_1^d$.

Мультииндекс α будем записывать в виде $(\alpha^1, \alpha^2) = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_d^2)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^n \times \frac{1}{2}B^d} \gamma^p(x, y) \left\{ \sum_{|\alpha|=l, \alpha^2=0} |D^\alpha f(x, y)|^p + \sum_{|\alpha|=l, |\alpha^2|>0} |D^\alpha f(x, y)|^p \right\} dx dy \\ &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \iint_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^p(x, y) \\ & \quad \times \left\{ \sum_{|\alpha|=l, \alpha^2=0} |D^\alpha f(x, y)|^p + \sum_{|\alpha|=l, |\alpha^2|>0} |D^\alpha f(x, y)|^p \right\} dx dy. \end{aligned}$$

С учетом свойств функций ψ_k и оценки (3.3) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=l, \alpha^2>0} \iint_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^p(x, y) |D^\alpha f(x, y)|^p dx dy &= \sum_{|\alpha|=l, \alpha^2>0} \iint_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^p(x, y) \\ & \quad \times |D_y^{\alpha^2} \psi_k(y) D_x^{\alpha^1} E_{2^{-k}} \varphi(x) + D_y^{\alpha^2} \psi_{k+1}(y) D_x^{\alpha^1} E_{2^{-(k+1)}} \varphi(x)|^p dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\alpha^1|=l-|\alpha^2|} 2^{k|\alpha^2|p} \iint_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^p(x,y) |D_x^{\alpha^1} E_{2^{-k}} \varphi(x) - D_x^{\alpha^1} E_{2^{-(k+1)}} \varphi(x)|^p dx dy \\
&\leq C 2^{2nkp} \gamma_{k,m}^p \left[\int_{\tilde{C}Q_{k,m}^n} \int_{I^{n/2^k}} |\Delta^l(h)\varphi(z)| dh dz \right]^p dx dy \\
&\quad \text{при } k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}^n.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Константа $\tilde{C} \geq 1$, которая является коэффициентом растяжения кубов $Q_{k,m}^n$, зависит лишь от диаметра носителя функции Θ из (3.1).

Аналогично из (3.2) имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha^1|=l} \iint_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^p(x,y) |D_x^{\alpha^1} f(x,y)|^p dx dy \\
&\leq C \sum_{|\alpha^1|=l} \iint_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \gamma^p(x,y) \max\{|D_x^{\alpha^1} E_{2^{-k}} \varphi(x)|^p, |D_x^{\alpha^1} E_{2^{-k-1}} \varphi(x)|^p\} dx dy \\
&\leq C 2^{2nkp} \gamma_{k,m}^p \left[\int_{\tilde{C}Q_{k,m}^n} \int_{I^{n/2^k}} |\Delta^l(h)\varphi(z)| dh dz \right]^p \quad \text{при } k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}^n.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Пользуясь определением функции f , а затем неравенством Гёльдера с показателями r, r' , получаем при $|\alpha| = l$ в силу конечной кратности перекрытия кубов $\tilde{C}Q_{0,m}^n$ (константа $\tilde{C}$ та же, что и в (3.7)) оценку

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=l} \iint_{\mathbb{R}_{1/2}^d} \gamma^p(x,y) |D^\alpha f(x,y)|^p dx dy \leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \gamma_{0,m}^p \|\varphi\|_{L_1(\tilde{C}Q_{0,m}^n)}^p \\
&\leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \gamma_{0,m}^p \|\varphi\|_{L_r(\tilde{C}Q_{0,m}^n)}^p \leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \gamma_{0,m}^p \|\varphi\|_{L_r(Q_{0,m}^n)}^p.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Отсюда, суммируя оценки (3.7), (3.8) по k и m , учитывая конечную кратность перекрытия (при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и переменном $m \in \mathbb{Z}^n$) кубов $\tilde{C}Q_{k,m}^n$ и оценку (3.9), получаем

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)} \leq C \|\varphi\|_{\tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_{k,m}\})}. \tag{3.10}$$

Для оценки обобщенных производных $D^\alpha f$ при $|\alpha| < l$ запишем при каждом $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times B^d$ интегральное представление функции $D^\alpha f$ по конусу (см. [22; гл. 3, § 4])

$$V(x,y) = \left\{ (x,y)(1-t) + t(x',y') \mid t \in [0,1], (x',y') \in \frac{1}{2}B^{n+d}(x,y+3) \right\}$$

($\frac{1}{2}B^{n+d}(x,y+3)$ — шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(x,y+3)$) и воспользуемся замечанием 16 из [22; гл. 3, § 5].

Пусть $|\alpha| < l$. Учитывая, что $f(x, y) = 0$ при $|y| > 1$, имеем

$$|D^\alpha f(x, y)| \leq C \sum_{|\beta|=l} \iint_{(x,0)+(I^n \times B^d)} |D^\beta f(\tilde{x}, \tilde{y})| d\tilde{x} d\tilde{y} \quad \text{при } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times B^d.$$

Отсюда и из очевидного включения $A_{p/r}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d}) \subset A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем при $m \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| < l$ оценку

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{0,m}^n \times B^d} \gamma^p(x, y) |D^\alpha f(x, y)|^p dx dy \\ & \leq C \sum_{|\beta|=l} [\gamma^p(\tilde{C}Q_{0,m}^n \times B^d)] [\gamma^{-p'}(\tilde{C}Q_{0,m}^n \times B^d)]^{\frac{p}{p'}} \\ & \quad \times \iint_{\tilde{C}Q_{0,m}^n \times B^d} \gamma^p(x, y) |D^\beta f(x, y)|^p dx dy \\ & \leq C \sum_{|\beta|=l} \iint_{\tilde{C}Q_{0,m}^n \times B^d} \gamma^p(x, y) |D^\beta f(x, y)|^p dx dy. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Суммируя оценку (3.11) по $m \in \mathbb{Z}^n$ и учитывая конечную кратность перекрытия (при фиксированном k и переменном m) кубов $\tilde{C}Q_{k,m}^n$, получаем с учетом (3.10) оценку (3.5).

Остается показать, что $\varphi = \text{tr}|_{y=0} f$. Зафиксируем произвольный куб Q^n . Почти каждая точка $x \in \mathbb{R}^n$ является точкой Лебега функции φ , поскольку $\varphi \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$g_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} \int_{x+\delta I^n} |\varphi(x') - \varphi(x)| dx' \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Отсюда, пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, имеем

$$\int_{Q^n} |\varphi(x) - E_\delta[\varphi](x)| dx \leq C \int_{Q^n} g_\delta(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Из (3.12) и определения функции f легко следует, что функция φ – след функции f на плоскости $y = 0$.

Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Атомарное разложение функций из пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$

В этом параграфе мы докажем теорему об атомарном разложении функций φ из пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Эта теорема является одним из основных инструментов для доказательства различных теорем вложения и теорем о следах (см. далее § 5, 6).

Также мы установим условия на p -допустимую весовую последовательность $\{t_k\}$, которые являются достаточными для того, чтобы при различных $l \in \mathbb{N}$

пространства $\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ совпадали с эквивалентностью соответствующих норм.

Наши рассуждения будут во многом использовать методы работы [16].

Зафиксируем в этом параграфе числа $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$. Положим

$$\Xi_{k,m}^{d,n} := Q_{k,m}^n \times \left(\frac{B^d}{2^k} \setminus \frac{B^d}{2^{k+1}} \right) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Точку $(n+d)$ -мерного евклидова пространства будем записывать в виде пары $(x, y) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_d)$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$, N^{l-1} – B -сплайн степени $l-1$ с узлами в точках $t_i = i$, $i \in \{0, 1, \dots, l\}$. Точнее

$$N^{l-1}(t) := [0, 1, \dots, l](t - \cdot)_+^{l-1}.$$

Мы использовали стандартное обозначение разделенной разности (см. [23; гл. 7]).

Для $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$N_{k,m}^{l-1}(x) := \prod_{i=1}^n N^{l-1}\left(2^k\left(x_i - \frac{m_i}{2^k}\right)\right) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n.$$

Функции $N_{k,m}^{l-1}$ впервые были введены Карри и Шёнбергом в работе [24].

Отметим некоторые свойства B -сплайнов $N_{k,m}^{l-1}$, которые будут нам необходимы для дальнейшего изложения. Доказательства этих свойств имеются, например, в [24], [25].

1) B -сплайны $N_{k,m}^{l-1}$ образуют разбиение единицы на $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}_0$, т.е.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} N_{k,m}^{l-1}(x) = 1 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

При этом кратность пересечения носителей сплайнов $N_{k,m}^{l-1}$ конечна и не зависит ни от k , ни от m . Отметим также, что

$$\text{supp } N_{k,m}^{l-1} \subset \frac{m}{2^k} + \left[0, \frac{l}{2^k}\right]^n \quad \text{и} \quad N_{k,m}^{l-1}(x) \in (0, 1] \quad \text{при } x \in \frac{m}{2^k} + \left(0, \frac{l}{2^k}\right)^n.$$

2) На каждом кубе $Q_{k,m}^n$ функция $N_{k,m}^{l-1}$ является полиномом степени не выше $l-1$ по каждой переменной.

3) Сплайн N^{l-1} имеет непрерывную производную порядка $l-2$ во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$. В узлах $t_i = i$, $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, сплайн N^{l-1} имеет конечные односторонние производные порядка $l-1$, а на каждом интервале $(i, i+1)$, $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, сплайн N^{l-1} имеет непрерывные производные порядка $l-1$. Поэтому

$$\Delta^l(h)N_{k,m}^{l-1}(x) \leq C(2^k|h|)^{l-1} \quad \text{при } x, h \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

4) Любой сплайн $S = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^{l-1}$ ($\beta_{k,m} \in \mathbb{R}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$) может быть разложен в ряд по сплайнам $N_{j,m}^{l-1}$ при $j \geq k$, т.е.

$$S = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\beta}_{k,m}(S) N_{j,m}^{l-1}.$$

Через Σ_k^{l-1} обозначим множество всех сплайнов S вида

$$S(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^{l-1}(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n.$$

Нам понадобится для дальнейшего понятие квазиинтерполянта, которое впервые было введено в работе [25]. Квазиинтерполянты использовались также в работах [26], [16] для построения эквивалентных нормировок в невесовых диадических пространствах типа пространств Бесова и в классических пространствах Бесова соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (см. [25]). При $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ через $\xi_{k,m} = (\xi_{k,m_1}, \dots, \xi_{k,m_n})$ обозначим центр куба $Q_{k,m}^n$. Пусть все частные производные $D^\nu f$, $\nu_j \leq l-1$, $j \in \{1, \dots, n\}$, функции f непрерывны в каждой точке $\xi_{k,m}$. Положим при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$

$$Q_k^{l-1}(f) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(f) N_{k,m}^{l-1},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{k,m}(f) &:= \sum_{\substack{0 \leq \nu_j \leq l-1 \\ j \in \{1, \dots, n\}}} a_{k,\nu,m} D^\nu f(\xi_{k,m}), \\ a_{k,m,\nu} &:= \prod_{i=1}^n a_{k,m_i,\nu_i}, \quad a_{k,m_i,\nu_i} := \frac{(-1)^{l-1-\nu_i}}{(l-1)!} D^{l-1-\nu_i} \psi_{m_i}(\xi_{k,m_i}), \\ \psi_{m_i}(t) &:= \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{m_i + j}{2^k} - t \right) \quad \text{при } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Оператор Q_k^{l-1} называется квазиинтерполянтом.

Зафиксируем до конца пункта константу $A \geq 1$.

Пусть $P_{Q_{k,m}^n}$ — многочлен почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (при $r \in (0, \infty]$) в метрике $L_r(Q_{k,m}^n)$ полиномами координатной степени ниже l на кубе $Q_{k,m}^n$ с константой A .

Положим

$$g_k(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} P_{Q_{k,m}^n}(x) \chi_{Q_{k,m}^n}(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Наконец, следуя работе [16], положим при $r \in (0, \infty]$

$$\begin{aligned} T_k^{l-1}(\varphi, r)(x) &:= Q_k^{l-1}(g_k)(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ T_{-1}^{l-1}(\varphi, r)(x) &:= \varphi(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Отметим, что в [16] оператор T_k^{l-1} действовал на функции φ , определенные на единичном кубе.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Оператор Q_k^{l-1} является проектором из пространства кусочно-полиномиальных функций на пространство Σ_k^{l-1} (доказательство см. в [25]), поэтому

$$T_k^{l-1}(\varphi, r)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(T_k^{l-1}(\varphi, r)) N_{k,m}^{l-1}(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n.$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $r \in (0, \infty]$. Для любой функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ справедлива оценка

$$\|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi, r) \mid L_r(Q_{k,m}^n)\| \leq C \widehat{E}_l(\varphi, (1+l)Q_{k,m}^n)_r \leq C E_l(\varphi, (1+l)Q_{k,m}^n)_r. \quad (4.4)$$

Константа C в (4.4) зависит только от l, n, r, A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство в (4.4) следует из оценки (4.25) работы [16], второе очевидно.

Пусть $p, r \in (0, \infty]$, $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i \in (0, \infty]$, $i = 1, 2$. Для кратной последовательности $\{t_{k,m}\}$, p -ассоциированной с p -допустимой весовой последовательностью $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$, положим

$$s_k^l := s_k^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p} := \inf_{S \in \Sigma_k^{l-1}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \|\varphi - S \mid L_r(Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$s_{-1}^l := s_{-1}^l(\varphi, \{t_{0,m}\})_{r,p} = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.5)$$

Отметим, что $s_k^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p} < \infty$, если $\varphi \in \widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Действительно, в силу (4.4) и теоремы 2.3 при $k \in \mathbb{N}_0$ имеем оценку

$$\inf_{S \in \Sigma_k^{l-1}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \|\varphi - S \mid L_r(Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi) \mid L_r(Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|\varphi \mid \widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| < \infty. \quad (4.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $p, r \in (0, +\infty]$, $s_k^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p} < \infty$. Будем говорить, что

$$U_k^{l-1} := U_k^{l-1}(\varphi, \{t_{k,m}\}, p) \in \Sigma_k^{l-1}$$

– сплайн почти наилучшего приближения с константой A для функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \|\varphi - U_k^{l-1} \mid L_r(Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A s_k^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p}. \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.2 (см. [16]). Пусть сплайн $S \in \Sigma_k^{l-1}$; тогда для любого $r \in (0, +\infty]$ и любого куба $Q_{k,m}^n$ справедливы неравенства (с соответствующими модификациями в случае $r = \infty$)

$$C_1 \|S|_{L_r(Q_{k,m}^n)}\| \leq \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}^n \cap \text{supp } N_{k,\tilde{m}}^{l-1} \neq \emptyset}} |\alpha_{k,\tilde{m}}(S)|^r 2^{-kn} \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_2 \|S|_{L_r(C_3 Q_{k,m}^n)}\|, \quad (4.8)$$

в которых константы $C_1, C_2, C_3 > 0$ не зависят ни от куба $Q_{k,m}^n$, ни от сплайна S .

Следующая теорема является обобщением на случай пространств Бесова переменной гладкости теоремы 4.8 работы [16] (где рассматривались классические пространства Бесова).

Напомним, что $\delta_i(\gamma, n, d)$, $i = 1, 2$, были введены сразу после доказательства леммы 2.2.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $p, r \in (0, \infty)$, $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_3 \geq 0$, $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$, весовая последовательность $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Пусть вес $\gamma^p \in A_{\infty}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$ и кратная последовательность $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ . Положим

$$t_{k,m} := 2^{\frac{kn}{p}} s_{k,m} \hat{\gamma}_{k,m} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, при

$$\tilde{\lambda} := \min \left\{ l, l-1 + \frac{\delta_2(\gamma, n, d) - \varepsilon}{p} \right\}, \quad \mu \leq \min\{1, r, p\}$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n) \varphi]^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C 2^{-k(\tilde{\lambda} + \frac{\delta_1(\gamma, n, d) - \varepsilon}{p} - \alpha_2)} \\ &\times \left(\sum_{j=-1}^k 2^{j\mu(\tilde{\lambda} + \frac{\delta_1(\gamma, n, d) - \varepsilon}{p} - \alpha_2)} (s_j^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p})^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

в котором константа $C > 0$ зависит от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r, l$ и веса γ , но не зависит от функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея доказательства данной теоремы повторяет идею доказательства теоремы 4.8 в [16]. Однако нам необходимы модификации приведенного в [16] доказательства, учитывающие свойства кратной последовательности $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$, отмеченные в лемме 2.1.

Фиксируем $\varepsilon \in [0, \min\{\delta_1(\gamma, n, d), \delta_2(\gamma, n, d)\})$. Положим

$$\tilde{\delta}_1 := \tilde{\delta}_1(\gamma, n, d) := \delta_1(\gamma, n, d) - \varepsilon, \quad \tilde{\delta}_2 := \tilde{\delta}_2(\gamma, n, d) := \delta_2(\gamma, n, d) - \varepsilon.$$

Пусть $U_j^{l-1} := U_j^{l-1}(\varphi, \{t_{k,m}\}, p)$ – сплайн почти наилучшего приближения с константой $A \geq 1$ для функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. При $j \in \mathbb{N}_0$ положим $u_j^{l-1} :=$

$U_j^{l-1} - U_{j-1}^{l-1}$ ($U_{-1}^{l-1} \equiv 0$). Тогда, очевидно,

$$\Delta^l(h)\varphi(x) = \Delta^l(h)[\varphi - U_k^{l-1}](x) + \sum_{j=0}^k \Delta^l(h)u_j^{l-1}(x) \quad \text{при } x, h \in \mathbb{R}^n. \quad (4.10)$$

Из (4.10) и леммы 2.1 при $\mu \leq \min\{1, r, p\}$ имеем неравенство

$$\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi \leq \left([\delta_r^l(Q_{k,m}^n)(\varphi - U_k^{l-1})]^\mu + \sum_{j=0}^k [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)u_j^{l-1}]^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{p}{\mu} \geq 1$, получим с помощью неравенства Минковского

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \left([\delta_r^l(Q_{k,m}^n)(\varphi - U_k^{l-1})]^\mu + \sum_{j=0}^k [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)u_j^{l-1}]^\mu \right)^{\frac{p}{\mu}} \right)^{\frac{\mu}{p}} \\ & \leq \left(\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)(\varphi - U_k^{l-1})]^p \right)^{\frac{\mu}{p}} + \sum_{j=0}^k \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)u_j^{l-1}]^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ & = \left((R^1)^{\frac{\mu}{p}} + \sum_{j=0}^k (R_j^2)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Нетрудно видеть, что в силу конечной (не зависящей от k и m) кратности перекрытия кубов $(1+l)Q_{k,m}^n$ и замечания 2.2 справедлива оценка

$$(R^1)^{\frac{\mu}{p}} \leq C \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{kn p}{r}} \|\varphi - U_k^{l-1} \mid L_r((1+l)Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \leq C(s_k^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p})^\mu. \quad (4.12)$$

Отметим, что именно для получения оценки (4.12) существенно использование разностей δ_r^l , а не $\bar{\Delta}_r^l$.

Далее, при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ функция u_j^{l-1} может быть разложена по B -сплайнам $N_{j,m}^{l-1}$ (см. свойство 4) выше), т.е.

$$u_j^{l-1}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{j,m}(u_j^{l-1})N_{j,m}^{l-1}(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.13)$$

Поскольку при фиксированном j для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ лишь конечное (не зависящее от j и m) число сплайнов $N_{j,m}^{l-1}$ отлично от нуля, получим

$$|\Delta^l(h)u_j^{l-1}(x)|^r \leq C \sum_{x \in \text{supp } N_{j,m}^{l-1}} |\alpha_{j,m}|^r |\Delta^l(h)N_{j,m}^{l-1}(x)|^r. \quad (4.14)$$

Для $k \geq j \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ пусть $\Gamma_{j,\tilde{m}}$ — множество всех кубов $Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\tilde{m}}^n$. Через $\Gamma_{j,\tilde{m}}^1$ обозначим множество тех кубов $Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\tilde{m}}^n$, для которых

$$(1+l)Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\tilde{m}}^n.$$

Пусть $\Gamma_{j,\tilde{m}}^2 := \Gamma_{j,\tilde{m}} \setminus \Gamma_{j,\tilde{m}}^1$.

Отметим важную для дальнейшего оценку меры множества

$$F_{j,\tilde{m}} := \bigcup_{Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^2} Q_{k,m}^n$$

(доказательство аналогично доказательству соответствующей оценки в теореме 4.8 из [16]). Для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от j и $\tilde{m}$, справедливо неравенство

$$\frac{|F_{j,\tilde{m}}|}{|Q_{j,\tilde{m}}^n|} \leq C 2^{j-k}. \quad (4.15)$$

Из (4.15) и (2.19) следует, что

$$\sum_{Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^2} \hat{\gamma}_{k,m}^p \leq C 2^{(j-k)\tilde{\delta}_2(\gamma,n,d)} \sum_{Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^2} \hat{\gamma}_{k,m}^p. \quad (4.16)$$

Для кубов $Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^1$ имеем

$$\delta_r^l(Q_{k,m}^n) N_{j,\tilde{m}}^{l-1} \leq C 2^{(j-k)l}, \quad (4.17)$$

поскольку $N_{j,\tilde{m}}^{l-1}$ — полином на кубе $Q_{j,\tilde{m}}^n$.

Для кубов $Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^2$ в силу (4.2) имеем

$$\delta_r^l(Q_{k,m}^n) N_{j,\tilde{m}}^{l-1} \leq C 2^{(j-k)(l-1)}. \quad (4.18)$$

Из того, что $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1,\alpha_2}^{\alpha_3}$, очевидно следует неравенство

$$s_{k,m} \leq C 2^{(\alpha_2 - \frac{n}{p})(k-j)} s_{j,\tilde{m}} \quad (4.19)$$

при условии $Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\tilde{m}}^n$, $k \geq j \in \mathbb{N}_0$, $m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ (константа $C > 0$ зависит лишь от весовой последовательности $\{s_k\}$).

Комбинируя оценки (4.8), (4.14), (4.17), (4.18), пользуясь свойствами (2.18), (4.16) и (4.19) кратных последовательностей $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$ и $\{s_{k,m}\}$, имеем

$$\begin{aligned} R_j^2 &\leq C \sum_{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n} \sum_{Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^1} 2^{p(k-j)\alpha_2} 2^{\frac{jn}{p}} s_{j,\tilde{m}}^p \hat{\gamma}_{k,m}^p 2^{(j-k)lp} \left[\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \cap \text{supp } N_{j,m}^{l-1} \neq \emptyset}} [\alpha_{j,m}]^r \right]^{\frac{p}{r}} \\ &\quad + C \sum_{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n} \sum_{Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\tilde{m}}^2} 2^{p(k-j)\alpha_2} 2^{\frac{jn}{p}} s_{j,\tilde{m}}^p \hat{\gamma}_{k,m}^p \\ &\quad \times 2^{(j-k)(l-1)p} \left[\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \cap \text{supp } N_{j,m}^{l-1} \neq \emptyset}} [\alpha_{j,m}]^r \right]^{\frac{p}{r}} \\ &\leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{p(k-j)\alpha_2} 2^{\frac{jn}{p}} s_{j,m}^p \hat{\gamma}_{j,m}^p 2^{(j-k)d\tilde{\delta}_1} 2^{(j-k)pl} 2^{\frac{jnp}{r}} \|u_j^{l-1} \mid L_r(CQ_{j,m}^n)\|^p \\ &\quad + C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{p(k-j)\alpha_2} 2^{\frac{jn}{p}} s_{j,m}^p \hat{\gamma}_{j,m}^p 2^{(j-k)(\tilde{\delta}_2 + d\tilde{\delta}_1)} \\ &\quad \times 2^{(j-k)p(l-1)} 2^{\frac{jnp}{r}} \|u_j^{l-1} \mid L_r(CQ_{j,m}^n)\|^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C 2^{(\tilde{\lambda} + \frac{d\tilde{\delta}_1}{p} - \alpha_2)p(j-k)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{jnp}{r}} \|u_j^{l-1} \mid L_r(Q_{j,m}^n)\|^p \\
&\leq C 2^{(\tilde{\lambda} + \frac{d\tilde{\delta}_1}{p} - \alpha_2)p(j-k)} (s_j^l(\varphi, \{t_{k,m}\}_{r,p})^p + (s_{j-1}^l(\varphi, \{t_{k,m}\}_{r,p})^p. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Подставляя оценки (4.12) и (4.20) в (4.11), завершаем доказательство теоремы.

Установим теорему, аналогичную теореме 4.1 при более слабых ограничениях на кратную последовательность $\{t_{k,m}\}$. При этом порядок сплайнов, приближающих нашу функцию, нам придется увеличить.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $p, r \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\sigma_1 \in (0, \infty]$, $\sigma_2 = p$, кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p -ассоциирована с p -допустимой весовой последовательностью $\{t_k\} \in X_{\alpha_3, \sigma, p}^{\alpha_3}$. Тогда при $\mu \leq \min\{1, r, p\}$ справедливо неравенство (с очевидными модификациями в случае $p = \infty$ или $\mu = \infty$)

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n) \varphi]^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C 2^{-k(l-\alpha_2)} \left(\sum_{j=-1}^k 2^{j\mu(l-\alpha_2)} (s_j^{l+1}(\varphi, \{t_{k,m}\}_{r,p})^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad (4.21)$$

в котором константа $C > 0$ зависит от $\alpha_1, \alpha, \sigma, r, l$, но не зависит от функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 4.1. Поэтому мы укажем лишь отличающие этот случай детали.

Очевидно, что для всех индексов $j \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ и для всех кубов $Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\tilde{m}}^n$ справедлива оценка

$$\delta_r^l(Q_{k,m}^n) N_{j,\tilde{m}}^l \leq C 2^{(j-k)l} \quad (4.22)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от индексов $k, j, m, \tilde{m}$.

Пользуясь этим фактом, а также (2.15), (4.16), (4.19), будем шаг за шагом повторять рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 4.1, заменяя все сплайны U_k^{l-1} в доказательстве теоремы 4.1 на сплайны U_k^l . При этом в силу (4.22) очевидно отпадает необходимость в рассмотрении множеств $\Gamma_{j,\tilde{m}}^1$ и $\Gamma_{j,\tilde{m}}^2$ и оценка (4.20) существенно упрощается. В итоге получаем утверждение теоремы 4.2.

Из теоремы 4.1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, $p \neq \infty$, $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, весовая последовательность $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$, кратная последовательность $\{s_{k,m}\}$ является p -ассоциированной с весовой последовательностью $\{s_k\}$. Пусть $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$ и кратная последовательность $\{\hat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ . Пусть

$$\alpha_2 < \lambda + \frac{d\delta_1(\gamma)}{p} \quad \text{при} \quad \lambda := \min \left\{ l, l-1 + \frac{\delta_2(\gamma)}{p} \right\}.$$

Положим $t_{k,m} := s_{k,m} \hat{\gamma}_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$.

Тогда функция $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ в том и только в том случае, если

$$N_1(\varphi, l) := \left(\sum_{j=-1}^{\infty} (s_j^l(\varphi, \{t_k\})_{r,p})^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (4.23)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} N_1(\varphi, l) &\sim N_2(\varphi, l) \sim \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|, \\ \text{где } N_2(\varphi, l) &:= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi, r) \mid L_r(Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в случае $q < \infty$, поскольку случай $q = \infty$ рассматривается аналогично. Пусть $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$. Оценка

$$N_1(\varphi, l) \leq N_2(\varphi, l) \leq C \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|$$

следует из (4.6).

Пусть теперь $N_1(\varphi, l) < \infty$. Выберем $\varepsilon \geq 0$ столь малым, что

$$\alpha_2 - n < \tilde{\lambda} + \frac{d\tilde{\delta}_1}{p}.$$

Применим теорему 4.1 при $\mu \leq \min\{1, q, r\}$, затем воспользуемся теоремой 2.2, получим

$$\begin{aligned} &\|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|^q \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kq(\tilde{\lambda} + \frac{d\tilde{\delta}_1}{p} - (\alpha_2 - \frac{n}{p}))} \left(\sum_{j=-1}^k 2^{j\mu(\tilde{\lambda} + \frac{d\tilde{\delta}_1}{p} - (\alpha_2 - \frac{n}{p}))} (s_j^l(\varphi, \{t_k\})_{r,p})^\mu \right)^{\frac{q}{\mu}} \\ &\leq C[N_1(\varphi, l)]^q. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Следствие доказано.

Аналогично с помощью теоремы 4.2 получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\sigma_1 \in (0, \infty]$, $\sigma_2 = p$, кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p -ассоциирована с p -допустимой весовой последовательностью $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$. Если $l > \alpha_2$, то функция $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ в том и только в том случае, если

$$N_1(\varphi, l+1) < \infty. \quad (4.26)$$

Кроме того,

$$N_1(\varphi, l+1) \sim N_2(\varphi, l+1) \sim \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|. \quad (4.27)$$

Теорема 4.2 позволяет получить результат об эквивалентных нормах в пространстве $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ при различных (достаточно больших) l .

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\sigma_1 \in (0, \infty]$, $\sigma_2 = p$, $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ и $l > \alpha_2$. Тогда при $l' > l$

$$\|\varphi | \tilde{B}_{p,q,r}^{l'}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \sim \|\varphi | \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценки

$$\|\varphi | \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \leq CN_2(\varphi, l') \leq C \|\varphi | \tilde{B}_{p,q,r}^{l'}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|$$

достаточно воспользоваться следствием 4.2 и леммой 4.1. Противоположная оценка очевидна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Как уже отмечалось во введении, методы работ [4], [5] позволяют доказать утверждение, аналогичное следствию 4.3 для пространства $\tilde{B}_{p,q,1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ при условии $\{t_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}(\{t_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3})$ и $l > \alpha_2$.

Покажем на простом примере, что следствие 4.3 работает при более слабых ограничениях на переменную гладкость.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Покажем, что существует весовая последовательность $\{\gamma_k^1\}$ такая, что $\{\gamma_k^1\} \in \tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$, $\alpha_2 < l$, $\sigma_2 = p$ и $\{\gamma_k^1\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{\alpha_3}$ при $l < \alpha'_2$, однако $\{\gamma_k^1\} \notin {}^{\text{loc}}Y_{\alpha''_1, \alpha''_2}^{\alpha_3}$ ни при каком $\alpha''_2 \leq l$. Действительно, пусть $\varepsilon \in (0, n)$ – достаточно малое число, которое будет выбрано позже. Положим

$$(\gamma^1)^p(x, x_{n+1}) := \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|x_i|^{1-\varepsilon}} \quad \text{при } (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Заметим, что $(\gamma^1)^p \in A_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Рассмотрим кратную последовательность

$$(\gamma_{k,m}^1)^p := 2^{klp} \iint_{\Xi_{k,m}^{1,n}} (\gamma^1)^p(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1}$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Положим

$$(\gamma^1)^p(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\tilde{Q}_{k,m}^n}(x) 2^{kn} (\gamma_{k,m}^1)^p \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, что неравенство

$$\frac{(\gamma_{k+1}^1)^p(0)}{(\gamma_k^1)^p(0)} = 2^{pl+n} \frac{\iint_{\Xi_{k+1,0}^{1,n}} (\gamma^1)^p(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1}}{\iint_{\Xi_{k,0}^{1,n}} (\gamma^1)^p(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1}} \geq 2^{pl+\frac{n}{2}}$$

справедливо при достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1)$. Отсюда получим, что $\{\gamma_k^1\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$ только если $\alpha_2 \geq l + \frac{n}{2p} > l$.

Однако в силу примера 2.1 получим $\{\gamma_k^1\} \in \tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ при $\sigma_2 = p$, $\alpha_2 = l - \frac{\delta_1(\gamma)}{p} < l$, а значит выполнены все условия следствия 4.3.

Отметим, что в силу замечания 2.3 пространство $\tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k^1\})$ нетривиально при любых $p \in (1, \infty)$, $r \in [1, p]$. Более того, пространство $\tilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k^1\})$ (в силу теоремы 3.1) является следом пространства Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$.

Следующая теорема является важным шагом для доказательства теоремы об атомарном разложении. Отметим, что оценка, устанавливаемая в ней, может иметь и самостоятельный интерес.

При $p \in (0, \infty]$, $\theta \in (0, p]$ положим $p_\theta := \frac{p}{\theta}$, если p и θ одновременно не обращаются в бесконечность. Если $\theta = p = \infty$, положим $p_\theta := 1$. Если $0 < \theta < p = \infty$, то считаем $p_\theta = \infty$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, $\theta \in (0, \min\{p, r\}]$, p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ при $\sigma_1 = \theta p'_\theta$, $\alpha_1 > n(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{r})$, $\sigma_2 \in (0, \infty]$, $\alpha_3 \geq 0$, кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p -ассоциирована с весовой последовательностью $\{t_k\}$. Пусть функции $V_k \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, при $k \in \mathbb{N}_0$, и

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|v_k\| L_r(Q_{k,m}^n) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $v_k := V_k - V_{k-1}$ ($V_{-1} \equiv 0$) при $k \in \mathbb{N}_0$.

Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|\varphi - V_k\| L_r(Q_{k,m}^n) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi\| L_r(Q_{0,m}^n) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{\theta}} \|v_k\| L_r(Q_{k,m}^n) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

в котором константа $C > 0$ зависит от $\alpha_1, \alpha, \sigma, r$, но не зависит от функциональной последовательности $\{V_k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем лишь в случае $p, q \neq \infty$.

Покажем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, достаточно показать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L_r(Q_{0,m}^n)$ для любого куба $Q_{0,m}^n$.

Для любых $j_1 \leq j_2 \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \leq \min\{1, \theta\}$ из леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \|V_{j_1} - V_{j_2}\| L_r(Q_{0,m}^n) & \leq \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \|v_j\| L_r(Q_{0,m}^n) \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ & = \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{0,m}^n}} \|v_j\| L_r(Q_{j,\tilde{m}}^n) \right)^{\frac{\mu}{\theta}} \right)^{\frac{1}{\mu}} = K_{j_1,m}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Применим неравенство Гёльдера к внутренней сумме (по $\tilde{m}$) с показателями p_θ и p'_θ и воспользуемся (2.14). Получим для любого $\mu \leq \min\{1, \theta\}$

$$\begin{aligned}
 (K_{j_1, m})^\mu &= \sum_{j=j_1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j, \tilde{m}}^n \subset Q_{0, m}^n}} \frac{t_{j, \tilde{m}}^\theta}{t_{j, \tilde{m}}^\theta} \|v_j \mid L_r(Q_{j, \tilde{m}}^n)\|^\theta \right)^{\frac{\mu}{\theta}} \\
 &\leq C \sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{jn\mu}{r}}} \frac{t_{0, m}^\mu}{t_{0, m}^\mu} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j, \tilde{m}}^n \subset Q_{0, m}^n}} \left[\frac{1}{t_{j, \tilde{m}}} \right]^{\theta p'_\theta} \right)^{\frac{\mu}{\theta p'_\theta}} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j, \tilde{m}}^n \subset Q_{0, m}^n}} 2^{\frac{jnp}{r}} t_{j, \tilde{m}}^p \|v_j \mid L_r(Q_{j, \tilde{m}}^n)\|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \\
 &\leq C \sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{2^{j\mu n(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{r})}}{2^{j\mu \alpha_1}} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j, \tilde{m}}^n \subset Q_{0, m}^n}} 2^{\frac{jnp}{r}} t_{j, \tilde{m}}^p \|v_j \mid L_r(Q_{j, \tilde{m}}^n)\|^p \right)^{\frac{\mu}{p}}. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Выберем $\mu \leq \min\{1, q, \theta\}$ и положим $q_\mu := \frac{q}{\mu} \geq 1$. Применив к правой части (4.30) неравенство Гёльдера с показателями q_μ и q'_μ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 K_{j_1, m} &\leq C \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\mu q'_\mu(\alpha_1 - (\frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}))}} \right)^{\frac{1}{\mu q'_\mu}} \\
 &\quad \times \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j, \tilde{m}}^n \subset Q_{0, m}^n}} 2^{\frac{jnp}{r}} t_{j, \tilde{m}}^p \|v_j \mid L_r(Q_{j, \tilde{m}}^n)\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Отметим, что при фиксированном j_1 правая часть неравенств (4.31) стремится к бесконечности, когда α_1 стремится к $\frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}$.

Из (4.29), (4.31) и полноты пространства $L_r(Q_{0, m}^n)$ вытекает нужная нам сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ в $L_r(Q_{0, m}^n)$ к некоторой функции $\varphi_m \in L_r(Q_{0, m}^n)$. Положим $\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{Q_{0, m}^n}(x) \varphi_m(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Установим оценку (4.28). Применяя лемму 2.1 с $f_j = 0$ при $j < k$ и $f_j := v_j \chi_{Q_{k, m}^n}$ при $j \geq k$, затем неравенство Минковского (так как $\frac{p}{\mu} \geq 1$), получим

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\frac{nkp}{r}} t_{k, m}^p \|\varphi - V_k \mid L_r(Q_{k, m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 2^{\frac{nk}{r}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k, m}^p \left[\sum_{j=k}^{\infty} \|v_j \mid L_r(Q_{k, m}^n)\|^\mu \right]^{\frac{p}{\mu}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 2^{\frac{nk}{r}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k, m}^p \|v_j \mid L_r(Q_{k, m}^n)\|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
 &\leq 2^{\frac{nk}{r}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k, m}^p \left[\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j, \tilde{m}}^n \subset Q_{k, m}^n}} \|v_j \mid L_r(Q_{j, \tilde{m}}^n)\|^\theta \right]^{\frac{p}{\theta}} \right)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}} =: R_k. \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Рассуждая как при выводе оценки (4.30), получаем при $j \geq k + 1$

$$\begin{aligned}
 & 2^{\frac{nkp}{r}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \left[\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n}} \|v_j \mid L_r(Q_{j,\tilde{m}}^n)\|^\theta \right]^{\frac{p}{\theta}} \\
 & \leq 2^{\frac{nkp}{r}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n}} \left[\frac{1}{t_{j,\tilde{m}}} \right]^{\theta p'_\theta} \right)^{\frac{p}{\theta p'_\theta}} \left[\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\tilde{m}}^n \subset Q_{k,m}^n}} t_{j,\tilde{m}}^p \|v_j \mid L_r(Q_{j,\tilde{m}}^n)\|^p \right] \\
 & \leq C 2^{(k-j)p(\alpha_1 - (\frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}))} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{njp}{r}} \|v_j \mid L_r(Q_{j,\tilde{m}}^n)\|^p. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

Выберем $\mu \leq \min\{1, \theta, q\}$. Поскольку $\alpha_1 > \frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}$ по условию леммы, пользуясь неравенством Харди, из (4.32), (4.33) будем иметь

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} R_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{njp}{r}} \|v_j \mid L_r(Q_{j,m}^n)\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.34}$$

Из (4.30) и (4.34) получаем требуемую оценку для первого слагаемого в левой части (4.27).

Оценим второе слагаемое в левой части (4.28). Аналогично (4.29) получим $\|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\| \leq CK_{1,m}$. Отсюда и из (4.31) легко вытекает оценка

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi \mid L_r(Q_{0,m}^n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{njp}{r}} \|v_j \mid L_r(Q_{j,m}^n)\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.35}$$

Теорема 4.3 доказана.

Пусть для $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ имеем $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^l$ в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, где

$$v_k^l(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^l(x) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Положим при $p, q, r \in (0, \infty]$ (с соответствующими модификациями в случае $p = \infty$ или $q = \infty$)

$$N_3(\varphi, l+1) := \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\beta_{k,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.36}$$

где нижняя грань в (4.36) взята по всем сходящимся в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ к функции φ рядам $\sum_{k=0}^{\infty} v_k^l$.

Для $\varphi \in L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ положим также (с соответствующими модификациями в случае $p = \infty$ или $q = \infty$)

$$N_4(\varphi, l+1) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\alpha_{k,m}(T_k^l(\varphi, r))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Следующее утверждение обобщает теорему 5.1 работы [16] на случай пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4 (атомарное разложение). Пусть $p, q, r \in (0, \infty]$, и пусть $\theta \in (0, \min\{r, p\}]$. Пусть p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ при $\alpha_1 > n(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{r})$, $l > \alpha_2$, $\sigma_1 = \theta p'_\theta$, $\sigma_2 = p$, кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p -ассоциирована с весовой последовательностью $\{t_k\}$. Тогда:

1) каждая функция $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ может быть разложена в сходящийся в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ряд из сплайнов $N_{k,m}^l$, т.е.

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^l(\varphi) \quad \text{в смысле } L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad (4.37)$$

$$\text{где } v_k^l(\varphi)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^l(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n$$

и для некоторой константы $C > 0$ справедливо неравенство

$$N_3(\varphi, l+1) \leq N_4(\varphi, l+1) \leq C \|\varphi\| \|\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|;$$

2) если для некоторой кратной последовательности $\{\beta_{k,m}\}$ справедливо

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\beta_{k,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^l$ сходится в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\|\varphi\| \|\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \leq C_1 N_3(\varphi, l+1) \leq C_2 N_4(\varphi, l+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 5.1 и следствия 5.3 в [16], нужно лишь применить в соответствующих местах теорему 4.3, следствие 4.2, лемму 4.2 и очевидную оценку

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}^n \cap \text{supp } N_{k,\tilde{m}}^{l-1} \neq \emptyset}} |\beta_{k,\tilde{m}}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}^n \cap \text{supp } N_{k,\tilde{m}}^{l-1} \neq \emptyset}} |\beta_{k,\tilde{m}}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}^n \cap \text{supp } N_{k,\tilde{m}}^{l-1} \neq \emptyset}} |\beta_{k,\tilde{m}}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

с соответствующими модификациями (4.38) в случаях $p = \infty$ или $r = \infty$. Константа C в (4.38) зависит только от n, l, p, r .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. При выполнении условий следствия 4.4 и $p, q \in (0, \infty)$ множество Σ^l плотно в пространстве $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Действительно, пусть $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, тогда в силу следствия 4.4

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^l \quad \text{в смысле } L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

и справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\beta_{k,m}(\varphi)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2N_3(\varphi, l+1) \leq C \|\varphi\| \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}).$$

Отсюда, положив

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^l,$$

получим в силу п. 2) следствия 4.4

$$\|\varphi_n - \varphi\| \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \leq C \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\beta_{k,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Пусть $p \in (1, \infty)$. Покажем, что можно выбрать параметры $r \in (1, p)$, α_3 , α , σ и весовую последовательность $\{\gamma_k^2\} \in \tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ так, что выполняются все условия следствия 4.4. При этом $\{\gamma_k^2\} \in Y_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{\alpha_3}$ при некотором $\alpha'_1 < 0$, но $\{\gamma_k^2\} \notin Y_{\alpha'_1, \alpha'_2}^{\alpha_3}$ ни при каком $\alpha''_1 \geq 0$.

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0, p-1)$ – достаточно малое число, которое будет выбрано позже. Положим

$$(\gamma^2)^p(x_1, \dots, x_{n+1}) := \prod_{i=1}^{n+1} |x_i|^{p-1-\varepsilon}.$$

Заметим, что $(\gamma^2)^p \in A_{p/\theta}(\mathbb{R}^{n+1})$ при некотором $\theta \in (1, p)$. Рассмотрим при $l \in \mathbb{N}$ кратную последовательность

$$(\gamma_{k,m}^2)^p := 2^{klp} \iint_{\Xi_{k,m}^{1,n}} (\gamma^2)^p(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1}$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Пусть

$$(\gamma_k^2)^p(x) = 2^{nk} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\tilde{Q}_{k,m}^n}(x) (\gamma_{k,m}^2)^p \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma_{k+1}^2)^p(0)}{(\gamma_k^2)^p(0)} &= 2^{pl+n} \frac{\iint_{\Xi_{k+1,0}^{1,n}} (\gamma^2)^p(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} dx_{n+1}}{\iint_{\Xi_{k,0}^{1,n}} (\gamma^2)^p(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1}} \\ &= C(p) 2^{pl+n-(p-\varepsilon)(n+1)}. \end{aligned}$$

Если $p > n$, $l \leq n$, то, как нетрудно видеть, $\sup\{\alpha_1 \mid \{\gamma_k^2\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}\} < 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. С другой стороны, из примера 2.1 легко следует, что весовая последовательность $\{\gamma_k^2\} \in \tilde{X}_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ при $\sigma_1 = p \frac{p_0}{p_0}$ ($p_0 = \frac{p}{\theta}$), $\sigma_2 = p$, $\alpha_1 = l + \frac{n}{p} + \frac{n}{\sigma_1} - \frac{(n+1)p_0}{p} = l - \frac{1}{\theta} > 0$ (поскольку в нашем случае $d = 1$, $p_0 = \frac{p}{\theta}$, $\theta > 1$) $\alpha_2 = l - \frac{\delta_1(\gamma^2, n, 1)}{p} < l$. Следовательно, выполнены все условия следствия 4.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $p \neq \infty$, $r \in (0, p]$, $\gamma^p \in A_{p/r}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$. Положим

$$t_{k,m} = 2^{ks} \int_{Q_{k,m}^n} \gamma^p(x) dx$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Рассуждая, как в примере 2.1, заключаем, что последовательность $\{t_{k,m}\}$ удовлетворяет условиям следствия 4.4. Следовательно, в силу теоремы 2.5 мы получаем теорему об атомарном разложении весового пространства Бесова $\tilde{B}_{p,q,r}^s(\mathbb{R}^n, \gamma) = \overline{B}_{p,q,r}^s(\mathbb{R}^n, \gamma)$ как частный случай следствия 4.4. Задачи об атомарном разложении пространств $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \gamma)$ (и их обобщений) изучались в работах [13], [17] другими методами (см. также имеющиеся в этих работах ссылки).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.5.

Шаг 1. Установим вложение

$$\overline{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

при любом $0 < r \leq \frac{p}{p_0}$. В силу определения класса $A_{p_0}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и условия $r \leq \frac{p}{p_0}$ имеем $\gamma \in A_{p/r}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, пользуясь неравенством Гёльдера и свойствами последовательности $\{s_k\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma^p(x) s_k^p(x) \left[\delta_r^l \left(x + \frac{I^n}{2^k} \right) \varphi \right]^p dx &\leq C_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_{k,m}^n} \gamma^p(x) s_k^p(x) [\delta_r^l(Q_{k,m}^n) \varphi]^p dx \\ &\leq C_2 \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_{k,m}^n} \gamma^p(x) s_k^p(x) \left(\int_{Q_{k,m}^n} 2^{2kn} \frac{\gamma^r(y)}{\gamma^r(y)} \int_{I^n/2^k} |\Delta^l(h) \varphi(y)|^r dh dy \right)^{\frac{p}{r}} dx \\ &\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^n} t_k^p(y) [\bar{\Delta}_r^l(2^{-k}) \varphi(y)]^p dy. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Оценка (4.39) дает искомое вложение.

Шаг 2. Используя рассуждения примера 2.1, заключаем, что последовательность $\{t_k\}$ удовлетворяет условиям следствия 4.4 при $0 < r \leq \frac{p}{p_0}$. Поэтому имеем

$$\tilde{B}_{p,q,r_1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \tilde{B}_{p,q,r_2}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

с эквивалентностью норм при $0 < r_1 \leq r_2 \leq \frac{p}{p_0}$. Следовательно, теорема будет доказана, если при любом $0 < r \leq \frac{p}{p_0}$ мы установим вложение

$$\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \overline{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}).$$

Пусть

$$\bar{t}_k^p(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\tilde{Q}_{k,m}^n}(x) 2^{kn} \|t_k\|_{L_p(Q_{k,m}^n)}^p := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\tilde{Q}_{k,m}^n}(x) 2^{kn} t_{k,m}$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, тогда в силу следствия 4.4 будем иметь $\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^l(\varphi)$ в смысле $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, где $v_j^l(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{j,m} N_{j,m}^l(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Положим $\varphi_{1,k} := \sum_{i=0}^k v_i^l$, $\varphi_{2,k} := \varphi - \varphi_1$. Очевидно, при $k \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \|t_k \bar{\Delta}_r^l(2^{-k})\varphi \mid L_p(\mathbb{R}^n)\| &\leq \|t_k \bar{\Delta}_r^l(2^{-k})\varphi_{1,k} \mid L_p(\mathbb{R}^n)\| \\ &+ \|t_k \bar{\Delta}_r^l(2^{-k})\varphi_{2,k} \mid L_p(\mathbb{R}^n)\| =: S_{1,k} + S_{2,k}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4.1, и используя пример 2.1 и оценку (4.38), получаем при $\mu \leq \min\{1, r, q\}$

$$\begin{aligned} S_{1,k} &\leq C \left(\sum_{j=0}^k 2^{(l-\alpha_2)p(j-k)} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{jnp}{r}} \|v_j^l \mid L_r(Q_{j,m}^n)\|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^k 2^{(l-\alpha_2)p(j-k)} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p |\beta_{j,m}|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Для оценки $S_{2,k}$ заметим вначале, что

$$\begin{aligned} [\bar{\Delta}_r^l(2^{-k})v_j^l(x)]^p &\leq C \left(|v_j^l(x)|^r + \sum_{i=1}^l \left(2^{kn} \int_{I^{n/2^k}} |v_j^l(x+ih)|^r dh \right) \right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq \left(|v_j^l(x)|^r + \int_{2^{(l+1)Q_{k,m}^n}} |v_j^l(y)|^r dy \right)^{\frac{p}{r}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Далее, пользуясь свойством 1) из (1.1), (1.4), свойством удвоения (локально) веса γ^p , а также свойствами функций $N_{k,m}^l$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma^p(x) s_k^p(x) |v_j^l(x)|^p dx &\leq C 2^{(k-j)p\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma^p(x) s_j^p(x) |v_j^l(x)|^p dx \\ &\leq C 2^{(k-j)p\alpha_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_{k,m}^n} \gamma^p(x) s_j^p(x) \left(\sum_{\substack{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ x \in \text{supp } N_{j,\tilde{m}}^l}} \beta_{j,\tilde{m}}^p \right) \\ &\leq C 2^{(k-j)p\alpha_1} \sum_{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^n} 2^{kn} \hat{\gamma}_{j,\tilde{m}}^p s_{j,\tilde{m}}^p |\beta_{j,\tilde{m}}|^p \leq C 2^{(k-j)p\alpha_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p |\beta_{j,m}|^p. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Используя пример 2.1, оценку (2.16), свойство 1) из (1.1), лемму 4.2, имеем при $j \geq k$

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_{k,m}^n} t_k^p(x) 2^{\frac{knp}{r}} \|v_j^l \mid L_r(2(1+l)Q_{k,m}^n)\|^p dx \\ \leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|v_j^l \mid L_r(Q_{k,m}^n)\|^p \leq C 2^{(k-j)p\alpha_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{jnp}{r}} \|v_j^l \mid L_r(Q_{j,m}^n)\|^p \\ \leq C 2^{(k-j)p\alpha_1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p |\beta_{j,m}|^p. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Комбинируя оценки (4.41)–(4.44) и рассуждая, как при выводе (4.32), получим

$$S_{2,k} \leq C 2^{k\alpha_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\mu\alpha_1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p |\beta_{j,m}|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \right). \quad (4.45)$$

Подставляя оценки (4.41), (4.45) в (4.40) и, используя неравенство Харди, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|t_k \bar{\Delta}_r^l(2^{-k})\varphi \mid L_p(\mathbb{R}^n)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p |\beta_{j,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.46)$$

Оценка (4.46) в сочетании со следствием 4.4 завершает доказательство теоремы 2.5.

§ 5. Теоремы вложения для пространств $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$

Пусть $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел, и пусть $w = \{w_{j,m}\}_{j \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}^n}$ – кратная последовательность неотрицательных чисел.

Положим при $0 < p, q \leq \infty$ (с соответствующими модификациями в случае $p, q = \infty$)

$$\begin{aligned} l_q(\beta l_p(w)) &:= \{a = a_{j,m} : a_{j,m} \in \mathbb{R}, \|a \mid l_q(\beta l_p(w))\| < \infty\}, \\ \|a \mid l_q(\beta l_p(w))\| &= \left(\beta_j^q \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} w_{j,m}^p |a_{j,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ТЕОРЕМА 5.1 (см. [27]). Пусть $0 < p_i, q_i \leq \infty$ при $i = 1, 2$.

1) Пространство $l_q(\beta^1 l_p(w^1))$ непрерывно вкладывается в $l_q(\beta^2 l_p(w^2))$ в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_j^2}{\beta_j^1} \right)^{q^*} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{w_{j,m}^2}{w_{j,m}^1} \right)^{p^*} \right)^{\frac{q^*}{p^*}} &< \infty, \\ \text{где } \frac{1}{p^*} &:= \max \left\{ 0, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right\}, \quad \frac{1}{q^*} := \max \left\{ 0, \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

2) Пространство $l_q(\beta^1 l_p(w^1))$ компактно вкладывается в $l_q(\beta^2 l_p(w^2))$ в том и только в том случае, если выполнено условие (5.2) и, кроме того,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\beta_j^2}{\beta_j^1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{w_{j,m}^2}{w_{j,m}^1} \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = 0, \quad \text{если } q^* = \infty, \quad (5.3)$$

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{w_{j,m}^1}{w_{j,m}^2} = \infty \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}, \quad \text{если } p^* = \infty. \quad (5.4)$$

Непосредственно из теоремы 5.1 и следствия 4.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для $i = 1, 2$ пусть $0 < p^i, q^i, r^i \leq \infty$, $\theta^i \in (0, \min\{p^i, r^i\}]$, $p_{\theta^i}^i = \frac{p^i}{\theta^i}$. Пусть при $i = 1, 2$ p -допустимая весовая последовательность

$$\{t_k^i\} \in X_{\alpha^i, \sigma^i, p^i}^{\alpha^i}, \quad \alpha_1^i > n \left(\frac{1}{\theta^i} - \frac{1}{r^i} \right), \quad \sigma_1^i = r^i (p_{\theta^i}^i)', \quad \sigma_2^i = p^i, \quad l > \alpha_2^i.$$

Тогда:

1) пространство $\tilde{B}_{p_1, q_1, r_1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k^1\})$ непрерывно вкладывается в $\tilde{B}_{p_2, q_2, r_2}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k^2\})$, если

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{t_{j,m}^2}{t_{j,m}^1} \right)^{p^*} \right)^{\frac{q^*}{p^*}} < \infty, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{p^*} := \max \left\{ 0, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right\}, \quad \frac{1}{q^*} := \max \left\{ 0, \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} \right\};$$

2) пространство $\tilde{B}_{p_1, q_1, r_1}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k^1\})$ компактно вкладывается в $\tilde{B}_{p_2, q_2, r_2}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k^2\})$, если выполнено условие (5.5) и, кроме того,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{t_{j,m}^2}{t_{j,m}^1} \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = 0, \quad \text{если } q^* = \infty, \quad (5.6)$$

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{t_{j,m}^1}{t_{j,m}^2} = \infty \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}_0, \quad \text{если } p^* = \infty. \quad (5.7)$$

§ 6. Следы пространств $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ на плоскостях

В этом параграфе мы предполагаем, что $n \geq 2$. Зафиксируем до конца параграфа натуральное число $n' < n$ и положим $n'' := n - n'$. Точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $(x', x'') = (x'_1, \dots, x'_{n'}, x''_{n'+1}, \dots, x''_n)$ (аналогично $m := (m', m'')$ при $m \in \mathbb{Z}^n$). отождествим пространство $\mathbb{R}^{n'}$ с плоскостью, заданной в пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнением $x'' = 0$.

Пусть p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ и $\{t_{k,m}\}$ — p -ассоциированная с ней кратная последовательность. При $k \in \mathbb{N}_0$, $m' \in \mathbb{Z}^{n'}$ положим $t'_{k,m'} = t_{k, (m', 0)}$. Положим

$$t'_k(x') := 2^{\frac{kn'}{p}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n'}} \chi_{\tilde{Q}_{k,m'}}^{n'}(x') t'_{k,m'} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n'}.$$

Таким образом,

$$t'_k(x') = 2^{\frac{-kn''}{p}} t_k(x', 0) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n'}.$$

Для $p, r \in (0, \infty]$, $p \neq \infty$, $\theta \in (0, \min\{p, r\}]$ положим (как и в § 4) $p_\theta := \frac{p}{\theta}$. В этом параграфе нам будет удобно использовать обозначение $\bar{p}_\theta$ для сопряженного к p_θ показателя, т.е. $\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{\bar{p}_\theta} = 1$.

При определении следа пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ мы будем следовать идее, использованной в [9] (там рассматривался след пространства $B_{p(\cdot), q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n)$).

При $l \in \mathbb{N}$ положим $\Sigma^l := \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma_k^l$ (определение Σ_k^l см. в § 4). Очевидно, что $\Sigma^l \subset C(\mathbb{R}^n)$, поэтому для функции $f \in \Sigma^l \cap \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ имеет смысл понятие поточечного следа. То есть функция $\text{tr}|_{x''=0} f := f(x', 0)$ корректно определена.

Для того чтобы определить след произвольной функции $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, нам понадобится простое утверждение.

ЛЕММА 6.1. Пусть

$$p, q \in (0, \infty), \quad r \in (0, \infty], \quad \theta \in (0, \min\{r, p\}],$$

$$\alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_1 > n \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{r} \right), \quad l > \alpha_2, \quad \sigma_1 = \theta \overline{p\theta}, \quad \sigma_2 = p$$

и p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$. Пусть при некоторых

$$l' \geq l, \quad r' \in (0, \infty], \quad \theta' \in (0, \min\{r', p\}],$$

$$\alpha'_3 \geq 0, \quad \alpha'_1 > n \left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{r'} \right), \quad l' > \alpha'_2, \quad \sigma'_1 = \theta' \overline{p\theta'}, \quad \sigma'_2 = p, \quad \{t'_k\} \in X_{\alpha', \sigma', p}^{\alpha'_3}$$

для любой функции $f \in \Sigma^l \cap \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ справедлива оценка

$$\|f(\cdot, 0) | \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})\| \leq C \|f | \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|$$

с константой $C > 0$, не зависящей от функции f . Тогда для любой функции $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ существует единственная с точностью до множества n' -мерной лебеговой меры нуль функция $\varphi' \in \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$ такая, что если для некоторой последовательности $\{\varphi_j\} \in \Sigma^l \cap \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ имеем

$$\|\varphi - \varphi_j | \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

то

$$\|\varphi' - \varphi_j(\cdot, 0) | \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})\| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty$$

и справедливо неравенство

$$\|\varphi' | \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})\| \leq C \|\varphi | \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|.$$

Доказательство этой леммы повторяет соответствующие рассуждения из пункта 2.2 работы [9], если воспользоваться теоремой 2.4 и замечанием 4.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть выполнены все условия леммы 6.1 и $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Функцию φ' , построенную в лемме 6.1, будем называть следом функции φ и обозначать $\text{tr}|_{x''=0}\varphi$. Под следом пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ на плоскости, заданной в пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнением $x'' = 0$, будем понимать линейное пространство классов эквивалентных функций $\varphi' \in \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$, каждая из которых является следом некоторой функции $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Полученное линейное пространство обозначим через $\text{Tr}|_{x''=0}\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и введем в нем норму по формуле

$$\|\varphi' | \text{Tr}|_{x''=0}\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| := \inf_{\varphi' = \text{tr}|_{x''=0}\varphi} \|\varphi | \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|.$$

В дальнейшем при выполнении условий леммы 6.1 через Tr мы будем также обозначать линейный оператор

$$\text{Tr}: \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\}),$$

действующий по правилу

$$\mathrm{Tr}[\varphi](x') = \mathrm{tr}|_{x''=0}\varphi(x') \quad \text{при } x' \in \mathbb{R}^{n'}.$$

Напомним, что в § 4 для $k \in \mathbb{N}_0$, $m = (m', m'') \in \mathbb{Z}^n$ мы положили

$$N_{k,m}^l(x) := \prod_{i=1}^n N^l\left(2^k\left(x_i - \frac{m_i}{2^k}\right)\right) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n,$$

поэтому

$$N_{k,m}^l(x) := N_{k,m'}^l(x') N_{k,m''}^l(x'') \quad \text{при } x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что для любых индексов $k \in \mathbb{N}_0$, $m' \in \mathbb{Z}^{n'}$ имеем

$$N_{k,m'}^l(x') = \sum_{m'' \in \mathbb{Z}^{n''}} N_{k,(m',m'')}^l(x', 0) \quad \text{при } x' \in \mathbb{R}^{n'}. \quad (6.1)$$

Число слагаемых в правой части (6.1) в действительности конечно и ограничено некоторым числом, не зависящим от m' и x' . Это следует из того, что сплайны $N_{k,m}^l$ образуют разбиение единицы и кратность пересечения носителей сплайнов $N_{k,m}^l$ конечна (и не зависит от m).

Следствие 4.4 позволяет получить необходимые и достаточные условия на след пространства $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть

$$p, q \in (0, \infty), \quad r \in (0, \infty], \quad \theta \in (0, \min\{r, p\}],$$

$$\alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_1 > n\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{r}\right), \quad l > \alpha_2, \quad \sigma_1 = \theta \overline{p\theta}, \quad \sigma_2 = p$$

и p -допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in X_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$ такова, что весовая последовательность $\{t'_k\} \in \tilde{X}_{\alpha',\sigma',p}^{\alpha_3}$ при

$$l' \geq l, \quad r' \in (0, \infty], \quad \theta' \in (0, \min\{r', p\}],$$

$$\alpha'_3 \geq 0, \quad \alpha'_1 > n\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{r}\right), \quad \alpha'_2 < l', \quad \sigma'_1 = \theta' \overline{p\theta'}, \quad \sigma'_2 = p.$$

Тогда оператор

$$\mathrm{Tr}: \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$$

ограничен и существует (вообще говоря, нелинейный) ограниченный оператор

$$\mathrm{Ext}: \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\}) \rightarrow \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

такой, что $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{Ext} = \mathrm{Id}$ на пространстве $\tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$. В частности,

$$\mathrm{Tr}|_{x''=0} \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$$

с эквивалентностью соответствующих норм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что выполнение условий теоремы 6.1 гарантирует возможность применения следствий 4.3 и 4.4 к пространствам $\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и $\tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$.

Далее доказательство естественным образом распадается на две части.

1. Пусть $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \cap \Sigma^l$. Тогда $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^{l'}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \cap \Sigma^l$ в силу следствия 4.3 и соответствующие нормы эквивалентны. Имеем в силу следствия 4.4

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^{l'}(\varphi) \quad \text{в смысле } L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad (6.2)$$

где $v_k^{l'}(\varphi)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^{l'}(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n.$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\alpha_{k,m}(\varphi)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \|\varphi\| \|\tilde{B}_{p,q,r}^{l'}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \\ &\leq C \|\varphi\| \|\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Положим

$$\alpha'_{k,m'} := \sum_{m'' \in \mathbb{Z}^{n''}} \alpha_{k,(m',m'')}(\varphi) N_{k,m''}^l(0) \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m' \in \mathbb{Z}^{n'}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_k^{l'}(x') &:= \text{tr}|_{x''=0} v_k^{l'}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^{l'}(x', 0) \\ &= \sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n'}} \alpha'_{k,m'} N_{k,m'}^{l'}(x') \quad \text{при } x' \in \mathbb{R}^{n'}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Заметим, что в силу (2.16) и (6.2) будем иметь

$$|\alpha'_{k,m'}| t'_{k,m'} \leq C \sum_{\substack{m'' \in \mathbb{Z}^{n''} \\ \text{supp } N_{k,m}^l \cap \mathbb{R}^{n'} \neq \emptyset}} |\alpha_{k,(m',m'')}(\varphi)| t_{k,(m',m'')} \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_0, \quad m' \in \mathbb{Z}^{n'}. \quad (6.5)$$

Отсюда очевидно имеем оценку

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n'}} t_{k,m'}^p |\alpha'_{k,m'}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\alpha_{k,m}(\varphi)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6.6)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от функции φ .

Из (6.3), (6.6) в силу следствия 4.4 получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^N v_k^{l'}(\cdot, 0) \mid \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_{k,m'}\}) \right\| &\leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n'}} t_{k,m'}^p |\alpha'_{k,m'}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \|\varphi\| \|\tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из (6.7) и леммы 6.1 вытекает существование следа φ' функции φ на плоскости $x'' = 0$ и оценка

$$\|\varphi' \mid \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})\| \leq C \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \quad (6.8)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от функции φ . Тем самым установлена ограниченность оператора следа

$$\text{Tr}: \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\}).$$

2. Пусть $\varphi' \in \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$. В силу условий теоремы и следствия 4.4 имеем

$$\begin{aligned} \varphi' &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k^{l'}(\varphi') \quad \text{в смысле } L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n'}), \\ \text{где } v_k^{l'}(\varphi')(x') &= \sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n'}} \alpha'_{k,m'}(\varphi) N_{k,m'}^{l'}(x') \quad \text{при } x' \in \mathbb{R}^{n'}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{k,m} &= \alpha'_{k,m'} \quad \text{при } m' \in \mathbb{Z}^{n'}, \quad m'' \in \mathbb{Z}^{n''}, \quad N_{k,m''}^{l'}(0) \neq 0, \\ \alpha_{k,(m',m'')} &= 0 \quad \text{при } m' \in \mathbb{Z}^{n'}, \quad m'' \in \mathbb{Z}^{n''}, \quad N_{k,m''}^{l'}(0) = 0, \\ v_k^{l'}(x) &:= \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n'}} \alpha_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^{l'}(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отсюда, пользуясь следствиями 4.3, 4.4, нетрудно показать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k^{l'}$ сходится в $L_r^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \leq C_1 \|\varphi \mid \tilde{B}_{p,q,r}^{l'}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \leq C_2 \|\varphi' \mid \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})\| \quad (6.11)$$

с константами $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от функции φ' .

Положим $\text{Ext}[\varphi'] := \varphi$ при $\varphi' \in \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$. Тогда в силу (6.11) оператор

$$\text{Ext}: \tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\}) \rightarrow \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

ограничен. Непосредственно из построения функции φ следует, что

$$\varphi' = \text{tr} \mid_{x''=0} \varphi,$$

а значит, $\text{Tr} \circ \text{Ext} = \text{Id}$ на пространстве $\tilde{B}_{p,q,r'}^{l'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_k\})$.

Теорема 6.1 доказана.

Проиллюстрируем теорему 6.1 несколькими примерами.

ПРИМЕР 6.1. Пусть $p, q \in [1, \infty)$, $r \in [1, p]$, весовая последовательность $\{s_k\} \in {}^{\text{loc}}Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3} = \tilde{X}_{\alpha, \infty, p}^{\alpha_3}$ при $\alpha_1 > \frac{n''}{p}$, $l > \alpha_2$. Тогда

$$\text{Tr} \mid_{x''=0} \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{s_{k,m}\}) = \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^{n'}, \{s'_{k,m'}\}). \quad (6.12)$$

Если же $\{s_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$, то при $\alpha_1 > \frac{n''}{p}$, $l > \alpha_2$, учитывая следствие 2.1, получим

$$\mathrm{Tr}|_{x''=0} B_{p,q}^{\{s_k\}}(\mathbb{R}^n) = B_{p,q}^{\{s'_k\}}(\mathbb{R}^{n'}). \quad (6.13)$$

Равенство (6.13) совпадает (в случае постоянных показателей $p, q \in [1, \infty)$) с результатом работы [9].

При $p, q \in [1, \infty)$, $r = p$, $s_k = 2^{ks}$, $\alpha > \frac{n''}{p}$, $l > s$ мы получаем классический результат О. В. Бесова (характеризация следа классического пространства Бесова на плоскости (см. [21; теоремы 1.1, 2.1, 2.2]).

ПРИМЕР 6.2. Пусть $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty)$, $r \in [1, p)$ и вес $\gamma \in A_{p/r}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$t_k(x') = \gamma_k(x') := 2^{k(s+\frac{n'}{p})} \sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n'}} \chi_{\tilde{Q}_{k,m'}^{n'}}(x') \|\gamma|_{L_p(\Sigma_{k,m}^{n'',n'})}\|$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $x' \in \mathbb{R}^{n'}$. Частным случаем теоремы 6.1 является характеристика следа весового пространства Бесова $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \gamma)$ на гиперплоскости. Действительно, в силу рассуждений примера 2.1 получим $\{\gamma_k\} \in X_{\alpha, \sigma, p}^{\alpha_3}$ при $\sigma_1 = r\overline{p}_r$, $\sigma_2 = p$, $\alpha_1 = \alpha_2 = s$. Отсюда с учетом замечания 2.9 при $s > \frac{1}{r}$, $l > s$ имеем

$$\mathrm{Tr}|_{x_n=0} B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \gamma) = \tilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^{n-1}, \{\gamma_k\}). \quad (6.14)$$

Интересно отметить, что это утверждение является новым и не могло быть получено известными ранее методами атомарного разложения. Действительно, количество нулевых моментов, которые должны были иметь атомы из разложения следа, контролировалось показателем α_1 , в случае если $\{\gamma_k\} \in Y_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_3}$. Условие на момент проверять не нужно, если $\alpha_1 > 0$. В существенно менее общей форме аналог (6.14) получен в [11]. В указанной работе рассмотрена модельная ситуация веса, зависящего лишь от расстояния до начала координат. Точнее, $\gamma^p(x) = |x|^\alpha$ в малой окрестности начала координат при $-n+1 < \alpha < (n-1)(p-1)$. Выбор такого веса позволил авторам избежать проверки равенства нулю моментов у соответствующих атомов из разложения следа.

Анализ основных теорем, полученных в этой работе, показывает, что разности δ_r^l являются наиболее естественной заменой разностей $\bar{\Delta}_r^l$ и Δ^l для определения весовых пространств Бесова (с достаточно сложным весом) и пространств Бесова переменной гладкости. Показатель r оказывается тесно связанным с показателями α_1 , σ_1 .

Выражаясь неформально, можно сказать, что чем хуже в интегральном смысле ведет себя переменная гладкость $\{t_k\}$ (т.е. показатели α_1 , σ_1 малы), тем меньший показатель r следует брать в разностях δ_r^l , чтобы получить содержательные свойства соответствующих пространств Бесова переменной гладкости. Важно отметить, что эта идея по сути содержится в работе [13].

Отметим однако, что методы [13] позволяют изучать весовые пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля с весом из класса Макенхаупта, но не позволяют охватить случай пространств переменной гладкости.

Автор выражает благодарность профессору М. Л. Гольдману за ценные замечания и полезные обсуждения полученных в работе результатов, а также семинару О. В. Бесова по пространствам дифференцируемых функций многих действительных переменных.

Список литературы

- [1] А. И. Тюленев, “Описание следов функций из пространства Соболева с весом из класса Макенхаупта”, *Функциональные пространства и смежные вопросы анализа*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **284**, МАИК, М., 2014, 288–303; англ. пер.: A. I. Tyulenev, “Description of traces of functions in the Sobolev space with a Muckenhoupt weight”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **284** (2014), 280–295.
- [2] О. В. Бесов, “Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 17*, Сборник статей, Тр. МИАН, **214**, Наука, М., 1997, 25–58; англ. пер.: O. V. Besov, “Embeddings of spaces of differentiable functions of variable smoothness”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **214** (1996), 19–53.
- [3] О. В. Бесов, “Эквивалентные нормировки пространств функций переменной гладкости”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 87–95; англ. пер.: O. V. Besov, “Equivalent normings of spaces of functions of variable smoothness”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **243** (2003), 80–88.
- [4] О. В. Бесов, “Интерполяция, вложение и продолжение пространств функций переменной гладкости”, *Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **248**, Наука, М., 2005, 52–63; англ. пер.: O. V. Besov, “Interpolation, embedding, and extension of spaces of functions of variable smoothness”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **248** (2005), 47–58.
- [5] H. Kempka, J. Vybiral, “Spaces of variable smoothness and integrability: characterizations by local means and ball means of differences”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **18**:4 (2012), 852–891.
- [6] H. Kempka, *Generalized 2-microlocal Besov spaces*, Dissertation (Dr. rer. nat.), Friedrich-Schiller-Universität, Jena, 2008, 93 pp.
- [7] H. Kempka, “Atomic, molecular and wavelet decomposition of generalized 2-microlocal Besov spaces”, *J. Funct. Spaces Appl.*, **8**:2 (2010), 129–165.
- [8] Y. Liang, D. Yang, W. Yuan, Y. Sawano, T. Ullrich, *A new framework for generalized Besov-type and Triebel–Lizorkin-type spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **489**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2013, 114 pp.
- [9] S. D. Moura, J. S. Neves, C. Schneider, “On trace spaces of 2-microlocal Besov spaces with variable integrability”, *Math. Nachr.*, **286**:11–12 (2013), 1240–1254.
- [10] H. Rauhut, T. Ullrich, “Generalized coorbit space theory and inhomogeneous function spaces of Besov–Lizorkin–Triebel type”, *J. Funct. Anal.*, **260**:11 (2011), 3299–3362.
- [11] D. Haroske, H.-J. Schmeisser, “On trace spaces of function spaces with a radial weight: the atomic approach”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:8–10 (2010), 875–896.
- [12] V. S. Rychkov, “Littlewood–Paley theory and function spaces with A_p^{loc} -weights”, *Math. Nachr.*, **224**:1 (2001), 145–180.
- [13] L. I. Hedberg, Y. Netrusov, *An axiomatic approach to function spaces, spectral synthesis, and Luzin approximation*, Mem. Amer. Math. Soc., **188**, no. 882, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, vi+97 pp.

- [14] О. В. Бесов, “О пространствах функций нулевой гладкости”, *Матем. сб.*, **203**:8 (2012), 3–16; англ. пер.: O. V. Besov, “On spaces of functions of smoothness zero”, *Sb. Math.*, **203**:8 (2012), 1077–1090.
- [15] О. В. Бесов, “К теореме вложения Соболева для предельного показателя”, *Функциональные пространства и смежные вопросы анализа*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **284**, МАИК, М., 2014, 89–104; англ. пер.: O. V. Besov, “To the Sobolev embedding theorem for the limiting exponent”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **284** (2014), 81–96.
- [16] R. A. DeVore, V. A. Popov, “Interpolation of Besov spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **305**:1 (1988), 397–414.
- [17] M. Izuki, Y. Sawano, “Atomic decomposition for weighted Besov and Triebel–Lizorkin spaces”, *Math. Nachr.*, **285**:1 (2012), 103–126.
- [18] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993, xiv+695 pp.
- [19] Ю. А. Брудный, “Пространства, определяемые с помощью локальных приближений”, Тр. ММО, **24**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1971, 69–132; англ. пер.: Yu. A. Brudnyi, “Spaces defined by means of local approximations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **24**(1971), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, 73–139.
- [20] Э. А. Стороженко, П. Освальд, “Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:4 (1978), 888–901; англ. пер.: P. Oswald, E. A. Storozhenko, “Jackson’s theorem in the spaces $L_p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ ”, *Siberian Math. J.*, **19**:4 (1978), 630–640.
- [21] О. В. Бесов, “Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения”, Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **60**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 42–81; англ. пер.: O. V. Besov, “Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **40**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964, 85–126.
- [22] V. I. Burenkov, *Sobolev spaces on domains*, Teubner-Texte Math., **137**, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1998, 312 pp.
- [23] К. де Бор, *Практическое руководство по сплайнам*, Радио и связь, М., 1985, 304 с.; пер. с англ.: C. de Boor, *A practical guide to splines*, Appl. Math. Sci., **27**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978, xxiv+392 pp.
- [24] H. B. Curry, I. J. Schoenberg, “On Pólya frequency functions. IV. The fundamental spline functions and their limits”, *J. Analyse Math.*, 1966, № 1, 71–107.
- [25] C. de Boor, G. F. Fix, “Spline approximation by quasiinterpolants”, *J. Approximation Theory*, **8**:1 (1973), 19–45.
- [26] И. П. Иродова, “Диадические пространства Бесова”, *Алгебра и анализ*, **12**:3 (2000), 40–80; англ. пер.: I. P. Irodova, “Dyadic Besov spaces”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:3 (2001), 379–405.
- [27] T. Kühn, H.-G. Leopold, W. Sickel, L. Skrzypczak, “Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces. II”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **49**:2 (2006), 331–359.

Александр Иванович Тюленев
(A. I. Tyulenev)

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: tyulenev-math@yandex.ru

Поступила в редакцию
01.07.2014 и 23.12.2014