Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, О топологии устойчивых особенностей коранга 1 на крае связной компоненты дополнения к фронту, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 8, 91–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:20:04

УДК 515.16

В. Д. Седых

О топологии устойчивых особенностей коранга 1 на крае связной компоненты дополнения к фронту

В работе изучаются ограничения на расположение особенностей на границе связной компоненты дополнения к волновому фронту. Предполагается, что граница компоненты компактна, является краем многообразия, а фронт имеет в точках этого края только устойчивые особенности коранга 1. При этих предположениях указываются линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на крае данной компоненты. В частности, найдены все универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на краях эллиптических и гиперболических связных компонент дополнения к фронту.

Библиография 15 названий.

Введение

Рассмотрим волновой фронт общего положения в гладком (класса C^∞) многообразии (см. [1]). Это особая гиперповерхность, стратифицированная по классам особых точек. Особенности фронта удовлетворяют различным условиям существования (см., например, [2], [3]). Недавно (см. [4]) были обнаружены новые условия такого рода для фронтов, имеющих только устойчивые особенности коранга 1.

Настоящая работа развивает это направление. Теперь мы изучаем ограничения на расположение особенностей на границе связной компоненты дополнения к фронту. Предполагается, что граница компоненты компактна, является краем многообразия (а именно, краем замыкания компоненты), а фронт имеет в точках этого края только устойчивые особенности коранга 1. При этих предположениях мы указываем линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на крае данной компоненты.

В частности, найдены все универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на краях эллиптических и гиперболических связных компонент дополнения к фронту (компонента эллиптическая, если особенности фронта во всех точках ее края имеют только нечетные кратности; гиперболичность определена ниже). Они имеют следующий вид: эйлерова характеристика каждого нечетномерного многообразия особенностей на крае компоненты является линейной комбинацией эйлеровых характеристик четномерных многообразий особенностей большей коразмерности на крае той же компоненты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00655).

Универсальность этих комбинаций означает, что их коэффициенты зависят только от классов соответствующих особенностей и типа компоненты (эллиптическая или гиперболическая) и не зависят от того, какой фронт и в каком пространстве мы рассматриваем, какую эллиптическую (гиперболическую) компоненту его дополнения мы взяли. Других универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками указанных многообразий не существует.

Мы описываем простой комбинаторный алгоритм для вычисления всех этих соотношений. Он основан на конструкции [4], которая позволяет строить разрешения различных циклов особенностей фронта, имеющего лишь устойчивые особенности коранга 1.

А именно, мы сопоставляем любой особенности $\mathcal{A}$ фронта гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и гладкое конечное собственное отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ этого многообразия в пространство, объемлющее рассматриваемый фронт, такие, что

- 1) образом отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ является замыкание многообразия особенностей $\mathcal{A}$ фронта в этом пространстве;
- 2) если особенность X примыкает к особенности $\mathcal{A}$, то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием над многообразием особенностей X исходного фронта;
- 3) кратность этого накрытия зависит только от классов особенностей $\mathcal{A}$, X и легко вычисляется рекуррентно.

Для $\mathcal{A} = A_1$ (неособые точки фронта) пара $(\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}})$ является, по сути дела, обычной нормализацией бифуркационной диаграммы особенностей коранга 1 в терминах зеркал групп Вейля A_μ . В общем же случае кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над открытой частью цикла особенностей $\mathcal{A}$ может быть больше 1.

В настоящей статье указываются новые свойства конструкции [4]. В частности, точки многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$, которые переходят при отображении $\varphi_{\mathcal{A}}$ в особенности фронта, имеющие большую, чем у $\mathcal{A}$, коразмерность, образуют особую гиперповерхность. Мы получаем нормальные формы особенностей этой гиперповерхности относительно диффеоморфизмов многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$. Эти особенности устойчивы (относительно малых деформаций исходного фронта) и просты (не имеют модулей). Они приводимы и связаны с краевыми особенностями функций.

Часть полученных результатов (в эллиптическом случае) анонсирована в [5]. Автор благодарен В. И. Арнольду и М. Э. Казаряну за полезные обсуждения.

§1. Соотношения между эйлеровыми характеристиками

Пусть $\mathcal{F}$ – фронт общего положения в гладком n -мерном многообразии V . Это особая гиперповерхность, являющаяся образом (собственного) лежандрова отображения гладкого $(n-1)$ -мерного многообразия (основные определения и факты теории особенностей лежандровых отображений см. в [1]).

Лежандрово отображение называется *устойчивым лежандровым отображением коранга 1*, если оно (лежандрово) устойчиво и размерность ядра его 1-го дифференциала в каждой точке не превосходит 1. Фронт устойчивого лежандрова отображения коранга 1 называется *устойчивым фронтом коранга 1*. Фронт лежандрова отображения связного многообразия называется *неприводимым*.

Особенности устойчивых фронтов коранга 1, как и (мульти)особенности соответствующих лежандровых отображений, нумеруются элементами свободной абелевой полугруппы по сложению с образующими $A_1, A_2, \dots$. Особенности $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ фронта $\mathcal{F}$ определяются следующим образом.

Рассмотрим произвольное целое положительное $\mu \leq n$. Через $\Delta_\mu(n)$ обозначим гиперповерхность в $\mathbb{R}^n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})\}$, образованную точками, для которых многочлен

$$t^{\mu+1} + \lambda_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + \lambda_1t + \lambda_0 \quad (1)$$

от t имеет кратный вещественный корень.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Фронт $\mathcal{F}$ имеет *особенность* A_μ в точке $x \in \mathcal{F}$, если его росток $(\mathcal{F}, x)$ в этой точке диффеоморфен ростку в нуле гиперповерхности $\Delta_\mu(n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Точки фронта $\mathcal{F}$, в которых он имеет особенность A_μ , образуют гладкое подмногообразие $(A_\mu)_{\mathcal{F}}$ коразмерности μ в V . Это многообразие, вообще говоря, незамкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Фронт $\mathcal{F}$ имеет *особенность* $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ в точке x , если росток $(\mathcal{F}, x)$ состоит из m неприводимых компонент $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ с особенностями $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_m}$ в точке x , причем ростки многообразий $(A_{\mu_1})_{\mathcal{F}_1}, \dots, (A_{\mu_m})_{\mathcal{F}_m}$ пересекаются в этой точке трансверсально.

Ненулевые элементы указанной выше полугруппы называются *классами особенностей*. Нуль $\emptyset$ полугруппы мы будем использовать для обозначения дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к фронту $\mathcal{F}$.

ПРИМЕР 1.3. Фронт общего положения в трехмерном пространстве может иметь лишь следующие особенности: A_1 (неособая точка), $2A_1$ (трансверсальное пересечение двух гладких ветвей фронта), A_2 (ребро возврата), $3A_1$ (трансверсальное пересечение трех гладких ветвей фронта), $A_2 + A_1$ (трансверсальное пересечение ребра возврата с гладкой ветвью фронта) и A_3 (ласточкин хвост).

Особенности $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ любого фронта общего положения называются его *устойчивыми особенностями коранга 1*. Числа $\mu_1, \dots, \mu_m$ называются *кратностями* особенности $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$. Их сумма $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_m$ называется *коразмерностью* этой особенности. Число $\deg \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + m$ называется *степенью* особенности $\mathcal{A}$.

Коразмерность особенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Множество $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$ с данным (неупорядоченным) набором кратностей (т.е. множество точек фронта, в которых он имеет данную особенность) является гладким подмногообразием в V , коразмерность которого равна коразмерности особенности.

Пусть $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ — замыкание многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в многообразии V . Если множество $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ компактно и состоит только из устойчивых особенностей коранга 1, то его разбиение на связные компоненты многообразий этих особенностей является конечной C^∞ -стратификацией Уитни. Легко видеть, что эта стратификация минимальна среди всех C^∞ -стратификаций Уитни множества $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ (определение стратификации Уитни и ее свойства см., например, в [6]).

Рассмотрим связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к фронту $\mathcal{F}$. Компонента U называется *правильной*, если ее замыкание $\overline{U}$ в V является многообразием с краем $\overline{U} \setminus U$ (т.е. подмножество $\overline{U} \subset V$ в окрестности любой точки из $\overline{U} \setminus U$ гомеоморфно замкнутому полупространству в $\mathbb{R}^n$). Край замыкания правильной связной компоненты называется *краем* этой компоненты.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Дополнение к фронту может не иметь правильных связных компонент. Например, такой фронт дает стандартная иммерсия бутылки Клейна в $\mathbb{R}^3$ (все особенности этой поверхности исчерпываются двойными трансверсальными самопересечениями $2A_1$ вдоль гладко вложенной окружности).

Рассмотрим, в частности, связные компоненты дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$. Компонента, соответствующая многочленам (1), которые имеют $\mu+1$ попарно различных вещественных корней, называется *гиперболической*. Компонента, соответствующая многочленам с минимально возможным числом вещественных корней (т.е. с одним вещественным корнем, если μ четное, и без таковых, если μ нечетное), называется *обобщенно-эллиптической* (или просто *эллиптической* в случае нечетного μ).

Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$ имеет ровно две правильные связные компоненты, а именно гиперболическую и обобщенно-эллиптическую.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связные компоненты U_k дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$ нумеруются числом k вещественных корней многочлена (1). Если $1 < k < \mu$, то граница компоненты U_k содержит многочлен $P(t)$, который имеет $k-2$ простых вещественных корня и два различных вещественных корня t_1, t_2 кратности 2. В любой достаточно малой окрестности $O(P)$ этого многочлена (в пространстве многочленов вида (1)) найдутся многочлены $P_1(t)$ и $P_2(t)$ такие, что

$$P_1(t_1)P''(t_1) < 0, \quad P_1(t_2)P''(t_2) > 0, \quad P_2(t_1)P''(t_1) > 0, \quad P_2(t_2)P''(t_2) < 0.$$

Многочлены P_1, P_2 лежат в компоненте U_k , но их нельзя соединить непрерывной кривой в разности $O(P) \setminus \Delta_\mu(n)$. Предложение 1.5 доказано.

Зафиксируем произвольную правильную связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к фронту $\mathcal{F}$. Край этой компоненты обозначим через Γ . Особенности фронта $\mathcal{F}$ в точках гиперповерхности Γ называются *особенностями самой гиперповерхности* Γ .

Пусть гиперповерхность Γ имеет только устойчивые особенности коранга 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Предположим, что Γ имеет особенность A_μ в точке x . Тогда компонента U называется *гиперболической* (*обобщенно-эллиптической, эллиптической*) *в точке x* , если росток в x пары в V , образованной фронтом $\mathcal{F}$ и замыканием $\overline{U}$ области U , диффеоморфен ростку в нуле пары в $\mathbb{R}^n$, состоящей из фронта $\Delta_\mu(n)$ и замыкания гиперболической (обобщенно-эллиптической, эллиптической соответственно) связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Если $\mu = 1$, то компонента U является одновременно гиперболической и эллиптической в точке x .

Компонента U называется *гиперболической* (*обобщенно-эллиптической*, *эллиптической*), если каждая точка $x \in \Gamma$ обладает окрестностью $O(x) \subset V$, в которой множество $U \cap O(x)$ является пересечением гиперболических (обобщенно-эллиптических, эллиптических соответственно) связных компонент дополнения в $O(x)$ к неприводимым компонентам ростка $(\mathcal{F}, x)$. Нас будут интересовать в основном только гиперболические и эллиптические связные компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Компонента U является эллиптической тогда и только тогда, когда ее край Γ имеет особенности только с нечетными кратностями.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{A}_\mathcal{F} \cap \Gamma$ особенностей $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ гиперповерхности Γ . Оно является гладким подмногообразием в многообразии V . Связные компоненты этого многообразия являются связными компонентами многообразия $\mathcal{A}_\mathcal{F}$.

Обозначим через $\chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ эйлерову характеристику многообразия $\mathcal{A}_\Gamma$ (альтернированная сумма чисел Бетти групп гомологий с компактными носителями). Иногда, чтобы упростить громоздкие обозначения, мы будем опускать индекс Γ и писать $\chi(\mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть Γ – край правильной связной компоненты U дополнения к фронту $\mathcal{F}$ общего положения в гладком n -мерном многообразии V . Предположим, что гиперповерхность Γ компактна, фронт $\mathcal{F}$ имеет на Γ только устойчивые особенности коранга 1, а компонента U является либо гиперболической, либо эллиптической. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ такого, что многообразие $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности Γ имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ многообразия $\mathcal{A}_\Gamma$ является линейной комбинацией

$$\chi(\mathcal{A}_\Gamma) = \sum_X K_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_\Gamma) \quad (2)$$

эйлеровых характеристик четномерных многообразий X_Γ особенностей X гиперповерхности Γ , где $\text{codim } X > \text{codim } \mathcal{A}$. Эта комбинация универсальна в том смысле, что каждый ее коэффициент $K_{\mathcal{A}}(X)$ зависит только от классов особенностей $\mathcal{A}$, X и типа компоненты U (гиперболическая или эллиптическая) и не зависит от n , V , $\mathcal{F}$ и выбора компоненты U среди правильных связных компонент дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ данного типа.

2) Список формул (2) для особенностей $\mathcal{A}$ коразмерности $s \leq 6$ в случае гиперболической компоненты U приведен в таблице 1 для нечетного n (многооточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий особенностей нечетных коразмерностей, начиная с 9-й) и в таблице 2 для четного n (многооточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий особенностей четных коразмерностей, начиная с 8-й). Аналогичные формулы для эллиптической компоненты U см. в [5].

3) Если n нечетное, то эйлерова характеристика $\chi(\Gamma)$ гиперповерхности Γ является универсальной линейной комбинацией эйлеровых характеристик четномерных многообразий ее особенностей (коэффициенты этой комбинации не зависят от n , V , $\mathcal{F}$ и выбора компоненты U). А именно, в случае

гиперболической компоненты U

$$\begin{aligned}\chi(\Gamma) = & \chi(A_1) - \frac{1}{2}(\chi(3A_1) + \chi(A_2 + A_1) + \chi(A_3)) + \chi(5A_1) + \chi(A_2 + 3A_1) \\ & + \chi(2A_2 + A_1) + \chi(A_3 + 2A_1) + \chi(A_3 + A_2) + \chi(A_4 + A_1) + \chi(A_5) \\ & - \frac{1}{4}(17\chi(7A_1) + 17\chi(A_2 + 5A_1) + 17\chi(2A_2 + 3A_1) + 17\chi(3A_2 + A_1) \\ & + 17\chi(A_3 + 4A_1) + 15\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) + 15\chi(A_3 + 2A_2) \\ & + 13\chi(2A_3 + A_1) + 17\chi(A_4 + 3A_1) + 15\chi(A_4 + A_2 + A_1) + 16\chi(A_4 + A_3) \\ & + 17\chi(A_5 + 2A_1) + 17\chi(A_5 + A_2) + 15\chi(A_6 + A_1) + 17\chi(A_7)) + \dots\end{aligned}$$

(многоточие обозначает то же самое, что в таблице 1). Аналогичная формула для эллиптической компоненты U приведена в [5].

ТАБЛИЦА 1: n нечетное

$c = 2$	$\begin{aligned}8\chi(2A_1) = & 12\chi(3A_1) + 8\chi(A_2 + A_1) + 4\chi(A_3) - 20\chi(5A_1) - 18\chi(A_2 + 3A_1) \\ & - 16\chi(2A_2 + A_1) - 16\chi(A_3 + 2A_1) - 14\chi(A_3 + A_2) - 14\chi(A_4 + A_1) \\ & - 12\chi(A_5) + 84\chi(7A_1) + 80\chi(A_2 + 5A_1) + 76\chi(2A_2 + 3A_1) \\ & + 72\chi(3A_2 + A_1) + 76\chi(A_3 + 4A_1) + 66\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) \\ & + 62\chi(A_3 + 2A_2) + 56\chi(2A_3 + A_1) + 72\chi(A_4 + 3A_1) \\ & + 62\chi(A_4 + A_2 + A_1) + 61\chi(A_4 + A_3) + 68\chi(A_5 + 2A_1) \\ & + 64\chi(A_5 + A_2) + 58\chi(A_6 + A_1) + 60\chi(A_7) + \dots\end{aligned}$
	$\begin{aligned}8\chi(A_2) = & 4\chi(A_2 + A_1) + 8\chi(A_3) - 2\chi(A_2 + 3A_1) - 4\chi(2A_2 + A_1) \\ & - 4\chi(A_3 + 2A_1) - 6\chi(A_3 + A_2) - 6\chi(A_4 + A_1) - 8\chi(A_5) \\ & + 4\chi(A_2 + 5A_1) + 8\chi(2A_2 + 3A_1) + 12\chi(3A_2 + A_1) \\ & + 8\chi(A_3 + 4A_1) + 10\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) + 14\chi(A_3 + 2A_2) \\ & + 12\chi(2A_3 + A_1) + 12\chi(A_4 + 3A_1) + 14\chi(A_4 + A_2 + A_1) \\ & + 19\chi(A_4 + A_3) + 16\chi(A_5 + 2A_1) + 20\chi(A_5 + A_2) \\ & + 18\chi(A_6 + A_1) + 24\chi(A_7) + \dots\end{aligned}$
$c = 4$	$\begin{aligned}4\chi(4A_1) = & 10\chi(5A_1) + 4\chi(A_2 + 3A_1) + 2\chi(A_3 + 2A_1) - 35\chi(7A_1) \\ & - 25\chi(A_2 + 5A_1) - 16\chi(2A_2 + 3A_1) - 8\chi(3A_2 + A_1) - 19\chi(A_3 + 4A_1) \\ & - 11\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) - 4\chi(A_3 + 2A_2) - 7\chi(2A_3 + A_1) \\ & - 13\chi(A_4 + 3A_1) - 6\chi(A_4 + A_2 + A_1) - 3\chi(A_4 + A_3) \\ & - 8\chi(A_5 + 2A_1) - 2\chi(A_5 + A_2) - 4\chi(A_6 + A_1) - \chi(A_7) + \dots\end{aligned}$
	$\begin{aligned}4\chi(A_2 + 2A_1) = & 6\chi(A_2 + 3A_1) + 8\chi(2A_2 + A_1) + 4\chi(A_3 + 2A_1) \\ & + 2\chi(A_3 + A_2) + 4\chi(A_4 + A_1) - 10\chi(A_2 + 5A_1) \\ & - 18\chi(2A_2 + 3A_1) - 24\chi(3A_2 + A_1) - 12\chi(A_3 + 4A_1) \\ & - 16\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) - 20\chi(A_3 + 2A_2) - 12\chi(2A_3 + A_1) \\ & - 15\chi(A_4 + 3A_1) - 17\chi(A_4 + A_2 + A_1) - 14\chi(A_4 + A_3) \\ & - 16\chi(A_5 + 2A_1) - 18\chi(A_5 + A_2) - 13\chi(A_6 + A_1) - 12\chi(A_7) + \dots\end{aligned}$

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

$c = 4$	$4\chi(2A_2) = 2\chi(2A_2 + A_1) + 4\chi(A_3 + A_2) + 2\chi(A_5) - \chi(2A_2 + 3A_1) - 3\chi(3A_2 + A_1) - 2\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) - 5\chi(A_3 + 2A_2) - 4\chi(2A_3 + A_1) - 3\chi(A_4 + A_2 + A_1) - 6\chi(A_4 + A_3) - \chi(A_5 + 2A_1) - 5\chi(A_5 + A_2) - 3\chi(A_6 + A_1) - 6\chi(A_7) + \dots$
	$2\chi(A_3 + A_1) = 2\chi(A_3 + 2A_1) + 2\chi(A_3 + A_2) + 2\chi(A_4 + A_1) + 2\chi(A_5) - 2\chi(A_3 + 4A_1) - 2\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) - 2\chi(A_3 + 2A_2) - 4\chi(2A_3 + A_1) - 3\chi(A_4 + 3A_1) - 3\chi(A_4 + A_2 + A_1) - 5\chi(A_4 + A_3) - 4\chi(A_5 + A_2) - 4\chi(A_5 + 2A_1) - 5\chi(A_6 + A_1) - 6\chi(A_7) + \dots$
	$4\chi(A_4) = 2\chi(A_4 + A_1) + 4\chi(A_5) - \chi(A_4 + 3A_1) - \chi(A_4 + A_2 + A_1) - \chi(A_4 + A_3) - 2\chi(A_5 + 2A_1) - 2\chi(A_5 + A_2) - 3\chi(A_6 + A_1) - 4\chi(A_7) + \dots$
$c = 6$	$2\chi(6A_1) = 7\chi(7A_1) + 2\chi(A_2 + 5A_1) + \chi(A_3 + 4A_1) + \dots$
	$2\chi(A_2 + 4A_1) = 5\chi(A_2 + 5A_1) + 4\chi(2A_2 + 3A_1) + 2\chi(A_3 + 4A_1) + \chi(A_3 + A_2 + 2A_1) + 2\chi(A_4 + 3A_1) + \dots$
	$2\chi(2A_2 + 2A_1) = 3\chi(2A_2 + 3A_1) + 6\chi(3A_2 + A_1) + 2\chi(A_3 + A_2 + 2A_1) + \chi(A_3 + 2A_2) + 2\chi(A_4 + A_2 + A_1) + \chi(A_5 + 2A_1) + \dots$
	$2\chi(3A_2) = \chi(3A_2 + A_1) + 2\chi(A_3 + 2A_2) + \chi(A_5 + A_2) + \dots$
	$\chi(A_3 + 3A_1) = 2\chi(A_3 + 4A_1) + \chi(A_3 + A_2 + 2A_1) + \chi(2A_3 + A_1) + \chi(A_4 + 3A_1) + \chi(A_5 + 2A_1) + \dots$
	$\chi(A_3 + A_2 + A_1) = \chi(A_3 + A_2 + 2A_1) + 2\chi(A_3 + 2A_2) + 2\chi(2A_3 + A_1) + \chi(A_4 + A_2 + A_1) + \chi(A_4 + A_3) + \chi(A_5 + A_2) + \chi(A_6 + A_1) + \dots$
	$2\chi(2A_3) = \chi(2A_3 + A_1) + 2\chi(A_4 + A_3) + \chi(A_7) + \dots$
	$2\chi(A_4 + 2A_1) = 3\chi(A_4 + 3A_1) + 2\chi(A_4 + A_2 + A_1) + \chi(A_4 + A_3) + 2\chi(A_5 + 2A_1) + 2\chi(A_6 + A_1) + \dots$
	$2\chi(A_4 + A_2) = \chi(A_4 + A_2 + A_1) + 2\chi(A_4 + A_3) + 2\chi(A_5 + A_2) + 2\chi(A_7) + \dots$
	$\chi(A_5 + A_1) = \chi(A_5 + 2A_1) + \chi(A_5 + A_2) + \chi(A_6 + A_1) + \chi(A_7) + \dots$
	$2\chi(A_6) = 2\chi(A_7) + \chi(A_6 + A_1) + \dots$

Теорема 1.9 доказана в конце §3 (фактически указан простой комбинаторный алгоритм для вычисления всех соотношений (2) в любой размерности n).

ТАБЛИЦА 2: n четное

$c = 1$	$ \begin{aligned} 4\chi(A_1) &= 4\chi(2A_1) + 4\chi(A_2) - 4\chi(4A_1) - 4\chi(A_2 + 2A_1) - 4\chi(2A_2) \\ &- 4\chi(A_3 + A_1) - 4\chi(A_4) + 12\chi(6A_1) + 12\chi(A_2 + 4A_1) \\ &+ 12\chi(2A_2 + 2A_1) + 12\chi(3A_2) + 12\chi(A_3 + 3A_1) \\ &+ 11\chi(A_3 + A_2 + A_1) + 8\chi(2A_3) + 12\chi(A_4 + 2A_1) \\ &+ 10\chi(A_4 + A_2) + 12\chi(A_5 + A_1) + 10\chi(A_6) + \dots \end{aligned} $
$c = 3$	$ \begin{aligned} 4\chi(A_3) &= 2\chi(A_3 + A_1) + 4\chi(A_4) - \chi(A_3 + 3A_1) \\ &- \chi(A_3 + A_2 + A_1) - 2\chi(2A_3) - 2\chi(A_4 + 2A_1) \\ &- 2\chi(A_4 + A_2) - 3\chi(A_5 + A_1) - 4\chi(A_6) + \dots \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} 4\chi(A_2 + A_1) &= 4\chi(A_2 + 2A_1) + 8\chi(2A_2) + 4\chi(A_3 + A_1) + 4\chi(A_4) \\ &- 4\chi(A_2 + 4A_1) - 8\chi(2A_2 + 2A_1) - 12\chi(3A_2) - 6\chi(A_3 + 3A_1) \\ &- 9\chi(A_3 + A_2 + A_1) - 8\chi(2A_3) - 8\chi(A_4 + 2A_1) \\ &- 10\chi(A_4 + A_2) - 10\chi(A_5 + A_1) - 10\chi(A_6) + \dots \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} 4\chi(3A_1) &= 8\chi(4A_1) + 4\chi(A_2 + 2A_1) + 2\chi(A_3 + A_1) - 20\chi(6A_1) \\ &- 16\chi(A_2 + 4A_1) - 12\chi(2A_2 + 2A_1) - 8\chi(3A_2) - 13\chi(A_3 + 3A_1) \\ &- 9\chi(A_3 + A_2 + A_1) - 6\chi(2A_3) - 10\chi(A_4 + 2A_1) \\ &- 6\chi(A_4 + A_2) - 7\chi(A_5 + A_1) - 4\chi(A_6) + \dots \end{aligned} $
$c = 5$	$2\chi(A_5) = \chi(A_5 + A_1) + 2\chi(A_6) + \dots$
	$2\chi(A_3 + A_2) = \chi(A_3 + A_2 + A_1) + 4\chi(2A_3) + 2\chi(A_4 + A_2) + 2\chi(A_6) + \dots$
	$\chi(A_4 + A_1) = \chi(A_4 + 2A_1) + \chi(A_4 + A_2) + \chi(A_5 + A_1) + \chi(A_6) + \dots$
	$ \begin{aligned} 2\chi(2A_2 + A_1) &= 2\chi(2A_2 + 2A_1) + 6\chi(3A_2) + 2\chi(A_3 + A_2 + A_1) \\ &+ 2\chi(A_4 + A_2) + \chi(A_5 + A_1) + \dots \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} 2\chi(A_3 + 2A_1) &= 3\chi(A_3 + 3A_1) + 2\chi(A_3 + A_2 + A_1) + 2\chi(2A_3) \\ &+ 2\chi(A_4 + 2A_1) + 2\chi(A_5 + A_1) + \dots \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} 2\chi(A_2 + 3A_1) &= 4\chi(A_2 + 4A_1) + 4\chi(2A_2 + 2A_1) + 2\chi(A_3 + 3A_1) \\ &+ \chi(A_3 + A_2 + A_1) + 2\chi(A_4 + 2A_1) + \dots \end{aligned} $
	$2\chi(5A_1) = 6\chi(6A_1) + 2\chi(A_2 + 4A_1) + \chi(A_3 + 3A_1) + \dots$

В настоящей работе также доказано, что в условиях теоремы 1.9 не существует универсальных линейных соотношений (с вещественными коэффициентами) между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхности Γ , которые не были бы линейными комбинациями соотношений вида (2).

А именно, составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ всех (попарно не диффеоморфных) устойчивых особенностей коранга 1, которые могут быть у фронтов в гладком n -мерном многообразии и коразмерность которых сравнима с n по модулю 2 (многообразия таких особенностей имеют четную размерность). Через N_{odd} обозначим количество особенностей в списке $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$, которые имеют только нечетные кратности.

Рассмотрим произвольный неприводимый компактный устойчивый фронт $\mathcal{F}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ и произвольную ограниченную правильную связную компоненту дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}$. Краю Γ этой компоненты сопоставим вектор

$$v(\Gamma) = (\chi(\mathcal{A}_\Gamma^1), \dots, \chi(\mathcal{A}_\Gamma^N)) \in \mathbb{R}^N$$

из эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{A}_\Gamma^i)$ многообразий $\mathcal{A}_\Gamma^i$ особенностей $\mathcal{A}^i$, $i = 1, \dots, N$, гиперповерхности Γ .

Пусть $G_{\text{hyp}} (G_{\text{elp}})$ – подмножество в $\mathbb{R}^N$, образованное векторами $v(\Gamma)$ для всех фронтов $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ указанного типа и для всех гиперболических (эллиптических соответственно) ограниченных связных компонент их дополнений $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 1.10. *Если $n > 1$, то множество $G_{\text{hyp}} (G_{\text{elp}})$ содержит подгруппу с $N (N_{\text{odd}} \text{ соответственно})$ линейно независимыми образующими.*

При $n = 1$ граница любой связной компоненты дополнения к фронту состоит из одной или двух точек – особенностей A_1 .

Следует отметить, что эйлеровы характеристики многообразий особенностей границы связной компоненты дополнения к фронту ограничены также условиями типа неравенств, четности и т.п. Однако мы не знаем всех этих условий.

Доказательство теоремы 1.10 приведено в §9.

§ 2. Характеристические многообразия и отображения особенностей фронта

Доказательство теоремы 1.9 основано на разрешении особенностей устойчивого фронта коранга 1. Это разрешение было описано в работе [4]. Здесь приведены основные элементы этой конструкции.

Пусть V – гладкое n -мерное многообразие. Рассмотрим пространство PT^*V проективизации кокасательного расслоения многообразия V . Это пространство образовано *контактными элементами* (π, x) , где $x \in V$, а $\pi \subset T_x V$ – касательная гиперплоскость в точке x .

Пространство PT^*V является гладким $(2n - 1)$ -мерным многообразием и обладает естественной контактной структурой (см. [1]). Проекция $\rho: PT^*V \rightarrow V$ является лежандровым расслоением относительно этой структуры.

Пусть $\mathcal{F}$ – устойчивый фронт коранга 1 в многообразии V (можно взять даже произвольную гиперповерхность с особенностями типа $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$). Рассмотрим замыкание L подмножества в PT^*V , образованного контактными элементами на V , которые касаются фронта $\mathcal{F}$ в его гладких точках.

Множество L является гладким $(n - 1)$ -мерным лежандровым подмногообразием в пространстве PT^*V . Сужение проекции ρ на L является устойчивым лежандровым отображением $f: L \rightarrow V$ коранга 1. Гиперповерхность $\mathcal{F}$ является фронтом этого отображения.

ТЕОРЕМА 2.1 [4]. *Имеется конструкция, которая фронту $\mathcal{F}$ и всякой особенности $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ такой, что многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A}$*

фронта $\mathcal{F}$ непусто, сопоставляет гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и гладкое собственное отображение $\varphi_{\mathcal{A}}: \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$, обладающие следующими свойствами:

- 1) образом отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ является замыкание $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}} \subset V$ многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$;
- 2) если особенность $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ примыкает к особенности $\mathcal{A}$, т.е. $X_{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$, то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием над многообразием $X_{\mathcal{F}}$; кратность этого накрытия зависит только от классов особенностей $\mathcal{A}$, X и не зависит от n , V и $\mathcal{F}$.

Конструкция, о которой идет речь, описана ниже. Она называется *разрешением особенностей* устойчивого фронта коранга 1. Конструкция универсальна в том смысле, что она не зависит ни от фронта, ни от объемлющего его пространства (в том числе от размерности этого пространства).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$, получающиеся в результате разрешения особенности $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$, называются *характеристическими для этой особенности*. Кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над многообразием $X_{\mathcal{F}}$ особенностей X фронта $\mathcal{F}$ называется *индексом особенности X относительно особенности $\mathcal{A}$* и обозначается через $I_{\mathcal{A}}(X)$.

Характеристические многообразия и отображения особенностей фронта $\mathcal{F}$ строятся индуктивно. А именно, упорядочим произвольным образом набор кратностей $\mu_1, \dots, \mu_m$ особенности $\mathcal{A}$. Тогда отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является композицией гладких отображений

$$\Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}} \xrightarrow{\psi_m} \dots \xrightarrow{\psi_3} \Phi_{A_{\mu_1} + A_{\mu_2}} \xrightarrow{\psi_2} \Phi_{A_{\mu_1}} \xrightarrow{\psi_1} V.$$

Каждое отображение ψ_i является, в свою очередь, композицией гладких отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}} + A_{\mu_i}} &\xrightarrow{g_i^{\mu_i}} \dots \xrightarrow{g_i^3} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}} + A_2} \\ &\xrightarrow{g_i^2} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}} + A_1} \xrightarrow{f_i} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}}}, \end{aligned}$$

где f_i – устойчивое лежандрово отображение коранга 1, а g_i^j – вложение коразмерности 1 гладкого замыкания множества особенностей A_j отображения f_i .

В качестве $f_1: \Phi_{A_1} \rightarrow \Phi_{\emptyset}$ выступает исходное лежандрово отображение f , так что $\Phi_{A_1} = L$, $\Phi_{\emptyset} = V$, $\varphi_{A_1} = f$. Многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}} \subseteq \Phi_{A_1}$ – гладкое замыкание множества особенностей A_{μ_1} отображения f_1 . Лежандрово отображение $f_2: \Phi_{A_{\mu_1} + A_1} \rightarrow \Phi_{A_{\mu_1}}$ определяется следующим образом.

Пусть $\mathcal{F}^1$ – замыкание в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}}$ множества точек ξ таких, что фронт $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$ имеет в точке $f_1(\xi)$ особенность $A_{\mu_1} + A_1$. Если множество $\mathcal{F}^1$ непусто, то оно является устойчивым фронтом коранга 1 в $\Phi_{A_{\mu_1}}$ (см. [4]). Фронт $\mathcal{F}^1$ называется *A_{μ_1} -преобразованием фронта $\mathcal{F}^0$* и обозначается через $[A_{\mu_1}](\mathcal{F}^0)$.

По определению многообразие $\Phi_{A_{\mu_1} + A_1} \subset PT^*(\Phi_{A_{\mu_1}})$ является замыканием множества контактных элементов, касающихся фронта $\mathcal{F}^1$ в его гладких точках. Лежандровым отображением f_2 является сужение естественной проекции $PT^*(\Phi_{A_{\mu_1}}) \rightarrow \Phi_{A_{\mu_1}}$ на $\Phi_{A_{\mu_1} + A_1}$.

Многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}+\dots+A_{\mu_i}+A_1}$ и лежандрово отображение f_{i+1} , $i > 1$, строятся аналогично при помощи фронта

$$\mathcal{F}^i = [A_{\mu_i}](\mathcal{F}^{i-1}) \subset \Phi_{A_{\mu_1}+\dots+A_{\mu_i}}.$$

Фронт $\mathcal{F}^m$ называется $\mathcal{A}$ -преобразованием фронта $\mathcal{F}$ и обозначается $[\mathcal{A}](\mathcal{F})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Разрешение особенностей фронтов, описанное выше, обобщает принцип итерации Клеймана [7]. Этот принцип обычно используется в комплексных задачах при исследовании циклов кратных точек общих голоморфных отображений коранга 1 (см., например, [8] и [9]). Мы же изучаем циклы произвольных устойчивых мультиособенностей гладких (лежандровых) отображений коранга 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ диффеоморфно гладкому замыканию в $(L)^m = L \times \dots \times L$ (m раз) многообразия $L_{\mathcal{A}}$ наборов $((\pi_1, x_1), \dots, (\pi_m, x_m))$ контактных элементов на V таких, что $x_1 = \dots = x_m = x$, гиперплоскости $\pi_1, \dots, \pi_m$ пересекаются в точке x трансверсально, а отображение f имеет особенность A_{μ_i} в точке (π_i, x_i) , $i = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 1$ это хорошо известный факт (он уже использовался выше при построении вложений g_i^j). Предположим, что это утверждение верно при всех $m \leq m_0 - 1$, и докажем его для $m = m_0$. Для упрощения обозначений мы опустим индекс 0 у числа m_0 и положим $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{m-1}} = \tilde{\mathcal{A}}$.

Пусть Π – гладкое многообразие, образованное наборами $(\pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \tau, x)$ такими, что x – точка многообразия V , $\pi_1, \dots, \pi_{m-1}$ – гиперплоскости в касательном пространстве к V в точке x , а τ – подпространство коразмерности $\mu_1 + \dots + \mu_{m-1} + 1$ в $T_x V$. Тогда многообразие $PT^*(L_{\tilde{\mathcal{A}}})$ диффеоморфно подмногообразию в Π , образованному наборами $(\pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \tau, x)$ такими, что $x \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$, лежандрово отображение $f: L \rightarrow V$ имеет особенность A_{μ_i} в точке (π_i, x) , $i = 1, \dots, m-1$, а τ – гиперплоскость в касательном пространстве $T_x \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$ к многообразию $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$ в точке x .

Следовательно, многообразие $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) \subseteq \Phi_{\mathcal{A}}$ диффеоморфно подмногообразию в Π , образованному наборами $(\pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \tau, x)$ такими, что $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, $\tau = \pi_m \cap T_x \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$, лежандрово отображение $f: L \rightarrow V$ имеет особенность A_{μ_j} в точке (π_j, x) , $j = 1, \dots, m$, а $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=1}^{m-1} f(L, (\pi_i, x))$, где $f(L, (\pi_i, x))$ – фронт ростка многообразия L в точке (π_i, x) . Это подмногообразие, в свою очередь, диффеоморфно подмногообразию $L_{\mathcal{A}} \subset (L)^m$.

Остается лишь проверить, что построенный нами диффеоморфизм многообразий $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$ и $L_{\mathcal{A}}$ продолжается до диффеоморфизма многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ на гладкое замыкание подмногообразия $L_{\mathcal{A}}$ в многообразии $(L)^m$. Это сделано ниже в предложении 6.2 (утверждение 1)) путем непосредственных вычислений в локальных координатах. Предложение 2.4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Характеристические многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$, полученные при разных упорядочениях набора кратностей особенности $\mathcal{A}$, естественно диффеоморфны. А именно, если $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\varphi}_{\mathcal{A}}$ – характеристическое многообразие и характеристическое отображение особенности $\mathcal{A}$, соответствующие

другому упорядочению набора кратностей этой особенности, то существует диффеоморфизм $\phi: \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}} \\ \varphi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \tilde{\varphi}_{\mathcal{A}} \downarrow \\ V & \xrightarrow{\text{id}} & V \end{array}$$

коммутативна.

Это утверждение следует из предложения 2.4. Действие диффеоморфизма ϕ состоит в перестановке сомножителей в произведении $(L)^m$.

ТЕОРЕМА 2.6 [4]. Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ фронта $\mathcal{F}$ относительно особенности $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ вычисляется рекуррентно исходя из следующих условий:

- 1) если $\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\} > \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_p\}$, то $I_{\mathcal{A}}(X) = 0$;
- 2) если $\mu^* \leq \nu^*$, то

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{\nu_i = \mu^*, \mu^* + 1} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i}) + \sum_{\nu_i > \mu^* + 1} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i - \mu^* - 1}),$$

где $I_{\emptyset}(Y) = 1$ для любого Y .

Для особенностей $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ и $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ малых размерностей индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ можно быстро вычислить при помощи *дерева (упорядоченной) пары особенностей* $\mathcal{A} \vdash X$ в предположении, что $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$. Это ориентированное дерево, ребра которого снабжены целыми положительными весами. Вершины обозначаются классами особенностей устойчивых фронтов коранга 1 или символом $\emptyset$. Корнем является особенность X .

Ориентации ребер определяются ориентациями цепей, выходящих из X и заканчивающихся в конечных вершинах дерева. Длина любой такой цепи (т.е. количество ее ребер) не превосходит числа m неприводимых компонент особенности $\mathcal{A}$. Вершины, находящиеся на расстоянии $i \leq m$ от корня X , а также ребра, в них входящие (вместе с весами), определяются вершинами, удаленными от X на расстояние $i - 1$.

А именно, из вершины $\emptyset$ ребра не выходят. Чтобы перечислить ребра, выходящие из произвольной вершины $Y = A_{\varkappa_1} + \dots + A_{\varkappa_l}$, обозначим через $a_{\varkappa}$ количество индексов $j \in \{1, \dots, l\}$ таких, что $\varkappa_j = \varkappa$.

Пусть вершина Y находится на расстоянии $i - 1$ от корня X . Тогда:

- 1) если $a_{\mu_i} > 0$, то из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_{\mu_i}$, вес этого ребра равен a_{μ_i} ;
- 2) если $a_{\mu_i + 1} > 0$, то из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_{\mu_i + 1}$, его вес равен $a_{\mu_i + 1}$;
- 3) для любого натурального $\varkappa > \mu_i + 1$ такого, что $a_{\varkappa} > 0$, из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_{\varkappa} + A_{\varkappa - \mu_i - 1}$, его вес равен $a_{\varkappa}$.

Никакие другие ребра из вершины Y не выходят.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Индексом цепи дерева пары особенностей $\mathcal{A} \vdash X$ называется произведение весов ребер, составляющих эту цепь.

Из теоремы 2.6 очевидно следует

ТЕОРЕМА 2.8. Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности X относительно особенности $\mathcal{A}$ равен сумме индексов всех цепей дерева пары $\mathcal{A} \vdash X$, которые выходят из корня X и имеют длину, равную числу t неприводимых компонент особенности $\mathcal{A}$.

ПРИМЕР 2.9. На рис. 1 представлено дерево пары особенностей $(A_2 + 3A_1) \vdash (A_3 + A_2 + A_1)$. Вершины изображены прямоугольниками, ребра – стрелками, рядом с которыми написаны их веса. Дерево имеет две цепи длины 4, выходящие из корня $A_3 + A_2 + A_1$. Их индексы равны $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ и $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ соответственно. Поэтому

$$I_{A_2+3A_1}(A_3 + A_2 + A_1) = 1 + 2 = 3.$$

Рис. 1. Дерево пары особенностей $(A_2 + 3A_1) \vdash (A_3 + A_2 + A_1)$

ПРИМЕР 2.10. На рис. 2 представлено дерево пары особенностей $(A_3 + 3A_1) \vdash (2A_5 + A_1)$. Оно имеет шесть цепей длины 4, выходящих из корня $2A_5 + A_1$. Несложный подсчет показывает, что

$$I_{A_3+3A_1}(2A_5 + A_1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 26.$$

ПРИМЕР 2.11. Дерево пары особенностей $mA_1 \vdash kA_1$, где $m \leq k$, является цепью длины m , выходящей из корня kA_1 . Веса ребер этой цепи изменяются на 1 при переходе через каждую вершину и пробегают все значения от k до $k - m + 1$. Поэтому

$$I_{mA_1}(kA_1) = m! \binom{k}{m}.$$

Используя указанный метод, нетрудно убедиться, например, в справедливости следующих формул:

$$I_{mA_1}(A_2 + kA_1) = m! \binom{k+1}{m}$$

Рис. 2. Дерево пары особенностей $(A_3 + 3A_1) \vdash (2A_5 + A_1)$

(этот индекс не равен 0 тогда и только тогда, когда $m \leq k + 1$);

$$I_{mA_1}(A_3 + kA_1) = \frac{m!}{2} \left(\binom{k+2}{m} + \binom{k}{m} \right)$$

(этот индекс не равен 0 тогда и только тогда, когда $m \leq k + 2$).

§ 3. Каноническая стратификация характеристического многообразия

Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ — произвольная особенность устойчивого фронта $\mathcal{F}$ коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}: \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ этой особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Канонической стратификацией многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ называется разбиение этого многообразия на связные компоненты (страты) полных прообразов $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_{\mathcal{F}})$ многообразий $X_{\mathcal{F}}$ особенностей X фронта $\mathcal{F}$, примыкающих к $\mathcal{A}$.*

Каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, его C^∞ -стратификацией. Остов коразмерности k этой стратификации (т.е. объединение стратов коразмерности не меньше k) мы будем обозначать через $\text{St}_k(\Phi_{\mathcal{A}})$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является его C^∞ -стратификацией Уитни.*

Чтобы доказать это утверждение, необходимо классифицировать особенности гиперповерхности $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ относительно диффеоморфизмов объемлющего многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$. Такая классификация дается теоремой 4.7, сформулированной в § 4. Теорема 3.2 следует из теоремы 4.7 на основании предложения 4.6.

Пусть Γ — край правильной связной компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности Γ и его замыкание $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma \subset V$. Обозначим через $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ полный прообраз множества $\mathcal{A}_\Gamma$ при отображении $\varphi_{\mathcal{A}}$.

ТЕОРЕМА 3.3. Если множество $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma$ компактно, то эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma)$ множества $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ вычисляется по формуле

$$(-1)^n \chi(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma) = \sum_{X: X_\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{A}}_\Gamma} (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_\Gamma).$$

Это утверждение следует из теорем 2.1, 3.2 и правила вычисления эйлеровой характеристики компактного множества, являющегося объединением стратов C^∞ -стратификации Уитни гладкого замкнутого многообразия (см., например, [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Множество

$$\partial_{\text{out}}(\mathcal{A}\mathcal{F}) = \overline{(\mathcal{A} + A_1)}_{\mathcal{F}} \subset V$$

называется *внешней границей* многообразия $\mathcal{A}\mathcal{F}$ особенностей $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$. Множество

$$C_{\text{in}}(\mathcal{A}\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{A}\mathcal{F}} \setminus \partial_{\text{out}}(\mathcal{A}\mathcal{F})$$

называется *внутренним замыканием* многообразия $\mathcal{A}\mathcal{F}$.

Следующее утверждение доказано в § 7.

ТЕОРЕМА 3.5. Множество $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ является многообразием с краем. Каждая связная компонента этого многообразия представляет собой замыкание правильной связной компоненты дополнения $\Phi_{\mathcal{A}} \setminus \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\partial_{\text{out}}(\mathcal{A}\mathcal{F}))$.

Рассмотрим множества

$$\partial_{\text{out}}(\mathcal{A}_\Gamma) = \partial_{\text{out}}(\mathcal{A}\mathcal{F}) \cap \Gamma, \quad C_{\text{in}}(\mathcal{A}_\Gamma) = C_{\text{in}}(\mathcal{A}\mathcal{F}) \cap \Gamma.$$

Они называются *внешней границей* и *внутренним замыканием* многообразия $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности Γ (соответственно).

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть Γ – край правильной связной компоненты дополнения к фронту $\mathcal{F}$ общего положения в гладком n -мерном многообразии V . Предположим, что $\mathcal{F}$ имеет на Γ только устойчивые особенности коранга 1. Тогда для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ такого, что многообразие $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности Γ имеет нечетную размерность, а его замыкание $\overline{\mathcal{A}}_\Gamma \subset V$ компактно, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{X: X_\Gamma \subseteq C_{\text{in}}(\mathcal{A}_\Gamma)} (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_\Gamma) \\ = -\frac{1}{2} \sum_{X: X_\Gamma \subseteq \partial_{\text{out}}(\mathcal{A}_\Gamma)} (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_\Gamma). \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, без ограничения общности можно считать, что Γ – край правильной связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга 1 в V . Поэтому теорема 3.6 следует из теорем 3.3, 3.5 и того факта, что эйлерова характеристика нечетномерного компактного многообразия с краем равна половине эйлеровой характеристики края.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. В случае, когда гиперповерхность Γ является краем эллиптической связной компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$, теорема 3.6 была сформулирована в работе [5]. В этом случае множество $C_{\text{in}}(\mathcal{A}_\Gamma)$ состоит из многообразий X_Γ особенностей X гиперповерхности Γ , у которых $\deg X = \deg \mathcal{A}$; множество $\partial_{\text{out}}(\mathcal{A}_\Gamma)$ состоит из многообразий X_Γ особенностей X таких, что $\deg X > \deg \mathcal{A}$.

Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть Γ – край гиперболической или эллиптической связной компоненты U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к устойчивому фронту $\mathcal{F}$ коранга 1 в многообразии V . Тогда замыкание $\overline{\mathcal{A}_\Gamma}$ многообразия $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ этой гиперповерхности вычисляется рекуррентно исходя из следующих формул:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}_\Gamma} = \mathcal{A}_\Gamma \cup \overline{(\mathcal{A} + A_1)}_\Gamma \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})}_\Gamma \right) \\ \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq m} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})}_\Gamma \right), \end{aligned}$$

если компонента U гиперболическая, и

$$\overline{\mathcal{A}_\Gamma} = \mathcal{A}_\Gamma \cup \overline{(\mathcal{A} + A_1)}_\Gamma \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq m} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})}_\Gamma \right),$$

если компонента U эллиптическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем целое неотрицательное k и рассмотрим пространство многочленов вида $P(t) = Q(t) \prod_{i=1}^m (t - t_i)^{\mu_i+1}$, где $t_1, \dots, t_m$ – произвольные вещественные числа, а $Q(t) = t^k + q_{k-1}t^{k-1} + \dots + q_0$ – произвольный многочлен с вещественными коэффициентами такой, что $q_{k-1} = \sum_{i=1}^m (\mu_i + 1)t_i$ (т.е. сумма всех корней многочлена P равна нулю).

В общей точке любой кривой γ общего положения в этом пространстве числа $t_1, \dots, t_m$ попарно различны, а все корни многочлена Q простые и не совпадают с $t_1, \dots, t_m$. Но в некоторых (изолированных) точках кривой γ кратности вещественных корней многочлена P могут измениться, причем только одним из трех способов. А именно, либо многочлен Q имеет двукратный вещественный корень (отличный от $t_1, \dots, t_m$), либо простой корень многочлена Q совпадает с одним из чисел $t_1, \dots, t_m$, либо $t_i = t_j$ для некоторых $i \neq j$.

Отсюда следует первая из указанных выше формул. Вторая формула получается аналогично, если рассмотреть пространство неотрицательных многочленов вида $P(t)$. Предложение 3.8 доказано.

ПРИМЕР 3.9. Рассмотрим край Γ эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга 1 в гладком n -мерном многообразии. Гиперповерхность Γ может иметь только две особенности коразмерности 4, а именно особенности $4A_1$ и $A_3 + A_1$.

1) Множество $C_{\text{in}}((4A_1)_\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей $4A_1, A_3 + 2A_1, 2A_3, A_5 + A_1, A_7$ гиперповерхности Γ . Множество $\partial_{\text{out}}((4A_1)_\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей $5A_1, 6A_1, A_3 + 3A_1, 7A_1, A_3 + 4A_1, 2A_3 + A_1, A_5 + 2A_1$ и всех

особенностей коразмерности больше 7. Поэтому для любого нечетного $n \geq 5$ из формулы (3) и теоремы 2.8 получаем следующее соотношение между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхности Γ :

$$\begin{aligned} 24\chi(4A_1) = & 60\chi(5A_1) + 12\chi(A_3 + 2A_1) - 180\chi(6A_1) - 30\chi(A_3 + 3A_1) \\ & - 6\chi(2A_3) - 4\chi(A_5 + A_1) + 420\chi(7A_1) + 96\chi(A_3 + 4A_1) \\ & + 15\chi(2A_3 + A_1) + 10\chi(A_5 + 2A_1) + \chi(A_7) + \dots \end{aligned}$$

(здесь индекс Γ опущен, а многоточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий особенностей, коразмерность которых больше 7).

2) Множество $C_{\text{in}}((A_3 + A_1)\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей $A_3 + A_1$ и A_5 гиперповерхности Γ . Множество $\partial_{\text{out}}((A_3 + A_1)\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей $A_3 + 2A_1$ и всех особенностей коразмерности больше 5, кроме особенностей вида mA_1 . Поэтому для любого нечетного $n \geq 5$ имеем

$$\begin{aligned} 2\chi(A_3 + A_1) = & 2\chi(A_3 + 2A_1) + 2\chi(A_5) - 3\chi(A_3 + 3A_1) - 2\chi(2A_3) \\ & - 2\chi(A_5 + A_1) + 4\chi(A_3 + 4A_1) + 4\chi(2A_3 + A_1) \\ & + 3\chi(A_5 + 2A_1) + \chi(A_7) + \dots \end{aligned}$$

(многоточие обозначает то же самое, что и для особенности $4A_1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.9. Воспользуемся предложением 3.8 и напишем соотношение (3) для каждого класса особенностей гиперповерхности Γ такого, что многообразие этих особенностей имеет нечетную размерность. В результате получится огромная система линейных однородных уравнений, неизвестными которой являются эйлеровы характеристики всех многообразий особенностей рассматриваемой гиперповерхности.

Эта система легко представляется в треугольном виде относительно эйлеровых характеристик нечетномерных многообразий особенностей (необходимо лишь правильно занумеровать уравнения и неизвестные). Следовательно, эти эйлеровы характеристики линейно выражаются через остальные. Формулы, приведенные в пп. 2) и 3) теоремы 1.9, получены путем решения указанной системы на компьютере с использованием пакета программ Mathematica.

§ 4. Особенности остова коразмерности 1 канонической стратификации

Рассмотрим (приводимую особую) гиперповерхность Σ в гладком n -мерном многообразии V . Зафиксируем произвольное натуральное $\varkappa \leq n$ и любое целое неотрицательное $m \leq \varkappa + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Гиперповерхность Σ имеет *особенность* $\mathcal{S}_\varkappa^m$, $m > 0$, в точке x , если ее росток (Σ, x) в этой точке диффеоморфен ростку в нуле объединения следующих гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}$:

1) гиперповерхности $\mathcal{F}$, образованной точками, для которых функция

$$S(t, \lambda_m, \dots, \lambda_\varkappa) = t^{\varkappa-m+1} + \sum_{i=m}^{\varkappa} \lambda_i t^{i-m}$$

как многочлен от t имеет кратный вещественный корень (эта гиперповерхность не пуста только при $m < \varkappa$);

2) m гладких гиперповерхностей H_i , $i = 1, \dots, m$, заданных уравнениями

$$H_i: S|_{t=-(\lambda_i+\dots+\lambda_{m-1})} = 0, \quad i < m; \quad H_m: S|_{t=0} = 0$$

(этот набор гиперповерхностей не пуст только при $m \leq \varkappa$);

3) $m(m-1)/2$ гиперплоскостей $\Pi_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq m$, заданных уравнениями

$$\Pi_{i,j}: \lambda_i + \dots + \lambda_{j-1} = 0$$

(этот набор гиперповерхностей не пуст только при $m > 1$).

Особенностями $\mathcal{S}_\varkappa^0$ гиперповерхности Σ будем называть обычные ее особенности $A_\varkappa$.

Число $\varkappa$ называется *показателем вырожденности особенности* $\mathcal{S}_\varkappa^m$. Множество $(\mathcal{S}_\varkappa^m)_\Sigma$ особенностей $\mathcal{S}_\varkappa^m$ гиперповерхности Σ является гладким подмногообразием коразмерности $\varkappa$ в объемлющем многообразии V (вообще говоря, незамкнутым).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Напомним (см. [11]), что упорядоченная пара (H, Δ) гиперповерхностей H и Δ в многообразии V имеет *особенность* B_μ в точке $x \in H$, если росток $((H, \Delta), x)$ этой пары диффеоморфен ростку в $0 \in \mathbb{R}^n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})\}$ пары, состоящей из гиперплоскости $\lambda_0 = 0$ и гиперповерхности, образованной точками, для которых многочлен

$$t^\mu + \lambda_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + \lambda_1 t + \lambda_0$$

от t имеет кратный вещественный корень (при $\mu = 1$ вторая компонента ростка пары пуста). Легко видеть, что каждая пара $(H_i, \mathcal{F})$, $i = 1, \dots, m$, имеет особенность $B_{\varkappa-m+1}$ в нуле.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p S}{\partial(t + \lambda_i + \dots + \lambda_{m-1})^p} \Big|_{t=\lambda_i=\dots=\lambda_{m-1}=0} &= \frac{\partial^p S}{\partial t^p} \Big|_{t=\lambda_i=\dots=\lambda_{m-1}=0} \\ &= \begin{cases} p!, & \text{если } p = \varkappa - m + 1; \\ p! \lambda_{m+p}, & \text{если } 0 \leq p \leq \varkappa - m. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому росток в нуле функции S как функции от t является версальной деформацией ростка в нуле функции $(t + \lambda_i + \dots + \lambda_{m-1})^{\varkappa-m+1}$ на полупрямой с краем $t + \lambda_i + \dots + \lambda_{m-1} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Для любых $1 \leq i < j \leq m$

$$H_i \cap \Pi_{i,j} = H_j \cap \Pi_{i,j}.$$

Если $m < \varkappa$, то особенность $\mathcal{S}_\varkappa^m$ имеет $(m^2 + m + 2)/2$ неприводимых компонент.

ПРИМЕР 4.4. Рассмотрим росток гиперповерхности с особенностью $\mathcal{S}_3^2$ в трехмерном пространстве. Этот росток диффеоморфен ростку в нуле объединения следующих четырех гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}$:

- 1) дискриминанта $\lambda_3^2 - 4\lambda_2 = 0$ квадратного трехчлена $t^2 + \lambda_3 t + \lambda_2$;
- 2) поверхности $\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 = 0$ и плоскости $\lambda_2 = 0$;
- 3) плоскости $\lambda_1 = 0$.

В координатах

$$x = \lambda_1 - \frac{\lambda_3}{2}, \quad y = -\frac{\lambda_3}{2}, \quad z = \frac{\lambda_3^2}{4} - \lambda_2$$

эти поверхности задаются уравнениями (соответственно)

$$z = 0, \quad z = x^2, \quad z = y^2, \quad y = x.$$

Их объединение изображено на рис. 3 (указанные на рисунке обозначения нужны для примера 4.8).

Рис. 3. Особенность $\mathcal{S}_3^2$

Рассмотрим свободную абелеву полуруппу по сложению с образующими $\mathcal{S}_{\varkappa}^m$, где $\varkappa \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq \varkappa + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Гиперповерхность Σ имеет *особенность* $\mathcal{S}_{\varkappa_1}^{m_1} + \dots + \mathcal{S}_{\varkappa_r}^{m_r}$ в точке x , если ее росток (Σ, x) является ростком объединения r гиперповерхностей $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$, которые имеют особенности $\mathcal{S}_{\varkappa_1}^{m_1}, \dots, \mathcal{S}_{\varkappa_r}^{m_r}$ в точке x , причем ростки многообразий $(\mathcal{S}_{\varkappa_1}^{m_1})_{\Sigma_1}, \dots, (\mathcal{S}_{\varkappa_r}^{m_r})_{\Sigma_r}$ пересекаются в этой точке трансверсально.

Числа $\varkappa_1, \dots, \varkappa_r$ называются *показателями вырожденности особенности* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\varkappa_1}^{m_1} + \dots + \mathcal{S}_{\varkappa_r}^{m_r}$. Их сумма $\text{codim } \mathcal{S} = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_r$ называется *коразмерностью этой особенности*.

Коразмерность особенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Множество $\mathcal{S}_\Sigma$ особенностей $\mathcal{S}$ гиперповерхности Σ с данным (неупорядоченным) набором показателей вырожденности является гладким подмногообразием в V , коразмерность которого равна коразмерности особенности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Если $\Sigma \subset V$ – замкнутая гиперповерхность с особенностями типа $\mathcal{S}_{\varkappa_1}^{m_1} + \dots + \mathcal{S}_{\varkappa_r}^{m_r}$, то ее разбиение на связные компоненты многообразий этих особенностей является минимальной C^∞ -стратификацией Уитни.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанное разбиение является, очевидно, C^∞ -стратификацией, причем минимальной. Эта стратификация удовлетворяет обоим условиям Уитни согласно следующему общему факту из теории стратифицированных множеств.

Рассмотрим C^∞ -стратификацию замкнутого подмножества Z в гладком n -мерном многообразии V . Предположим, что любая пара ее стратов X, Y таких, что Y лежит в замыкании $\bar{X}$ страта X , удовлетворяет следующему условию: для любой точки $y \in Y$ существуют гладкие локальные координаты на многообразии V , в которых росток пары $(\bar{X}, Y)$ в точке y является ростком в нуле пары в $\mathbb{R}^n$, представляющей собой прямое произведение $\mathbb{R}^k$ на пару $(\Delta, 0)$, где Δ – замкнутое полуалгебраическое подмножество в $\mathbb{R}^{n-k}$, содержащее нуль 0 . Тогда эта стратификация является стратификацией Уитни (см. [12] или [13]).

Предложение 4.6 доказано.

Пусть $\mathcal{F}$ – устойчивый фронт коранга 1 в многообразии V . Зафиксируем произвольную особенность $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ этого фронта и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ особенности $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 4.7. *Для любого $\mathcal{A}$ остов $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ коразмерности 1 канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ имеет лишь особенности типа $\mathcal{S}_{\varkappa_1}^{m_1} + \dots + \mathcal{S}_{\varkappa_r}^{m_r}$.*

А именно, пусть $\xi \in \text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ и фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ в точке $x = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Тогда существуют отображение

$$\alpha: I = \{1, \dots, m\} \rightarrow J = \{1, \dots, p\}$$

и разбиение $J = J_- \cup J_0 \cup J_+$ множества J на попарно непересекающиеся подмножества J_- , J_0 , J_+ такие, что:

- 1) $J_- \cup J_+$ непусто;
- 2) если $j \in J_-$, то $\alpha^{-1}(j)$ пусто;
- 3) если $j \in J_0$, то множество $\alpha^{-1}(j)$ состоит из одного элемента и $\nu_j = \mu_{\alpha^{-1}(j)}$;
- 4) если $j \in J_+$, то множество $\alpha^{-1}(j)$ состоит из $m_j \geq 1$ элементов и

$$\varkappa_j = \nu_j - \sum_{i \in \alpha^{-1}(j)} \mu_i \geq \max\{1, m_j - 1\};$$

5) гиперповерхность $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ имеет в точке ξ особенность

$$\mathcal{S} = \sum_{j \in J_-} A_{\nu_j} + \sum_{j \in J_+} \mathcal{S}_{\kappa_j}^{m_j}$$

(коразмерность особенности $\mathcal{S}$ равна $\text{codim } X - \text{codim } \mathcal{A}$).

Обратно, для любого отображения $\alpha: I \rightarrow J$ и любого разбиения $J = J_- \cup J_0 \cup J_+$ множества J на попарно непересекающиеся подмножества J_- , J_0 , J_+ , удовлетворяющие условиям 1)–4), существует точка $\xi \in \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(x)$, в которой гиперповерхность $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ имеет особенность $\mathcal{S}$.

Теорема 4.7 доказана в § 6 (она является следствием предложения 6.4).

ПРИМЕР 4.8. Пусть $\mathcal{F}$ – четырехмерный фронт с особенностью A_5 в точке x . Рассмотрим характеристическое многообразие Φ_{2A_1} и характеристическое отображение φ_{2A_1} особенности $2A_1$ этого фронта. Остов $\text{St}_1(\Phi_{2A_1})$ коразмерности 1 канонической стратификации многообразия Φ_{2A_1} имеет особенность $\mathcal{S}_3^2$ в точке $\xi = \varphi_{2A_1}^{-1}(x)$. Росток $(\text{St}_1(\Phi_{2A_1}), \xi)$ изображен на рис. 3 в гладких координатах примера 4.4.

Страты канонической стратификации многообразия Φ_{2A_1} , имеющие ненулевую коразмерность, обозначены классами особенностей фронта $\mathcal{F}$ в образах соответствующих точек при отображении φ_{2A_1} . Не виден лишь 0-мерный страт A_5 , являющийся общей точкой всех четырех поверхностей. Этот страт примыкает к десяти одномерным стратам, среди которых два страта типа A_4 , два страта $2A_2$ и шесть стратов $A_3 + A_1$ (геометрический смысл каждой из четырех изображенных поверхностей объяснен в примере 6.3).

§ 5. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе сформулированы некоторые простые алгебраические факты, необходимые для доказательства теоремы 4.7.

ЛЕММА 5.1. *Справедливо следующее:*

$$\sum_{i=0}^l (-1)^i \binom{k+i}{i} \binom{n}{l-i} = \binom{n-k-1}{l} \quad (4)$$

для любых целых неотрицательных k, l, n таких, что $k+l < n$.

Доказательство заключается в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной t в рядах $(1+t)^{n-k-1}$ и $(1+t)^n(1+t)^{-(k+1)}$.

ЛЕММА 5.2. *Пусть*

$$P = t^n + q_{n-1}t^{n-1} + \dots + q_1t + q_0$$

– многочлен от t . Предположим, что t_* – корень многочлена $P - q_0$, причем его кратность равна k . Тогда либо $t_* = 0$, либо t_* – (ненулевой) корень уравнения

$$\frac{P - q_0}{t} = 0$$

кратности k .

Это утверждение очевидно.

ЛЕММА 5.3. Пусть $P = t^n + q_{n-1}t^{n-1} + \dots + q_1t + q_0$ — многочлен от t и

$$P_\mu = t^{n-\mu} + \sum_{i=\mu}^{n-1} q_i t^{i-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда для любого $\mu < n$ многочлен

$$R_\mu = v^{n-\mu-1} + \sum_{i=0}^{n-\mu-2} \frac{1}{(i+\mu+1)!} \frac{d^{i+\mu+1}P}{dt^{i+\mu+1}} v^i$$

от v можно представить в виде

$$R_\mu = \frac{1}{\mu!} \sum_{k=0}^{n-\mu-1} \frac{d^\mu P_{k+1}}{dt^\mu} (v+t)^k.$$

В частности, для любого $t_* \neq 0$ и $k = 0, 1, \dots, n-\mu-1$

$$\left. \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left(\frac{P - (q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0)}{t^{k+1}} \right) \right|_{t=t_*} = \frac{\mu!}{k!} \left. \frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \right|_{v=-t_*}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \right|_{v=-t} &= \sum_{i=k}^{n-\mu-1} \frac{i!}{(i+\mu+1)!(i-k)!} \frac{d^{i+\mu+1}P}{dt^{i+\mu+1}} (-t)^{i-k} \\ &= k! \sum_{i=k}^{n-\mu-1} (-1)^{i-k} \binom{i}{i-k} \left(\binom{n}{i+\mu+1} t^{n-\mu-k-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=i+\mu+1}^{n-1} \binom{r}{i+\mu+1} q_r t^{r-\mu-k-1} \right) \\ &= k! \left(t^{n-\mu-k-1} \sum_{i=0}^{n-\mu-k-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \binom{n}{i+\mu+k+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=\mu+k+1}^{n-1} q_r t^{r-\mu-k-1} \sum_{i=0}^{r-\mu-k-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \binom{r}{i+\mu+k+1} \right). \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \right|_{v=-t} &= k! \left(\binom{n-k-1}{\mu} t^{n-\mu-k-1} + \sum_{r=\mu+k+1}^{n-1} \binom{r-k-1}{\mu} q_r t^{r-\mu-k-1} \right) \\ &= \frac{k!}{\mu!} \frac{d^\mu P_{k+1}}{dt^\mu}. \end{aligned}$$

Лемма 5.3 доказана.

ЛЕММА 5.4. Пусть t_* – ненулевой корень многочлена

$$P = t^n + q_{n-1}t^{n-1} + \dots + q_1t + q_0$$

от t . Предположим, что кратность этого корня равна $\mu + 1$ и

$$\left. \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left(\frac{P - (q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0)}{t^{k+1}} \right) \right|_{t=t_*} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r$$

для некоторого целого неотрицательного $r < n - \mu$. Тогда $q_0 = \dots = q_r = 0$.

Действительно, указанные равенства определяют систему линейных однородных уравнений

$$\left. \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left(\frac{q_k}{t} + \dots + \frac{q_1}{t^k} + \frac{q_0}{t^{k+1}} \right) \right|_{t=t_*} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r,$$

с неизвестными $q_0, \dots, q_r$. Эта система имеет только тривиальное решение.

ЛЕММА 5.5 [4]. Пусть $u, t \in \mathbb{R}$, $\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$,

$$S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_2t^2,$$

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u - t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}).$$

Предположим, что корень $u = t$ многочлена F (как многочлена от u) имеет кратность $\mu + 1 \geq 2$. Тогда

$$F(u, t, \bar{q}) = (u - t)^{\mu+1} G_\mu(u, t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}),$$

где

$$G_\mu(u, t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) = \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u - t)^{i-\mu},$$

причем $G_\mu|_{u=t} \neq 0$.

§6. Доказательство теоремы 4.7

В дальнейшем мы будем использовать координатное описание A_μ -преобразования устойчивого фронта коранга 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$,

$$S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_2t^2$$

и $\mathcal{F}$ – фронт лежандрова отображения

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q}, S(t, \bar{q}) - t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}) \right).$$

Тогда набор $(t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-\mu}$ определяет координаты на характеристическом многообразии Φ_{A_μ} особенности A_μ фронта $\mathcal{F}$. В этих координатах фронт $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ является множеством точек, для которых функция

$$\sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u - t)^{i-\mu}$$

как многочлен от $u - t$ имеет кратный вещественный корень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подмногообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0.$$

Фронт $[A_\mu](\mathcal{F})$ является замыканием множества точек $(t, \bar{q}) \in \Phi_{A_\mu}$, для которых функция

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u - t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q})$$

как многочлен от u имеет кратный вещественный корень $u \neq t$. Поэтому предложение 6.1 следует из леммы 5.5.

Пусть $\mathcal{F}$ – фронт устойчивого лежандрова отображения $f: L \rightarrow V$ коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V . Зафиксируем особенность $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ этого фронта.

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ особенности $\mathcal{A}$. Выберем произвольную точку ξ_m остова $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ коразмерности 1 канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность A_ν в точке $x = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi_m)$. Тогда $n_m = \nu - \text{codim } \mathcal{A} \geq \max\{1, m-1\}$ и гиперповерхность $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ имеет особенность $\mathcal{S}_{n_m}^m$ в точке ξ_m . Более того, существуют локальные координаты

$$(t, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m-1}^m, y_3, \dots, y_{\deg \mathcal{A}}, z_1, \dots, z_{n-\nu})$$

на многообразии L в окрестности точки $\xi_1 = f^{-1}(x)$ и локальные координаты

$$(t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m-1}^m, Q_{n_m-m}^m, z_1, \dots, z_{n-\nu})$$

на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ в окрестности точки ξ_m такие, что справедливы следующие утверждения.

1) Для любых $t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m, z_1, \dots, z_{n-\nu}$, достаточно близких к нулю, точки

$$(t_0 + \dots + t_i, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m-1}^m, y_3, \dots, y_{\deg \mathcal{A}}, z_1, \dots, z_{n-\nu}) \in L, \\ i = 0, \dots, m-1,$$

где

$$\sum_{i=1}^{m-1} (\nu - \mu_1 - \dots - \mu_i - i + 1) t_i + (\nu + 1) t_0 = \begin{cases} Q_{n_m-m}^m, & \text{если } n_m \geq m; \\ 0, & \text{если } n_m < m, \end{cases}$$

а $y_3, \dots, y_{\deg \mathcal{A}}$ гладко зависят от $t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m$, входят в полный прообраз точки

$$\varphi_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m, z_1, \dots, z_{n-\nu}) \in V$$

относительно отображения f .

2) Росток $(\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}}), \xi_m)$ является ростком в нуле объединения следующих гиперповерхностей:

а) гиперповерхности $\mathcal{F}^m$, образованной точками, для которых функция

$$S_m(t_m, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m) = t_m^{n_m-m+1} + \sum_{i=0}^{n_m-m} Q_i^m t_m^i$$

как многочлен от t_m имеет кратный вещественный корень (гиперповерхность $\mathcal{F}^m$ не пуста только при $n_m > m$);

б) m гладких гиперповерхностей H_i^m , заданных уравнениями

$$S_m|_{t_i+\dots+t_m=0} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

(этот набор гиперповерхностей не пуст только при $n_m > m - 1$);

с) $m(m-1)/2$ гиперплоскостей $\Pi_{i,j}^m$, заданных уравнениями

$$t_i + \dots + t_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq m$$

(этот набор гиперповерхностей не пуст только при $m > 1$).

3) Ростки гиперповерхностей $\mathcal{F}^m$, H_i^m , $\Pi_{i,j}^m$ в нуле являются полными прообразами ростков множеств

$$\overline{(\mathcal{A} + A_1)_{\mathcal{F}}}, \quad \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})_{\mathcal{F}}}, \quad \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})_{\mathcal{F}}}$$

в точке x соответственно относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ_m . При этом росток гиперповерхности $\mathcal{F}^m$ является ростком фронта $[\mathcal{A}](\mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{A}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение доказывается индукцией по m . Сначала рассмотрим подробно случаи $m = 1$ и $m = 2$.

Случай $m = 1$. В подходящих локальных координатах на многообразиях L и V росток отображения f в точке ξ_1 задается формулой

$$(f, \xi_1): (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \\ (t_0, \bar{q}, \bar{z}) \mapsto \left(-\frac{\partial}{\partial t_0} S(t_0, \bar{q}), S(t_0, \bar{q}) - t_0 \frac{\partial}{\partial t_0} S(t_0, \bar{q}), \bar{q}, \bar{z} \right),$$

где

$$\bar{q} = (q_2, \dots, q_{\nu-1}), \quad \bar{z} = (z_1, \dots, z_{n-\nu}), \\ S(t_0, \bar{q}) = t_0^{\nu+1} + q_{\nu-1} t_0^{\nu-1} + \dots + q_2 t_0^2$$

(см. [1]). Росток многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}} \subseteq L$ в этой точке задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t_0^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t_0^3} = \dots = \frac{\partial^{\mu_1} S}{\partial t_0^{\mu_1}} = 0.$$

Набор $(Q_0^1, \dots, Q_{n_1-1}^1, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n-\mu_1}$, где $n_1 = \nu - \mu_1$ и

$$Q_i^1 = \frac{1}{(i + \mu_1 + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_1+1} S}{\partial t_0^{i+\mu_1+1}}, \quad i = 0, \dots, n_1 - 1,$$

определяет локальные координаты на $\Phi_{A_{\mu_1}}$ (заметим, что $Q_{n_1-1}^1 = (\nu + 1)t_0$).

В этих координатах росток гиперповерхности $\Phi_{A_{\mu_1+1}} \subset \Phi_{A_{\mu_1}}$ в точке ξ_1 задается уравнением

$$H_1^1: Q_0^1 = 0.$$

Росток фронта $\mathcal{F}^1 = [A_{\mu_1}](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_{\mu_1}}$ является ростком в нуле множества точек, для которых функция

$$S_1(t_1, Q_0^1, \dots, Q_{n_1-1}^1) = t_1^{n_1} + \sum_{i=0}^{n_1-1} Q_i^1 t_1^i$$

как многочлен от t_1 имеет кратный вещественный корень (см. предложение 6.1; для соответствующих значений $Q_0^1, \dots, Q_{n_1-1}^1$ точка $(t_0 + t_1, \bar{q}, \bar{z}) \in L$, где $\bar{q}$ гладко зависит от $Q_0^1, \dots, Q_{n_1-1}^1$, входит в полный прообраз точки $\varphi_{A_{\mu_1}}(Q_0^1, \dots, Q_{n_1-1}^1, \bar{z})$ относительно отображения f).

По определению ростки гиперповерхностей $\mathcal{F}^1$ и H_1^1 в нуле являются полными прообразами ростков в точке x множеств $(A_{\mu_1} + A_1)_{\mathcal{F}}$ и $(A_{\mu_1+1})_{\mathcal{F}}$ соответственно относительно роста отображения $\varphi_{A_{\mu_1}}$ в точке ξ_1 .

Случай $m = 2$. Начиная с этого момента будем считать, что $\nu = n$. Из предыдущих формул видно, что это не ограничивает общности наших рассуждений.

Пусть далее $\Phi_{A_\mu} = \Phi_{A_\mu}^1$ и $\varphi_{A_\mu} = \varphi_{A_\mu}^1$. Через $\Phi_{A_\mu}^2$ и $\varphi_{A_\mu}^2$ обозначим характеристическое многообразие и характеристическое отображение особенности A_μ фронта $\mathcal{F}^1$ соответственно.

Очевидно, что набор $(t_1, Q_2^1, \dots, Q_{n_1-1}^1) \in \mathbb{R}^{n_1-1}$ определяет локальные координаты на многообразии $\Phi_{A_1}^2$ в окрестности точки $\xi_2 = (\varphi_{A_1}^2)^{-1}(\xi_1)$. Росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_2}}^2 = \Phi_{A_{\mu_1} + A_{\mu_2}} \subseteq \Phi_{A_1}^2$ в точке ξ_2 задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^3 S_1}{\partial t_1^3} = \dots = \frac{\partial^{\mu_2} S_1}{\partial t_1^{\mu_2}} = 0.$$

Набор $(t_1, Q_0^2, \dots, Q_{n_2-2}^2) \in \mathbb{R}^{n_2}$, где $n_2 = n_1 - \mu_2$ и

$$Q_i^2 = \frac{1}{(i + \mu_2 + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_2+1} S_1}{\partial t_1^{i+\mu_2+1}}, \quad i = 0, \dots, n_2 - 2,$$

служит локальными координатами на $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$ (заметим, что $Q_{n_2-2}^2 = n_1 t_1 + Q_{n_1-1}^1$).

В этих координатах росток гиперповерхности $\Phi_{A_{\mu_2+1}}^2 \subset \Phi_{A_{\mu_2}}^2$ в точке ξ_2 задается уравнением

$$H_2^2: Q_0^2 = 0.$$

Росток фронта $\mathcal{F}^2 = [A_{\mu_2}](\mathcal{F}^1) \subset \Phi_{A_{\mu_2}}^2$ является ростком в нуле множества точек, для которых функция

$$S_2(t_2, Q_0^2, \dots, Q_{n_2-2}^2) = t_2^{n_2-1} + \sum_{i=0}^{n_2-2} Q_i^2 t_2^i$$

как многочлен от t_2 имеет кратный вещественный корень (см. предложение 6.1; для соответствующих $Q_0^2, \dots, Q_{n_2-2}^2$ точка $(t_0 + t_1 + t_2, \bar{q}) \in L$, где $\bar{q}$ гладко зависит от $t_1, Q_0^2, \dots, Q_{n_2-2}^2$, входит в полный прообраз точки $\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}}(t_1, Q_0^2, \dots, Q_{n_2-2}^2)$ относительно отображения f).

Теперь рассмотрим пересечение гиперповерхностей $\mathcal{F}^1$ и H_1^1 в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}}^1$. Оно состоит из двух компонент: замыкания H_1^{tg} множества точек касания и замыкания H_1^{tr} множества точек трансверсального пересечения (гиперповерхности H_1^1 с фронтом $\mathcal{F}^1$ в гладких точках последнего).

Согласно лемме 5.2 росток в ξ_2 полного прообраза гиперповерхности H_1^{tg} относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ является ростком гладкой гиперповерхности в многообразии $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$. В выбранных локальных координатах на $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$ эта гиперповерхность задается уравнением

$$\Pi_{1,2}^2: t_1 = 0.$$

Росток полного прообраза гиперповерхности H_1^{tr} является ростком гладкой гиперповерхности, которая совпадает с замыканием гиперповерхности

$$\frac{\partial^{\mu_2}}{\partial t_1^{\mu_2}} \left(\frac{S_1 - Q_0^1}{t_1} \right) = 0.$$

По лемме 5.3 (формула (5) при $k = 0$ и $\mu = \mu_2$) эта гиперповерхность задается уравнением

$$H_1^2: S_2|_{t_2=-t_1} = 0.$$

Остается описать образы ростков гиперповерхностей $\mathcal{F}^2$, H_1^2 , H_2^2 и $\Pi_{1,2}^2$ в нуле при отображении $\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}}$.

Образы ростков $\mathcal{F}^2$ и H_2^2 являются ростками в x множеств $\overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2} + A_1)}_{\mathcal{F}}$ и $\overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2+1})}_{\mathcal{F}}$ соответственно. Это следует из того, что $Q_0^1 \neq 0$ почти во всех точках образов ростков $\mathcal{F}^2$, H_2^2 при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ (т.е. отображение $\varphi_{A_{\mu_1}}^1$ является иммерсией в этих точках).

Образ ростка H_1^2 является ростком множества $\overline{(A_{\mu_1+1} + A_{\mu_2})}_{\mathcal{F}}$ в точке x , так как образ ростка H_1^2 при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ задается уравнением $Q_0^1 = 0$, причем $Q_1^1 \neq 0$ почти всюду на этом образе. Наконец, образ ростка $\Pi_{1,2}^2$ является ростком множества $\overline{(A_{\mu_1+\mu_2+1})}_{\mathcal{F}}$ в точке x , так как образ ростка $\Pi_{1,2}^2$ при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ задается уравнениями $Q_0^1 = \dots = Q_{\mu_2}^1 = 0$, причем $Q_{\mu_2+1}^1 \neq 0$ почти во всех его точках.

ПРИМЕР 6.3. Рассмотрим фронт $\mathcal{F}$ из примера 4.8. Росток гиперповерхности $\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ в точке $\xi = \xi_2$ при $\mathcal{A} = 2A_1$ изображен на рис. 3. Фронт $\mathcal{F}^2$ представлен здесь горизонтальной плоскостью. Гиперповерхности H_1^2 и H_2^2 представлены параболическими цилиндрами. Гиперплоскость $\Pi_{1,2}^2$ изображена вертикальной плоскостью.

Шаг индукции. Предположим, что мы выполнили (последовательно) A_{μ_i} -преобразования фронтов $\mathcal{F}^{i-1}, i = 1, \dots, m_0-1, \mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$, и доказали предложение 6.2 для всех $m < m_0$. Выполним теперь $A_{\mu_{m_0}}$ -преобразование фронта $\mathcal{F}^{m_0-1}$ и докажем утверждение для $m = m_0$. Как и выше, мы будем считать, что $\nu = n$, и (для упрощения обозначений) опустим индекс 0 у числа m_0 .

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{A_\mu}^m$ и характеристическое отображение $\varphi_{A_\mu}^m$ особенности A_μ фронта $\mathcal{F}^{m-1}$. Очевидно, что набор

$$(t_1, \dots, t_{m-1}, Q_2^{m-1}, \dots, Q_{n_{m-1}-m+1}^{m-1}) \in \mathbb{R}^{n_{m-1}-1}$$

определяет локальные координаты на многообразии $\Phi_{A_1}^m$ в окрестности точки $\xi_m = (\varphi_{A_1}^m)^{-1}(\xi_{m-1})$.

Росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_m}}^m = \Phi_{\mathcal{A}}^m \subseteq \Phi_{A_1}^m$ в точке ξ_m задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S_{m-1}}{\partial t_{m-1}^2} = \frac{\partial^3 S_{m-1}}{\partial t_{m-1}^3} = \dots = \frac{\partial^{\mu_m} S_{m-1}}{\partial t_{m-1}^{\mu_m}} = 0.$$

Набор $(t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m) \in \mathbb{R}^{n_m}$, где $n_m = n_{m-1} - \mu_m$ и

$$Q_i^m = \frac{1}{(i + \mu_m + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_m+1} S_{m-1}}{\partial t_{m-1}^{i+\mu_m+1}}, \quad i = 0, \dots, n_m - m,$$

служит локальными координатами на $\Phi_{A_{\mu_m}}^m$ (заметим, что $Q_{n_m-m}^m = (n_{m-1} - m + 2)t_{m-1} + Q_{n_{m-1}-m+1}^{m-1}$).

В этих координатах росток гиперповерхности $\Phi_{A_{\mu_m+1}}^m \subset \Phi_{A_{\mu_m}}^m$ в точке ξ_m задается уравнением

$$H_m^m: Q_0^m = 0.$$

Росток фронта $\mathcal{F}^m = [A_{\mu_m}](\mathcal{F}^{m-1}) \subset \Phi_{A_{\mu_m}}^m$ является ростком в нуле множества точек, для которых функция

$$S_m(t_m, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m) = t_m^{n_m-m+1} + \sum_{i=0}^{n_m-m} Q_i^m t_m^i$$

как многочлен от t_m имеет кратный вещественный корень (см. предложение 6.1; для соответствующих значений $Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m$ точка $(t_0 + \dots + t_m, \bar{q}) \in L$, где $\bar{q}$ гладко зависит от $t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m$, входит в полный прообраз точки

$$\varphi_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_{m-1}, Q_0^m, \dots, Q_{n_m-m}^m)$$

относительно отображения f).

Теперь рассмотрим пересечения фронта $\mathcal{F}^{m-1}$ с гиперповерхностями H_i^{m-1} , $i = 1, \dots, m-1$, и $\Pi_{i,j}^{m-1}$, $1 \leq i < j \leq m-1$. Ростки в точке ξ_m полных прообразов пересечений $\Pi_{i,j}^{m-1} \cap \mathcal{F}^{m-1}$ относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_m}}^m$ являются ростками в нуле гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j}^m: t_i + \dots + t_{j-1} = 0$$

соответственно. Каждое пересечение $H_i^{m-1} \cap \mathcal{F}^{m-1}$ состоит из двух компонент: замыкания H_i^{tg} множества точек касания и замыкания H_i^{tr} множества точек трансверсального пересечения (гиперповерхности H_i^{m-1} с фронтом $\mathcal{F}^{m-1}$ в гладких точках последнего).

Согласно лемме 5.2 росток в точке ξ_m полного прообраза гиперповерхности H_i^{tg} относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_m}}^m$ является ростком в нуле гиперплоскости

$$\Pi_{i,m}^m: t_i + \dots + t_{m-1} = 0.$$

Росток полного прообраза гиперповерхности H_i^{tr} является ростком гладкой гиперповерхности, которая совпадает с замыканием гиперповерхности

$$\frac{\partial^{\mu_m}}{\partial(t_i + \dots + t_{m-1})^{\mu_m}} \left(\frac{S_{m-1} - S_{m-1}|_{t_i + \dots + t_{m-1}=0}}{t_i + \dots + t_{m-1}} \right) = 0.$$

По лемме 5.3 (формула (5) при $k = 0$ и $\mu = \mu_m$) эта гиперповерхность задается уравнением

$$H_i^m: S_m|_{t_i + \dots + t_m=0} = 0.$$

Остается описать образы ростков гиперповерхностей $\mathcal{F}^m$, H_i^m , $i = 1, \dots, m$, и $\Pi_{i,j}^m$, $1 \leq i < j \leq m$, в нуле при отображении $\varphi_{\mathcal{A}}$. Для простоты мы будем обозначать их через $\varphi_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}^m)$, $\varphi_{\mathcal{A}}(H_i^m)$ и $\varphi_{\mathcal{A}}(\Pi_{i,j}^m)$ соответственно.

Пусть $\phi_l = \varphi_{A_{\mu_{l+1}}}^{l+1} \circ \dots \circ \varphi_{A_{\mu_m}}^m$, где $l = 1, \dots, m-1$. Рассмотрим образы $\phi_l(\mathcal{F}^m)$, $\phi_l(H_i^m)$, $\phi_l(\Pi_{i,j}^m)$ ростков гиперповерхностей $\mathcal{F}^m$, H_i^m , $\Pi_{i,j}^m$ в нуле относительно отображения ϕ_l .

Легко видеть, что $Q_0^l \neq 0$ для любого l почти во всех точках ростка $\phi_l(\mathcal{F}^m)$ (т.е. отображение $\varphi_{A_{\mu_l}}^l$ является иммерсией в этих точках). Следовательно, росток $\varphi_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}^m)$ является ростком множества $\overline{(\mathcal{A} + A_1)}_{\mathcal{F}}$ в точке x .

Росток $\varphi_{\mathcal{A}}(H_i^m)$ является ростком (в точке x) множества

$$\overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_{i+1}})}_{\mathcal{F}}.$$

Это следует из того, что $Q_0^l \neq 0$ для любого $l \neq i$ и $Q_0^l = 0$, $Q_1^l \neq 0$ при $l = i$ почти всюду на $\phi_l(H_i^m)$.

Наконец, росток $\varphi_{\mathcal{A}}(\Pi_{i,j}^m)$ является ростком множества

$$\overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_{i+j+1}})}_{\mathcal{F}}.$$

Это вытекает из того, что почти всюду на $\phi_l(\Pi_{i,j}^m)$ справедливо следующее:

- 1) $Q_0^l \neq 0$ для любого $l = j, \dots, m-1$;
- 2) число $t_l = -(t_i + \dots + t_{l-1})$ является ненулевым корнем кратности $\mu_j + 1$ многочлена S_l при $l = i+1, \dots, j-1$; в частности $Q_0^l \neq 0$;
- 3) $Q_0^l = \dots = Q_{\mu_j}^l = 0$, $Q_{\mu_j+1}^l \neq 0$ при $l = i$;
- 4) $Q_0^l \neq 0$ для любого $l = 1, \dots, i-1$.

Свойства 1)–4) проверяются последовательно.

Свойство 1) очевидно.

Свойство 2) доказывается индукцией по убывающему l . А именно, при $l = j - 1$ свойство 2) справедливо по определению. Предположим, что число $t_l = -(t_i + \dots + t_{l-1})$ является ненулевым корнем кратности $\mu_j + 1$ многочлена S_l . Тогда по леммам 5.3 и 5.4 (при $P = S_{l-1}$, $\mu = \mu_l$, $R_\mu = S_l$, $v = t_l$, $t_* = t_i + \dots + t_{l-1}$, $r = \mu_j$) число $t_{l-1} = -(t_i + \dots + t_{l-2})$ является корнем кратности $\mu_j + 1$ многочлена S_{l-1} . Если $l > i + 1$, то этот корень не равен нулю почти во всех точках ростка $\phi_{l-1}(\Pi_{i,j}^m)$.

Свойство 3) следует из свойства 2) при $l = i + 1$ и лемм 5.3 и 5.4 (при $P = S_i$, $\mu = \mu_{i+1}$, $R_\mu = S_{i+1}$, $v = t_{i+1}$, $t_* = t_i$, $r = \mu_j$).

Из свойства 3) немедленно следует свойство 4).

Таким образом, предложение 6.2 полностью доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ в точке $x = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi_m)$. Рассмотрим неприводимые компоненты $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ ростка $(\mathcal{F}, x)$ и предположим, что эти компоненты имеют в точке x особенности $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_p}$ соответственно. Тогда найдется разбиение

$$I = \bigcup_{j=1}^p I_j$$

множества $I = \{1, \dots, m\}$ на попарно непересекающиеся подмножества I_j такие, что справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $j = 1, \dots, p$ множество I_j состоит из $m_j \geq 0$ чисел, упорядоченных по возрастанию, причем

$$n_j = \nu_j - \sum_{i \in I_j} \mu_i \geq m_j - 1, \quad \sum_{j=1}^p n_j = \text{codim } X - \text{codim } \mathcal{A} \geq 1.$$

2) Существуют локальные координаты

$$(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{n_1}^1, \dots, \lambda_1^p, \dots, \lambda_{n_p}^p, z_1, \dots, z_{n - \text{codim } X})$$

на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ такие, что в этих координатах росток $(\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}}), \xi_m)$ является ростком в нуле объединения $\bigcup_{j=1}^p \Sigma_j$ гиперповерхностей Σ_j , которые определяются следующим образом:

– если $m_j = 0$, то Σ_j – гиперповерхность $\mathcal{F}_j^*$, образованная точками, для которых функция

$$S_j(t_j, \lambda_1^j, \dots, \lambda_{n_j}^j) = t_j^{n_j+1} + \lambda_{n_j}^j t_j^{n_j-1} + \dots + \lambda_2^j t_j + \lambda_1^j$$

как многочлен от t_j имеет кратный вещественный корень;

– если $m_j > 0$, то Σ_j – объединение следующих гиперповерхностей:

- а) гиперповерхности $\mathcal{F}_j^*$, образованной точками, для которых функция

$$S_j(t_j, \lambda_{m_j}^j, \dots, \lambda_{n_j}^j) = t_j^{n_j - m_j + 1} + \sum_{i=m_j}^{n_j} \lambda_i^j t_j^{i - m_j}$$

как многочлен от t_j имеет кратный вещественный корень (гиперповерхность $\mathcal{F}_j^*$ не пуста только при $n_j > m_j$);

- б) m_j гладких гиперповерхностей H_i^j , $i = 1, \dots, m_j$, заданных уравнениями

$$\begin{aligned} H_i^j: \quad S_j|_{t_j = -(\lambda_i^j + \dots + \lambda_{m_j-1}^j = 0)} &= 0, \quad i < m_j; \\ H_{m_j}^j: \quad S_j|_{t_j = 0} &= 0 \end{aligned}$$

(этот набор гиперповерхностей не пуст только при $n_j > m_j - 1$);

- в) $m_j(m_j - 1)/2$ гиперплоскостей $\Pi_{i,k}^j$, заданных уравнениями

$$t_i^j + \dots + t_{k-1}^j = 0, \quad 1 \leq i < k \leq m_j$$

(этот набор гиперповерхностей не пуст только при $m_j > 1$).

- 3) Ростки гиперповерхностей $\mathcal{F}_j^*$, H_i^j , $\Pi_{i,k}^j$ в нуле являются полными прообразами ростков множеств

$$\begin{aligned} &\overline{(\mathcal{A}^j + A_1)_{\mathcal{F}_j}}, \quad \overline{(\mathcal{A}^j - A_{\mu(i,j)} + A_{\mu(i,j)+1})_{\mathcal{F}_j}}, \\ &\overline{(\mathcal{A}^j - A_{\mu(i,j)} - A_{\mu(k,j)} + A_{\mu(i,j)+\mu(k,j)+1})_{\mathcal{F}_j}} \end{aligned}$$

в точке x соответственно относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ_m . Здесь $\mathcal{A}^j = \sum_{l \in I_j} A_{\mu(l,j)}$, а индекс (l, j) является l -м числом в наборе I_j .

- 4) Росток объединения $\mathcal{F}^* = \bigcup_{j=1}^p \mathcal{F}_j^*$ в нуле является ростком фронта $[\mathcal{A}](\mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ_m . Этот росток является полным прообразом ростка множества $\overline{(\mathcal{A} + A_1)_{\mathcal{F}}}$ относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ_m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [1], [14] существуют локальные координаты

$$\begin{aligned} &(q_0^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p, z_1, \dots, z_{n-\text{codim } X}) \\ &\in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_p} \times \mathbb{R}^{n-\text{codim } X} \end{aligned}$$

на многообразии V такие, что для любого $j = 1, \dots, p$ компонента $\mathcal{F}_j$ является ростком в нуле цилиндра, у которого

- 1) направляющей служит гиперповерхность $\Delta^j \subset \mathbb{R}^{\nu_j} = (q_0^j, \dots, q_{\nu_j-1}^j)$, образованная точками, для которых многочлен

$$t_j^{\nu_j+1} + q_{\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_1^j t_j + q_0^j$$

от t_j имеет кратный вещественный корень;

- 2) образующие коллинеарны плоскости $q_0^j = \dots = q_{\nu_j-1}^j = 0$.

Отсюда следует, что существуют разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 + \dots + \mathcal{A}^P$ и локальные координаты

$$(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{n_1}^1, \dots, \lambda_1^P, \dots, \lambda_{n_P}^P, z_1, \dots, z_{n-\text{codim } X}), \quad n_j = \nu_j - \text{codim } \mathcal{A}^j,$$

на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ такие, что в этих координатах росток $(\text{St}_1(\Phi_{\mathcal{A}}), \xi_m)$ является ростком в нуле объединения $\bigcup_{j=1}^P \Sigma_j$ гиперповерхностей Σ_j , которые определяются следующим образом:

- если $\mathcal{A}^j = \emptyset$, то $(\lambda_1^j, \dots, \lambda_{n_j}^j) = (q_0^j, \dots, q_{\nu_j-1}^j)$ и Σ_j является цилиндром, у которого направляющей служит фронт $\Delta^j \subset \mathbb{R}^{\nu_j} = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_{n_j}^j)$, а образующие коллинеарны плоскости $\lambda_1^j = \dots = \lambda_{n_j}^j = 0$;
- если $\mathcal{A}^j \neq \emptyset$, то Σ_j является цилиндром, у которого направляющей служит остов коразмерности 1 канонической стратификации характеристического многообразия особенности $\mathcal{A}^j$ фронта $\Delta^j \subset \mathbb{R}^{\nu_j} = (q_0^j, \dots, q_{\nu_j-1}^j)$, а образующие коллинеарны плоскости $\lambda_1^j = \dots = \lambda_{n_j}^j = 0$.

Теперь предложение 6.4 следует из предложения 6.2.

Теорема 4.7 является следствием предложения 6.4.

§ 7. Доказательство теоремы 3.5

Пусть $\mathcal{F}$ – фронт устойчивого лежандрова отображения $f: L \rightarrow V$ коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим произвольную правильную связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$. Через Γ обозначим край этой компоненты.

Зафиксируем произвольное натуральное μ и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq L$ особенности A_μ фронта $\mathcal{F}$, характеристическое отображение $\varphi_{A_\mu}: \Phi_{A_\mu} \rightarrow V$, фронт $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ и замыкание $\overline{(A_\mu)_\Gamma}$ многообразия $(A_\mu)_\Gamma$ особенностей A_μ гиперповерхности Γ . Через Ω обозначим полный прообраз множества $\overline{(A_\mu)_\Gamma}$ при отображении φ_{A_μ} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность A_ν в точке $x \in \overline{(A_\mu)_\Gamma}$, а компонента U является гиперболической (обобщенно-эллиптической) в этой точке. Тогда:

- 1) если $\nu = \mu$ или $\mu + 1$, то росток (Ω, ξ) множества Ω в точке $\xi = \varphi_{A_\mu}^{-1}(x)$ является ростком многообразия Φ_{A_μ} ;
- 2) если $\nu > \mu + 1$, то росток (Ω, ξ) является ростком замыкания связной компоненты дополнения $\Phi_{A_\mu} \setminus [A_\mu](\mathcal{F})$; эта компонента является гиперболической (обобщенно-эллиптической соответственно) в точке ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предложения 6.2, можно считать, что росток отображения f в точке ξ задается формулой

$$(f, \xi): (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q}, S(t, \bar{q}) - t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}) \right),$$

где

$$\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}), \quad S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_2t^2.$$

Тогда росток многообразия Φ_{A_μ} в этой точке задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0.$$

Росток (Ω, ξ) – росток в нуле замыкания множества точек $(t, \bar{q}) \in \Phi_{A_\mu} \setminus \Phi_{A_{\mu+1}}$, для которых функция

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u - t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q})$$

как многочлен от u имеет максимально возможное число простых вещественных корней (минимально возможное число вещественных корней с учетом их кратностей, если компонента U обобщенно-эллиптическая в точке x). Согласно лемме 5.5 последнее равносильно тому, что функция

$$\sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u - t)^{i-\mu}$$

как многочлен от $u - t$ имеет $\nu - \mu$ простых вещественных корней (соответственно не имеет вещественных корней, если $\nu - \mu$ четное, и имеет один простой вещественный корень, если $\nu - \mu$ нечетное).

Предложение 7.1 следует теперь из предложения 6.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Множество Ω является многообразием с краем. Каждая связная компонента этого многообразия представляет собой замыкание правильной связной компоненты дополнения $\Phi_{A_\mu} \setminus [A_\mu](\mathcal{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \Omega$ и фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ в точке $x = \varphi_{A_\mu}(\xi)$. Рассмотрим неприводимые компоненты $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ ростка $(\mathcal{F}, x)$ и предположим, что эти компоненты имеют в точке x особенности $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_p}$ соответственно. Как и при доказательстве предложения 6.4, выберем локальные координаты

$$(q_0^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p, z_1, \dots, z_{n-\text{codim } X}) \\ \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_p} \times \mathbb{R}^{n-\text{codim } X}$$

на многообразии V такие, что для любого $j = 1, \dots, p$ компонента $\mathcal{F}_j$ является ростком в нуле гиперповерхности $\Delta_{\nu_j}(n) \subset \mathbb{R}^n$, образованной точками, для которых многочлен

$$P_j(t_j) = t_j^{\nu_j+1} + q_{\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_1^j t_j + q_0^j$$

имеет кратный вещественный корень.

В этих координатах росток замыкания $\bar{U}$ области U в точке x является ростком в нуле пересечения $\bigcap_{j=1}^p \bar{U}_j$, где $\bar{U}_j$ – замыкание правильной связной компоненты U_j дополнения к гиперповерхности $\Delta_{\nu_j}(n)$. Каждая из этих компонент либо гиперболическая, либо обобщенно-эллиптическая независимо друг от друга.

Пусть, для определенности, $\mathcal{F}_1$ – фронт ростка многообразия L в точке ξ . Тогда набор

$$(t_1, q_{\mu+1}^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, q_0^2, \dots, q_{\nu_2-1}^2, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p, z_1, \dots, z_{n-\text{codim } X}) \in \mathbb{R}^{n-\mu}$$

определяет локальные координаты на многообразии Φ_{A_μ} в окрестности точки ξ . В этих координатах росток (Ω, ξ) является ростком в нуле пересечения $\bigcap_{j=1}^p \Omega_j$ подмножеств Ω_j в $\mathbb{R}^{n-\mu}$, которые определяются следующим образом:

- 1) Ω_1 – полный прообраз замыкания $\overline{(A_\mu)_{\Gamma_1}}$ многообразия особенностей A_μ на крае Γ_1 компоненты U_1 относительно ростка отображения φ_{A_μ} в точке ξ ;
- 2) если $j > 1$, то Ω_j – замыкание правильной связной компоненты дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{R}^{n-\mu}$, образованной точками, для которых многочлен P_j имеет кратный вещественный корень; эта компонента гиперболическая (обобщенно-эллиптическая), если компонента U_j гиперболическая (обобщенно-эллиптическая соответственно).

Предложение 7.2 следует теперь из предложения 7.1.

Теорема 3.5 является следствием предложений 7.2 и 6.4.

§ 8. Специальные фронты в $\mathbb{R}^n$

В этом параграфе построены некоторые специальные фронты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Они нужны для доказательства теоремы 1.10.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть $\mathcal{F}$ – компактный устойчивый фронт коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, где $n > 2$. Предположим, что дополнение к $\mathcal{F}$ имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую) ограниченную связную компоненту U , край Γ которой состоит из точек нескольких неприводимых компонент фронта $\mathcal{F}$. Тогда существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ такой, что дополнение к $\tilde{\mathcal{F}}$ имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую соответственно) ограниченную связную компоненту, край $\tilde{\Gamma}$ которой удовлетворяет следующему условию: многообразие $\mathcal{A}_{\tilde{\Gamma}}$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности $\tilde{\Gamma}$ совпадает с многообразием $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности Γ для любого $\mathcal{A} \neq A_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что гиперповерхность Γ состоит из точек k неприводимых компонент $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ фронта $\mathcal{F}$, где $k \geq 2$. Тогда найдутся C^∞ -вложенные кривые $\gamma_i: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k-1$, такие, что:

- 1) каждая кривая γ_i пересекает фронт $\mathcal{F}$ ровно в двух гладких точках P_i^1, P_i^2 , причем трансверсально;
- 2) $P_i^1 = \gamma_i(t_1) \in \mathcal{F}_i$, а $P_i^2 = \gamma_i(t_2) \in \mathcal{F}_{i+1}$, где $a < t_1 < t_2 < b$ и $\gamma_i(t_1, t_2) \subset U$;
- 3) кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ попарно не пересекаются.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестности O_i кривых γ_i в $\mathbb{R}^n$. Если ε достаточно мало, то замыкания $\overline{O}_1, \dots, \overline{O}_{k-1}$ этих окрестностей попарно не пересекаются; каждое пересечение $\overline{O}_i \cap \mathcal{F}$ состоит только из гладких точек фронта $\mathcal{F}$ и имеет ровно две связные компоненты $D_i^1 \ni P_i^1, D_i^2 \ni P_i^2$; подмножества $D_i^1, D_i^2 \subset \mathbb{R}^n$ являются гладко вложенными замкнутыми $(n-1)$ -мерными дисками с гладкими краями $\partial D_i^1, \partial D_i^2$ (диффеоморфными $(n-2)$ -мерной сфере S^{n-2});

каждое пересечение $C_i = \partial O_i \cap \bar{U}$, где ∂O_i – граница окрестности O_i , а $\bar{U}$ – замыкание компоненты U , является гладко вложенным цилиндром $S^{n-2} \times [t_1, t_2]$.

Следовательно, искомый фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ можно получить из множества

$$\left(\left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i \right) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (D_i^1 \cup D_i^2) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \right)$$

путем стандартного сглаживания (использующего разбиение единицы) в малых окрестностях сфер $\partial D_i^1, \partial D_i^2, i = 1, \dots, k-1$. Предложение 8.1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ является связной суммой фронтов $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ (см. [15]). Это суммирование проведено так, чтобы дополнение к фронту $\tilde{\mathcal{F}}$ имело связную компоненту с необходимыми нам свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, где $\mu_1 + \dots + \mu_m = n > 1$. Тогда существуют неприводимые компактные устойчивые фронты $\Sigma^-(\mathcal{A})$ и $\Sigma^+(\mathcal{A})$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ такие, что:

- 1) дополнение к $\Sigma^-(\mathcal{A})$ ($\Sigma^+(\mathcal{A})$) имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую) ограниченную связную компоненту U^- (U^+ соответственно); если все кратности $\mu_1, \dots, \mu_m$ нечетные, то компонента U^+ эллиптическая;
- 2) край любой из компонент U^- , U^+ имеет ровно две особенности $\mathcal{A}$ и не имеет других изолированных особенностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ утверждение очевидно. Подходящими фронтами являются, например, следующие кривые на плоскости x, y :

$$\begin{aligned} \Sigma^-(2A_1) = \Sigma^+(2A_1): \quad x &= \sin t, & y &= \cos 3t; \\ \Sigma^-(A_2): \quad x &= \sin t, & y &= \cos^3 t; \\ \Sigma^+(A_2): \quad x &= \frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^6 t}, & y &= \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t + \cos^6 t}. \end{aligned}$$

Поэтому далее до конца доказательства этого утверждения мы будем предполагать, что $n > 2$.

Пусть Σ_i – фронт в

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(\lambda_0^1, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1, \dots, \lambda_0^m, \lambda_1^m, \dots, \lambda_{\mu_m-1}^m, \lambda_*)\},$$

образованный точками, для которых многочлен

$$t^{\mu_i+1} + \lambda_{\mu_i-1}^i t^{\mu_i-1} + \dots + \lambda_1^i t + \lambda_0^i$$

от t имеет кратный вещественный корень. Через U_i^- (U_i^+) обозначим гиперболическую (обобщенно-эллиптическую соответственно) правильную связную компоненту дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma_i$.

Легко видеть, что гиперповерхность $\Sigma = \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$ является устойчивым фронтом коранга 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Множества $U^- = \bigcap_{i=1}^m U_i^-$ и $U^+ = \bigcap_{i=1}^m U_i^+$ являются

правильными связными компонентами дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma$ (гиперболической и обобщенно-эллиптической соответственно).

Рассмотрим стандартную сферу S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в нуле. Пересечение $\Sigma \cap S^n$ является компактным устойчивым фронтом коранга 1 на S^n . Этот фронт имеет ровно две изолированные особенности, и обе они являются особенностями $\mathcal{A}$.

Пересечения $U^- \cap S^n$ и $U^+ \cap S^n$ являются гиперболической и обобщенно-эллиптической соответственно связными компонентами дополнения $S^n \setminus (\Sigma \cap S^n)$. Край любой из них содержит обе особенности $\mathcal{A}$ фронта $\Sigma \cap S^n$. Компонента $U^+ \cap S^n$ является эллиптической, если все числа $\mu_1, \dots, \mu_m$ нечетные.

Зафиксируем произвольную точку $P \in S^n$ и рассмотрим гиперплоскость π в $\mathbb{R}^{n+1}$, касающуюся сферы S^n в точке, диаметрально противоположной P . Через σ_P обозначим стереографическую проекцию гиперплоскости π на S^n с полюсом P .

Прообраз фронта $\Sigma \cap S^n$ и прообраз множества $U^- \cap S^n$ относительно проекции σ_P , где $P \in S^n \setminus (\Sigma \cup U^-)$ (прообраз фронта $\Sigma \cap S^n$ и прообраз множества $U^+ \cap S^n$ относительно проекции σ_P , где $P \in S^n \setminus (\Sigma \cup U^+)$) являются фронтом в $\mathbb{R}^n$ и гиперболической (обобщенно-эллиптической соответственно) ограниченной связной компонентой его дополнения, которые обладают всеми нужными свойствами, кроме неприводимости фронта. Предложение 8.3 следует теперь из предложения 8.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, где $1 < c = \mu_1 + \dots + \mu_m \leq n$. Тогда существуют неприводимые компактные устойчивые фронты $\Sigma_n^-(\mathcal{A})$ и $\Sigma_n^+(\mathcal{A})$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ такие, что:

- 1) дополнение к $\Sigma_n^-(\mathcal{A})$ ($\Sigma_n^+(\mathcal{A})$) имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую) ограниченную связную компоненту U^- (U^+ соответственно); если все кратности $\mu_1, \dots, \mu_m$ нечетные, то компонента U^+ эллиптическая;
- 2) край любой из компонент U^- , U^+ не имеет особенностей коразмерности выше c , а все его особенности коразмерности c являются особенностями $\mathcal{A}$;
- 3) многообразие, образованное особенностями $\mathcal{A}$ края любой из компонент U^- , U^+ , диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c < n$, то искомые фронты диффеоморфны фронтам $\Sigma^-(\mathcal{A}) \times S^{n-c}$ и $\Sigma^+(\mathcal{A}) \times S^{n-c}$ в прямом произведении $\mathbb{R}^c \times S^{n-c}$, где $\Sigma^-(\mathcal{A})$ и $\Sigma^+(\mathcal{A})$ — неприводимые компактные устойчивые фронты коранга 1 в $\mathbb{R}^c$, обладающие свойствами 1), 2) из предложения 8.3, а S^{n-c} — сфера размерности $n - c$. Если же $c = n$, то предложение 8.4 вытекает из предложения 8.3 при помощи следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. Пусть $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ — неприводимые компактные устойчивые фронты коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Предположим, что эти фронты расположены в k попарно не пересекающихся открытых шарах в $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что для каждого $i = 1, \dots, k$ дополнение к фронту $\mathcal{F}_i$

имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую) ограниченную связную компоненту U_i с краем Γ_i . Тогда существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\mathcal{F}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ такой, что дополнение к $\mathcal{F}$ имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую соответственно) ограниченную связную компоненту, край Γ которой обладает следующими свойствами:

- 1) многообразие $\mathcal{A}_\Gamma$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхности Γ совпадает с (несвязным) объединением многообразий $\mathcal{A}_{\Gamma_1}, \dots, \mathcal{A}_{\Gamma_k}$ особенностей $\mathcal{A}$ гиперповерхностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ для любого $\mathcal{A} \neq A_1$;
- 2) эйлерова характеристика многообразия $(A_1)_\Gamma$ особенностей A_1 гиперповерхности Γ меньше суммы эйлеровых характеристик многообразий $(A_1)_{\Gamma_1}, \dots, (A_1)_{\Gamma_k}$ особенностей A_1 гиперповерхностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ на $k-1$ эйлерову характеристику $(n-1)$ -мерной сферы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_k$ и $k \geq 2$. Тогда найдутся C^∞ -вложенные кривые $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k-1$, такие, что:

- 1) они пересекают фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ только в гладких точках и только трансверсально;
- 2) каждая кривая γ_i пересекает только две гиперповерхности из $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, а именно Γ_i и Γ_k ;
- 3) кривая γ_i пересекает каждую из гиперповерхностей Γ_i, Γ_k ровно в одной точке: $P_i^1 = \gamma_i(t_1) \in \Gamma_i$ и $P_i^2 = \gamma_i(t_2) \in \Gamma_k$, где $a < t_1 < t_2 < b$;
- 4) кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ попарно не пересекаются.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестности $O_\varepsilon(\gamma_i)$ кривых γ_i в $\mathbb{R}^n$. Если ε достаточно мало, то замыкания $\overline{O}_\varepsilon(\gamma_1), \dots, \overline{O}_\varepsilon(\gamma_{k-1})$ этих окрестностей попарно не пересекаются; каждое пересечение $\overline{O}_\varepsilon(\gamma_i) \cap \tilde{\mathcal{F}}$ состоит только из гладких точек фронта $\tilde{\mathcal{F}}$ и имеет $p_i \geq 2$ связных компонент $D_i^j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, p_i$, где $D_i^1(\varepsilon) \ni P_i^1$, $D_i^2(\varepsilon) \ni P_i^2$; каждое подмножество $D_i^j(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ является гладко вложенным замкнутым $(n-1)$ -мерным диском с гладким краем $\partial D_i^j(\varepsilon)$ (диффеоморфным $(n-2)$ -мерной сфере S^{n-2}); каждая разность $C_i(\varepsilon) = \partial O_\varepsilon(\gamma_i) \setminus (U_i \cup U_k)$, где $\partial O_\varepsilon(\gamma_i)$ — граница окрестности $O_\varepsilon(\gamma_i)$, является гладко вложенным цилиндром $S^{n-2} \times [t_1, t_2]$.

Зафиксируем любое такое ε и выберем гладко вложенные замкнутые $(n-1)$ -мерные диски $\tilde{D}_i^j(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 3, \dots, p_i$, в $\mathbb{R}^n$, которые не пересекают гиперповерхности $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ и множества $\overline{O}_{\varepsilon/2}(\gamma_1), \dots, \overline{O}_{\varepsilon/2}(\gamma_{k-1})$, но $\partial \tilde{D}_i^j(\varepsilon) = \partial D_i^j(\varepsilon)$ для всех i, j . Тогда искомый фронт получается из множества $(\tilde{\mathcal{F}} \setminus D) \cup C$, где

$$D = \bigcup_{i=1}^{k-1} \left(D_i^1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup D_i^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup D_i^3(\varepsilon) \cup \dots \cup D_i^{p_i}(\varepsilon) \right),$$

$$C = \bigcup_{i=1}^{k-1} \left(C_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \tilde{D}_i^3(\varepsilon) \cup \dots \cup \tilde{D}_i^{p_i}(\varepsilon) \right),$$

путем стандартного сглаживания (использующего разбиение единицы) в малых окрестностях сфер $\partial D_i^1(\varepsilon/2), \partial D_i^2(\varepsilon/2), \partial D_i^3(\varepsilon), \dots, \partial D_i^{p_i}(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, k-1$, с последующей малой деформацией дисков $\tilde{D}_i^3(\varepsilon), \dots, \tilde{D}_i^{p_i}(\varepsilon)$ вне этих окрестностей. Предложение 8.5 доказано.

§9. Доказательство теоремы 1.10

Пусть $n > 1$ и список особенностей $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ сформирован по неубыванию их коразмерностей. В частности, $\mathcal{A}^1 = A_1$ при нечетном n и $\mathcal{A}^1 = 2A_1$ при четном n .

Зафиксируем неприводимые компактные устойчивые фронты

$$\Sigma_n^-(\mathcal{A}^2), \Sigma_n^+(\mathcal{A}^2), \dots, \Sigma_n^-(\mathcal{A}^N), \Sigma_n^+(\mathcal{A}^N)$$

коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, обладающие свойствами 1)–3) из предложения 8.4 для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^N$ соответственно. Через $\Sigma_n^-(\mathcal{A}^1), \Sigma_n^+(\mathcal{A}^1)$ обозначим аналогичные фронты для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1$, если n четное, и $(n-1)$ -мерные торы, гладко вложенные в $\mathbb{R}^n$, если n нечетное.

Дополнение к любому фронту $\Sigma_n^-(\mathcal{A}^i)$ ($\Sigma_n^+(\mathcal{A}^i)$), $i = 1, \dots, N$, имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую соответственно) ограниченную связную компоненту, край Γ_i^- (Γ_i^+) которой не имеет особенностей коразмерности выше $\text{codim } \mathcal{A}^i$, а все его особенности коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}^i$ являются особенностями $\mathcal{A}^i$. Многообразие $(\mathcal{A}^i)_{\Gamma_i^-}$ ($(\mathcal{A}^i)_{\Gamma_i^+}$) особенностей $\mathcal{A}^i$ гиперповерхности Γ_i^- (Γ_i^+) диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - \text{codim } \mathcal{A}^i$, если $\mathcal{A}^i \neq A_1$, и является $(n-1)$ -мерным тором, если $\mathcal{A}^i = A_1$. Гиперповерхность Γ_i^+ имеет особенности только с нечетными кратностями, если все кратности особенностей $\mathcal{A}^i$ нечетные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10 для множества G_{hyp} . Пусть $\chi_{i,j}$ – эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_{\Gamma_i^-}$ особенностей $\mathcal{A}^j$ гиперповерхности Γ_i^- , где $i, j = 1, \dots, N$. Рассмотрим произвольные целые неотрицательные $k_1, \dots, k_N$ такие, что $k_1^2 + \dots + k_N^2 \neq 0$. Для любого $i = 1, \dots, N$ построим k_i фронтов $\mathcal{F}_{i,l}$, $l = 1, \dots, k_i$, в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфных фронту $\Sigma_n^-(\mathcal{A}^i)$ и таких, что каждый фронт $\mathcal{F}_{i,l}$ расположен в одном из $k_1 + \dots + k_N$ попарно не пересекающихся открытых шарах в $\mathbb{R}^n$.

К фронтам $\mathcal{F}_{i,l}$, $i = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, k_i$, применим предложение 8.5. Согласно этому утверждению существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\mathcal{F}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ такой, что:

- 1) дополнение к $\mathcal{F}$ имеет гиперболическую ограниченную связную компоненту;
- 2) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_{\Gamma}$ особенностей $\mathcal{A}^j$ края Γ этой компоненты равна $\sum_{i=1}^N k_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 2, \dots, N$;
- 3) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^1)_{\Gamma}$ особенностей $\mathcal{A}^1$ гиперповерхности Γ равна $\sum_{i=1}^N k_i (\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})) + \chi(S^{n-1})$, где $\chi(S^{n-1})$ – эйлерова характеристика $(n-1)$ -мерной сферы.

Рассмотрим полугруппу в линейном пространстве $\mathbb{R}^N$, состоящую из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^N k_i (\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})), \sum_{i=1}^N k_i \chi_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^N k_i \chi_{i,N} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $(k_1, \dots, k_N)$. Эта полугруппа порождена векторами

$$(\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1}), \chi_{i,2}, \dots, \chi_{i,N}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Покажем, что они линейно независимы.

Действительно, $(N \times N)$ -матрица M , строками которой служат эти векторы (в указанном выше порядке), является нижне-треугольной (по построению $\chi_{i,j} = 0$ при всех $j > i$). На ее главной диагонали стоят ненулевые числа:

$$\chi_{1,1} - \chi(S^{n-1}) = -2,$$

если $\mathcal{A}^1 = A_1$, и

$$\chi_{i,i} = 2\chi(S^{n-\text{codim } \mathcal{A}^i}) = 4$$

для любого $\mathcal{A}^i \neq A_1$ (напомним, что $\text{codim } \mathcal{A}^i \equiv n \pmod{2}$).

Таким образом, $\det M \neq 0$. Это доказывает теорему 1.10 для множества G_{hyp} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10 для множества G_{elr} . Рассмотрим список особенностей $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ и выпишем последовательно особенности $\mathcal{A}^{\alpha(1)}, \dots, \mathcal{A}^{\alpha(N_{\text{odd}})}$, имеющие только нечетные кратности. Через $\chi_{i,j}$ обозначим эйлерову характеристику многообразия $(\mathcal{A}^{\alpha(j)})_{\Gamma_{\alpha(i)}^+}$ особенностей $\mathcal{A}^{\alpha(j)}$ гиперповерхности $\Gamma_{\alpha(i)}^+$, $i, j = 1, \dots, N_{\text{odd}}$.

Аналогично предыдущему для любых целых неотрицательных $k_1, \dots, k_{N_{\text{odd}}}$ таких, что $k_1^2 + \dots + k_{N_{\text{odd}}}^2 \neq 0$, можно построить неприводимый компактный устойчивый фронт $\mathcal{F}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ такой, что:

- 1) дополнение к $\mathcal{F}$ имеет эллиптическую ограниченную связную компоненту;
- 2) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^{\alpha(j)})_{\Gamma}$ особенностей $\mathcal{A}^{\alpha(j)}$ края Γ этой компоненты равна $\sum_{i=1}^{N_{\text{odd}}} k_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 2, \dots, N_{\text{odd}}$;
- 3) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^{\alpha(1)})_{\Gamma}$ особенностей $\mathcal{A}^{\alpha(1)}$ гиперповерхности Γ равна $\sum_{i=1}^{N_{\text{odd}}} k_i (\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})) + \chi(S^{n-1})$.

Как и выше, подгруппа в линейном пространстве $\mathbb{R}^{N_{\text{odd}}}$, состоящая из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^{N_{\text{odd}}} k_i (\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})), \sum_{i=1}^{N_{\text{odd}}} k_i \chi_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^{N_{\text{odd}}} k_i \chi_{i,N_{\text{odd}}} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $(k_1, \dots, k_{N_{\text{odd}}})$, порождена N_{odd} линейно независимыми векторами

$$(\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1}), \chi_{i,2}, \dots, \chi_{i,N_{\text{odd}}}), \quad i = 1, \dots, N_{\text{odd}}.$$

Это доказывает теорему 1.10 для множества G_{elr} .

Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982.
2. Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М.: МЦНМО, 2000.
3. Казарян М. Э. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 45–70.
4. Седых В. Д. Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения // Функц. анализ и его прилож. 2003. Т. 37. № 2. С. 52–64.
5. Седых В. Д. Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 6. С. 735–739.
6. Мазер Дж. Стратификации и отображения // УМН. 1972. Т. 27. № 5. С. 85–118.
7. Kleiman S. L. Multiple-point formulas I: Iteration // Acta Math. 1981. V. 147. № 1–2. P. 13–49.
8. Marar W. L., Mond D. Multiple-point schemes for corank 1 maps // J. London Math. Soc. (2). 1989. V. 39. № 3. P. 553–567.
9. Goryunov V., Mond D. Vanishing cohomology of singularities of mappings // Compositio Math. 1993. V. 89. № 1. P. 45–80.
10. Romero Fuster M. C. Sphere stratifications and the Gauss map // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1983. V. 95. P. 115–136.
11. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k , C_k , F_4 и особенности эволют // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 91–105.
12. Lojasiewicz S. Ensembles semi-analitiques. Bure sur Yvette: IHES, 1965.
13. Wall C. T. C. Stratified sets: a survey // Lecture Notes in Math. 1971. V. 192. P. 133–140.
14. Закалюкин В. М. Особенности лагранжевых и лежандровых отображений // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1977.
15. Arnold V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Adv. in Sov. Math. 1994. V. 21. P. 33–91.

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина, г. Москва

Поступила в редакцию
07.04.2003 и 25.02.2004