Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Авксентьев, Большая теорема Эмха и комбинаторное доказательство теоремы Понселе, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 11, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:11:22

УДК 514.112.4+514.144.1

Е. А. Авксентьев

Большая теорема Эмха о замыкании и комбинаторное доказательство теоремы Понселе

Исследуется взаимосвязь классических теорем о замыкании (Понселе, Штейнера, Эмха, о зигзаге) и некоторых их обобщений. Известно, что наиболее общей из них является теорема Эмха, остальные следуют из нее в виде частных случаев. В работе доказано обобщение теоремы Эмха на пучки окружностей, которое (по аналогии с большой теоремой Понселе) можно назвать большой теоремой Эмха. Показано, что большие теоремы Эмха и Понселе равносильны и выводятся друг из друга средствами элементарной геометрии и что обе эти теоремы верны в плоскости Лобачевского. Также получена новая теорема о замыкании, в которой конструкция замыкания устроена несколько сложнее: замыкание происходит на переменной окружности, касающейся двух фиксированных. В заключительной части работы приводится комбинаторное доказательство теоремы Понселе – вывод принципа замыкания для произвольного числа шагов из принципа для трех шагов средствами комбинаторики и теории чисел.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: теоремы о замыкании, большая теорема Понселе, теорема Эмха, пучок окружностей, комбинаторное доказательство.

DOI: 10.4213/sm8404

§ 1. Введение

Теоремы о замыкании, или теоремы типа Понселе, считаются одними из красивейших теорем геометрии. Различные подходы к их доказательствам, а также связи с задачами классической геометрии, теории алгебраических кривых, дифференциальных уравнений и т.д. изучались во многих работах (см. [1]–[3] и библиографию в этих статьях). Среди теорем о замыкании наиболее известны четыре: Понселе, Штейнера, о зигзаге и Эмха. Напомним формулировки классических теорем о замыкании.

ТЕОРЕМА А (Ж.-В. Понселе). *На плоскости даны две окружности. Тогда если существует n -угольник, вписанный в одну окружность и описанный около другой, то таких n -угольников существует бесконечно много, причем любая точка первой окружности, из которой можно провести касательную ко второй, является вершиной такого многоугольника (рис. 1).*

Эта теорема была открыта Ж.-В. Понселе в 1813 г., когда он, будучи офицером наполеоновской армии, находился в плену в г. Саратове. Вернувшись в Париж, он опубликовал полученные результаты (см. [1]), заложившие основы проективной геометрии. Таким образом, впервые была сформулирована и доказана теорема о замыкании вписано-описанных ломаных для двух коник, частным случаем которой является теорема А. Кроме того, Понселе доказал

Рис. 1. Теорема Понселе

более общий факт о замыкании ломаных вписано-описанных в n коник, принадлежащих одному пучку. Позднее это обобщение стали называть большой теоремой Понселе. Приведем ее формулировку для пучка окружностей.

БОЛЬШАЯ ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ ДЛЯ ПУЧКОВ ОКРУЖНОСТЕЙ. Пусть окружности $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ принадлежат одному пучку и существует n -угольник, вписанный в окружность α и описанный около окружностей $\beta_1, \dots, \beta_n$, т.е. его стороны последовательно касаются этих окружностей, причем число точек касания, лежащих вне окружности α , четно. Тогда таких многоугольников существует бесконечно много, причем первой вершиной такого многоугольника может быть любая точка окружности α , а его стороны могут касаться окружностей $\beta_1, \dots, \beta_n$ в произвольном порядке.

Эта теорема является обобщением теоремы Понселе. Действительно, если окружности $\beta_1, \dots, \beta_n$ совпадают, то получаем теорему А.

Красивое аналитическое доказательство теоремы А было получено К. Якоби и Ж. Бертраном (см. [4]), позднее Дж. Кингом оно было изложено с использованием понятия инвариантной меры. В недавней работе [5] эта конструкция была распространена на все случаи взаимного расположения коник, что привело к новому доказательству большой теоремы Понселе для пучка коник. Доказательство большой теоремы Понселе, использующее теорию проективных квадрик, можно найти в [6] и [2]. Другие доказательства, основанные на различных идеях, можно найти в [3], [7], [8].

ТЕОРЕМА В (Я. Штейнер). На плоскости даны две окружности. Рассмотрим семейство $\mathcal{M}$ всех окружностей, касающихся этих двух заданным образом (либо обеих одинаковым образом – внутренним или внешним, либо обеих по-разному: одной – внутренним образом, а другой – внешним). Тогда если существует цепочка из n окружностей семейства $\mathcal{M}$, каждая из которых касается предыдущей, а последняя – первой, то существует бесконечно много таких цепочек, и первой окружностью может быть выбрана произвольная окружность семейства $\mathcal{M}$ (рис. 2).

Конструкцию этой теоремы иногда называют ожерельем Штейнера. В отличие от других теорем о замыкании, теорема В имеет несколько элементарных доказательств. Самое известное из них получается применением подходящей

Рис. 2. Теорема Штейнера

инверсии плоскости, переводящей две данные окружности в пару концентрических, после чего утверждение теоремы становится очевидным. Однако ни одно из этих элементарных доказательств не может быть распространено на другие теоремы о замыкании.

ТЕОРЕМА С (о зигзаге). *На плоскости даны две окружности. Тогда если для данного $n \in \mathbb{N}$ существует $2n$ -звенная замкнутая ломаная, вершины которой попеременно лежат на данных окружностях, а длины всех звеньев равны фиксированному числу d , то таких ломаных существует бесконечно много, и первой вершиной такой ломаной может быть выбрана любая точка одной окружности, расстояние от которой до другой окружности не превосходит d (рис. 3).*

Рис. 3. Теорема о зигзаге

Таким образом, если кузнечик прыгает с одной окружности на другую на расстояние d , замыкая свою траекторию после $2n$ прыжков, то его траектория из всякой точки, из которой он может сделать первый прыжок, замыкается через $2n$ прыжков.

Эта теорема была установлена А. Эмхом в 1900 г. в [9], затем переоткрыта О. Боттемой в 1965 г. в [10] и еще позже, в 1974 г., В. Блэком, Х. Хоулэндом и

В. Хоулэндом в [11]. Она также справедлива и для двух окружностей в пространстве, но мы рассмотрим только плоский случай.

Эти три теоремы о замыкании являются на самом деле частными случаями теоремы Эмха о цепочках окружностей (см. [9]). Чтобы сформулировать ее, нам понадобятся некоторые понятия. Касание двух окружностей называется *внутренним*, если одна из окружностей лежит внутри другой. Пусть α_0, α_1 – окружности на плоскости. Тогда для произвольной окружности ω , касающейся обеих окружностей α_0 и α_1 , индекс касания равен 0, если из двух касаний – ω с α_0 и ω с α_1 – число внутренних четно. Если же только одно касание внутреннее, то индекс равен 1. Для $i = 0, 1$ через $\mathcal{M}_i$ обозначим семейство окружностей, касающихся α_0, α_1 с индексом i .

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \delta$ – три произвольные окружности на плоскости. Выберем некоторое $i \in \{0, 1\}$ и рассмотрим семейство $\mathcal{M}_i$ окружностей, касающихся α_0, α_1 с индексом i . Мы предполагаем, что $\delta \notin \mathcal{M}_i$. Возьмем произвольную окружность $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$, которая пересекает δ в двух точках x_1, x_2 . Семейство $\mathcal{M}_i$ содержит две окружности, проходящие через x_2 ; одна из них – это ω_1 , а другую обозначим через ω_2 . Окружности ω_2 и δ имеют две точки пересечения; одна из них – это x_2 , а другую обозначим через x_3 и т.д. Так получаем цепочку окружностей $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Каждая ω_k касается α_0 и α_1 с индексом i и пересекает окружность δ в точках x_k и x_{k+1} . Эта последовательность замыкается через n шагов, если $\omega_{n+1} = \omega_1$.

ТЕОРЕМА D (А. Эмх). Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \delta$ – произвольные окружности, $i \in \{0, 1\}$ и $\delta \notin \mathcal{M}_i$. Если для некоторой начальной окружности $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$ цепочка окружностей замыкается через n шагов, то это происходит для произвольной $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$ (рис. 4).

Рис. 4. Теорема Эмха

Эта теорема сформулирована А. Эмхом в 1900 г. (см. [12]) и доказана им с помощью теории эллиптических интегралов, однако только для случая непересекающихся окружностей α_0 и α_1 , которые инверсией можно перевести в концентрические. Для неконцентрических окружностей такой инверсии не существует. Вероятно, автор пропустил этот аспект. Доказательство для произвольного

расположения окружностей $\alpha_0, \alpha_1, \delta$ было дано только в 1996 г. в [3] методами алгебраической геометрии. В [13] теорема Эмха была выведена из теоремы Понселе для квадрик, а в [14] было найдено элементарное геометрическое доказательство.

В настоящей работе будет показано, что теорема Эмха фактически является следствием теоремы Понселе для двух окружностей (§ 3). Более того, будет установлено, что большая теорема Эмха для пучков окружностей (см. [14]) следует из большой теоремы Понселе. В доказательстве используется два новых геометрических факта (предложения 1 и 2), с помощью которых мы в § 5 получим новую теорему о замыкании с подвижной орбитой. Попутно распространим большие теоремы Эмха и Понселе на плоскость Лобачевского (§ 4). Наконец, в § 6 будет приведено комбинаторное доказательство теоремы Понселе, выводящее ее для любого n из некоторой специальной теоремы о замыкании для $n = 3$.

Структура работы такова. Вначале (§ 2) для удобства читателя мы напомним необходимые факты о теоремах A–D и о свойствах инверсии плоскости. В частности, мы кратко воспроизведем рассуждения работы [13], доказывающие, что из теоремы D выводятся теоремы A, B и C. Например, теорема A получается простыми рассуждениями из теоремы Эмха, когда окружность α_0 вырождается в точку.

После этого (в § 3) будет установлена обратная связь: теорема D следует из теоремы A. Таким образом, в § 3 мы получаем новое доказательство теоремы Эмха. В отличие от доказательств, данных в [12] и [3], оно геометрическое, а также более короткое и элементарное по сравнению с доказательством из работы [14].

Заметим, что в литературе по классической геометрии устанавливалась равносильность друг другу некоторых из классических теорем A, B, C, D. Как упомянуто выше, в [13] доказано, что теоремы A, B, C следуют из D. В [15] было показано, что теорема о зигзаге следует из теоремы Понселе для коник. В [13] было показано, что фактически теорема Понселе для коник влечет теорему Эмха. В § 3 мы сделаем следующий шаг в этом направлении и сведем теорему Эмха к теореме Понселе для двух окружностей. При этом будет доказана не только теорема Эмха, но и ее обобщение на пучки окружностей, полученное В. Ю. Протасовым (см. [14]). В § 4 мы распространим эти теоремы на плоскость Лобачевского. В § 5 сформулируем и докажем новую теорему о замыкании. Необычность этой теоремы в том, что замыкание в ней происходит на окружности, которая сама изменяется. Заключительная часть работы (§ 6) посвящена комбинаторному доказательству теоремы Понселе.

§ 2. Классические теоремы о замыкании

Из четырех классических теорем о замыкании наиболее общей является теорема Эмха. Остальные три теоремы сразу следуют из нее как частные случаи при подходящем выборе окружностей. Это было показано в [13], но для удобства читателя ниже мы кратко воспроизведем эти рассуждения. Затем мы

сформулируем еще одну теорему о замыкании, которая обобщает теорему Эмха на пучки окружностей по аналогии с большой теоремой Понселе, но для этого сначала напомним некоторые понятия.

Инверсией относительно окружности с центром в точке O и радиуса R называется геометрическое преобразование плоскости, которое каждой точке A ставит в соответствие такую точку A' луча OA , что $OA \cdot OA' = R^2$. Самой точке O ставится в соответствие бесконечно удаленная точка плоскости, через которую проходят все прямые. Тогда преобразование становится взаимно однозначным. Можно показать, что все окружности, ортогональные окружности инверсии и проходящие через точку A , проходят также и через точку A' .

Пучок окружностей — это множество окружностей, ортогональных двум фиксированным окружностям или прямым плоскости. Окружности, принадлежащие одному пучку, называются *соосными*. Множество окружностей, ортогональных всем окружностям некоторого пучка, образует *ортогональный пучок*. Если окружности пучка не пересекаются, то окружности ортогонального пучка пересекаются в двух точках на линии центров первого пучка. Эти две точки являются его вырожденными окружностями и называются *предельными точками пучка*. Инверсия с центром в любой из них переводит окружности пучка в концентрические окружности. *Степенью точки A* относительно окружности α радиуса R с центром в точке O называется величина $\sigma_\alpha(A) = |OA|^2 - R^2$.

Преобразование инверсии обладает следующими свойствами:

- 1) оно является инволюцией, а все его неподвижные точки — это точки окружности инверсии;
- 2) образ любой окружности, не проходящей через центр инверсии, — это окружность, не проходящая через центр инверсии; образ любой окружности, проходящей через центр инверсии, — это прямая, не проходящая через центр;
- 3) окружность, ортогональная окружности инверсии, переходит в себя;
- 4) пучок окружностей при инверсии переходит в пучок окружностей.

Преобразование инверсии называют еще симметрией относительно окружности. Такое название объясняется следующим свойством инверсии:

- 5) пусть точки X и Y инверсны относительно окружности α ; тогда это их свойство сохраняется при любой инверсии, т.е. если при инверсии относительно окружности β точки X, Y и окружность α переходят в точки X', Y' и окружность α' , то точки X' и Y' инверсны относительно α' ; если же окружность α перевести в прямую, то инверсия относительно α перейдет в симметрию относительно этой прямой.

Можно также показать, что:

- 6) для любых двух окружностей или прямых α и β существует окружность или прямая ω такая, что инверсия относительно ω переводит α и β друг в друга; для непересекающихся окружностей α и β такая окружность единственна и называется их *серединной окружностью* (для пересекающихся окружностей их две, но если окружности ориентировать, то срединная окружность определяется однозначно).

Покажем теперь, как из теоремы Эмха следуют три классические теоремы о замыкании.

Если окружность α_0 вырождается в точку, то после инверсии с центром в этой точке получаем теорему А. Если окружность δ – это серединная окружность α_0 и α_1 , то все окружности семейства $\mathcal{M}_1(\alpha_0, \alpha_1)$ ей ортогональны, а следовательно, соседние окружности цепочки из теоремы Эмха касаются друг друга, и мы получаем теорему Штейнера. Наконец, если в качестве окружностей α_0 и α_1 из теоремы Эмха взять окружности радиусов $|r \pm d|$, концентрические с окружностью ω , где r – радиус окружности ω , а $d > 0$, то получим теорему С о зигзаге для окружностей ω и δ с длиной прыжка d .

Итак, в случае когда α_0 вырождается в точку, получаем теорему Понселе для двух окружностей; для концентрических окружностей α_0 и α_1 теорема D превращается в плоский вариант теоремы о зигзаге; наконец, если δ – серединная окружность α_0 и α_1 , то получаем теорему Штейнера. Таким образом, три классические теоремы о замыкании являются частными случаями теоремы Эмха.

Большой теореме Эмха, которая является обобщением теоремы Эмха на пучки окружностей подобно тому, как большая теорема Понселе является обобщением на пучки окружностей, посвящен § 3. Эта замечательная теорема была недавно открыта и доказана В. Ю. Протасовым в [14]. Сформулируем ее, а в § 3 сведем к большой теореме Понселе.

ТЕОРЕМА 1 (В. Ю. Протасов). Пусть есть два семейства соосных окружностей: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из пучка $\mathcal{F}_1$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ из пучка $\mathcal{F}_2$, причем пучки $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеют общую окружность δ , которая лежит между α_i и β_i для всех $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $\mathcal{M}_i$ множество $\mathcal{M}_{k_i}(\alpha_i, \beta_i)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ – фиксированные индексы. Для каждой окружности $v_1 \in \mathcal{M}_1$ можно построить цепочку окружностей $v_1, v_2, v_3, \dots$ таких, что $v_k \in \mathcal{M}_k$ и соседние окружности v_k и v_{k+1} пересекаются на окружности δ для всех k . Тогда если для некоторой начальной окружности v_1 последовательность $\{v_k\}$ замыкается, т.е. $v_{n+1} = v_1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то она замыкается для любой начальной окружности v_1 и тоже через n шагов (рис. 5).

Рис. 5. Большая теорема Эмха для $n = 6$

$ХЕК$, касающаяся его сторон в точках X и K , касается ω . Значит, окружности γ , τ и ω гомотетичны относительно точки K и касательные в точках вторичного пересечения прямой KX с γ в L и с ω в D к этим окружностям параллельны прямой AC . Таким образом, $OD \parallel IX \parallel JL$, а длина отрезка OD – это некоторая линейная комбинация длин IX и JL (которые постоянны) с коэффициентами, зависящими от OI и IJ (которые тоже постоянны). И окружность с центром в точке O и радиусом OD касается всех ω .

Из этого предложения следует ему обратное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть окружности α, γ, ζ таковы, что α и ζ концентричны и некоторая окружность $\omega \in \mathcal{M}_0(\gamma, \zeta)$ пересекает α в точках A и B . Тогда если ω пробегает множество $\mathcal{M}_0(\gamma, \zeta)$, то ее хорды AB касаются некоторой фиксированной окружности $\beta \in \mathcal{F}(\alpha, \gamma)$.

Докажем теперь большую теорему Эмха для пучков окружностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Инверсией переведем пучок $\mathcal{F}_1$ в концентрический. Обозначим через x_k точку, в которой пересекаются образы окружностей v_k, v_{k+1} и δ . Из предложения 2 следует, что для каждого k прямая $x_k x_{k+1}$ всегда касается некоторой окружности $\beta'_k \in \mathcal{F}_2$. И теорема 1 теперь следует из большой теоремы Понселе для окружностей $\delta, \beta'_1, \dots, \beta'_n$, принадлежащих пучку $\mathcal{F}_2$.

§ 4. Большие теоремы Понселе и Эмха в плоскости Лобачевского

В работе [16] было показано, что теорема Понселе для двух окружностей верна в геометрии Лобачевского. Этот результат можно обобщить, используя большую теорему Эмха.

Напомним сначала некоторые определения. Окружности, эквидистанты, предельные линии и прямые плоскости Лобачевского все вместе называются *циклами*. Совокупность всех циклов геометрии Лобачевского, перпендикулярных к двум данным циклам, называется *пучком циклов*.

Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Прямыми в этой модели являются обычные, евклидовы, окружности, перпендикулярные окружности абсолюта; окружности Лобачевского – это обычные окружности, не пересекающие абсолюта; эквидистанты – окружности, пересекающие абсолюта; предельные линии – окружности, касающиеся абсолюта. Поэтому пучок циклов неевклидовой геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре не отличается от пучка окружностей обычной (евклидовой) геометрии. Только в соответствии с определением точек неевклидовой геометрии здесь следует рассматривать не полные окружности пучка, а лишь их дуги, заключенные внутри абсолюта. Более подробно об этом написано в [17]. Таким образом, большая теорема Эмха для пучков циклов в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского – это большая теорема Эмха в евклидовой плоскости.

Рассмотрим частный случай этой теоремы, когда циклы α_i и β_i симметричны относительно абсолюта. Тогда все циклы цепочки Эмха будут ортогональны абсолюту, т.е. они являются прямыми в модели Пуанкаре. Получаем большую теорему Понселе в геометрии Лобачевского.

ТЕОРЕМА 2. В геометрии Лобачевского верны большая теорема Эмха и большая теорема Понселе.

§ 5. Теорема о замыкании с подвижной орбитой

В этом параграфе мы получим новую теорему о замыкании (теорема 4), в которой само замыкание устроено несколько необычно по сравнению с другими теоремами такого рода. В теоремах Понселе, Штейнера, о зигзаге, Эмха замыкание происходило на фиксированной окружности – менялась только цепочка ломаных или окружностей, т.е. траектории двигались по фиксированной орбите. В новой же теореме, которую мы получим в этом параграфе, замыкание будет происходить на окружности, которая сама изменяется, касаясь двух фиксированных окружностей.

Сначала мы установим один любопытный геометрический факт о касательных к окружностям одного пучка, следствие из которого станет основным при выводе комбинаторного доказательства теоремы Понселе в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 3. Пусть окружности α , β , γ принадлежат одному пучку $\mathcal{F}$. Прямая l касается β и пересекает α в точках A и C , касательные из которых к окружности γ пересекаются в точке B (при этом γ касается либо одновременно отрезков AB и BC , либо одновременно их продолжений). Тогда описанная около $\triangle ABC$ окружность δ_l касается некоторых фиксированных (не зависящих от l) окружностей, одна из которых принадлежит пучку $\mathcal{F}$, а другая концентрична окружности α .

Рис. 7

На рис. 7 три соосные окружности α , β и γ изображены более жирными линиями. Теорема 3 утверждает, что когда прямая l пробегает все касательные к окружности β , описанные около треугольников ABC окружности δ_l изменяются так, что всегда касаются двух фиксированных окружностей ζ и η ,

изображенных на рис. 7 штриховыми линиями. При этом окружность ζ концентрична с α , а окружность η принадлежит одному пучку с окружностями α , β и γ .

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Первое из них – следующее хорошо известное свойство пучков окружностей.

ЛЕММА 1. Пусть окружности α, β, γ соосны. Тогда отношение степеней любой точки α относительно β и γ есть величина постоянная.

Из этой леммы получаем одно простое следствие о касательной в пучке окружностей.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть окружности α, β, γ соосны. Хорда AC окружности α касается окружности β . Из точек A и C проведены касательные AC' и CA' к окружности γ . Тогда

$$u_{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = \frac{AC' + CA'}{AC} \quad (1)$$

есть величина постоянная (зависящая только от окружностей α, β, γ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – точка касания AC с β . Тогда по лемме 1 существует константа $k := u_{\alpha}(\gamma/\beta)$ такая, что $AC' = k \cdot AB$, $CA' = k \cdot BC$. Отсюда следует, что $AC' + CA' = k \cdot AC$.

ЛЕММА 2. Пусть окружность γ касается сторон AB и BC треугольника ABC . Окружность ω проходит через A и C , касаясь γ в точке K . Точка I_b – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC . Тогда прямая KI_b вторично пересекает γ в точке, касательная в которой к γ параллельна AC .

Рис. 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В статье [18] доказан геометрический факт, из которого почти сразу следует лемма 2. А именно, в наших обозначениях прямая KI_b является биссектрисой угла AKC (рис. 8). Тогда, как нетрудно заметить, прямая KI_b образует равные углы с касательной к окружности ω в точке K и прямой AC . Отсюда следует, что существует окружность γ' , касающаяся окружности ω в точке K и отрезка AC в точке его пересечения с KI_b , и утверждение леммы следует из того, что окружности γ и γ' гомотетичны с центром в точке K .

Рис. 9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из предложения 1 следует, что окружность ω , проходящая через точки A и C и касающаяся γ в точке K , касается некоторой фиксированной окружности ζ' , концентричной α (рис. 9). Эту точку касания ω и ζ' обозначим через D . Пусть I_b – центр вневписанной окружности $\triangle ABC$, касающейся стороны AC , J – центр окружности γ , E – середина дуги AC окружности δ_l , лежащая на биссектрисе угла ABC . Тогда поскольку центры окружностей δ_l , ζ' и α лежат на серединном перпендикуляре ED к отрезку AC , то, доказав, что длина отрезка ED постоянна, мы докажем, что и окружность δ_l касается некоторой фиксированной окружности ζ , концентричной α . Тогда из предложения 2 будет следовать вторая часть утверждения теоремы о существовании окружности $\eta \in \mathcal{F}$, которой будут касаться все окружности δ_l .

Итак, докажем, что длина отрезка ED постоянна. По лемме 2 прямая KI_b вторично пересекает γ в такой точке L , что $JL \perp AC$. Значит, $JL \parallel ED$ и $\triangle I_b ED \sim \triangle I_b JL$, откуда следует, что

$$ED = \frac{I_b E \cdot JL}{I_b J}.$$

Поскольку длина отрезка JL , равная радиусу окружности γ , постоянна, нам достаточно доказать постоянство величины $I_b J / (I_b E)$. Для этого воспользуемся следующим известным свойством треугольника.

ЛЕММА 3. Пусть I_b – это центр вневписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны AC , E – вторая точка пересечения прямой BI_b с описанной окружностью. Тогда проекции отрезка EI_b на стороны AB и BC равны половине стороны AC .

Поскольку отношение двух коллинеарных отрезков сохраняется при проекции на любую прямую, то для проекции на прямую AB получаем

$$\frac{I_b J}{I_b E} = \frac{C'' C'}{C'' F} \stackrel{\text{(лемма 3)}}{=} \frac{2 \cdot (AC'' + AC')}{AC}.$$

Аналогично, проектируя на прямую BC , получаем

$$\frac{I_b J}{I_b E} = \frac{2 \cdot (CA' + CA'')}{AC}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим

$$\frac{I_b J}{I_b E} = \frac{AC' + CA'}{AC} - \frac{AC'' + CA''}{AC} \stackrel{(1)}{=} u_\alpha \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) - 1.$$

Итак, мы доказали, что величина $I_b J / (I_b E)$ не зависит от выбора касательной l к окружности β , а значит, и длина отрезка ED тоже постоянна, откуда, как мы отмечали выше, следует, что окружность δ_l касается некоторой фиксированной окружности ζ , концентричной α . Тогда из предложения 2 следует, что окружность δ_l касается еще и другой фиксированной окружности η , которая принадлежит пучку $\mathcal{F}$.

Теорема 3 доказана.

Заметим, что если в теореме 3 точка B хотя бы один раз попадет на окружность α , то так будет всегда. Это сразу следует как из большой теоремы Понселе, так и из только что доказанной теоремы 3. Таким образом, получаем в качестве следствия такой известный геометрический факт.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть хорды XY и YZ окружности α касаются окружности β . Тогда XZ касается фиксированной окружности $\gamma \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$.

Но у теоремы 3 есть еще одно, более интересное следствие. Обратная к ней теорема представляет собой новую теорему о замыкании.

ТЕОРЕМА 4. Пусть окружности α , γ , η соосны и вложены друг в друга в некотором порядке, а окружность ζ концентрична α . Некоторая окружность $\delta \in \mathcal{M}_0(\zeta, \eta)$ пересекает α в двух точках, касательные из которых к окружности γ пересекаются на окружности δ . Тогда это верно для всех окружностей семейства $\mathcal{M}_0(\zeta, \eta)$.

Утверждение этой теоремы представляет собой тоже некоторого рода замыкание: любая окружность $\delta \in \mathcal{M}_0(\zeta, \eta)$ пересекает окружность α в таких точках

A и B (см. рис. 7), касательные из которых к окружности γ всегда встречаются на окружности δ_l , замыкаясь во вписано-описанный треугольник ABC , стороны которого касаются фиксированных окружностей β и γ , а вершины лежат на окружности δ_l . Необычность этого замыкания в том, что замыкание происходит на окружности, которая сама изменяется таким образом, что все время касается двух данных окружностей ζ и η .

§ 6. Комбинаторное доказательство теоремы Понселе для коник

В литературе по классической геометрии неоднократно ставился вопрос о возможности чисто комбинаторного доказательства теорем о замыкании. Например, можно ли средствами комбинаторики и теории чисел распространить теорему о замыкании, доказанную для некоторых малых значений числа шагов n , на все натуральные n ? Скажем, можно ли вывести теорему Понселе из ее частного случая для треугольника ($n = 3$)? Недавно Л. Хальбейсен и Н. Хангербюлер доказали (см. [19]), что теорема Понселе является комбинаторным следствием теорем Паскаля и Брианшона. Выбор теорем Паскаля и Брианшона объясняется тем, что теорема Понселе носит проективный характер. Она верна не только для окружностей, но и для пары коник. Поэтому вполне понятно стремление свести теорему Понселе к классическим теоремам проективной геометрии.

ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ ДЛЯ КОНИК. *Пусть даны две коники α и β . Тогда если существует хотя бы один многоугольник, вписанный в α и описанный около β , то таких многоугольников существует бесконечно много, причем первой вершиной такого многоугольника может быть любая точка коники α , из которой можно провести касательную к конике β .*

В работе [20] комбинаторными средствами выводятся формулы на условия замыкания траекторий Понселе за n шагов. В этом параграфе мы дадим комбинаторное доказательство классической теоремы Понселе для коник, т.е. с помощью простой геометрической конструкции и комбинаторных рассуждений, используя метод математической индукции и соображения из теории чисел, выведем теорему Понселе. Оказывается, что для подобного доказательства достаточно следующего свойства ломаных Понселе.

ЛЕММА ABC. *Пусть двузвенная ломаная ABC вписана в конику α , а ее звенья AB и BC касаются коники β . Тогда для всех таких ломаных прямая AC касается фиксированной коники $\gamma_2(\alpha, \beta)$.*

Отметим, что для окружностей это утверждение у нас было получено выше как следствие из теоремы 3 (следствие 2), а подходящим проективным преобразованием две коники можно перевести в две окружности.

По индукции из леммы ABC можно получить такое ее обобщение.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ и любой ломаной Понселе $A_0A_1 \dots A_{2l}$ коник α, β хорда A_0A_{2l} касается фиксированной коники $\gamma_{2l}(\alpha, \beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для $l = 1$ получаем утверждение леммы ABC. Предположим, что мы доказали утверждение для $l = k$. Рассмотрим

ломанную Понселе $A_0A_1 \dots A_{2k+1}$ коник α, β . По предположению индукции прямые A_0A_{2k} и $A_{2k}A_{2k+1}$ касаются фиксированной коники γ_{2k} . Тогда по лемме ABC прямая A_0A_{2k+1} тоже касается фиксированной коники.

Итак, покажем, что из леммы ABC можно вывести теорему Понселе.

КОМБИНАТОРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПОНСЕЛЕ. Пусть у коник α и β существует n -угольник Понселе $A_0A_2 \dots A_{n-1}$, и пусть $n = 2^l m$, m нечетно. Тогда $A_iA_{i+2^l}$ касаются фиксированной коники $\gamma_{2^l}(\alpha, \beta)$. Поэтому $B_0B_1 \dots B_{m-1}$, где $B_i = A_{i2^l}$, — это m -угольник Понселе коник α и $\gamma = \gamma_{2^l}(\alpha, \beta)$, и достаточно доказать условие m -замыкания процесса Понселе для них. Пусть d — такое число, что $2^d \equiv 1 \pmod{m}$, например, $d = \varphi(m)$ (где $\varphi(m)$ — арифметическая функция Эйлера) и $B'_0B'_1 \dots$ — другая ломаная Понселе коник α, γ . Как было замечено выше, $B'_0B'_{2^d}$ касается фиксированной коники $\gamma_{2^d}(\alpha, \gamma)$. Но $B_iB_{2^d+i} = B_iB_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Значит, коника $\gamma_{2^d}(\alpha, \gamma)$ касается всех сторон m -угольника $B_0B_1 \dots B_{m-1}$, откуда при $m \geq 5$ следует, что $\gamma_{2^d}(\alpha, \gamma) = \gamma$ (ведь существует единственная коника, касающаяся пяти данных прямых общего положения). Значит, $B'_{2^d-1} = B'_0$ и процесс Понселе имеет период $2^d - 1$, кратный m . Покажем, что основной период все-таки равен m .

Пусть сначала коника β лежит внутри коники α . Если B'_0 лежит на дуге B_0B_1 , то, поскольку в этом случае взаимного расположения коник отображение Понселе сохраняет порядок точек (при обходе в каком-нибудь направлении), точки B'_{im} , $i \in \mathbb{N}$, тоже лежат на этой дуге. Если m не период, то $B'_m \neq B'_0$. Без ограничения общности можно считать, что B'_m лежит на дуге $B_0B'_0$. Тогда по индукции получаем, что B'_{im} лежит на дуге $B_0B'_{(i-1)m}$ и не может совпасть с B'_0 ни при каком i , что противоречит $B'_{2^d-1} = B'_0$.

Если коники α и β лежат одна вне другой, то коника γ_2 , определенная в лемме ABC, лежит уже внутри коники α . И этот случай сводится к предыдущему.

Если же коники α и β пересекаются, то сделаем следующее. Рассмотрим дугу $\alpha\beta$ коники α , из каждой точки которой можно провести касательную к конике β , концы которой являются точками пересечения коник α и β . Возьмем две копии этой дуги и склеим их в концах, обозначив получившееся множество через $\tilde{\alpha}_\beta$. Будем считать, что если сторона многоугольника Понселе касается с коникой β вне коники α , то две вершины этой стороны принадлежат разным копиям дуги $\alpha\beta$, а если касание происходит внутри коники α , то — одной. Тогда на множестве $\tilde{\alpha}_\beta$ отображение Понселе сохраняет порядок точек и можно провести рассуждение из первого случая.

Представляется интересным вывести подобное доказательство, оставаясь в рамках проективной геометрии, например получить проективное доказательство леммы ABC. Скажем, является ли данная лемма следствием теорем Паскаля и Брианшона? Этот вопрос мы оставляем открытым.

Автор благодарен В. Ю. Протасову за полезные обсуждения, постоянное внимание к работе и помощь в подготовке текста.

Список литературы

- [1] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, v. I, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1865, 498 pp. (first ed. in 1822).

- [2] H. Lebesgue, *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1942, viii+190 pp.
- [3] W. Barth, Th. Bauer, “Poncelet theorems”, *Exposition. Math.*, **14**:2 (1996), 125–144.
- [4] I. J. Schoenberg, “On Jacobi–Bertrand’s proof of a theorem of Poncelet”, *Studies in Pure Mathematics*, Birkhäuser, Boston, 1983, 623–627.
- [5] Е. А. Авксентьев, “Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе”, *Матем. сб.*, **205**:5 (2014), 3–22; англ. пер.: Е. А. Avksentyev, “A universal measure for a pencil of conics and the Great Poncelet Theorem”, *Sb. Math.*, **205**:5 (2014), 613–632.
- [6] М. Берже, *Геометрия*, т. 1, 2, Части 1–5, Мир, М., 1984, 560 с., 368 с.; пер. с фр.: М. Berger, *Géométrie*, v. 1–5, CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, 1977, 192 pp., 214 pp., 184 pp., 218 pp., 189 pp.
- [7] W. Barth, J. Michel, “Modular curves and Poncelet polygons”, *Math. Ann.*, **295**:1 (1993), 25–49.
- [8] P. Griffiths, J. Harris, “On Cayley’s explicit solution to Poncelet’s porism”, *Enseign. Math.* (2), **24**:1-2 (1978), 31–40.
- [9] A. Emch, “Illustration of the elliptic integral of the first kind by a certain link-work”, *Ann. of Math.* (2), **1**:1-4 (1899/1900), 81–92.
- [10] O. Bottema, “Ein Schliessungssatz für zwei Kreise”, *Elem. Math.*, **20** (1965), 1–7.
- [11] W. L. Black, H. C. Howland, B. Howland, “A theorem about zig-zags between two circles”, *Amer. Math. Monthly*, **81**:7 (1974), 754–757.
- [12] A. Emch, “An application of elliptic functions to Peaucellier’s link-work (inversor)”, *Ann. of Math.* (2), **2**:1-4 (1900/1901), 60–63.
- [13] В. Ю. Протасов, “Об одном обобщении теоремы Понселе”, *УМН*, **61**:6(372) (2006), 187–188; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “A generalization of Poncelet’s theorem”, *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1180–1182.
- [14] V. Yu. Protasov, “Generalized closing theorems”, *Elem. Math.*, **66**:3 (2011), 98–117.
- [15] A. Hráskó, “Poncelet-type problems, an elementary approach”, *Elem. Math.*, **55**:2 (2000), 45–62.
- [16] П. В. Бибииков, “Теоремы Штейнера и Понселе в геометриях Евклида и Лобачевского”, *Матем. просв.*, сер. 3, **12**, Изд-во МЦНМО, М., 2008, 177–184.
- [17] И. М. Яглом, *Геометрические преобразования*, т. 2: *Линейные и круговые преобразования*, Гостехиздат, М., 1956, 612 с.; англ. пер.: I. M. Yaglom, *Geometric transformations*, v. III, IV, Anneli Lax New Math. Libr., **24**, **44**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1973, 2009, viii+237 pp., viii+285 pp.
- [18] V. Yu. Protasov, “The Feuerbach theorem”, *Quantum*, **10**:2 (1999), 4–9.
- [19] L. Halbeisen, N. Hungerbühler, “A simple proof of Poncelet’s theorem (on the occasion of its bicentennial)”, *Amer. Math. Monthly*, **122**:6 (2015), 537–551.
- [20] Е. А. Авксентьев, “Метрические свойства ломаных Понселе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 2012, № 3, 43–47; англ. пер.: Е. А. Avksent’ev, “Metric properties of Poncelet polygonal lines”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:3 (2012), 116–120.

Евгений Александрович Авксентьев
(Evgeny A. Avksentyev)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: avksentjev@mail.ru

Поступила в редакцию
15.07.2014 и 21.03.2015