Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Баралич, В. Н. Груйич, Кваситорические многообразия и малые накрытия над правильно окрашенными многогранниками: вложения и погружения, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 4, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:17:15

УДК 515.164.6

Д. Б. Баралич, В. Н. Груйич

Квазиторические многообразия и малые накрытия над правильно окрашенными многогранниками: вложения и погружения

Строятся малые накрытия и квазиторические многообразия над простыми n -мерными многогранниками, допускающими правильную раскраску гиперграней в n цветов. Вычисляются классы Штифеля–Уитни этих многообразий как препятствия к их вложению в евклидовы пространства. Самая большая размерность, необходимая для вложения, достигается в случае, если n – степень двойки.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: вложения, квазиторические многообразия, простые многогранники, раскраски, классы Штифеля–Уитни.

DOI: 10.4213/sm8401

§ 1. Введение

1.1. Раскраски простых многогранников. Выпуклый n -мерный многогранник *простой*, если в каждой его вершине сходятся в точности n гиперграней. *Правильной раскраской* простого n -мерного многогранника P^n в k цветов называется отображение

$$h: \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

его множества гиперграней такое, что $h(F_i) \neq h(F_j)$ для любых двух пересекающихся гиперграней. *Хроматическое число* $\chi(P^n)$ простого многогранника P^n – это наименьшее число k такое, что существует правильная раскраска многогранника P^n в k цветов. Хроматические числа симплекса Δ^n , куба I^n и пермutoэдра Π^n равны

$$\chi(\Delta^n) = n + 1, \quad \chi(I^n) = n, \quad \chi(\Pi^n) = n.$$

Очевидно, что для каждого простого многогранника $\chi(P^n) \geq n$. Хроматическое число многоугольника равно 2 или 3 в зависимости от четности числа его граней. По знаменитой теореме четырех красок хроматические числа 3-мерных простых многогранников равны 3 или 4. В общем случае, если $n \geq 4$, не всегда верно $\chi(P^n) \leq n + 1$. Более того, существуют простые многогранники такие, что их хроматические числа в точности равны числам их гиперграней. Циклические многогранники с m вершинами $C^n(m)$ являются примерами таких многогранников (см. [1; пример 0.6]).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки Республики Сербии (грант № 174020 и грант № 174034) и Министерства науки Республики Сербской, Боснии и Герцеговины (грант № 19/6-020/961-120/14).

Рис. 1. Раскраски куба и пермutoэдра

Мы рассматриваем класс n -мерных простых многогранников, допускающих правильную раскраску в n цветов. Обозначим этот класс через $\mathcal{C}$. Класс $\mathcal{C}$ замкнут по отношению к произведениям (см. [2; конструкция 1.9]) и связным суммам (см. [2; конструкция 1.10]). Также из каждого простого многогранника P^n срезанием по всем его граням получается простой многогранник Q^n , принадлежащий классу $\mathcal{C}$. Полное описание класса $\mathcal{C}$ получено в [3]. Простой n -многогранник P^n допускает правильную раскраску в n цветов тогда и только тогда, когда любая его двумерная грань имеет четное число ребер (см. [3; теорема 16]).

1.2. Малые накрытия и квазитопические многообразия. Квазитопические многообразия и их вещественные аналоги – малые накрытия введены М. Дэвисом и Т. Янушкиевичем в [4]. Их геометрические и алгебраические топологические свойства близко связаны с комбинаторикой простых многогранников. Следующие определения и понятия подробно изложены в книге [2]. Обозначим

$$G_d = \begin{cases} S^0, & d = 1, \\ S^1, & d = 2, \end{cases} \quad R_d = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & d = 1, \\ \mathbb{Z}, & d = 2, \end{cases} \quad \mathbb{K}_d = \begin{cases} \mathbb{R}, & d = 1, \\ \mathbb{C}, & d = 2, \end{cases}$$

где $S^0 = \{-1, +1\}$ и $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ есть мультипликативные подгруппы вещественных, соответственно комплексных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел и $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ есть кольцо вычетов по модулю два. Действие группы G_d^n на пространстве $\mathbb{K}_d^n$, определяемое как $(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$, называется стандартным. Пусть M^{dn} – гладкое dn -мерное G_d^n -многообразие. Действие группы G_d^n на многообразии M^{dn} является локально стандартным, если каждая точка из M^{dn} обладает G_d^n -инвариантной окрестностью слабо эквивариантно диффеоморфной некоторому открытому G_d^n -инвариантному подмножеству в $\mathbb{K}_d^n$ со стандартным действием группы G_d^n . Напомним, что два G_d^n -многообразия M_1^{dn} и M_2^{dn} называются слабо эквивариантно диффеоморфными, если существуют автоморфизм $\omega: G_d^n \rightarrow G_d^n$ и диффеоморфизм $f: M_1^{dn} \rightarrow M_2^{dn}$ такие, что

$$f(g \cdot x) = \omega(g) \cdot f(x)$$

для любых $g \in G_d^n$ и $x \in M_1^{dn}$. Гладкое dn -мерное G_d^n -многообразие M^{dn} с локально стандартным действием группы G_d^n , таковым что пространство орбит M^{dn}/G_d^n диффеоморфно как многообразию с углами простому n -многограннику P^n , называется *малым накрытием* над P^n , если $d = 1$, соответственно *кваситорическим многообразием* над P^n , если $d = 2$. Пусть $\pi: M^{dn} \rightarrow P^n$ есть проекция и $\{F_1, \dots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P^n . Прообразы $M_j^{d(n-1)} = \pi^{-1}(F_j)$ являются G_d^n -инвариантными подмногообразиями коразмерности d , называемыми *характеристическими подмногообразиями*. Каждому характеристическому подмногообразию $M_j^{d(n-1)}$ соответствует стационарная подгруппа $G(F_j) = G_{\lambda_j}$ ранга один, где $G_{\lambda_j} = \{(1, \dots, 1), ((-1)^{\lambda_{1j}}, \dots, (-1)^{\lambda_{nj}})\}$ для $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj}) \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \{0\}$, если $d = 1$, и $G_{\lambda_j} = \{(e^{2\pi i \lambda_{1j} t}, \dots, e^{2\pi i \lambda_{nj} t}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ для некоторого примитивного вектора $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$, определенного с точностью до знака, если $d = 2$. Таким образом, действие группы G_d^n на многообразии M^{dn} определяет *характеристическое отображение*

$$l_d: \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow R_d^n,$$

сопоставляющее гиперграням F_j многогранника P^n некоторый примитивный вектор $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj}) \in R_d^n$. Обозначим через $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ матрицу этих векторов. Тогда $\det \Lambda_{(V)} = \pm 1$ для каждой вершины $V \in P^n$, где $\Lambda_{(V)}$ – подматрица матрицы Λ , образованная векторами, соответствующими гиперграням, пересекающимся в этой вершине. Назовем пару (P^n, Λ) , удовлетворяющую указанному условию на подматрицы, *характеристической парой*. Из характеристической пары (P^n, Λ) многообразие M^{dn} восстанавливается с точностью до слабого эквивариантного диффеоморфизма следующим образом (см. [4] и [2; конструкция 6.18]). Пусть $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ – наименьшая грань, содержащая $q \in P^n$. Сопоставим точке q подгруппу $G(q) = G_{\lambda_{i_1}} \times \dots \times G_{\lambda_{i_k}}$. Положим $M(P^n, \Lambda) = G_d^n \times P^n / \sim$, где $(t_1, p) \sim (t_2, q)$, тогда и только тогда, когда $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in G(q)$.

Хотя не каждый простой многогранник допускает характеристическое отображение (см. [4; пример 1.15]), рассматриваемым многогранникам $P^n \in \mathcal{C}$ можно простым способом сопоставить характеристическую матрицу Λ , если каждый цвет $i \in \{1, \dots, n\}$ отождествим с вектором e_i стандартного базиса в R_d^n .

Кольцо когомологий малого накрытия и квазиторического многообразия M^{dn} , $d = 1, 2$, описывается следующим образом. Пусть $v_j = D[M_j^{d(n-1)}]$, $j = 1, \dots, m$, – когомологические классы, двойственные по Пуанкаре к фундаментальным классам характеристических подмногообразий. Характеристическая матрица $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ определяет следующие линейные формы

$$\theta_i := \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj})^t \in R_d^n$, $j = 1, \dots, m$. Пусть $\mathcal{J}$ – идеал в $R_d[v_1, \dots, v_m]$, порожденный элементами $\theta_1, \dots, \theta_n$, и $\mathcal{I}$ – идеал Стенли–Райснера многогранника P^n , порожденный такими мономами $v_{i_1} \dots v_{i_k}$, что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \emptyset$ в P^n ,

$i_1 < \dots < i_k$. Тогда для кольца когомологий имеет место изоморфизм (см. [4])

$$H^*(M^{dn}, R_d) \simeq R_d[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{J} + \mathcal{J}). \quad (1.1)$$

Формула (1.1) верна при $d = 2$ и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Полный класс Штифеля–Уитни задается следующей формулой Дэвиса–Янушкиевича:

$$w(M^{dn}) = \prod_{i=1}^m (1 + v_i) \in H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2), \quad (1.2)$$

где в случае $d = 2$ классы v_i представляют $\mathbb{Z}_2$ -ограничения соответствующих целочисленных классов.

1.3. Вложения и погружения. Вложения и погружения многообразий есть классический вопрос алгебраической и дифференциальной топологии. Мы рассматриваем вложения и погружения в гладкой категории. Пусть для многообразия M^n числа $\text{imm}(M^n)$ и $\text{em}(M^n)$ определены как наименьшие размерности евклидовых пространств, в которые это многообразие погружается, соответственно вкладывается. Согласно теореме Уитни для каждого гладкого многообразия M^n выполнено $\text{imm}(M^n) \leq 2n - 1$ и $\text{em}(M^n) \leq 2n$. С другой стороны, нормальные классы Штифеля–Уитни $\bar{w}_i$ являются препятствиями к вложениям и погружениям многообразий в евклидовы пространства. Напомним, что нормальные классы Штифеля–Уитни $\bar{w}_i(M^n)$ являются характеристическими классами стабильного нормального расслоения многообразия M^n .

ТЕОРЕМА 1 (см. [5]). *Пусть для гладкого многообразия M^n определено число $k = \max\{i \mid \bar{w}_i(M^n) \neq 0\}$. Тогда $\text{imm}(M^n) \geq n + k$ и $\text{em}(M^n) \geq n + k + 1$.*

Классы Штифеля–Уитни являются также препятствиями к так называемым вполне косым вложениям, введенным М. Гоми и С. Табачниковым в [6]. Многообразие M^n вполне косо вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, если любые две касательные прямые в различных точках многообразия M^n являются скрещивающимися прямыми в $\mathbb{R}^N$. В работе [6] доказано, что для числа $N(M^n)$, определенного как наименьшая размерность евклидовых пространств, в которые многообразие M^n вполне косо вкладывается, выполнено

$$2n + 2 \leq N(M^n) \leq 4n + 1.$$

Более точное ограничение снизу получено в [7].

ТЕОРЕМА 2 (см. [7; предложение 1, следствие 4]). *Если*

$$k = \max\{i \mid \bar{w}_i(M^n) \neq 0\},$$

то $N(M^n) \geq 2n + 2k + 1$.

Вложения и погружения квазиторических многообразий над кубами изучались в [8].

В статье доказываются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть n – степень двойки и P^n – простой выпуклый n -мерный многогранник, допускающий правильную раскраску в n цветов.

(1) Существует малое накрытие M^n над многогранником P^n , удовлетворяющее равенствам $\text{imm}(M^n) = 2n - 1$ и $\text{em}(M^n) = 2n$.

(2) Существует квазиторическое многообразие M^{2n} над многогранником P^n , удовлетворяющее неравенствам $\text{imm}(M^{2n}) \geq 4n - 2$ и $\text{em}(M^{2n}) \geq 4n - 1$, причем при $n \geq 3$ оба неравенства обращаются в равенства.

Мы построим многообразия M^n и M^{2n} из теоремы 3 явным образом. Используя комбинаторные свойства простого многогранника P^n и формулы Дэвиса–Янушкиевича (1.1) и (1.2), вычисляем кольца когомологий $H^*(M^{dn}, \mathbb{Z}_2)$, $d = 1, 2$, и классы Штифеля–Уитни $w_k(M^{dn})$, $d = 1, 2$. В случае когда n является степенью двойки, мы покажем, что классы $\bar{w}_{d(n-1)}(M^{dn})$, $d = 1, 2$, ненулевые. Это утверждение доказывает теорему 3. Также из этого утверждения и теоремы 2 для вполне косых вложений построенных многообразий немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если n – степень двойки, то

$$N(M^n) \geq 4n - 1, \quad N(M^{2n}) \geq 8n - 3.$$

Получаемые малые накрытия M^n являются новым классом многообразий, для которых число $N(M^n)$ равно $4n - 1$, $4n$ или $4n + 1$. До сих пор только вещественные проективные пространства являлись примерами многообразий с этим свойством (см. [7]).

В 1985 г. в работе [9] Р. Л. Коэн положительно разрешил знаменитую гипотезу о вложениях, доказывая, что каждое замкнутое n -многообразие для $n > 1$ вкладывается в $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$, где $\alpha(n)$ – количество единиц в двоичной записи числа n . Произведения вещественных проективных пространств являются примерами многообразий, размерности которых достигают ограничения сверху. Мы построим новые примеры такого вида в классе малых накрытий.

ТЕОРЕМА 4. Для каждого n существуют малое накрытие M^n и квазиторическое многообразие M^{2n} над некоторым простым n -мерным многогранником, допускающим правильную раскраску в n цветов, для которых выполнено

$$\begin{aligned} \text{imm}(M^n) &= 2n - \alpha(n), & \text{imm}(M^{2n}) &\geq 4n - 2\alpha(n), \\ \text{em}(M^n) &= 2n - \alpha(n) + 1, & \text{em}(M^{2n}) &\geq 4n - 2\alpha(n) + 1, \\ N(M^n) &\geq 4n - 2\alpha(n) + 1, & N(M^{2n}) &\geq 8n - 4\alpha(n) + 1. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что утверждение теоремы 4 выполнено для каждого простого n -мерного многогранника, правильно окрашенного в n цветов.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть P^n – простой выпуклый n -мерный многогранник, гиперграни которого допускают правильную раскраску в n цветов. Тогда существуют малое накрытие M^n и квазиторическое многообразие M^{2n} над многогранником P^n , удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \text{imm}(M^n) &= 2n - \alpha(n), & \text{em}(M^n) &= 2n - \alpha(n) + 1, \\ \text{imm}(M^{2n}) &\geq 4n - 2\alpha(n), & \text{em}(M^{2n}) &\geq 4n - 2\alpha(n) + 1. \end{aligned}$$

§ 2. Многообразие M^{dn}

2.1. Конструкция. Пусть P^n – простой многогранник такой, что хроматическое число $\chi(P^n) = n$ и $h: \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ – его правильная раскраска. Обозначим через $\mathcal{F}_j$ множество $h^{-1}(j)$. Каждая вершина $V \in P^n$ является пересечением n различно окрашенных гиперграней. Выберем произвольную вершину $V = H_1 \cap \dots \cap H_n$, где гипергрань H_i окрашена цветом i . Назначим каждой гипергранни H_i вектор $\lambda_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+1})^t$ и векторы $\lambda_F = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})^t$ остальным гиперграням $F \in \mathcal{F}_i \setminus \{H_i\}$. Соответствующая матрица Λ очевидно производит характеристическое отображение, потому что $\det \Lambda_{(V)} = 1$ для каждой вершины $V \in P^n$. Определим $M^{dn} = M(P^n, \Lambda)$ как многообразие, восстанавливающееся по характеристической паре (P^n, Λ) .

2.2. Кольцо когомологий. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – классы, двойственные по Пуанкаре характеристическим подмногообразиям, соответствующим гиперграням $H_1, \dots, H_n$. Для каждой гипергранни F многогранника P^n , кроме $H_1, \dots, H_n$, пусть v_F обозначает класс, двойственный по Пуанкаре характеристическому подмногообразию над F .

Кольцо когомологий многообразия M^{dn} определяется идеалом Стенли–Райснера $\mathcal{I}$ многогранника P^n и идеалом $\mathcal{J}$, порожденным линейными формами

$$\theta_i := \sum_{j=1}^i u_j + \sum_{F \in \mathcal{F}_i \setminus \{H_i\}} v_F, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Напомним, что

$$H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u_1, \dots, u_n, v_F | F \in \mathcal{F} \setminus \{H_1, \dots, H_n\}] / (\mathcal{I} + \mathcal{J}).$$

Из раскраски многогранника P^n легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для гиперграней $F, G \in \mathcal{F}_i \setminus \{H_i\}$, $F \neq G$ соответствующие классы удовлетворяют следующему соотношению в кольце когомологий $H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$:

$$v_F v_G = u_i v_F = u_i v_G = 0.$$

Из предложения 1 и (2.1) выводим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Следующие равенства выполнены в $H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$:

$$u_1^2 = 0, \quad u_2^2 = u_1 u_2, \quad \dots, \quad u_n^2 = u_1 u_n + \dots + u_{n-1} u_n. \quad (2.2)$$

Пусть F – одна из гиперграней многогранника P^n и v_F – соответствующий класс над F , даже если F является одной из $H_1, \dots, H_n$.

ЛЕММА 1. Пусть k – положительное целое число и h – правильная раскраска многогранника P^n . Тогда класс v_F^k нулевой или равен однородному многочлену $Q_k^F(u_1, \dots, u_{h(F)-1}, v_F)$ степени k , одночлены которого не содержат квадратов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h(F) = i$. Утверждение доказываем индукцией по k . Для $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $v_F^k = Q_k^F(u_1, \dots, u_{i-1}, v_F)$. Умножая на v_F^k соотношение

$$\sum_{j=1}^i u_j + \sum_{G \in \mathcal{F}_i \setminus \{H_i\}} v_G = 0$$

и применяя предложение 1, получаем

$$v_F^{k+1} = (u_1 + \dots + u_{i-1})Q_k^F(u_1, \dots, u_{i-1}, v_F).$$

Если $v_F^{k+1} = 0$, утверждение следует непосредственно. В противном случае очевидно, что $(u_1 + \dots + u_{i-1})Q_k^F(u_1, \dots, u_{i-1}, v_F)$ есть однородный многочлен степени $k+1$ от переменных $u_1, \dots, u_{i-1}, v_F$. Но из соотношений (2.2) следует, что

$$(u_1 + \dots + u_{i-1})Q_k^F(u_1, \dots, u_{i-1}, v_F) = Q_{k+1}^F(u_1, \dots, u_{i-1}, v_F),$$

где все слагаемые многочлена Q_{k+1}^F свободны от квадратов.

Из леммы 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Каждый класс $v_{F_{i_1}}^{r_1} \dots v_{F_{i_k}}^{r_k}$, не являющийся нулевым, равен однородному многочлену степени $r_1 + \dots + r_k$ от переменных $u_1, \dots, u_n, v_{F_{i_1}}, \dots, v_{F_{i_k}}$, все слагаемые которого свободны от квадратов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Класс $u_1 \dots u_n$ является фундаментальным когомологическим классом в кольце $H^{dn}(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{F}_V$ множество гиперграней, содержащих вершину $V \in P^n$. Пусть $V^* = \prod_{F \in \mathcal{F}_V} v_F$. Мы покажем, что $V^* = V'^*$ для любых двух вершин $V, V' \in P^n$. Для этого достаточно предположить, что вершины соединены ребром VV' . В этом случае имеем $\mathcal{F}_{V'} = \mathcal{F}_V \setminus \{G\} \cup \{G'\}$ для единственных гиперграней G и G' , окрашенных в один цвет. Если $h(G) = h(G') = i$, умножим на $\prod_{F \in \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'}} v_F$ соотношение

$$\sum_{j=1}^{i-1} u_j + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} v_F = 0.$$

Из предложения 1 получаем

$$(u_1 + \dots + u_{i-1}) \prod_{F \in \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'}} v_F + V^* + V'^* = 0.$$

В случае $i = 1$ мы получили требуемое равенство $V^* = V'^*$. В случае $i > 1$ для любого $1 \leq j < i$ имеем из предложений 1 и 2

$$u_j \prod_{F \in \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'}} v_F = \begin{cases} 0, & \text{если } H_j \notin \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'} \\ (u_1 + \dots + u_{j-1}) \prod_{F \in \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'}} v_F, & \text{если } H_j \in \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'}. \end{cases}$$

Тогда по индукции следует, что $u_j \prod_{F \in \mathcal{F}_V \cap \mathcal{F}_{V'}} v_F = 0$, $j = 1, \dots, i-1$, откуда снова $V^* = V'^*$.

Предположим теперь, что $u_1 \cdots u_n = 0$. Тогда из доказанного следует, что $V^* = 0$ для каждой вершины $V \in P^n$. Более того, в этом случае все dn -мерные классы когомологий исчезают, потому что по следствию 2 одночлены степени n , свободные от квадратов, линейно порождают $H^{dn}(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$. Но это противно известному факту, что $H^{dn}(M^{dn}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

2.3. Классы Штифеля–Уитни. Из предложения 1 следует, что полный класс Штифеля–Уитни можно представить в виде

$$w(M^{dn}) = \prod_{i=1}^n \prod_{F \in \mathcal{F}_i} (1 + v_F) = \prod_{i=1}^n \left(1 + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} v_F \right).$$

Применяя (2.1), получаем

$$w(M^{dn}) = (1 + u_1)(1 + u_1 + u_2) \cdots (1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}).$$

С целью доказательства главной теоремы 3 воспользуемся другим множеством образующих $t_1, \dots, t_n$, определенных следующим образом:

$$t_i = \sum_{j=1}^i u_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, имеем

$$w(M^{dn}) = (1 + t_1) \cdots (1 + t_{n-1}). \quad (2.3)$$

По предложению 2 классы $t_1^2, t_2^2 + t_1 t_2, \dots, t_n^2 + t_{n-1} t_n$ исчезают. Обозначим через $\mathcal{T}_n$ порожденный ими идеал. По предложению 3 класс $t_1 t_2 \cdots t_n$ также является фундаментальным классом.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что наивысший нормальный класс Штифеля–Уитни $\bar{w}_{d(n-1)}(M^{dn})$ ненулевой.

3.1. Нормальные классы Штифеля–Уитни. Классы Штифеля–Уитни и нормальные классы Штифеля–Уитни связаны соотношением

$$w(M^{dn}) \cdot \bar{w}(M^{dn}) = 1.$$

Из соотношения (2.3) получаем

ЛЕММА 2. *Полный класс Штифеля–Уитни $\bar{w}(M^{dn})$ выражается следующим образом:*

$$\bar{w}(M^{dn}) = (1 + t_1)(1 + t_2 + t_2^2) \cdots (1 + t_{n-1} + \cdots + t_{n-1}^{n-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из того, что $t_k^{k+1} = 0$ для всех $k = 1, \dots, n-1$. На самом деле, $t_k^{k+1} = (u_1 + \dots + u_k)^{k+1}$ является суммой одночленов вида $\sum u_{i_1}^{r_1} + \dots + u_{i_j}^{r_j}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k$ и $r_1 + \dots + r_k = k+1$. В свою очередь, эта сумма по следствию 2 и предложению 2 является суммой однородных многочленов степени $k+1$ вида $\sum Q_{k+1}(u_1, \dots, u_k)$. Но так как одночлены каждого многочлена в сумме свободны от квадратов, имеем $Q_{k+1}(u_1, \dots, u_k) = 0$.

Мы хотим определить наивысший ненулевой класс $\bar{w}_k(M^{dn})$. Для малых n вычислим $\bar{w}(M^{dn})$ непосредственно.

- ПРИМЕР 1.** 1) $\bar{w}(M^{d \cdot 2}) = 1 + t_1$;
 2) $\bar{w}(M^{d \cdot 3}) = 1 + (t_1 + t_2)$;
 3) $\bar{w}(M^{d \cdot 4}) = 1 + (t_1 + t_2 + t_3) + t_1 t_3 + t_1 t_2 t_3$;
 4) $\bar{w}(M^{d \cdot 5}) = 1 + (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) + (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_4) + (t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4)$.

3.2. Класс $\bar{w}_{d(n-1)}(M^{dn})$. Пусть M^{dn} и $M^{d(n+1)}$ – отмеченные многообразия, построенные, как в п. 2.1, из простых многогранников P_1^n и P_2^{n+1} , правильно окрашенных в n и $n+1$ цвет соответственно.

ЛЕММА 3. Кольцо $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}_n$ является подкольцом в кольце когомологий $H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$, порожденным элементами $t_1, \dots, t_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что $\mathcal{I}_n$ – это идеал всех соотношений между элементами $t_1, \dots, t_n$ в $H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$. Кольца $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}_n$ и $\mathbb{Z}_2[u_1, \dots, u_n]/\mathcal{U}_n$ изоморфны, где $\mathcal{U}_n$ – идеал, порожденный элементами u_i^2 и $u_i^2 + (u_1 + \dots + u_{i-1})u_i$, $i = 2, \dots, n$, из предложения 2. Достаточно доказать, что $\mathcal{U}_n$ – это идеал всех соотношений между элементами $u_1, \dots, u_n$ в $H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$.

По следствию 2 каждый однородный многочлен в $H^*(M^{dn}; \mathbb{Z}_2)$ выражается как сумма мономов, свободных от квадратов. Итак, пусть у нас есть соотношение

$$\sum_{j=1}^m u_{I_j} = 0,$$

где $I_j = \{a_{eq2.1} < \dots < a_{jk}\} \subset \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, m$, и $u_I = \prod_{i \in I} u_i$. Легко убедиться, что $u_1 \dots u_{i-1} u_i^2 = 0$, $i = 1, \dots, n$. Упорядочим множества лексикографически $I_1 < \dots < I_m$. Пусть $I_m = \{a_1 < \dots < a_k\}$ и $d_i = a_i - a_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$, где $a_0 = 0$. Определим элементы

$$U_i = \begin{cases} u_{a_{i-1}+1} \dots u_{a_i-1}, & d_i > 1, \\ 1, & d_i = 1, \end{cases}$$

где $i = 1, \dots, k$. Умножая соотношение на $U_1 \dots U_k$, получаем $u_1 \dots u_{a_k} = 0$, что противоречит тому, что $u_1 \dots u_n$ – фундаментальный класс.

Выполняя сокращения в равенстве из леммы 2, получаем, что каждый класс $\bar{w}_{dk}(M^{dn})$ выражается в кольце $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]/\mathcal{I}_n$ через многочлены $\bar{W}_k(t_1, \dots, t_n)$ степени k , все одночлены которых свободны от квадратов. Заметим, что вложение

$$i: \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n, t_{n+1}]$$

производит естественный мономорфизм

$$i^*: \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n] / \mathcal{T}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n, t_{n+1}] / \mathcal{T}_{n+1},$$

который в силу леммы 3 позволяет рассматривать полный класс Штифеля–Уитни $\bar{w}(M^{dn})$ как элемент кольца $H^*(M^{d(n+1)}; \mathbb{Z}_2)$. Полные классы Штифеля–Уитни $\bar{w}(M^{dn})$ и $\bar{w}(M^{d(n+1)})$ удовлетворяют следующему отношению в $H^*(M^{d(n+1)}; \mathbb{Z}_2)$:

$$\bar{w}(M^{d(n+1)}) = \bar{w}(M^{dn})(1 + t_n + \dots + t_n^n).$$

В явном виде

$$\bar{w}_{dk}(M^{d(n+1)}) = \bar{w}_{dk}(M^{dn}) + t_n \bar{w}_{d(k-1)}(M^{dn}) + \dots + t_n^k, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.1)$$

Напомним, что всегда $\bar{w}_{dn}(M^{dn}) = 0$ (см. [10]), откуда

$$\bar{w}_{dn}(M^{d(n+1)}) = t_n \bar{w}_{d(n-1)}(M^{dn}) + \dots + t_n^n = t_n \bar{w}_{d(n-1)}(M^{d(n+1)}). \quad (3.2)$$

Мы используем тот же прием, что и в [8]. Определим числа σ_n^k , $0 \leq k \leq n-1$, следующим образом

$$\sigma_n^k = \bar{W}_k(\underbrace{1, \dots, 1}_n) \pmod{2}.$$

Из (3.1) и (3.2) имеем $\sigma_{n+1}^k = \sum_{i=0}^k \sigma_n^i$ для всех $k = 1, \dots, n-1$ и $\sigma_{n+1}^n = \sigma_{n+1}^{n-1}$. По определению чисел σ_n^k , если $\sigma_n^k = 1$, то $\bar{w}_{dk}$ является суммой нечетного числа линейно независимых одночленов без квадратов, так что $\bar{w}_{dk}(M^{dn}) \neq 0$. Легко убедиться по индукции, что

$$\sigma_n^k \equiv \binom{n+k}{k} \pmod{2}.$$

В частности, если $n = 2^r$, получаем

$$\sigma_n^{n-1} \equiv \binom{2^r + (2^r - 1)}{2^r - 1} \equiv \binom{2^{r+1} - 1}{2^r - 1} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Следовательно,

$$\bar{w}_{d(n-1)}(M^{dn}) = t_1 t_2 \dots t_{n-1} \neq 0,$$

откуда из теоремы 1 получаем требуемые ограничения

$$\text{imm}(M^{dn}) \geq d(2n-1), \quad \text{em}(M^{dn}) \geq d(2n-1) + 1.$$

Для малого накрытия M^n из теоремы Уитни имеем $\text{imm}(M^n) = 2n-1$ и $\text{em}(M^n) = 2n$. Квазиторическое многообразие M^{2n} ориентируемо и поэтому вкладывается в $\mathbb{R}^{4n-1}$. Из леммы 2 вытекает, что $\bar{w}_2(M^{2n}) = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}$, откуда следует, что характеристический класс $\bar{w}_2(M^{dn}) \cdot \bar{w}_{2n-2}(M^{2n})$ исчезает. Если $n \geq 3$, из результата Масси [11; теорема V] выводим

$$\text{imm}(M^{2n}) = 4n - 2,$$

чем заканчиваем доказательство теоремы 3.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Пусть $n = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_t}$, $r_1 > r_2 > \dots > r_t \geq 0$, — двоичная запись числа n и $m_0 = 0$, $m_i = 2^{r_i}$, $i = 1, \dots, t$. Пусть дальше P^n — простой n -многогранник

$$P^n = P_1^{2^{r_1}} \times \dots \times P_t^{2^{r_t}},$$

где каждый $P_i^{2^{r_i}}$ является 2^{r_i} -окрашенным простым 2^{r_i} -многогранником. Очевидно, что P^n также n -окрашенный.

В § 3 мы построили многообразия $M^{d^{2^{r_i}}}$ над многогранниками $P_i^{2^{r_i}}$. Следуя [2; замечание, гл. 6.4], имеем, что $M^{dn} = M^{d^{2^{r_1}}} \times \dots \times M^{d^{2^{r_t}}}$ является G_d^n -многообразием над $P^n = P_1^{2^{r_1}} \times \dots \times P_t^{2^{r_t}}$. Полный класс Штифеля–Уитни многообразия M^{dn} легко вычисляется, пользуясь следующей формулой (см. [5; задача 4.A]):

$$w(M^{dn}) = w(M^{d^{2^{r_1}}}) \dots w(M^{d^{2^{r_t}}}) \in H^*(M^{dn}) \cong H^*(M^{d^{2^{r_1}}}) \otimes \dots \otimes H^*(M^{d^{2^{r_t}}}).$$

Соответствующий полный нормальный класс Штифеля–Уитни выражается через

$$\bar{w}(M^{dn}) = \bar{w}(M^{d^{2^{r_1}}}) \dots \bar{w}(M^{d^{2^{r_t}}}). \quad (4.1)$$

Пусть $\text{rank } w(M) := \max\{k \mid w_k(M) \neq 0\}$. Тогда из (4.1) имеем

$$\text{rank } \bar{w}(M^{dn}) = \sum_{i=1}^t \text{rank } \bar{w}(M^{d^{2^{r_i}}}) = \sum_{i=1}^t d(2^{r_i} - 1) = nd - \alpha(n)d.$$

Таким образом, теорема 4 вытекает из теорем 1 и 2.

Авторы выражают особую благодарность Т. Е. Панову и А. А. Гайфуллину за внимание к работе, а также рецензентам за полезные замечания.

Список литературы

- [1] Г. М. Циглер, *Теория многогранников*, МЦНМО, М., 2014, 568 с.; пер. с англ.: G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+370 pp.
- [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, 272 с.
- [3] M. Joswig, “Projectivities in simplicial complexes and colorings of simple polytopes”, *Math. Z.*, **240**:2 (2002), 243–259.
- [4] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.
- [5] Дж. Милнор, Дж. Стасеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979, 371 с.; пер. с англ.: J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. of Math. Stud., **76**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974, vii+331 pp.
- [6] M. Ghomi, S. Tabachnikov, “Totally skew embeddings of manifolds”, *Math. Z.*, **258**:3 (2008), 499–512.
- [7] D. Baralić, B. Prvulović, G. Stojanović, S. Vrećica, R. Živaljević, “Topological obstructions to totally skew embeddings”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364**:4 (2012), 2213–2226.

- [8] D. Baralić, “Immersions and embeddings of quasitoric manifolds over the cube”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **95**:109 (2014), 63–71.
- [9] R. L. Cohen, “The immersion conjecture for differentiable manifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **122**:2 (1985), 237–328.
- [10] W. S. Massey, “On the Stiefel–Whitney classes of a manifold”, *Amer. J. Math.*, **82**:1 (1960), 92–102.
- [11] W. S. Massey, “Normal vector fields on manifolds”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 33–40.

Джордже Б. Баралич

(Djordje B. Baralić)

Mathematical Institute,
Serbian Academy of Sciences and Arts,
Belgrade, Serbia

E-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

Поступила в редакцию

08.07.2014 и 26.12.2015

Владимир Н. Груйич

(Vladimir N. Grujić)

Faculty of Mathematics,
University of Belgrade, Serbia

E-mail: vgrujic@matf.bg.ac.rs