Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Эминян, Обобщенная проблема делителей с натуральными числами специального вида, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 7, 135–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:31:10

УДК 511.33

К. М. Эминян

Обобщенная проблема делителей с натуральными числами специального вида

Получена асимптотическая формула с равномерной оценкой остаточного члена для суммы значений обобщенной функции делителей по натуральным числам, все простые делители которых имеют двоичные разложения специального вида.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: обобщенная проблема делителей, двоичные разложения, асимптотическая формула, равномерная оценка остаточного члена.

DOI: 10.4213/sm8405

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{P}$ – подмножество множества простых чисел. В аналитической теории чисел существует направление, изучающее свойства натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат $\mathcal{P}$.

В 1909 г. Э. Ландау (см. [1]) получил асимптотическую формулу для числа таких чисел, не превосходящих x , для случая, когда $\mathcal{P}$ – множество простых чисел, лежащих в заданной арифметической прогрессии.

Позже несколько авторов (см. [2]–[4]) доказали ряд теорем о распределении значений мультипликативных функций на множестве натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат $\mathcal{P}$, где от $\mathcal{P}$ требуется лишь существование асимптотической формулы для суммы вида

$$\sum_{p \leq x, p \in \mathcal{P}} 1.$$

Обзор указанных результатов представлен в монографии [5].

Большой вклад в исследование данной проблемы внес М. Е. Чанга (см. [6]), который применил в своих исследованиях метод контурного интегрирования. Множество $\mathcal{P}$ у Чанга имеет вид

$$\mathcal{P} = \left\{ p, p \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + l - 1)^{1/a}, (Dn + l)^{1/a}) \right\},$$

где $a > 0$ – нецелое число, l и D – фиксированные натуральные числа ($1 \leq l \leq D$).

За счет более точных методов исследования М. Е. Чанга существенно усилил результаты своих предшественников.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы исследовать случай, когда $\mathcal{P}$ – состоит из простых чисел из некоторого множества $\mathbb{N}_0$, к определению которого мы переходим.

Пусть $n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \dots + \varepsilon_s 2^s + \dots$ – представление натурального числа n в двоичной системе счисления ($\varepsilon_s = 0, 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$).

Разобьем множество натуральных чисел на два пересекающихся подмножества следующим образом:

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 0 \pmod{2} \right\}, \quad \mathbb{N}_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 1 \pmod{2} \right\}.$$

В 2010 г. К. Маудюит и Дж. Риват (см. [7]) доказали, в частности, что плотности множеств простых чисел из классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ асимптотически совпадают. Другое доказательство этого факта дал Б. Грин (см. [8]).

Определим множество M_0 , состоящее из 1 и тех натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат $\mathbb{N}_0$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. 1. Пусть k – нечетное натуральное число, $1 \leq k \leq 0.01 \frac{\sqrt{\ln x}}{\ln \ln x}$. Тогда существует последовательность вещественных чисел $\{c_l\}$, $c_0 \neq 0$, такая, что при $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x, n \in M_0} \tau_k(n) = x \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{c_l}{\Gamma(k/2 - l)} \left(2 \ln x + \frac{k}{2} - l - 1 \right) (\ln x)^{k/2 - l - 2} + O(xe^{-0.2\sqrt{\ln x}}), \quad (1.1)$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера.

2. Пусть $k = 2k_1$ – четное число, $k_1 \in \mathbb{N}$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$\sum_{n \leq x, n \in M_0} \tau_k(n) = x P_{k_1-1}(\ln x) + \theta x^{\alpha(k)} (C_3 \ln x)^k,$$

где $P_{k_1-1}(u)$ – многочлен степени $k_1 - 1$, $|\theta| \leq 1$, $\alpha(k) = 1 - C_4/k^{2/3}$, $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ – абсолютные постоянные.

Явный вид последовательности $\{c_l\}$ будет указан при доказательстве теоремы. Отметим, что оценки остаточных членов асимптотических формул равномерны по k .

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько лемм.

§ 2. Леммы

ЛЕММА 1. Существует абсолютная постоянная $\Delta > 0$ такая, что

$$\sum_{p \leq x, p \in \mathbb{N}_0} 1 = \frac{1}{2} \pi(x) + O(x^{1-\Delta}).$$

Доказательство см. в [7], [8].

ЛЕММА 2. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0$$

при

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{(\ln |t| + 10)^{2/3} \ln \ln(|t| + 10)}.$$

Доказательство см. в [9; гл. VI].

СЛЕДСТВИЕ. Если $T > 10$ – достаточно большое число, то $\zeta(s) \neq 0$ в области

$$1 - \frac{2}{\ln T} \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + \frac{1}{\ln T}, \quad |\operatorname{Im} s| \leq T. \quad (2.1)$$

Определим дзета-функцию множества M_0 равенством

$$\zeta_0(s) = \prod_{p \in \mathbb{N}_0} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

ЛЕММА 3. Пусть $T > 10$ – столь большое число, что $\zeta(s) \neq 0$ в области (2.1). Тогда:

1) при

$$1 - \frac{2}{\ln T} \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + \frac{1}{\ln T}, \quad |\operatorname{Im} s| = T,$$

а также при $\operatorname{Re} s = 1 - 2/\ln T$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$ справедливо неравенство

$$\zeta_0(s) = O(\ln^{c_1} T) \quad (c_1 - \text{константа});$$

2) существует функция $H_0(s)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 - \Delta/2$ и ограниченная в круге $|s - 1| \leq \Delta/2$ константой, зависящей лишь от Δ , такая, что

$$\zeta_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s-1}} H_0(s) \quad \text{при } |s-1| \leq \frac{\Delta}{2},$$

причем $H_0(1) \neq 0$ (Δ – константа из леммы 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\operatorname{Re} s > 1$. Тогда

$$\ln \zeta_0(s) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) - \frac{1}{p^s} \right) + \sum_{p \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{p^s} = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{p^s} + g_1(s),$$

где $g_1(s)$ – функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ и ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 - \Delta/2$.

Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\sum_{p \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{p^s} = \sum_p \frac{1 + \varepsilon(p)}{2p^s} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2} \sum_p \frac{\varepsilon(p)}{p^s}.$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{p \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^s} + \frac{s}{2} \int_2^\infty E(u) \frac{du}{u^{1+s}},$$

где $E(u) = \sum_{p \leq u} \varepsilon(p)$.

Далее,

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \sum_p -\ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + g_2(s),$$

где $g_2(s)$ – функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ и ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 - \Delta/2$.

Пусть

$$g_3(s) = \frac{s}{2} \int_2^\infty E(u) \frac{du}{u^{1+s}}.$$

Потенцируя, получаем

$$\zeta_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s-1}} H_0(s),$$

где

$$H_0(s) = \sqrt{(s-1)\zeta(s)} e^{g_1(s)+g_2(s)+g_3(s)}. \quad (2.2)$$

Поскольку $E(u) = O(u^{1-\Delta})$ (что эквивалентно утверждению леммы 1), то $g_3(s)$ – функция, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1 - \Delta/2$. Кроме того, $H_0(1) \neq 0$.

Оценим $|g_3(s)|$ сверху при условии (2.1). Имеем

$$g_3(s) = \frac{s}{2} \int_2^{T^{1/\Delta}} E(u) \frac{du}{u^{1+s}} + O\left(T \int_{T^{1/\Delta}}^\infty \frac{du}{u^{1+\Delta}}\right) = \frac{s}{2} \int_2^{T^{1/\Delta}} E(u) \frac{du}{u^{1+s}} + O(1).$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{p \leq T^{1/\Delta}} \frac{\varepsilon(p)}{p^s} = s \int_2^{T^{1/\Delta}} E(u) \frac{du}{u^{1+s}} + \frac{E(T^{1/\Delta})}{(T^{1/\Delta})^s}.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$s \int_2^{T^{1/\Delta}} E(u) \frac{du}{u^{1+s}} = O\left(\sum_{p \leq T^{1/\Delta}} \frac{1}{p}\right) + O(1) = O(\ln \ln T).$$

Потенцируя, получаем $e^{g_3(s)} = O(\ln^{c_1} T)$ в прямоугольнике (2.1).

Кроме того, в круге $|s-1| \leq \Delta/2$ имеем неравенство $e^{g_3(s)} = O(1)$.

Из равенства (2.2) и полученных оценок оба утверждения леммы 3 сразу следуют из принципа аналитического продолжения.

ЛЕММА 4. Пусть ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, и пусть при некотором $b > 1$

$$B(b) = \int_1^\infty \frac{|A(\xi)|}{\xi^{1+b}} d\xi, \quad A(\xi) = \sum_{n \leq \xi} a(n).$$

Тогда при $x \geq 1$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\int_1^x A(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)}{s(1+s)} x^{1+s} ds + O(R(x)),$$

где

$$R(x) = B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln T \right) \max_{0.5x \leq \xi \leq 1.5x} |A(\xi)|.$$

Доказательство см., например, в [10; приложение, § 5].

§ 3. Доказательство теоремы

Положим в лемме 4

$$a(n) = \tau_k(n), \quad F(s) = \zeta_0^k(s), \quad A(\xi) = T_{k_0}(\xi) = \sum_{n \leq \xi, n \in M_0} \tau_k(n),$$

$$b = 1 + \frac{1}{\ln x}, \quad e^2 \leq T \leq x.$$

Воспользуемся известным неравенством К. К. Марджанишвили

$$\sum_{n \leq \xi} \tau_k(n) \leq \xi \frac{(\ln \xi + k - 1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

(см., например, [10; приложение, § 10]), из которого прямо следует, что

$$\begin{aligned} B(b) &\leq \int_1^\infty \frac{(\ln \xi + k - 1)^{k-1}}{(k-1)! \xi^b} d\xi \\ &\leq \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{1}{b-1} + \frac{1}{(b-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(b-1)^k} \right) \leq 2(3 \ln x)^k. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\max_{0.5x \leq \xi \leq 1.5x} |A(\xi)| \leq 4x(3 \ln x)^{k-1}.$$

Следовательно,

$$|R(x)| = O\left(\frac{x^2}{T}(3 \ln x)^k\right).$$

Таким образом, получаем

$$\int_1^\infty T_{k_0}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta_0^k(s)}{s(s+1)} x^{s+1} ds + O\left(\frac{x^2}{T}(3 \ln x)^k\right).$$

Пусть сначала k – нечетное число. Выберем $T = e^{\sqrt{\ln x}}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta_0^k(s)}{s(s+1)} x^{s+1} ds = \frac{x^2}{2\pi i} \int_{b-1-iT}^{b-1+iT} \frac{\zeta_0^k(1+s)}{(1+s)(2+s)} x^s ds.$$

Пусть Γ_1 – прямоугольник с вершинами

$$b-1-iT, \quad b-1+iT, \quad -\frac{2}{\ln T}+iT, \quad -\frac{2}{\ln T}-iT.$$

Пусть $0 < r < 1/(2 \ln x)$. Сделаем внутри Γ_1 разрез по отрезку $[-2/\sqrt{\ln x}, -r]$.

Определим замкнутый ориентированный контур Γ следующим образом. От точки $b-1-iT$ по сторонам Γ_1 поднимаемся вверх, поворачиваем налево и опускаемся вниз до точки $-2/\sqrt{\ln x}$. Затем по верхнему берегу разреза доходим до точки $-r$; обходим точку $s=0$ по окружности радиуса r по часовой стрелке; по нижнему берегу разреза доходим до точки $-2/\sqrt{\ln x}$. Затем по сторонам Γ_1 опускаемся вниз, поворачиваем налево и возвращаемся в точку $b-1-iT$.

Верхний берег разреза, окружность и нижний берег разреза с заданными на них ориентациями обозначим через C , а тот же контур, проходимый в противоположном направлении, обозначим через C^- .

Из теоремы Коши и леммы 3 имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-1-iT}^{b-1+iT} \frac{\zeta_0^k(1+s)}{(1+s)(2+s)} x^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\zeta_0^k(1+s)}{(1+s)(2+s)} x^s ds + O(e^{-0.5\sqrt{\ln x}}).$$

Воспользуемся леммой 3 и разложим $H(1+s)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\zeta_0^k(1+s)}{(1+s)(2+s)} x^s ds &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{H^{(l)}(1)}{l!} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} s^{l-k/2} x^s ds \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l!} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} s^{l-k/2} x^s ds \\ &\quad + O\left(\sum_{l > k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{|H^{(l)}(1)|}{l!} \int_{C^-} |s|^{l-k/2} |x^s| |ds| \right). \end{aligned}$$

При $l > k/2 + \sqrt{\ln x}$

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{|s|=r} |s|^{l-k/2} |x^s| |ds| = 0,$$

поэтому

$$\int_{C^-} |s|^{l-k/2} |x^s| |ds| = O\left(\int_0^{2/\sqrt{\ln x}} x^{-t} t^{l-k/2} dt \right).$$

Функция $x^{-t} t^{l-k/2}$ достигает максимума в точке $t_0 = (l - k/2)/\ln x$, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{2/\sqrt{\ln x}} x^{-t} t^{l-k/2} dt &\leq (x^{-t_0} + e^{-2\sqrt{\ln x}}) \left(\frac{2}{\sqrt{\ln x}} \right)^{l+1-k/2} \\ &\leq 2e^{-\sqrt{\ln x}} \left(\frac{2}{\sqrt{\ln x}} \right)^{l+1-k/2}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$\frac{H^{(l)}(1)}{l!} = O\left(\left(\frac{2}{\Delta} \right)^l \right), \quad (3.1)$$

то

$$\sum_{l > k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{|H^{(l)}(1)|}{l!} \int_{C^-} |s|^{l-k/2} |x^s| |ds| = O(e^{-\sqrt{\ln x}}),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\zeta_0^k(1+s)}{(1+s)(2+s)} x^s ds = \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l!} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} s^{l-k/2} x^s ds + O(e^{-\sqrt{\ln x}}).$$

Заменяем в контуре C^- отрезки на лучи $(-\infty, -r]$ (с соответствующими ориентациями). Получим контур C^* . Оценим получающуюся при этом ошибку:

$$\left| \int_{C^-} s^{l-k/2} x^s ds - \int_{C^*} s^{l-k/2} x^s ds \right| = O\left(\int_{2/\sqrt{\ln x}}^{\infty} t^{l-k/2} x^{-t} dt \right),$$

$$\int_{2/\sqrt{\ln x}}^{\infty} t^{l-k/2} x^{-t} dt = (\ln x)^{k/2-l-1} \int_{2\sqrt{\ln x}}^{\infty} t^{l-k/2} e^{-t} dt,$$

$$\int_{2\sqrt{\ln x}}^{\infty} t^{l-k/2} e^{-t} dt = -t^{l-k/2} e^{-t} \Big|_{2\sqrt{\ln x}}^{\infty} + \frac{l-k/2}{2\sqrt{\ln x}} \int_{2\sqrt{\ln x}}^{\infty} t^{l-k/2} e^{-t} dt;$$

отсюда, поскольку $(l-k/2)/(2\sqrt{\ln x}) \leq 1/2$, получаем

$$\int_{2\sqrt{\ln x}}^{\infty} t^{l-k/2} e^{-t} dt \leq 2(2\sqrt{\ln x})^{l-k/2} e^{-2\sqrt{\ln x}}.$$

Вновь пользуясь (3.1), получаем

$$\sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l!} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} s^{l-k/2} x^s ds$$

$$= \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l!} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} s^{l-k/2} x^s ds + O(e^{-\sqrt{\ln x}}).$$

Наконец, воспользуемся известной формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} s^{l-k/2} x^s ds = \frac{(\ln x)^{k/2-l-1}}{\Gamma(k/2-l)},$$

где $\Gamma(k/2-n)$ – значение гамма-функции Эйлера (см., например, [11; гл. 5]).

Тогда получаем формулу

$$\int_1^x T_{k_0}(\xi) d\xi = x^2 \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln x)^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} + O(x^2 e^{-0.5\sqrt{\ln x}}). \quad (3.2)$$

Для завершения доказательства в случае нечетного k применим прием асимптотического дифференцирования.

Поскольку $T_{k_0}(\xi)$ – монотонно неубывающая функция, имеем неравенства

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x T_{k_0}(\xi) d\xi \leq T_{k_0}(x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} T_{k_0}(\xi) d\xi, \quad (3.3)$$

где $h = xe^{-0.25\sqrt{\ln x}}$.

Пользуясь формулой (3.2), для интегралов

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x T_{k_0}(\xi) d\xi, \quad \frac{1}{h} \int_x^{x+h} T_{k_0}(\xi) d\xi$$

выведем асимптотические формулы, главные члены которых совпадают и остатки которых оцениваются одинаково. Тем самым получим асимптотическую формулу для $T_{k_0}(x)$.

Из (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} T_{k_0}(\xi) d\xi &= \frac{(x+h)^2}{h} \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln(x+h))^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} \\ &\quad - \frac{x^2}{h} \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln x)^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} + O(xe^{-0.25\sqrt{\ln x}}). \end{aligned}$$

Заметим, что из формул дополнения, удвоения и Стирлинга прямо следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(k/2-l)} = \begin{cases} O(1), & \text{если } l \leq \frac{k}{2}, \\ (\sqrt{\ln x})^{l-k/2}, & \text{если } \frac{k}{2} < l \leq \frac{k}{2} + \sqrt{\ln x}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Из неравенств (2.2), (3.4) и $k \leq 0.01\sqrt{\ln x}/(\ln \ln x)$ вытекает, что

$$\sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln x)^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} = O(e^{0.005\sqrt{\ln x}}). \quad (3.5)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &\frac{(x+h)^2}{h} \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln(x+h))^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} \\ &= \left(\frac{x^2}{h} + 2x \right) \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln(x+h))^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} + O(xe^{-0.24\sqrt{\ln x}}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \ln(x+h) &= \ln x + \frac{h}{x} + O\left(\frac{h^2}{x^2}\right), \\ (\ln(x+h))^{k/2-l-1} &= (\ln x)^{k/2-l-1} \left(1 + \frac{h}{x \ln x} + O\left(\frac{h^2}{x^2 \ln x}\right) \right)^{k/2-l-1} \\ &= (\ln x)^{k/2-l-1} + \frac{h}{x} \left(\frac{k}{2} - l - 1 \right) (\ln x)^{k/2-l-2} + O\left(\frac{h^2}{x^2}\right), \end{aligned}$$

так как $l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}$.

Подставим последнее равенство в правую часть (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^2}{h} \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln(x+h))^{k/2-l-1}}{l! \Gamma(k/2-l)} \\ = \left(\frac{x^2}{h} + 2x \right) \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(\ln x)^{k/2-l-2}}{l! \Gamma(k/2-l)} \\ + x \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)(k/2-l-1)(\ln x)^{k/2-l-2}}{l! \Gamma(k/2-l)} + O(xe^{-0.24\sqrt{\ln x}}). \end{aligned}$$

Вычитая из обеих частей этого равенства

$$\frac{x^2}{h} \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l! \Gamma(k/2-l)} (\ln x)^{k/2-l-1},$$

получим искомую формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} T_{k_0}(\xi) d\xi = x \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l! \Gamma(k/2-l)} \left(2 \ln x + \frac{k}{2} - l - 1 \right) (\ln x)^{k/2-l-2} \\ + O(xe^{-0.2\sqrt{\ln x}}). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу $x-h$ вместо x и проводя очевидные упрощения, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x T_{k_0}(\xi) d\xi = x \sum_{0 \leq l \leq k/2 + \sqrt{\ln x}} \frac{H^{(l)}(1)}{l! \Gamma(k/2-l)} \left(2 \ln x + \frac{k}{2} - l - 1 \right) (\ln x)^{k/2-l-2} \\ + O(xe^{-0.2\sqrt{\ln x}}). \end{aligned}$$

Теперь формула (1.1) с $c_l = H_0^{(l)}(1)/(l!)$ следует непосредственно из неравенства (3.4).

Пусть теперь $k = 2k_1$ – четное число. Тогда производящая функция последовательности $\tau_k(n)$, $n \in M_0$, имеет вид

$$F(s) = \sum_{n \in M_0} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \zeta^{k_1}(s) H_0^k(s),$$

т.е. отличается от $\zeta^{k_1}(s)$ лишь множителем $H_0^k(s)$.

Теперь с учетом оценок леммы 3 получаем асимптотическую формулу для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^{k_1}(s) H_0^k(s)}{s(s+1)} x^{s+1} ds$$

по существу тем же способом, как это сделано в работе [12] для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{\zeta^{k_1}(s)}{s(s+1)} x^{s+1} ds.$$

Наша формула отличается от формулы из [12] видом главного члена и наличием дополнительного остаточного члена вида

$$O\left(x^2\left(\frac{2\ln^{c_1} x}{\Delta}\right)^k e^{-\sqrt{\ln x}}\right),$$

который имеется в лемме 4.

Список литературы

- [1] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, v. 2, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1909, ix+567–961 pp.
- [2] Б. М. Бредихин, “Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 6, 40–49.
- [3] E. Wirsing, “Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen”, *Math. Ann.*, **143**:1 (1961), 75–102.
- [4] Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, “Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел”, *УМН*, **22**:3(135) (1967), 119–197; англ. пер.: B. V. Levin, A. S. Fainleib, “Application of some integral equations to problems of number theory”, *Russian Math. Surveys*, **22**:3 (1967), 119–204.
- [5] А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971, 416 с.; англ. пер.: A. G. Postnikov, *Introduction to analytic number theory*, Transl. Math. Monogr., **68**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, vi+320 pp.
- [6] М. Е. Чанга, “О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:4 (2003), 213–224; англ. пер.: M. E. Changa, “Numbers whose prime divisors lie in special intervals”, *Izv. Math.*, **67**:4 (2003), 837–848.
- [7] C. Mauduit, J. Rivat, “Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers”, *Ann. of Math. (2)*, **171**:3 (2010), 1591–1646.
- [8] B. Green, “Three topics in additive prime number theory”, *Current developments in mathematics*, 2007, Int. Press, Somerville, MA, 2009, 1–41; arXiv: 0710.0823.
- [9] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, 2-е изд., Наука, М., 1983, 240 с.; англ. пер.: A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [10] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994, 376 с.; англ. пер.: A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, De Gruyter Exp. Math., **5**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992, xii+396 pp.
- [11] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шаббат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 5-е изд., Наука, М., 1987, 688 с.; нем. пер. 3-го изд.: M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, Math. Naturwiss. Tech., **13**, Deutscher Verlag Wissensch., Berlin, 1967, x+846 pp.
- [12] А. А. Карацуба, “Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:3 (1972), 475–483; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Uniform approximation of the remainder term in the Dirichlet divisor problem”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:3 (1972), 467–475.

Карапет Мкртиевич Эминян
(Karapet M. Eminyan)

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: eminyan@mail.ru; k.m.eminyan@gmail.com

Поступила в редакцию
21.07.2014