Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Авилов, Существование стандартных моделей рас-
слоений на коники над алгебраически незамкнутыми по-
лями, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:04:18

УДК 512.765

А. А. Авилов

Существование стандартных моделей расслоений на коники над алгебраически незамкнутыми полями

В работе доказывается аналог теоремы Саркисова о существовании стандартной модели расслоения на коники над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, для трехмерных расслоений на коники над произвольным полем характеристики нуль с действием конечной группы.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: расслоение на коники, элементарное преобразование Саркисова, программа минимальных моделей, бирациональная модель.

DOI: 10.4213/sm8403

§ 1. Введение

Мотивировкой настоящей работы является бирациональная классификация трехмерных многообразий над алгебраически незамкнутыми полями и многообразий с действием группы. Первый шаг к такой классификации дает программа минимальных моделей: любое трехмерное алгебраическое многообразие с помощью последовательности некоторых бирациональных преобразований можно привести или к многообразию с численно эффективным каноническим классом, или к многообразию, обладающему структурой расслоения на многообразия Фано с некоторыми дополнительными свойствами (см., например, [1; § 2.2] или [2]). Настоящая работа посвящена многообразиям, допускающим структуру расслоения на рациональные кривые. Алгебраические поверхности, обладающие структурой расслоения на рациональные кривые, хорошо изучены (см., например, работу [3]).

В 1982 г. В. Г. Саркисовым [4] было доказано, что для любого расслоения на коники над алгебраически замкнутым полем существует бирационально эквивалентное ему стандартное расслоение на коники – расслоение на коники, являющееся относительно минимальным плоским морфизмом гладких многообразий. Ранее для трехмерных расслоений на коники это утверждение было доказано А. А. Загорским [5] в 1977 г., однако в его доказательстве имелись неточности. Цель настоящей работы – доказать аналогичное утверждение для трехмерных расслоений на коники с действием конечной группы, определенных над произвольным полем характеристики нуль.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук (гранты № МК-6223.2012.1 и № МК-1192.2012.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00336 и № 12-01-31012).

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – произвольное поле характеристики нуль. Пусть X – геометрически неприводимое трехмерное алгебраическое многообразие над k , и пусть $f: X \dashrightarrow Y$ есть доминантное рациональное отображение с общим слоем, являющимся рациональной кривой над полем $k(Y)$. Предположим, что конечная группа G действует на X и Y бирациональными автоморфизмами так, что отображение f является эквивариантным. Тогда у f существует стандартная модель, т.е. существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \dashrightarrow & Y' \end{array}$$

где X' и Y' – гладкие проективные многообразия с действием группы G , отображения $X \dashrightarrow X'$ и $Y \dashrightarrow Y'$ бирациональны, f' – расслоение Мори на рациональные кривые, а все отображения эквивариантны.

Мы надеемся, что настоящая работа будет полезна для задачи бирациональной классификации трехмерных многообразий над алгебраически незамкнутыми полями и для изучения конечных подгрупп в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(k)$ (см. [6], [7]).

§ 2. Предварительные сведения

Далее все объекты определены над k – произвольным полем характеристики нуль. Будем говорить, что многообразие *геометрически неприводимо*, если оно является неприводимым после перехода к алгебраическому замыканию $\bar{k}$. Будем говорить, что кривая C над произвольным полем K *рациональна*, если $C \otimes_K \bar{K}$ бирационально изоморфна $\mathbb{P}_{\bar{K}}^1$.

2.1. Расслоения и регулярные коники. В этой работе мы пользуемся терминологией G -многообразий (см. [3]). Ниже мы дадим только самые необходимые определения.

Пусть G – конечная группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть G -многообразием (или *многообразием с действием группы G*) пару (X, ρ) , где X – алгебраическое многообразие, а $\rho: G \rightarrow \mathrm{Aut}_k(X)$ – гомоморфизм групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тройка (X, Y, f) , где X – геометрически неприводимое трехмерное многообразие, Y – геометрически неприводимая поверхность, а $f: X \dashrightarrow Y$ есть рациональное отображение, общий слой которого является геометрически неприводимой рациональной кривой над $k(Y)$, называется *расслоением на рациональные кривые* над базой Y . Будем называть расслоение (X, Y, f) *расслоением на коники*, если многообразие Y неособо, отображение f является проективным морфизмом, а схемный слой f над произвольной замкнутой точкой Y изоморфен конике в $\mathbb{P}^2$ (возможно, вырожденной).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группа G действует на расслоении (X, Y, f) , если на X и Y заданы структуры G -многообразий, а f является эквивариантным отображением. Расслоения с действием группы G будем называть G -расслоениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Расслоение на коники (X, Y, f) (с действием группы) называется *регулярным*, если отображение f является плоским морфизмом неособых многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [8; предложение 1.2]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть регулярное расслоение на коники. Тогда верны следующие утверждения.

1. Пучок $\mathcal{E} = f_* \mathcal{O}(-K_X)$ является локально свободным пучком ранга 3.
2. $\mathcal{O}(-K_X)$ – относительно очень обильный пучок, задающий вложение многообразия X в $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj}(S^* \mathcal{E})$, при этом каждый слой является коникой в соответствующей проективной плоскости.
3. Существует приведенная (вообще говоря, приводимая) кривая Δ_f со следующими свойствами:
 - (i) Δ_f имеет только нормальные пересечения в качестве особенностей;
 - (ii) пусть y – замкнутая точка Y , а X_y – слой над ней; тогда если $y \notin \Delta_f$, то X_y – гладкая коника, если $y \in \Delta_f - \text{Sing } \Delta_f$, то X_y – геометрически приводимая приведенная коника, если $y \in \text{Sing } \Delta_f$, то X_y – двойная прямая.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [8] это утверждение доказано для алгебраически замкнутого поля, но общий случай легко сводится к этому частному случаю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Образ вложения $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ из предложения 1 является вложенным расслоением на коники в смысле определения 7, и в данном случае кривая вырождения совпадает с дивизором вырождения (см. определение 8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Регулярное расслоение на коники (X, Y, f) с действием группы G называется *стандартным*, если многообразия X и Y проективны, а морфизм f является относительно минимальным, т.е. если для любого G -инвариантного G -неприводимого дивизора $D \subset Y$ прообраз $f^{-1}(D)$ является G -неприводимым дивизором на X (не представляется в виде суммы двух ненулевых эффективных G -инвариантных дивизоров). Это эквивалентно тому, что ранг эквивариантной части относительной группы Пикара $\rho(X/Y)^G$ равен 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. G -расслоения на рациональные кривые (X, Y, f) и (X', Y', f') называются *эквивалентными*, если существуют такие бирациональные G -эквивариантные отображения $\lambda: X \dashrightarrow X'$ и $\mu: Y \dashrightarrow Y'$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & X' \\ | & & | \\ f & & f' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\mu} & Y' \end{array}$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [4]). У любого расслоения на рациональные кривые (X, Y, f) над алгебраически замкнутым полем существует стандартная модель (X', Y', f') , т.е. стандартное расслоение на коники, эквивалентное исходному.

2.2. Вложенные расслоения на коники.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга 3 на неособой поверхности Y и $\tau: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow Y$ есть стандартная проекция. Тогда *вложенным расслоением на коники* называется такой неприводимый приведенный дивизор $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, что общий слой отображения $\tau|_X: X \rightarrow Y$ является коникой над $k(Y)$ (хотя слои над некоторыми замкнутыми точками могут быть двумерными).

Пусть $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга 3 на Y , $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$, а $\mathcal{M}$ – некоторый локально свободный пучок на Y ранга 1. Пусть нули сечения $\sigma \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^2 \otimes \tau^* \mathcal{M})$ образуют вложенное расслоение на коники. Ясно, что любое вложенное расслоение на коники представляется в таком виде для подходящих $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$. Кроме того, если (X, Y, f) – регулярное расслоение на коники и $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – антиканоническое вложение (см. предложение 1), можно положить $\mathcal{E} = f_* \mathcal{O}_X(-K_X)$, и тогда $\mathcal{M}$ имеет вид $\mathcal{M} = \det(\mathcal{E}^*) \otimes \mathcal{O}_Y(-K_Y)$ (подробности см. в [4]).

Существует естественный изоморфизм

$$H^0(Y, S^2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{M}) \cong H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^2 \otimes \tau^*(\mathcal{M})),$$

поэтому буквой σ будем обозначать также сечение пучка $S^2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{M}$, которое ввиду естественного мономорфизма $S^2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{M} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}^*, \mathcal{E} \otimes \mathcal{M})$ определяет морфизм пучков $q(\sigma): \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. Морфизм $q(\sigma)$, в свою очередь, определяет морфизм пучков $q_0(\sigma): \Lambda^3 \mathcal{E}^* \rightarrow \Lambda^3(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Дивизор $C \subset Y$ нулей морфизма расслоений

$$q_0(\sigma) \in H^0(Y, (\det \mathcal{E})^2 \otimes \mathcal{M}^3) \subset H^0(Y, \text{Hom}(\det \mathcal{E}^*, \det(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M})))$$

называется *дивизором вырождения* расслоения на коники.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Дивизор вырождения не всегда является приведенным в общем случае, однако он приведен для регулярных расслоений на коники (см. [4; следствие 1.9]).

2.3. Программа минимальных моделей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть X есть G -многообразие. Будем говорить, что X имеет *$G\mathbb{Q}$ -факториальные особенности*, если любой G -инвариантный дивизор Вейля является дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Проективное G -эквивариантное стягивание $f: X \rightarrow Y$ называется *G -расслоением Мори*, если X имеет не более чем $G\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, $\dim X > \dim Y$, $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, ранг относительной инвариантной группы Пикара $\text{Pic}(X/Y)^G$ равен 1, а антиканонический дивизор K_X относительно обилен.

ТЕОРЕМА 3 (относительная эквивариантная программа минимальных моделей; см. [1; § 2.2]). Пусть X – трехмерное G -многообразие с не более чем $G\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, а $f: X \rightarrow Y$ – проективный G -эквивариантный морфизм. Тогда с помощью последовательности

дивизориальных стягиваний и флипов можно получить морфизм $f': X' \rightarrow Y$, где X' также имеет не более чем $G\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, и либо дивизор $K_{X'}$ является относительно численно эффективным, т.е. X' является минимальной моделью над Y , либо морфизм f' пропускается через морфизм $g: X' \rightarrow Z$, где g есть G -расслоение Мори.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Линейная система дивизоров Вейля называется *подвижной*, если она не имеет неподвижных компонент. Пусть $\mathcal{L}_i$ – подвижные линейные системы на X и $\mathcal{L} = \sum l_i \mathcal{L}_i$ – их линейная комбинация. Бирациональный морфизм $Y \rightarrow X$ называется *лог-разрешением особенностей* пары $(X, \mathcal{L})$, если Y неособо, а прообразы всех линейных систем $\mathcal{L}_i$ не имеют базисных точек. Выберем общие дивизоры $D_i \in \mathcal{L}_i$. Будем говорить, что пара $(X, \mathcal{L})$ имеет *терминальные* (соответственно *канонические*) особенности, если для любого лог-разрешения особенностей $f: Y \rightarrow X$ в формуле

$$K_Y + D_Y = f^*(K_X + D) + \sum \lambda_j E_j,$$

где $D = \sum l_i D_i$, а D_Y – собственный прообраз D , имеем все $\lambda_j > 0$ (соответственно все $\lambda_j \geq 0$).

Нам понадобится следующая категория, введенная В. Алексеевым в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Категория $\mathbb{Q}LS$ состоит из пар $(X, \mathcal{L})$, где X есть $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие, а $\mathcal{L} = \sum l_i \mathcal{L}_i$ – сумма подвижных линейных систем с кратностями $(0 \leq l_i)$, причем пара $(X, \mathcal{L})$ является канонической, а многообразие X имеет терминальные особенности.

Согласно [9] в случае трехмерных многообразий в категории $\mathbb{Q}LS$ верны все основные теоремы и гипотезы программы минимальных моделей (теорема о конусе, теорема о стягивании, гипотеза о существовании флипов и гипотеза об обрыве цепочки флипов). Таким образом, в этой категории работает программа минимальных моделей. Если трехмерное многообразие X является G -многообразием, а линейные системы $\mathcal{L}_i$ суть G -инвариантные, то в категории $\mathbb{Q}LS$ работает также G -эквивариантная программа минимальных моделей (см. теорему 3).

Следующая теорема является G -эквивариантной версией частичного крепантного разрешения особенностей пары (см. [10; предложение 2.10]):

ТЕОРЕМА 4. Пусть G -многообразие X имеет $G\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, а $\mathcal{H}$ – G -инвариантная подвижная линейная система, имеющая базисные точки. Тогда существует G -многообразие Z с $G\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, экстремальное дивизориальное стягивание Мори $p: Z \rightarrow X$ (это значит, что антиканонический класс $-K_Z$ является p -обильным и ранг группы $\text{Pic}(Z/X)^G$ равен 1) и число c такое, что пара $(Z, c p_*^{-1} \mathcal{H})$ имеет канонические особенности и

$$K_Z + c p_*^{-1} \mathcal{H} = p^*(K_X + c \mathcal{H}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно подобрать такое положительное число c (оно называется *каноническим порогом*), что пара $(X, c\mathcal{H})$ каноническая, но не терминальная. Рассмотрим для пары $(X, c\mathcal{H})$ ее эквивариантное разрешение особенностей $(Y, c\mathcal{H}_Y)$ и применим к паре $(Y, (c + \varepsilon)\mathcal{H}_Y)$ эквивариантную относительно (для морфизма $Y \rightarrow X$) программу минимальных моделей в категории $\mathbb{Q}LS$. При подходящем выборе ε результатом программы минимальных моделей будет пара $(Y', c\mathcal{H}'_Y)$ такая, что исключительное множество отображения состоит в точности из дивизоров, крепантных для пары $(X, c\mathcal{H})$, причем особенности Y' терминальны. Применив далее эквивариантную относительно программу минимальных моделей для многообразия Y' , на последнем шаге мы имеем требуемую пару $(Z, cp_*^{-1}\mathcal{N})$ (детали см. в [9], [10; предложение 2.10]). Теорема доказана.

Также нам потребуется следующая теорема о структуре трехмерных расслоений Мори с двумерной базой, доказанная Ю. Г. Прохоровым и Ш. Мори:

ТЕОРЕМА 5 (см. [11; теорема 1.2.7]). *Пусть $f: X \rightarrow Z$ – трехмерное расслоение Мори над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль с двумерной базой, тогда Z может иметь только дювалевские особенности типа A .*

§ 3. Существование стандартной модели для расслоений на коники с действием группы над алгебраически незамкнутым полем

3.1. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть k – произвольное поле характеристики нуль. Пусть X – трехмерное алгебраическое многообразие над k , Y – поверхность над k , G – конечная группа, действующая бирациональными автоморфизмами на X и Y , и пусть $f: X \dashrightarrow Y$ – расслоение на рациональные кривые, причем отображение f является G -эквивариантным. Тогда (X, Y, f) имеет стандартную модель, т.е. стандартное G -расслоение на коники, эквивалентное исходному.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть расслоение (X, Y, f) удовлетворяет условиям теоремы. Тогда существует G -расслоение Мори на рациональные кривые (X', Y', f') , эквивалентное исходному, где X' и Y' проективны. При этом особенности X' не более чем терминальные, а особенности Y' дювалевы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя к открытым подмножествам, можно считать, что G действует на X и Y регулярными автоморфизмами, а X и Y нормальны. Фактормногообразия X/G и Y/G квазипроективны; обозначим через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ их проективные замыкания. Тогда нормализация $\bar{X}$ (соответственно $\bar{Y}$) в поле функций $k(X)$ (соответственно $k(Y)$) будет проективным многообразием, бирационально эквивалентным X (соответственно Y), на котором действие группы G будет регулярным. Таким образом, можно с самого начала предполагать, что X и Y проективны, а G действует на них регулярными автоморфизмами.

Применив эквивариантные разрешения особенностей многообразий Y , X и отображения f (это можно сделать; см. [12]), будем считать, что f – морфизм

неособых проективных многообразий, общий слой которого является рациональной кривой. Применив к этому расслоению относительную над Y эквивариантную программу минимальных моделей, мы получаем $G\mathbb{Q}$ -факториальное трехмерное многообразие X' с не более чем терминальными особенностями, причем выполняется одна из двух альтернативных возможностей: либо соответствующий морфизм $f': X' \rightarrow Y$ такой, что $K_{X'}$ относительно численно эффективен, либо f' пропускается через G -расслоение Мори $f'': X' \rightarrow Y'$. Поскольку изначально дивизор $-K_{f^{-1}(U)}$ является f -обильным для некоторого открытого подмножества U , над которым расслоение – гладкий морфизм, то первая возможность исключена. Из соображений размерности (X', Y', f') является расслоением Мори на рациональные кривые. Особенности X' не более чем терминальные, а Y' – поверхность с не более чем дювалаевыми особенностями по теореме 5. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть (X', Y', f') есть G -расслоение Мори над двумерной базой. Тогда оно эквивалентно G -расслоению на рациональные кривые $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{f})$, где $\tilde{Y}$ – гладкая поверхность, а все точки, над которыми $\tilde{f}$ не является гладким, лежат в некотором дивизоре с простыми нормальными пересечениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выкинув из Y' конечное число точек, а именно особые точки Y' и образы особых точек X' (особенности X' терминальны, а значит, изолированы), мы получаем открытое множество $U \subset Y'$, над которым наше расслоение является регулярным расслоением на коники, поэтому можно определить дивизор вырождения в U . Обозначим через Δ' его замыкание в Y' , этот дивизор приведен согласно замечанию 3. Рассмотрим эквивариантный морфизм $\tilde{\alpha}: \tilde{Y} \rightarrow Y'$ – эквивариантное разрешение особенностей пары (Y', Δ') . Тогда дивизор $\tilde{\Delta} = \Delta' + \text{Exc}(\tilde{\alpha})$ – приведенный дивизор с простыми нормальными пересечениями. Обозначим через $\tilde{X}$ эквивариантное разрешение особенностей доминантной компоненты $X' \times_{Y'} \tilde{Y}$ (предварительно нормализовав ее, если нужно), соответствующее отображение $\tilde{X}$ в $\tilde{Y}$ обозначим через $\tilde{f}$. Очевидно, что все вырожденные слои могут лежать только над точками кривой $\tilde{\Delta}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть (W, V, g) – G -расслоение Мори с двумерной базой. Пусть v – особая G -точка поверхности V . Тогда существует эквивалентное ему G -расслоение на рациональные кривые (W', V', g') , являющееся G -расслоением Мори, причем отображение $V' \rightarrow V$ является крепантным частичным разрешением особенности в G -точке v , а отображение $W \dashrightarrow W'$ является элементарным преобразованием Саркисова (см. [2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим такую линейную систему гиперплоских сечений $\mathcal{H}$ для некоторого подходящего вложения V в проективное пространство, что $\text{Bs}(\mathcal{H})$ совпадает с v , а $\mathcal{H}$ инвариантна относительно действия группы G . Для этого рассмотрим на V очень обильный дивизор D , инвариантный относительно действия группы. Тогда в качестве $\mathcal{H}$ можно рассмотреть подсистему дивизоров, проходящих через G -точку v в полной линейной системе $|nD|$ для достаточно большого n . Пусть $\mathcal{N} = g_*^{-1}(\mathcal{H})$ – прообраз $\mathcal{H}$, а c – канонический порог пары $(W, \mathcal{N})$. По теореме 4 у пары $(W, c\mathcal{N})$ существует частичное крепантное разрешение особенностей $(\tilde{W}, c\tilde{\mathcal{N}})$.

Рассмотрим теперь относительную над V эквивариантную программу минимальных моделей для пары $(\widetilde{W}, c\mathcal{N})$. Все кривые на исключительном дивизоре E отображения π численно пропорциональны и пересекаются с $K_{\widetilde{W}} + c\mathcal{N}$ по нулю по формуле проекции. Пусть $\widetilde{C}$ – достаточно общий слой отображения $h: \widetilde{W} \rightarrow V$, а C – слой отображения $W \rightarrow V$ над той же точкой, тогда по формуле проекции

$$\widetilde{C} \cdot (K_{\widetilde{W}} + c\mathcal{N}) = \widetilde{C} \cdot \pi^*(K_W + c\mathcal{N}) = C \cdot (K_W + c\mathcal{N}) = C \cdot K_W < 0,$$

где последнее равенство следует из выбора линейной системы. Значит, на конусе Мори $\text{NS}(\widetilde{W}/V)^G$ есть ровно один отрицательный экстремальный луч, причем его стягивание дает либо расслоение на рациональные кривые, либо малое стягивание (на самом деле первый случай невозможен, но это нам неважно).

Во втором случае после последовательности эквивариантных лог-флипов (она не может быть бесконечной, см. [1] или [2]) мы приходим к G -многообразию $\widetilde{W}'$ с G -эквивариантным морфизмом $h': \widetilde{W}' \rightarrow V$. Относительный G -инвариантный конус Мори $\text{NS}(\widetilde{W}'/V)^G$ порожден двумя лучами, ровно один из которых отрицателен, причем его стягивание является либо дивизориальным стягиванием, либо G -расслоением Мори. Предположим, что имеет место первый случай, тогда после стягивания мы получаем G -многообразие $\widehat{W}$ с морфизмом $\widehat{g}: \widehat{W} \rightarrow V$, причем этот морфизм является G -расслоением Мори над поверхностью. Но тогда W и $\widehat{W}$ являются G -расслоениями Мори над общей базой V , причем они изоморфны в коразмерности 1, поэтому на самом деле они изоморфны:

$$W \simeq \text{Proj}(\oplus \mathcal{O}_W(-nK_W)) \simeq \text{Proj}(\oplus \mathcal{O}_{\widehat{W}}(-nK_{\widehat{W}})) \simeq \widehat{W}.$$

Заметим, что исключительным дивизором стягивания может быть только образ дивизора E , поскольку по построению это единственный дивизор в слоях $h': \widetilde{W}' \rightarrow V$. Но тогда, с одной стороны, дивизор E крепантен для пары $(W, c\mathcal{N})$, а с другой – он не является крепантным, поскольку является исключительным дивизором стягивания отрицательного луча. Противоречие.

Значит, случай дивизориального стягивания невозможен, поэтому в любом случае мы получили G -расслоение Мори $\widetilde{g}: \widetilde{W} \rightarrow \widehat{V}$ с морфизмом $\sigma: \widehat{V} \rightarrow V$, по соображениям размерности оно является расслоением на рациональные кривые. Таким образом, имеем следующую коммутативную G -эквивариантную диаграмму, задающую элементарное преобразование Саркисова:

$$\begin{array}{ccc} (W, c\mathcal{N}) & \longleftarrow (\widetilde{W}, c\mathcal{N}) & \longrightarrow (\widehat{W}, c\mathcal{N}) \\ \downarrow g & & \downarrow \widehat{g} \\ V & \longleftarrow & \widehat{V} \end{array}$$

Более того, $\widehat{V}$ имеет только двувалевы особенности по теореме 5, а исключительное множество морфизма $\widehat{V} \rightarrow V$ состоит из одного G -инвариантного дивизора (исключительный дивизор морфизма $\pi: \widetilde{W} \rightarrow W$ не может целиком лежать в слое морфизма $\widehat{g}$). Согласно [13; теорема 1.4] этот морфизм может быть либо

композицией взвешенных раздутий гладких точек, либо крепантным частичным разрешением особенностей V . Первый случай невозможен, поскольку исключительный дивизор лежит над особой G -точкой v , а значит, поверхность $\hat{V}$ является крепантным частичным разрешением особенностей поверхности V . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (W, V, g) есть G -расслоение Мори с двумерной базой. Тогда существует эквивалентное ему G -расслоение на рациональные кривые (W', V', g') , являющееся G -расслоением Мори, причем поверхность V' является минимальным разрешением особенностей поверхности V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив лемму 3 несколько раз, мы придем к G -расслоению Мори над неособой двумерной базой, поскольку количество крепантных дивизоров на V конечно (все крепантные исключительные дивизоры реализуются на минимальном разрешении особенностей поверхности V). Следствие доказано.

ЛЕММА 4. Пусть расслоение $f: X \dashrightarrow Y$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда существует эквивалентное ему G -расслоение Мори $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ такое, что $\hat{Y}$ неособо, а кривая вырождения является приведенным дивизором с простыми нормальными пересечениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1, мы получим G -расслоение Мори $f': X' \rightarrow Y'$ эквивалентное исходному. Затем применим лемму 2 к G -расслоению $f': X' \rightarrow Y'$, имеем G -расслоение на рациональные кривые $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ такое, что $\tilde{Y}$ – гладкая поверхность, а все точки, над которыми морфизм $\tilde{f}$ не является гладким, лежат в дивизоре с простыми нормальными пересечениями. Применим относительную эквивариантную программу минимальных моделей к $\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$. Рассуждая так же, как в лемме 1, получаем, что результатом программы минимальных моделей будет G -расслоение на рациональные кривые $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ с морфизмом $\bar{\alpha}: \bar{Y} \rightarrow \tilde{Y}$. Особенности $\bar{X}$ будут терминальными, а особенности $\bar{Y}$ – дювелевыми.

Применим следствие 1 к G -расслоению $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$. Мы получаем G -расслоение Мори $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ с морфизмом $\hat{\alpha}: \hat{Y} \rightarrow \bar{Y}$. Возникает следующая коммутативная G -эквивариантная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \dashrightarrow & X' & \longleftarrow & \tilde{X} & \dashrightarrow & \bar{X} & \dashrightarrow & \hat{X} \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \hat{f} \\ Y & \dashleftarrow & Y' & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & \tilde{Y} & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & \bar{Y} & \xleftarrow{\hat{\alpha}} & \hat{Y} \end{array}$$

Рассмотрим дивизор $\hat{\Delta} = \tilde{\Delta} + \text{Exc}(\bar{\alpha} \circ \hat{\alpha})$, где $\tilde{\Delta}$ – дивизор, построенный в лемме 2. Тогда $\hat{\Delta}$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями, поскольку таким был дивизор $\tilde{\Delta}$, а $\bar{\alpha} \circ \hat{\alpha}$ – морфизм между гладкими проективными поверхностями. Дивизор вырождения расслоения $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{f})$ является приведенным дивизором, все компоненты которого содержатся в $\hat{\Delta}$. Обозначим этот дивизор вырождения через $\hat{\Delta}'$. Таким образом, $\hat{\Delta}'$ – приведенный дивизор с простыми нормальными пересечениями. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $g: W \rightarrow U$ – регулярное G -расслоение на коники, где U – открытое подмножество неособой поверхности V , причем дополнение $V \setminus U$ состоит из конечного числа точек. Тогда существует эквивалентное ему вложенное G -расслоение на коники $g': W' \rightarrow V$, изоморфное исходному над U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $j: U \rightarrow V$ естественное вложение. Тогда по предложению 1 антиканонический дивизор $-K_{W_U}$ задает вложение W_U в $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1)$, где $\mathcal{E}_1 = g_* \mathcal{O}_{W_U}(-K_{W_U})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. G -пучком называется квазикогерентный пучок E на G -многообразии Z с набором изоморфизмов пучков $\lambda_g^E: E \rightarrow g^*E$, удовлетворяющих соотношениям $\lambda_1^E = Id_E$ и $\lambda_{hf}^E = g^*(\lambda_h^E) \circ \lambda_f^E$.

Если E и F – два G -пучка, то на $\text{Hom}_Z(E, F)$ определено (правое) действие группы: $\theta^g = (\lambda_g^F)^{-1} \circ \theta \circ \lambda_g^E$. Возникают два естественных объекта: $\text{Qcoh}^G(Z)$ и $\text{coh}^G(Z)$ – категории, объектами в которых являются квазикогерентные и когерентные G -пучки соответственно, а морфизмами из E в F – подпространство $G\text{-Hom}_Z(E, F)$ G -инвариантных отображений. Функторы $\mathcal{H}om$ и $\otimes$ определены в $\text{Qcoh}^G(Z)$ и $\text{coh}^G(Z)$ естественным образом. Если есть G -эквивариантный морфизм G -многообразий $h: Z \rightarrow T$, то функторы h^* и h_* являются также и функторами между соответствующими категориями G -пучков.

Заметим, что дуализирующий пучок ω_{W_U} имеет естественную структуру G -пучка на W_U , она индуцирует структуру G -пучка на антиканоническом пучке, следовательно, на локально свободном пучке $\mathcal{E}$ имеется естественная структура G -пучка. Рассмотрим пучок $\mathcal{E} = (j_* \mathcal{E}_1)^{**}$. Он является локально свободным пучком ранга 3 (он рефлексивен, а на неособой поверхности любой рефлексивный пучок является локально свободным, см. [14]) на V , причем на нем также есть структура G -пучка. Более того, это единственный локально свободный пучок, продолжающий $\mathcal{E}_1$ на всю поверхность V . Обозначим через W' замыкание W_U в $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Это вложенное расслоение на коники, на котором определено действие группы G . Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $h: W \rightarrow V$ – трехмерное G -расслоение Мори над двумерной базой, причем V неособо, а дивизор вырождения Δ является приведенным дивизором с простыми нормальными пересечениями. Тогда существует такой локально свободный G -пучок $\mathcal{E}$ ранга 3 на V и такое эквивариантное вложение $W \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ над V , что W является вложенным G -расслоением на коники.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если W неособо, то утверждение доказано (см. [15]). Если же оно особо, то его особенности терминальны. Поскольку трехмерные терминальные особенности изолированы, можно применить лемму 5 (для U , являющегося дополнением до образа множества особых точек W). Обозначим через $W' \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow V$ соответствующее вложенное G -расслоение на коники. Поскольку $V \setminus U$ – конечный набор точек, дивизор вырождения G -расслоения на коники (W', V, h') совпадает с Δ .

Проверим, что морфизм h' плоский. Над некоторой окрестностью B произвольной точки $v \in V$ расслоение W' задается квадратичной формой

$$Q_B(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} x_i x_j$$

в $\mathbb{P}^2 \times B$, где $A_{i,j}$ – функции из $k[B]$. Если ранг этой формы в v равен нулю, то все $A_{i,j}$ обнуляются в v , а значит, $\det Q_B$ лежит в $\mathfrak{m}_y^3$, где $\mathfrak{m}_y$ – максимальный идеал точки v . Но $\det Q_B$ задает дивизор вырождения, а он имеет в точке v не более чем простое нормальное пересечение, значит, ранг формы Q_B не может обнулиться. Многообразие W' является нормальным локально полным пересечением, поэтому из того, что морфизм h' равноразмерный, следует, что он плоский. Как следствие, многообразия W и W' изоморфны над V в коразмерности 1. Антиканонические дивизоры $-K_W$ и $-K_{W'}$ обильны, поэтому на самом деле

$$W \simeq \text{Proj}(\oplus \mathcal{O}_W(-nK_W)) \simeq \text{Proj}(\oplus \mathcal{O}_{W'}(-nK_{W'})) \simeq W'.$$

Таким образом, W является вложенным G -расслоением на коники, причем дивизор вырождения приведен и имеет только простые нормальные пересечения в качестве особенностей. Лемма доказана.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Применив лемму 4, мы получаем G -расслоение Мори $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, причем поверхность $\hat{Y}$ неособа, а дивизор вырождения $\hat{\Delta}$ является приведенным дивизором с простыми нормальными пересечениями. По лемме 6 оно является вложенным (в проективизацию некоторого локально свободного пучка ранга 3) G -расслоением на коники. Если $\hat{X}$ неособо, то теорема доказана (см. [15]). Пусть теперь $\hat{X}$ особо. Будем последовательно разрешать его особенности элементарными преобразованиями Саркисова.

ЛЕММА 7. Пусть $h: W \rightarrow V$ – вложенное расслоение на коники, причем поверхность V неособа (но не обязательно проективна), а дивизор вырождения Γ этого расслоения приведен и имеет только простые нормальные пересечения. Тогда все особые точки W – обыкновенные двойные. Более того, если $\pi: \tilde{W} \rightarrow W$ – раздутие максимальных идеалов особых точек, то $\tilde{W}$ неособо, а антиканонический дивизор $-K_{\tilde{W}}$ относительно численно эффективен и обремен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно Саркисову (см. [4; следствие 1.11]) особые точки W лежат в тех слоях расслоения над особыми точками Γ , которые являются геометрически приводимыми кониками. Пусть w – особая точка W , а $v = h(w)$. Покажем, что в некоторой формальной окрестности точки v расслоение $W \rightarrow V$ можно задать квадратичной формой

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + stx_3^2 = 0, \quad (3.1)$$

где s и t – функции, локально задающие компоненты Γ , проходящие через v , а a и b – некоторые ненулевые элементы поля k .

Рассмотрим такую окрестность U точки v , что над ней тривиально расслоение, в проективизацию которого вложено W , и пересечение $U \cap \Gamma$ состоит из

двух компонент, проходящих через v . Тогда над ней W задается квадратичной формой

$$Q_U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} x_i x_j$$

в $\mathbb{P}^2 \times U$, где $A_{i,j}$ – функции из $k[U]$. Над точкой v эта квадратичная форма задает геометрически приводимую конику, поэтому линейной заменой координат x_i (с коэффициентами из k) можно добиться того, что $A_{1,1}(v) = a \neq 0$, $A_{2,2} = b \neq 0$, а все остальные $A_{i,j}$ равны нулю в точке v . Приведя после этого квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и уменьшив окрестность U , если необходимо, получим, что W задается в $\mathbb{P}^2 \times U$ квадратичной формой

$$Q'_U(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2,$$

где A, B, C лежат в $k[U]$, причем $A(v) = a$, $B(v) = b$. Но мы знаем, что $\det Q'_U$ задает дивизор Γ в U , значит, $C = stC'$, где $C'(v) = 1$. Осталось заметить, что в формальной окрестности из любого ряда со свободным членом, равным 1, можно извлечь квадратный корень. Теперь первое утверждение леммы легко следует из явной формулы (3.1), локально задающей W .

Последнее утверждение локально по базе. Рассмотрим его над окрестностью точки v , не содержащей других точек, в слоях над которыми имеются особенности. Тогда на конусе Мори $\text{NS}(\widetilde{W}/V)$ есть два экстремальных луча R_1 и R_2 . Луч R_1 порожден кривой на исключительном дивизоре E морфизма π и пересекается с $K_{\widetilde{W}}$ отрицательно, а R_2 порожден собственным прообразом $\pi^{-1}(l)$ слоя морфизма $W \rightarrow V$ над точкой v . Второй луч $K_{\widetilde{W}}$ -тривиален:

$$\pi_*^{-1}(l) \cdot K_{\widetilde{W}} = \pi_*^{-1}(l) \cdot (\pi^*(K_W) + E) = l \cdot K_W + \pi_*^{-1}(l) \cdot E = -2 + 2 = 0.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что кривая l геометрически приводима и над алгебраическим замыканием каждая ее компонента пересекается с исключительным дивизором трансверсально в одной точке. Таким образом, численная эффективность дивизора $-K_{\widetilde{W}}$ доказана. Его объемность следует из того, что $-K_{\widetilde{W}}$ обилен на общем слое. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $h: W \rightarrow V$ – вложенное расслоение на коники, причем поверхность V неособа (но не обязательно проективна), дивизор вырождения Γ этого расслоения приведен и состоит из двух гладких неприводимых компонент, пересекающихся трансверсально в одной точке v , а W особа в точке w . Тогда существует и единственна следующая коммутативная диаграмма, задающая элементарное преобразование Саркисова:

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{\quad} \widetilde{W} & \dashrightarrow \widehat{W} \\ \downarrow h & & \downarrow \widehat{h} \\ V & \xleftarrow{\quad} & \widehat{V} \end{array}$$

где морфизм $\widetilde{W} \rightarrow W$ – раздутие точки w , морфизм $\widehat{V} \rightarrow V$ – раздутие точки v , отображение $\widetilde{W} \dashrightarrow \widehat{W}$ – изоморфизм в коразмерности 1, а $\widehat{W} \rightarrow \widehat{V}$ – стандартное расслоение на коники.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – некоторое гиперплоское сечение V , проходящее через v . Обозначим через H_n сумму $nh^*(H) - K_W$, где $n \gg 0$, при достаточно большом n этот дивизор будет обилён, поскольку $-K_W$ относительно обилён, а H очень обилён на базе. Существует такое число l , что lH_n очень обилён. Обозначим через $\mathcal{H}$ полную линейную систему дивизоров, эквивалентных lH_n и проходящих через w , а через c – канонический порог пары $(W, \mathcal{H})$. Особенности пары $(W, \mathcal{H})$ разрешаются одним раздутием $p: \widetilde{W} \rightarrow W$ по лемме 7 и из выбора линейной системы.

Рассмотрим относительный конус Мори $\text{NS}(\widetilde{W}/V)$. Так же, как и в лемме 7, он порожден двумя лучами, R_1 порожден кривой на исключительном дивизоре раздутия и пересекается с $p^*(K_W + c\mathcal{H})$ по нулю, а R_2 порожден собственным прообразом слоя $h_*^{-1}(v)$ и $p^*(K_W + c\mathcal{H})$ -отрицателен. Применение программы минимальных моделей в категории QLSc к паре $(\widetilde{W}, c\mathcal{H})$ на первом шаге дает лог-флип между многообразиями $\widetilde{W} \dashrightarrow \widehat{W}$, через $\widehat{\mathcal{H}}$ обозначим образ линейной системы $p_*^{-1}\mathcal{H}$. По лемме 7 этот лог-флип является флопом, а значит, сохраняет гладкость (см. [16; теорема 2.4]).

На втором шаге программы минимальных моделей получаем K -отрицательное стягивание Мори $\widehat{W} \rightarrow \widehat{V}$ (дивизоры $K_{\widehat{W}}$ и $K_{\widehat{W}} + c\widehat{\mathcal{H}}$ не являются численно эффективными, поскольку отрицательно пересекаются с общим слоем расслоения). Это стягивание не может быть дивизориальным, поскольку единственный дивизор в слоях морфизма $\widehat{W} \rightarrow V$ крепантен. Кроме того, это стягивание не может быть малым, поскольку после лог-флипа все $(K_{\widehat{W}} + c\widehat{\mathcal{H}})$ -отрицательные кривые являются $K_{\widehat{W}}$ -отрицательными, а на гладком трехмерном многообразии нет малых экстремальных стягиваний (см. [5; § 2.1]). Следовательно, мы получаем неособое расслоение Мори с двумерной базой, которая также неособа (см. [15]). Морфизм между гладкими поверхностями $\widehat{V} \rightarrow V$ имеет один исключительный дивизор, который отображается в точку v . Таким образом, нужная диаграмма построена. Ее единственность следует из того, что расслоения Мори над общей базой, изоморфные в коразмерности один, на самом деле изоморфны, поскольку они оба изоморфны $\text{Proj}(\oplus \mathcal{O}(-nK_{\widehat{W}}))$. Лемма доказана.

Применив лемму 8 в окрестности каждой особой точки $\widehat{X}$, мы получаем стандартное расслоение на коники $\widehat{X}' \rightarrow \widehat{Y}$, которое ввиду каноничности построения разрешения в лемме 8 наследует действие группы, значит, оно является искомым стандартным G -расслоением, эквивалентным исходному. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ю. Г. Прохорову за постановку задачи, внимание к работе, ценные замечания и советы и В. В. Шокурову и К. А. Шрамову за многочисленные замечания и советы.

Список литературы

- [1] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, viii+254 pp.

- [2] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002, xxiv+478 pp.
- [3] В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых”, *Матем. сб.*, **74(116)**:4 (1967), 608–638; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Rational surfaces with a pencil of rational curves”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:4 (1967), 563–587.
- [4] В. Г. Саркисов, “О структурах расслоений на коники”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:2 (1982), 371–408; англ. пер.: V. G. Sarkisov, “On conic bundle structures”, *Math. USSR-Izv.*, **20**:2 (1983), 355–390.
- [5] А. А. Загорский, “О трехмерных конических расслоениях”, *Матем. заметки*, **21**:6 (1977), 745–758; англ. пер.: A. A. Zagorskii, “Three-dimensional conical fibrations”, *Math. Notes*, **21**:6 (1977), 420–427.
- [6] Yu. Prokhorov, “Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3”, *J. Algebraic Geom.*, **21**:3 (2012), 563–600.
- [7] Ю. Г. Прохоров, “О бирациональных инволюциях $\mathbb{P}^3$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:3 (2013), 199–222; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On birational involutions of $\mathbb{P}^3$ ”, *Izv. Math.*, **77**:3 (2013), 627–648.
- [8] A. Beauville, “Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **10**:3 (1977), 309–391.
- [9] V. Alexeev, “General elephants on $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds”, *Compositio Math.*, **91**:1 (1994), 91–116.
- [10] A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.
- [11] S. Mori, Yu. Prokhorov, “On $\mathbb{Q}$ -conic bundles”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **44**:2 (2008), 315–369.
- [12] E. Bierstone, P. D. Milman, “A simple constructive proof of canonical resolution of singularities”, *Effective methods in algebraic geometry* (Castiglione, 1990), Progr. Math., **94**, Birkhäuser, Boston, MA, 1991, 11–30.
- [13] D. R. Morrison, “The birational geometry of surfaces with rational double points”, *Math. Ann.*, **271**:3 (1985), 415–438.
- [14] R. Hartshorne, “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254**:2 (1980), 121–176.
- [15] S. Mori, “Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective”, *Ann. of Math. (2)*, **116**:1 (1982), 133–176.
- [16] J. Kollár, “Flops”, *Nagoya Math. J.*, **113** (1989), 15–36.

Артём Алексеевич Авилов
(Artem A. Avilov)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: v07ulias@gmail.com

Поступила в редакцию
13.07.2014