Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Войнов, В. Ю. Протасов, Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 7, 33–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:47:53

УДК 517.98+514.172.4+514.174.5

А. С. Войнов, В. Ю. Протасов

Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов

Исследуются компактные мультипликативные полугруппы аффинных операторов, действующих в конечномерном пространстве. Основной результат утверждает, что либо каждая такая полугруппа является сжимающей, т.е. содержит элементы сколь угодно малой операторной нормы, либо все ее операторы имеют общее инвариантное аффинное подпространство, на котором она является сжимающей. В доказательстве применяются функциональные разностные уравнения со сжатием аргумента. Рассматриваются приложения к задачам о самоаффинных разбиениях выпуклых множеств, к описанию конечных аффинных полугрупп, а также к доказательству критерия примитивности семейства неотрицательных матриц.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: аффинный оператор, самоподобие, разбиение, спектральный радиус, примитивная матрица.

DOI: 10.4213/sm8408

§ 1. Введение

Рассмотрим произвольную замкнутую мультипликативную полугруппу $\mathcal{S}$ аффинных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$. Всегда будем предполагать, что единичный оператор входит в полугруппу. Полугруппа является ограниченной, если орбита любой точки $\{Ax \mid A \in \mathcal{S}\}$ ограничена. Это равносильно существованию выпуклого тела $G \subset \mathbb{R}^d$ (выпуклого компакта с непустой внутреннейностью), для которого $AG \subset G$, $A \in \mathcal{S}$ (лемма 1).

Полугруппа называется *сжимающей*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $A \in \mathcal{S}$ такой, что $\|A\| < \varepsilon$. По определению $\|A\| = \|\tilde{A}\|$, где норма предполагается фиксированной, а через $\tilde{A}$ обозначается линейная часть (дифференциал) аффинного оператора A .

Нас будут интересовать компактные несжимающие полугруппы. Для каждой такой полугруппы имеем $C_1 \leq \|A\| \leq C_2$, $A \in \mathcal{S}$, где C_1, C_2 – положительные константы. Более того, спектральный радиус $\rho(A)$ каждого элемента $A \in \mathcal{S}$ равен 1. Таким образом, компактные несжимающие полугруппы – это, с одной стороны, полугруппы операторов с постоянным спектральным радиусом, а с другой – полугруппы операторов, ограниченных сверху и снизу.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00332), фонда “Династия”, гранта Саймонса и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3682.2014.1); работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-00642 и № 14-01-00332), а также фонда “Династия”.

© А. С. Войнов, В. Ю. Протасов, 2015

В литературе подробно изучались компактные несжимающие полугруппы линейных операторов (см. [1]–[5]), что фактически является частным случаем нашей задачи, когда все аффинные операторы имеют общую неподвижную точку. Полугруппы ортогональных операторов, а также полугруппы стохастических матриц дают простейшие, но далеко не единственные примеры. На самом деле многообразие таких полугрупп столь богато, что на сегодняшний день не представляется возможным получить их полную классификацию даже для небольших размерностей d (см. [3]–[5]). Компактные несжимающие полугруппы аффинных операторов применялись в задачах о самоподобных и самоаффинных замощениях плоскости (см. [6], [7]), при изучении уравнений самоподобия в теории функций, теории приближений и теории всплесков (см. [8]–[14]), конечных матричных полугрупп (см. [15]–[17]), самоаффинных разбиений выпуклых множеств (см. [14], [18]–[20]).

Наш основной результат – теорема 1 – утверждает, что в любой компактной несжимающей полугруппе операторы имеют общее инвариантное аффинное подпространство. Более того, это подпространство пересекает инвариантное выпуклое тело G , а ограничение полугруппы на это пространство является сжимающим. В доказательстве применяется теория уравнений самоподобия. Для данной полугруппы операторов специальным образом строится функциональное уравнение со сжатием аргумента, доказывается, что у него есть суммируемое решение, после чего применяются условия существования решений таких уравнений.

Затем мы используем теорему 1 для доказательства структурных теорем об аффинных полугруппах в ряде приложений. Вначале мы получаем описание семейств операторов, определяющих самоаффинные разбиения выпуклого тела (теоремы 2 и 3). Из этого следует классификация самоаффинных выпуклых тел для случаев, когда общее инвариантное подпространство аффинных операторов имеет размерность 1 или $d - 1$ (см. § 7). Затем мы применяем основной результат для исследования конечных аффинных полугрупп. Наконец, в § 9 рассматривается приложение теоремы 1 к изучению полугрупп стохастических матриц. Каждая стохастическая по столбцам $(d \times d)$ -матрица определяет аффинный оператор на гиперплоскости $L = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum x_i = 1\}$. Данные операторы образуют компактную полугруппу с инвариантным телом G в виде симплекса $\{x \in L \mid x \geq 0\}$. Это позволяет применить наши результаты к теории Перрона–Фробениуса для неоднородных произведений неотрицательных матриц. Мы получаем простое и короткое доказательство критерия примитивности семейства матриц из работы [21].

§ 2. Сжимающие семейства операторов

Докажем вначале, что если полугруппа аффинных операторов $\mathcal{S}$ такова, что орбита $\{Ax \mid A \in \mathcal{S}\}$ ограничена для каждой точки x , то существует выпуклое тело G , для которого $AG \subset G$, $A \in \mathcal{S}$.

ЛЕММА 1. *Полугруппа аффинных операторов $\mathcal{S}$ ограничена тогда и только тогда, когда найдется выпуклое тело G такое, что $AG \subset G$ для всех операторов $A \in \mathcal{S}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что из существования такого инвариантного тела следует ограниченность. От противного: предположим, что такое тело G существует и найдется точка $a \in \mathbb{R}^d$ с неограниченной орбитой. Точка a заведомо не содержится в G . Зафиксируем евклидову метрику ρ в $\mathbb{R}^d$ такую, что G содержит единичный шар в этой метрике с центром в точке $g \in G$. Рассмотрим элемент A полугруппы $\mathcal{S}$ такой, что $\text{dist}(Aa, G) > \text{diam } G \cdot \max_{t \in G} \rho(a, t)$. Учитывая неограниченность орбиты точки a и включение $AG \subset G$, получаем, что такой элемент полугруппы существует. Рассмотрим точку $x \in G$ на единичной сфере с центром в g такую, что вектор $x - g$ параллелен вектору $a - g$. Тогда

$$\rho(Ax, Ag) = \frac{\rho(Aa, Ag)}{\rho(a, g)} \geq \frac{\text{dist}(Aa, G)}{\rho(a, g)} > \frac{\text{diam } G \cdot \max_{t \in G} \rho(a, t)}{\rho(a, g)} \geq \text{diam } G.$$

Учитывая, что Ax и Ag содержатся в G , приходим к противоречию.

В обратную сторону: рассмотрим концы единичных векторов – точки $e_1, \dots, e_d$, тогда в качестве инвариантного тела можно взять замкнутую выпуклую оболочку орбит этих точек и нуля $\text{conv}(\text{Orb}_{\mathcal{S}} 0, \text{Orb}_{\mathcal{S}} e_1, \dots, \text{Orb}_{\mathcal{S}} e_d)$. Поскольку $\mathcal{S}$ замкнута, ее ограниченность равносильна компактности.

Отметим, что из ограниченности полугруппы аффинных операторов $\mathcal{S}$ следует ограниченность полугруппы, порожденной их линейными частями. Действительно, рассмотрим орбиту нуля $\mathcal{S}(0)$, по условию она ограничена. Предположим, что полугруппа, порожденная линейными частями исходных операторов, неограничена, т.е. существует точка a с неограниченной орбитой под действием линейных частей. Заметим, что для произвольного аффинного оператора $A \in \mathcal{S}$ имеем $Aa = A(0) + \tilde{A}a$. Учитывая ограниченность орбиты нуля, мы получаем неограниченность орбиты a ; противоречие.

Для произвольного непустого компактного семейства $\mathcal{A}$ аффинных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$, мы обозначаем через $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ полугруппу, порожденную операторами из $\mathcal{A}$ с помощью умножений и взятия замыкания. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ имеет *ограниченные произведения*, если полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ компактна, и что $\mathcal{A}$ *сжимающее/несжимающее*, если такова полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Таким образом, семейство $\mathcal{A}$ имеет ограниченные произведения тогда и только тогда, когда у него есть инвариантное выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$, т.е. $AG \subset G$, $A \in \mathcal{A}$.

Для семейств с ограниченными произведениями следующие свойства эквивалентны:

- 1) семейство $\mathcal{A}$ несжимающее;
- 2) в любой операторной норме имеем $\|\Pi\| \geq 1$, $\Pi \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$;
- 3) $\rho(\Pi) \geq 1$ для каждого $\Pi \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$;
- 4) $\rho(\Pi) = 1$ для каждого $\Pi \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

Доказательства см. в [3].

Если семейство $\mathcal{A}$ конечно, то его сжимаемость означает, что произведения длины k матриц из $\mathcal{A}$ стремятся к нулю с вероятностью 1 при $k \rightarrow \infty$. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ и полугруппа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ компактна. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, равномерно распределенных на множестве $\{1, \dots, m\}$. Семейство $\mathcal{A}$ *сжимающее тогда и только тогда, когда* $\|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\| \rightarrow 0$ *почти наверное* (см. [14]). Естественным “индикатором

сжимаемости” конечного семейства являются его совместные спектральные характеристики, или p -радиусы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для конечного семейства аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ и для заданного $p \in [1, +\infty]$ p -радиус $\rho_p(\mathcal{A})$ определяется как

$$\rho_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(m^{-k} \sum_{d_1, \dots, d_k} \|A_{d_k} \cdots A_{d_1}\|^p \right)^{1/(pk)} \quad (2.1)$$

со стандартной модификацией при $p = +\infty$.

Обычно p -радиус определяется для семейства линейных операторов $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_m\}$, однако нам он понадобится для аффинных. Ясно, что $\rho_p(\mathcal{A}) = \rho_p(\widetilde{\mathcal{A}})$. Предел (2.1) всегда существует и не зависит от операторной нормы в $\mathbb{R}^d$. При $m = 1$, $\mathcal{A} = \{A\}$ все p -радиусы совпадают с обычным спектральным радиусом оператора A . Совместные спектральные характеристики давно подробно изучаются. Они имеют богатую историю и приложения к самым разным областям – от дискретной математики до теории функций (см., например, [7], [10], [11], [13], [22]). Если семейство $\mathcal{A}$ имеет ограниченные произведения, то, как легко убедиться, $\rho_p \leq 1$. Менее очевидно, что семейство с ограниченными произведениями является сжимающим тогда и только тогда, когда существует p , для которого $\rho_p < 1$. В этом случае $\rho_p < 1$ для всех $p \in [1, +\infty)$ (см. [14]). Мы применим этот факт в доказательстве теоремы 1 в § 4.

Будем использовать следующие обозначения:

- $\mathcal{A}^k$ – множество произведений длины k (с возможными повторениями) операторов семейства $\mathcal{A}$;
- $\rho(A)$ – спектральный радиус оператора A , т.е. максимальный модуль его собственных значений;
- $L_p([a, b], K)$ – множество функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ с конечной L_p -нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p}$$

и со значениями в заданном множестве $K \subset \mathbb{R}^d$;

- $\text{Vol}(\cdot)$ – объем;
- $\text{conv}(\cdot)$ – выпуклая оболочка;
- $\|x\|_2$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^d$;
- $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq 0\}$ – положительный октант в $\mathbb{R}^d$.

По умолчанию размерность аффинного подпространства может принимать значения от нуля (точка) до $d - 1$ (гиперплоскость). Семейство аффинных операторов $\mathcal{A}$ называется *неприводимым*, если операторы не имеют общего инвариантного аффинного подпространства. Семейство линейных операторов $\mathcal{A}$ *неприводимо*, если операторы не имеют общего инвариантного линейного подпространства размерности от 1 до $d - 1$.

§ 3. Основная теорема и примеры

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое тело, $\mathcal{A}$ – компактное семейство аффинных операторов в $\mathbb{R}^d$ такое, что $AG \subset G$, $A \in \mathcal{A}$. Тогда либо семейство $\mathcal{A}$ сжимающее, либо операторы из $\mathcal{A}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающее G , на котором $\mathcal{A}$ является сжимающим.

Таким образом, ограниченная несжимающая полугруппа аффинных операторов всегда факторизуется по инвариантному подпространству, на котором она является сжимающей. Этот факт служит основой нескольких теорем о структуре специальных аффинных несжимающих полугрупп, возникающих в различных приложениях. Данной теме посвящены §§ 6–9. Пока же отметим одно простейшее следствие теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Ограниченная неприводимая полугруппа аффинных операторов является сжимающей.

Доказательство теоремы 1 представлено в § 4. Оно основано на применении функциональных уравнений со сжатием аргумента. Мы же пока рассмотрим несколько примеров несжимающих семейств.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим плоский прямоугольник $abcd$; обозначим через m и n середины сторон ab и cd соответственно. Оператор A_1 является сжатием с коэффициентом 2 к прямой ad . Он переводит прямоугольник $abcd$ в прямоугольник $amnd$ (с учетом порядка вершин); оператор A_2 является композицией сжатия с коэффициентом 2 к прямой bc и поворота на 180° . Он переводит прямоугольник $abcd$ в прямоугольник $cnmb$. Семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ несжимающее. Единственным общим инвариантным аффинным подпространством является прямая, проходящая через середины ad и bc . На ней, как несложно убедиться, семейство $\mathcal{A}|_V$ сжимающее. Это, впрочем, следует из теоремы 1 и единственности инвариантного подпространства.

Следующий пример показывает, что в условиях теоремы 1 может не существовать инвариантного подпространства, пересекающего $\text{int } G$.

ПРИМЕР 2. В качестве G возьмем пирамиду $sabcd$ с вершиной s и прямоугольным основанием; s_1, s_2 – некоторые точки внутри G . Оператор B_1 сохраняет плоскость основания и действует на ней, как оператор A_1 из примера 1, а вершину s переводит в точку s_1 ; оператор B_2 действует на плоскости основания, как оператор A_2 из примера 1, а вершину s переводит в s_2 . Семейство $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$ несжимающее, поскольку таково его ограничение на плоскость основания. Если точки s_1 и s_2 имеют “общее положение”, то семейство $\mathcal{B}$ имеет только два инвариантных подпространства: плоскость основания и прямую l , проходящую через середины ad и bc . Оба инвариантных подпространства пересекают только границу G . На плоскости основания семейство $\mathcal{A}$ несжимающее. Поэтому в качестве инвариантного подпространства из теоремы 1 подходит только прямая l .

§ 4. Доказательство основной теоремы

Для конечного семейства аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ рассмотрим следующий оператор в пространстве $L_p([0, 1], \mathbb{R}^d)$ вектор-функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$[\mathbf{A}f](t) = A_k f(mt - k + 1), \quad t \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right], \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

Данное равенство выполняется для почти всех $t \in [0, 1]$ в мере Лебега. Далее для краткости обозначаем через $L_p = L_p([0, 1], \mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty)$, пространство измеримых вектор-функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, для которых $\int \|f(t)\|^p dt < \infty$. Функциональное уравнение на неподвижную точку оператора $\mathbf{A}$ называется *уравнением самоподобия*:

$$\mathbf{A}v = v. \quad (4.2)$$

Для произвольной функции $f \in L_p([0, 1], \mathbb{R}^d)$ обозначим через $\mathbf{aff}(f)$ аффинную оболочку ее образа, т.е. наименьшее по включению аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее точки $f(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Под решением уравнения (4.1) будем подразумевать множество функций, попарно совпадающих на подмножествах полной меры отрезка $[0, 1]$, для которых уравнение выполнено почти всюду. Если $v \in L_p$ – решение уравнения самоподобия, то $\mathbf{aff}(v)$ является общим инвариантным подпространством операторов из $\mathcal{A}$, возможно, совпадающим с $\mathbb{R}^d$. Имеет место следующий критерий существования, единственности и устойчивости решений уравнения самоподобия.

ТЕОРЕМА А (см. [13]). *Если $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$, то уравнение (4.2) имеет единственное решение $v \in L_p$ и $\|\mathbf{A}^k f - v\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для любой начальной функции $f \in L_p$. Обратно: если уравнение имеет L_p -решение, то $\rho_p(\mathcal{A}|_V) < 1$, где $V = \mathbf{aff}(v)$.*

Таким образом, разрешимость уравнения самоподобия в пространстве L_p зависит только от p -радиуса $\rho_p(\mathcal{A})$. С другой стороны, неравенство $\rho_p(\mathcal{A}) < 1$ равносильно сжимаемости семейства $\mathcal{A}$. Теперь мы в состоянии доказать теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если семейство $\mathcal{A}$ несжимающее, то таково и любое его конечное подсемейство. С другой стороны, если каждое конечное подсемейство $\mathcal{A}$ имеет инвариантное аффинное подпространство, то и все операторы из $\mathcal{A}$ имеют общее инвариантное подпространство. Поэтому достаточно доказать теорему для конечного семейства $\mathcal{A}$. Покажем сначала, что при условиях теоремы уравнение (4.2) имеет решение $v \in L_1$. Для этого зафиксируем произвольную точку $a \in G$ и число ε и определим аффинный оператор $A_{1,\varepsilon}x = \varepsilon a + (1 - \varepsilon)A_1x$, $x \in \mathbb{R}^d$. Ясно, что $A_{1,\varepsilon} \rightarrow A_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ семейство $\mathcal{A}_\varepsilon = \{A_{1,\varepsilon}, A_2, \dots, A_m\}$ сохраняет G (поскольку G выпукло и $a \in G$) и является сжимающим, так как $\rho(A_{1,\varepsilon}) \leq 1 - \varepsilon$. Следовательно, $\rho_1(\mathcal{A}_\varepsilon) < 1$, а значит, уравнение самоподобия $\mathbf{A}_\varepsilon v = v$ для семейства $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет решение $v_\varepsilon \in L_1$. Более того, для любой функции $f \in L_1([0, 1], G)$ последовательность $[\mathbf{A}_\varepsilon]^k f$, $k \in \mathbb{N}$, лежит в $L_1([0, 1], G)$, а значит, и ее предел v_ε

лежит там же. Итак, $v_\varepsilon(t) \in G$ для почти всех t , поэтому множество функций $\{v_\varepsilon, \varepsilon \in [0, 1]\}$ ограничено в L_1 . В силу теоремы Банаха–Алаоглу оно имеет частичный $*$ -слабый предел $v \in L_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ясно, что $v \in L_1([0, 1], G)$. Кроме того, $\mathbf{A}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{A}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому $\mathbf{A}v = v$. Следовательно, v – решение уравнения самоподобия. По теореме А $\rho_1(\mathcal{A}|_V) < 1$, где $V = \mathbf{aff}(v)$. Значит, семейство $\mathcal{A}$ сжимающее на V , поэтому если оно не является сжимающим в $\mathbb{R}^d$, то $\dim V \leq d - 1$. Таким образом, V – искомое подпространство.

§ 5. Два вспомогательных результата

Перед тем как приступить к приложениям, докажем две леммы о компактных несжимающих полугруппах в частных случаях.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{B}$ – компактное множество линейных операторов с ограниченными произведениями. Тогда если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- а) определители всех операторов из $\mathcal{B}$ по модулю равны 1;
- б) $\mathcal{B}$ неприводимое, несжимающее и состоит из невырожденных операторов;

то существует базис, в котором все операторы $\mathcal{B}$ ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого семейства операторов с ограниченными произведениями существует выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$, для которого $BG \subset G$, $B \in \mathcal{B}$. Если выполнено условие а), то все операторы семейства $\mathcal{B}$ сохраняют объем, а значит, $BG = G$ для любого $B \in \mathcal{B}$. Пусть E – эллипсоид Джона выпуклого тела G , т.е. эллипсоид максимального объема, содержащийся в G . Из единственности эллипсоида Джона (см. [23]) следует, что $BE = E$, $B \in \mathcal{B}$. Выбрав базис, в котором E является евклидовым шаром, получаем, что все операторы семейства $\mathcal{B}$ ортогональны.

Если $\mathcal{B}$ несжимающее, то любой оператор из полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ имеет спектральный радиус 1. А так как эта полугруппа неприводима, то все ее операторы не имеют собственных значений, отличных по модулю от нуля и от единицы (см. [3; теорема 2.5]). Поскольку все операторы семейства $\mathcal{B}$ невырожденные, то все их собственные значения равны по модулю 1, а значит, выполнено условие а).

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{U}$ – неприводимое компактное семейство ортогональных линейных операторов в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Тогда для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, выпуклая оболочка ее орбиты $\{Ux \mid U \in \mathcal{S}_{\mathcal{U}} \cup \{I\}\}$ содержит нуль в качестве внутренней точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|x\|_2 = 1$. Обозначим через M выпуклую оболочку точки $\{0\}$ и орбиты точки x . Поскольку семейство $\mathcal{U}$ неприводимо, то M является выпуклым телом, лежащим в единичном шаре. Так как $UM \subset M$, $U \in \mathcal{U}$, и оператор U ортогонален, то $UM = M$. Следовательно, центр тяжести g тела M является неподвижной точкой каждого оператора из $\mathcal{U}$. Если $0 \notin \text{int } M$, то по теореме отделимости M целиком лежит в некотором полупшаре единичного шара. Значит, $g \neq 0$ и $Ug = g$, $U \in \mathcal{U}$, что противоречит неприводимости $\mathcal{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если хотя бы один оператор семейства $\mathcal{U}$ неортогонален, то лемма 3 может не выполняться. Если, например, все $U \in \mathcal{U}$, кроме некоторого $U_0 \in \mathcal{U}$, задаются матрицами перестановок, а U_0 – положительной матрицей такой, что семейство $\mathcal{U}$ неприводимо, то орбита любой точки $x \in \mathbb{R}_+^d$ лежит в $\mathbb{R}_+^d$, поэтому ее выпуклая оболочка не содержит начала координат в качестве внутренней точки.

§ 6. Приложение к самоаффинным разбиениям выпуклых множеств

Один из важных классов ограниченных аффинных полугрупп составляют операторы, задающие самоаффинные разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Даны выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$ и семейство невырожденных аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, $m \geq 2$. Семейство $\mathcal{A}$ задает самоаффинное разбиение G , если $G = \bigcup_{i=1}^m A_i G$ и $\text{Vol}(A_i G \cap A_j G) = 0$ при $i \neq j$. Тело G называется самоаффинным, если оно допускает хотя бы одно самоаффинное разбиение.

Самоаффинные тела изучались в работах [18], [19] и применялись в функциональном анализе, при исследовании уравнений самоподобия (см. [13], [14]), масштабирующих уравнений, уточняющих (subdivision) алгоритмов (см. [9], [11]) и т.д. Кроме того, они тесно связаны с самоподобными и самоаффинными замощениями пространства (см. [6], [7]).

На двумерной плоскости любое самоаффинное тело является многоугольником, а число его вершин не превосходит пяти (см. [19]). Ясно, что треугольник является самоаффинным, при этом можно взять произвольное его разбиение на треугольники. Любой плоский четырехугольник также самоаффинный (см. [18]). Известны примеры самоаффинных пятиугольников, но задача их полной классификации не решена (см. [18]).

В более высоких размерностях самоаффинное тело может не быть многогранником. Простейший пример – выпуклый цилиндр, его самоаффинное разбиение задают два сжатия вдоль образующих.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Самоаффинное разбиение называется *дробящимся*, если семейство $\mathcal{A}$ сжимающее.

Таким образом, разбиение является дробящимся, если минимальный диаметр элемента его итераций $\mathcal{A}^k G$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. В этом случае у почти всех элементов итераций разбиения диаметр стремится к нулю. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ суммарный объем элементов разбиения k -й итерации $\mathcal{A}^k G$, диаметр которых больше ε , стремится к нулю. Как показано в [14], *выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$, допускающее дробящееся разбиение, является многогранником*. Более того, оно однозначно определяется семейством операторов $\mathcal{A}$ (см. [20]). Таким образом, если самоаффинное тело не является многогранником, то семейство $\mathcal{A}$, задающее его разбиение, несжимающее. Задача описания таких тел стоит довольно давно. В 1978 г. Г. Валлет выдвинул гипотезу, что любое самоаффинное тело, отличное от многогранника, является прямым произведением двух тел меньшей размерности, одно из которых произвольно, а второе – самоаффинный многогранник (см. [24]). Гипотеза верна

при $d = 2$ (см. [19]), а для $d \geq 3$ она была опровергнута в [20]. Там же, в [20], полностью решен случай $d = 3$. Любое самоаффинное тело в $\mathbb{R}^3$ – это либо многогранник, либо косой цилиндр (определение 4 в § 7). Для $d \geq 4$ известно множество примеров, но классификация не построена.

Мы применим теорему 1 для изучения недробящихся самоаффинных тел. Будет показано (теорема 3), что операторы семейства $\mathcal{A}$, задающего такое разбиение, имеют весьма специальный вид и зависят от одного целочисленного параметра – размерности их общего инвариантного подпространства V . Далее мы полностью классифицируем самоаффинные тела в случаях, когда эта размерность равна 1 или $d - 1$.

Для семейств операторов, задающих разбиения, наличие общего инвариантного подпространства не только необходимо (как в теореме 1), но и достаточно для несжимаемости.

ТЕОРЕМА 2. *Семейство $\mathcal{A}$, задающее самоаффинное разбиение тела G , не является сжимающим тогда и только тогда, когда оно имеет общее инвариантное аффинное подпространство, пересекающее G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – общее инвариантное подпространство операторов из $\mathcal{A}$. Возьмем произвольный шар B , лежащий внутри G и не пересекающий V . Если $\mathcal{A}$ задает дробящееся разбиение, то для каждого $\varepsilon > 0$ суммарный объем частей разбиения $\mathcal{A}^k G$, диаметр которых превосходит ε , стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ (см. [14]). Следовательно, для достаточно больших k найдется элемент разбиения $\mathcal{A}^k G$, который имеет маленький диаметр и пересекает шар B . Тогда он не пересекает V , что невозможно.

ПРИМЕР 3. В примере 1 семейство $\mathcal{A}$ задает самоаффинное разбиение прямоугольника $abcd$. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет инвариантную прямую, из теоремы 2 следует что это разбиение не дробящееся.

Следующая теорема дает описание недробящихся самоаффинных разбиений.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого недробящегося разбиения тела $G \subset \mathbb{R}^d$ операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство V , отличное от точки и пересекающее внутренность G , причем семейство $\mathcal{A}|_V$ сжимающее. Все такие подпространства имеют одну и ту же размерность, параллельны и каждое из них пересекает G по многограннику. Существует базис, в котором матрицы операторов $\tilde{A}_i$ имеют вид*

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} C_i & D_i \\ 0 & U_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.1)$$

где C_i – матрица линейной части ограничения оператора A_i на V , а U_i – ортогональная матрица.

Обратно, если в некотором базисе матрицы линейных частей операторов A_i имеют вид (6.1) с ортогональными матрицами U_i , то тело G не дробящееся.

Инвариантное аффинное подпространство V зависит, вообще говоря, от семейства операторов $\mathcal{A}$. Если на G задано другое самоаффинное разбиение

некоторым семейством операторов $\mathcal{A}'$, то для него подпространство V может уже не быть инвариантным. Отметим, что в силу того, что тело G недробящееся, имеем $\dim V < d$. Кроме того, $\dim U_i = d - \dim C_i = d - \dim V$. В частности, из этого следует, что блок U_i не пуст.

Сначала мы покажем, что найдется инвариантное подпространство семейства $\mathcal{A}$, пересекающее самоаффинное тело и, более того, проходящее через его внутреннюю точку. Затем будет установлено, что все собственные значения операторов разбиения, не соответствующие этому подпространству, по модулю равны единице. Из этого будет следовать, что сечение также является самоаффинным, а все операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют вид (6.1).

Предположим, что некоторое семейство аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$, обладает инвариантным аффинным подпространством L . Через $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ будем обозначать соответствующее семейство линейных операторов, действующих на факторпространстве $\mathbb{R}^d/L$. При доказательстве теоремы 3 будут использованы две следующие леммы.

ЛЕММА 4. *Дано самоаффинное тело $G \subset \mathbb{R}^d$ с семейством операторов разбиения $\mathcal{A}$. Предположим, что семейство операторов $\mathcal{A}$ обладает инвариантным аффинным подпространством L . Тогда семейство линейных операторов $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ не может быть сжимающим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ ограничено, поэтому в пространстве $\mathbb{R}^d/L$ существует норма такая, что соответствующая операторная норма каждого оператора данного семейства не превосходит 1. Зафиксируем эту норму.

Предположим, что семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ является сжимающим. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что в этом случае тело G должно содержаться в ε -окрестности инвариантного подпространства L (окрестность понимается в смысле зафиксированной нормы). Обозначим эту окрестность через L_ε .

В предположении сжимаемости для некоторого натурального k существует оператор $B \in \mathcal{A}^k$ такой, что для произвольной точки $x \in G$ имеем $\rho(Bx, L) < \varepsilon$. Следовательно, BG содержится в L_ε . Обозначим через E_n объединение тех элементов разбиения AG , $A \in \mathcal{A}^n$, полученных при n -й итерации разбиения, которые не содержатся целиком в L_ε . Таким образом,

$$E_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}^n} AG \mid AG \not\subset L_\varepsilon$$

и дополнение $G \setminus E_n$ содержится в L_ε . В силу того, что операторы семейства $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ по норме не превосходят 1, для произвольных операторов $A', A'' \in \mathcal{A}$ из включения $A'G \subset L_\varepsilon$ следует включение $A''A'G \subset L_\varepsilon$. Таким образом, $E_{n+1} \subset E_n$. Заметим, что $BE_n \subset L_\varepsilon$. Таким образом,

$$\text{Vol}(E_{n+k}) \leq (\text{Vol}(E_n) - \det B \cdot \text{Vol}(E_n)) = (1 - \det B) \text{Vol}(E_n).$$

Учитывая, что $1 - \det B$ меньше 1 и неотрицательно, имеем $\text{Vol}(E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, G содержится в L_ε .

В силу произвольности ε получаем $G \subset L$, что невозможно, поскольку G является телом и имеет полную размерность.

ЛЕММА 5. *Задано самоаффинное тело G с семейством операторов разбиения $\mathcal{A}$. Предположим, что операторы из $\mathcal{A}$ обладают общим инвариантным аффинным подпространством L . Тогда существует общее инвариантное подпространство L' такое, что:*

- L' содержит L и не совпадает со всем пространством;
- в подходящем базисе все операторы семейства $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L'}$ являются ортогональными и это семейство либо неприводимо, либо одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ обладает инвариантным линейным подпространством l , то вместо L будем рассматривать инвариантное аффинное подпространство $L + l$. Если $\dim L = d - 1$, то факторпространство одномерно. Итак, не уменьшая общности, можем считать, что семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ неприводимо и не одномерно. Воспользовавшись леммой 4, получаем, что семейство $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ не является сжимающим. Тогда по лемме 2, п. б) в подходящем базисе все элементы $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/L}$ будут ортогональными операторами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹ ТЕОРЕМЫ 3. Согласно теореме 1 операторы семейства $\mathcal{A}$ имеют хотя бы одно общее инвариантное аффинное подпространство W , пересекающее G . Если W – точка, то, переместив в нее начало координат и учитывая инвариантность W , можно считать, что все операторы A_i линейные. Если они имеют общее инвариантное линейное подпространство, то получаем, что $\mathcal{A}$ имеет общее инвариантное аффинное подпространство, отличное от точки. Если такого подпространства не существует, то семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям п. б) леммы 2, поэтому все операторы A_i ортогональны в некотором базисе, а значит, $A_i G = G$, $i = 1, \dots, m$, что невозможно. Итак, можно считать, что $\dim W \geq 1$.

Для краткости обозначим через $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ семейство линейных операторов $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/W}$. Учитывая лемму 5, можем считать, что семейство $\mathcal{U}$ неприводимо или одномерно и состоит из ортогональных операторов. В противном случае перейдем к большему инвариантному подпространству W' , содержащему W .

Покажем, что существует инвариантное подпространство семейства $\mathcal{A}$, параллельное W и пересекающее G по внутренности. Если $\dim W \leq d - 2$, то, учитывая лемму 3, получаем, что выпуклая оболочка орбиты произвольной точки под действием полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ содержит нуль в качестве внутренней точки. Значит, для любой точки $z \in G \setminus W$ проекция ее орбиты под действием полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ на линейное подпространство $W^\perp$, ортогональное W , содержит в качестве внутренней точки проекцию W . Следовательно, проекция G на $W^\perp$ содержит в качестве внутренней точки проекцию W , поэтому W пересекает внутренность G .

Наконец, если $\dim W = d - 1$, то все матрицы $\mathcal{U}$ имеют размерность 1. В этом случае $U_i = \pm 1$ для каждого i . Если $U_j = -1$ для некоторого j , то применяем то же рассуждение, что и для неприводимого случая. Если же $U_i = 1$ для всех i , то при каждом c гиперплоскость $W_c = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d = c\}$, параллельная W ,

¹Первоначальное доказательство теоремы содержало ошибку, на которую авторам указал анонимный рецензент. Здесь приводится исправленное доказательство.

инвариантна относительно всех операторов из $\mathcal{A}$. Тогда возьмем такое c , что подпространство W_c пересекает внутренность G .

Тем самым, мы можем считать, что W имеет непустое пересечение со внутреннейностью G .

Покажем, что $G \cap W$ является самоаффинным телом с семейством операторов $A|_W$. Инвариантное подпространство W пересекает G по внутреннейности, следовательно, $G \cap W$ имеет полную размерность в W . Учитывая самоаффинность G , имеем $G \cap W = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A(G \cap W)$. Заметим, что в силу ортогональности $A|_{\mathbb{R}^d/W}$ все собственные значения операторов из $\mathcal{A}$, соответствующие собственным подпространствам, не лежащим в W , по модулю равны 1. Таким образом,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |\det A|_W = \sum_{A \in \mathcal{A}} |\det A| = 1.$$

Следовательно, в подпространстве W имеем

$$\text{Vol}(G \cap W) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \text{Vol} A(G \cap W).$$

Значит, множества $A_i|_W(G \cap W)$ и $A_j|_W(G \cap W)$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек. Следовательно, $G \cap W$ – самоаффинное тело в W с семейством операторов $\mathcal{A}|_W$.

Если построенное самоаффинное тело $G \cap W$ в W не является дробящимся, то, повторяя предыдущие рассуждения, перейдем к меньшему инвариантному подпространству, содержащемуся в W , фактор $\mathcal{A}|_{W/V}$ по которому будет семейством ортогональных операторов. В итоге мы придем к инвариантному аффинному подпространству V , пересекающему G по множеству полной размерности. Кроме того, $G \cap V$ является дробящимся самоаффинным телом с семейством операторов $\mathcal{A}|_V$. Само это сечение $G \cap V$ является многогранником (см. [14; теорема 1]).

По построению семейство операторов $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/V}$ имеет блочно-верхнетреугольный вид, причем все блоки на диагонали ортогональны. Из леммы 2 заключаем, что в некотором базисе все эти операторы ортогональны. Таким образом, нами построено разложение (6.1): матрицы $\{U_i\}$ этого разложения соответствуют ортогональным операторам семейства $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^d/V}$, матрицы $\{C_i\}$ соответствуют операторам $\mathcal{A}|_V$.

Предположим, что существует другое инвариантное аффинное подпространство V' семейства $\mathcal{A}$, пересекающее внутренность G , на котором $\mathcal{A}$ сжимающее. Как показано выше, $\dim V' \geq 1$. Если $\tilde{V}' \neq \tilde{V}$, то, не ограничивая общности, считаем, что $\tilde{V}'$ не содержится в $\tilde{V}$. Возьмем любое произведение Π матриц из $\tilde{\mathcal{A}}$. Поскольку все собственные значения Π , отличные от собственных значений $\Pi|_{\tilde{V}}$, равны по модулю 1, получаем, что матрица $\Pi|_{\tilde{V}'}$ имеет хотя бы одно собственное значение, по модулю равное 1. Итак, любое произведение операторов семейства $\mathcal{A}|_{V'}$ имеет собственное значение, по модулю равное 1. Следовательно, семейство $\mathcal{A}|_{V'}$ несжимающее.

Наконец, если в некотором базисе все матрицы семейства $\mathcal{A}$ имеют вид (6.1), то $\mathcal{A}$, очевидно, несжимающее.

Итак, каждому самоаффинному разбиению однозначно ставится в соответствие параметр $r = d - \dim V$, где V – общее инвариантное подпространство, пересекающее внутренность G , на котором семейство $\mathcal{A}$ задает дробящееся разбиение. Число r – это размерность ортогонального блока U_i в разложении (6.1), или, что то же, минимальная суммарная кратность всех собственных значений, по модулю равных 1, для любого оператора $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

Согласно теореме 3 каждое недробящееся разбиение в $\mathbb{R}^d$ факторизуется на две части: дробящееся разбиение в $(d - r)$ -мерном пространстве и семейство ортогональных операторов в его r -мерном дополнении. Именно наличие ортогональной части является причиной несжимаемости семейства $\mathcal{A}$. Таким образом, r является “степенью несжимаемости”. В § 7 мы полностью классифицируем самоаффинные тела в $\mathbb{R}^d$ в случаях $r = 1$ и $r = d - 1$.

§ 7. Классификация самоаффинных выпуклых тел для $r = 1$ и $r = d - 1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Косым цилиндром* называется тело, образованное пересечением выпуклого цилиндра $C = B \times \mathbb{R}$, где B – выпуклое тело размерности $d - 1$, с двумя полупространствами, граничные гиперплоскости которых не параллельны образующим цилиндра. Пересечения граничных гиперплоскостей с C называются *основаниями косого цилиндра*.

Ясно, что основания косого цилиндра компактны, т.е. являются выпуклыми телами. Не уменьшая общности, будем предполагать, что плоскости оснований не имеют общих точек внутри C , в противном случае уменьшаем C . Косой цилиндр является самоаффинным. Его разбиение задается двумя операторами сжатия в два раза к основаниям, вдоль образующих.

Везде ниже, пользуясь обозначениями из § 6, будем предполагать, что G – недробящееся самоаффинное тело с набором аффинных операторов $\mathcal{A}$, реализующих его разбиение. По теореме 3 семейство $\mathcal{A}$ обладает максимальным по включению инвариантным подпространством V , в ограничении на которое семейство $\mathcal{A}$ является сжимающим.

ТЕОРЕМА 4. *Самоаффинное тело, у которого $\dim V = 1$, является косым цилиндром с образующими, параллельными V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Y отрезок $V \cap G$, а через a и b – его концы. Семейство $\mathcal{A}$ задает дробящееся разбиение отрезка Y . Не уменьшая общности, считаем, что $a \in A_1 Y$, $b = A_m Y$. Возможны два случая: $A_1 a = a$ и $A_1 b = a$. Второй случай легко сводится к первому. Действительно, если $A_m b = b$, то заменяем a на b , а если $A_m a = b$, то вместо семейства операторов $\mathcal{A}$ рассматриваем семейство $\mathcal{A}^2$, для которого $A_1 A_m a = a$. Итак, считаем, что $A_1 a = a$. Согласно теореме 3 собственное значение одномерного оператора $A_1|_V$ по модулю меньше 1, а остальные $d - 1$ собственных значений A_1 по модулю равны 1. Пусть L – инвариантная гиперплоскость оператора A_1 , проходящая через a , на которой все собственные значения A_1 по модулю равны 1.

Покажем, что для каждого $i \geq 2$ множество $A_i G \cap L$ имеет нулевой $(d - 1)$ -мерный объем. Для этого покажем, что множества $A_i G \cap L$ и $A_1 G \cap L$ не имеют

общих внутренних точек в L . Иначе, если их пересечение содержит некоторый $(d-1)$ -мерный шар $B \subset L$, то конусы $\text{conv}\{A_1b, B\} \subset A_1G$ и $\text{conv}\{A_ib, B\} \subset A_iG$ имеют общую внутреннюю точку, что невозможно. С другой стороны, поскольку $|\det A_1|_L| = 1$, оператор $A_1|_L$ сохраняет $(d-1)$ -мерный объем; значит, множество $A_1G \cap L$ заполняет весь объем множества $G \cap L$, а остальные множества A_iG пересекают L по множествам нулевого объема. Из этого следует, что все множества A_iG , $i \geq 2$, лежат в том же полупространстве относительно гиперплоскости L , что и отрезок Y . В противном случае объем пересечения $A_iG \cap L$ будет ненулевым.

Покажем теперь, что L – опорная гиперплоскость множества G . Обозначим через L_+ то из открытых полупространств $\mathbb{R}^d$ относительно гиперплоскости L , в котором не лежит отрезок Y . Если $G' = G \cap L_+ \neq \emptyset$, то $A_1G' = G'$, поскольку множества A_iG , $i \geq 2$, не пересекают L_+ . Но тогда $|\det A_1| = 1$, что невозможно.

Обозначим через π оператор проекции $\mathbb{R}^d$ на гиперплоскость L параллельно прямой V . Так как оператор $A_1|_L$ подобен ортогональному, существует последовательность $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, для которой оператор $A_1^{k_j}|_L$ стремится к тождественному на L при $j \rightarrow \infty$. А так как $A_1|_V$ – оператор умножения на число, по модулю меньшее 1, получаем $A_1^{k_j} \rightarrow \pi$ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, $\pi(G) \subset G$. Рассуждая так же применительно к точке b и оператору A_m , получаем, что проекция G параллельно V на опорную плоскость, проведенную в точке b , лежит в G . Следовательно, G – косой цилиндр с образующей V и с основаниями, лежащими в опорных плоскостях к G , проведенных в концах отрезка Y .

Теорема доказана.

Аффинные подпространства $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^d$ назовем *скрещивающимися*, если они не пересекаются, а их аффинная оболочка совпадает с $\mathbb{R}^d$. Для скрещивающихся подпространств всегда выполнено

$$\dim \tilde{V}_1 + \dim \tilde{V}_2 = d - 1 + \dim(\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2).$$

В частности, если линейные части подпространств V_1 и V_2 имеют нулевое пересечение, то сумма их размерностей равна $d - 1$. Так, например, происходит в случае двух скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}^3$. Две параллельные гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$ являются скрещивающимися. Другой пример: гиперплоскость и точка, не лежащая в ней. Две грани многогранника назовем скрещивающимися, если их аффинные оболочки скрещивающиеся.

ТЕОРЕМА 5. *Самоаффинное тело G , у которого $\dim V = d - 1$, является многогранником, имеющим вид $G = \text{conv}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, где Γ_1, Γ_2 – две его скрещивающиеся грани, параллельные V . При этом в качестве V можно взять аффинную оболочку множества $\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим опорные гиперплоскости L_1, L_2 тела G , параллельные V . Обозначим $\Gamma_k = G \cap L_k$, $k = 1, 2$. Учитывая, что для любого оператора $A_i \in \mathcal{A}$ его единственное собственное значение, соответствующее собственному вектору, лежащему вне V , равно ± 1 , получаем, что этот оператор либо переводит каждую плоскость L_1, L_2 в себя, либо меняет их местами.

Следовательно, $A_i \Gamma_k \subset (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ для $k = 1, 2$. Поэтому A_i переводит множество $Y = \text{conv}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ в себя. Отметим, что Y должно иметь полную размерность. В противном случае его аффинная оболочка является общим инвариантным аффинным подпространством семейства $\mathcal{A}$, а аффинная оболочка множества $Y' = V \cap Y$ является общим инвариантным аффинным подпространством размерности меньше $d - 1$. Но это в силу теоремы 2 противоречит тому, что семейство $\mathcal{A}|_V$ является сжимающим (теорема 3). Таким образом, $\dim Y = d$ и, следовательно, $\dim Y' = d - 1$, а значит, аффинные оболочки множеств Γ_1 и Γ_2 – скрещивающиеся подпространства. Далее, $A_i Y' \subset Y'$ для всех $i = 1, \dots, m$. С другой стороны, $\sum_{i=1}^m |\det A_i|_V| = 1$, поскольку множество $G \cap V$ самоаффинно. Следовательно, Y' также самоаффинно с тем же семейством $\mathcal{A}|_V$. Известно (см. [14; теорема 1]), что для фиксированного семейства операторов существует не более одного дробящегося самоаффинного тела с таким семейством. Таким образом, поскольку оба множества Y' и $G \cap V$ дробящиеся (семейство $\mathcal{A}|_V$ сжимающее), то они совпадают. Итак, $G \cap V = Y \cap V$, следовательно, $G = Y = \text{conv}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. В этом случае $Y' = t\Gamma_1 + (1 - t)\Gamma_2$ для некоторого $t \in (0, 1)$. Заметим, что если сумма Минковского двух выпуклых тел является многогранником, то и каждое из них является многогранником. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев крайние точки каждого из множеств с учетом того, что крайняя точка суммы представляется в виде суммы крайних точек исходных множеств единственным образом. Так как Y' – многогранник (его самоаффинное разбиение $Y' = \bigcup_{i=1}^m A_i Y'$ дробящееся), то и Γ_1, Γ_2 – многогранники, а значит, и тело $G = Y = \text{conv}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ – многогранник.

ПРИМЕР 4. В качестве тела G возьмем симплекс с вершинами $v_1, \dots, v_{d+1}$. Для произвольного $k = 1, \dots, d$ положим $\Gamma_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ и $\Gamma_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_{d+1}\}$. Тогда Γ_1 и Γ_2 – скрещивающиеся грани и $G = \text{conv}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Рассмотрим произвольное дробящееся разбиение Γ_1 на $k_1 \geq 2$ симплексов $\Gamma_1^{(i)}$, $i = 1, \dots, k_1$, и произвольное дробящееся разбиение Γ_2 на $k_2 \geq 2$ симплексов $\Gamma_2^{(j)}$, $j = 1, \dots, k_2$. Тогда $m = k_1 k_2$ симплексов $G_{ij} = \text{conv}\{\Gamma_1^{(i)}, \Gamma_2^{(j)}\}$ задают разбиение симплекса G . Соответствующий аффинный оператор A_{ij} переводит симплекс G в G_{ij} . Получаем семейство $\mathcal{A}$ из $m = k_1 k_2$ операторов. В качестве V можно взять любую гиперплоскость, параллельную граням Γ_1 и Γ_2 и разделяющую их. Наличие общего инвариантного подпространства влечет в силу теоремы 2, что $\{G_{ij}\}$ недробящееся и семейство $\mathcal{A}$ несжимающее.

Приведем пример самоаффинного многогранника G в условиях теоремы 5, в котором размерности граней Γ_1 и Γ_2 равны $d - 1$ (т.е. они лежат в параллельных гиперплоскостях), но G не является ни цилиндром, ни усеченным конусом. Мы рассмотрим случай $d = 3$, с произвольным d ситуация аналогична.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим два произвольных прямоугольника $\Gamma_1 = abcd$ и $\Gamma_2 = a'b'c'd'$, лежащих в параллельных плоскостях (выбор первой вершины и направление обхода согласованы), и пусть $G = \text{conv}\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Ясно, что плоскости граней Γ_1 и Γ_2 скрещивающиеся. Оператор A_1 является сжатием в два раза к прямой aa' параллельно плоскостям прямоугольников. Таким образом, на прямой aa' этот оператор является тождественным, а на плоскости $abcd$ – гомотетией с коэффициентом $1/2$ и центром в точке a . Аналогично определяем

операторы A_2 , A_3 и A_4 как сжатия к прямым bb' , cc' и dd' соответственно. Получили самоаффинное разбиение G . Оно, очевидно, не дробящееся, поскольку сохраняется расстояние между плоскостями прямоугольников. В качестве V можно взять любую гиперплоскость, параллельную граням Γ_1 и Γ_2 и разделяющую их. По теореме 3 других общих подпространств, на которых семейство операторов сжимающее, нет.

§ 8. Приложения к конечным аффинным полугруппам

Конечные мультипликативные полугруппы линейных операторов изучались во многих работах (см. [15]–[17] и библиографию в этих работах). Есть множество примеров таких полугрупп, однако их полная классификация не построена. Работы о конечных полугруппах аффинных операторов нам не известны. Задача классификации таких полугрупп более общая, поскольку включает предыдущую (в случае, когда все аффинные операторы имеют общую неподвижную точку) и не совпадает с ней, как показывает следующий простой пример.

ПРИМЕР 6 (конечная аффинная полугруппа без общей неподвижной точки). Рассмотрим куб в $\mathbb{R}^d$, выделим две его противоположные гиперграни и рассмотрим семейство, состоящее из ортогональных проекторов на каждую из оставшихся $2d - 2$ гиперграней. Это семейство порождает конечную полугруппу без общей неподвижной точки.

Если в конечной аффинной полугруппе $\mathcal{S}$ нет констант, т.е. операторов, переводящих все пространство $\mathbb{R}^d$ в точку, то она несжимающая. В противном случае существует $A \in \mathcal{S}$, для которого $0 < \rho(A) < 1$, а значит, операторы A^k различны для всех k и $\mathcal{S}$ не может быть конечной. Применив теорему 1, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если конечная аффинная полугруппа $\mathcal{S}$ не содержит констант, то она имеет общее инвариантное аффинное подпространство $V \subset \mathbb{R}^d$, причем в $\mathcal{S}$ существуют операторы, отображающие V в точку.*

Если выпуклое тело $G \subset \mathbb{R}^d$ таково, что $AG \subset G$, $A \in \mathcal{S}$, то $V \cap G \neq \emptyset$.

В примере 6 полугруппа не содержит констант. В качестве V можно взять любую гиперплоскость, параллельную паре выделенных гиперграней и пересекающую куб.

§ 9. Приложения к примитивным семействам матриц

Одно из наиболее эффективных приложений ограниченных аффинных полугрупп возникает при изучении неотрицательных матриц. Произвольная стохастическая (по столбцам) матрица, т.е. неотрицательная матрица с суммой элементов в каждом столбце 1, сохраняет аффинную гиперплоскость $L = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i x_i = 1\}$ и переводит в себя симплекс $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0\}$. Таким образом, стохастические матрицы образуют ограниченную аффинную полугруппу на гиперплоскости L , а в качестве их общего инвариантного выпуклого тела G можно взять симплекс Δ . Здесь и далее под стохастической

матрицей A мы понимаем матрицу, стохастическую по столбцам, и обозначаем тем же символом A соответствующий аффинный оператор на L . Многие задачи о комбинаторных и асимптотических свойствах произведений неотрицательных матриц могут решаться в терминах ограниченных аффинных полугрупп; см. [25]–[27]. В частности, примитивность семейства стохастических матриц равносильна сжимаемости соответствующего семейства аффинных операторов. Теорема 1 позволит нам получить естественное и короткое доказательство критерия примитивности из работы [21], мы формулируем этот результат в теореме В ниже.

Дадим вначале необходимые определения. *Носителем* неотрицательного вектора называется множество индексов его положительных элементов. Носитель неотрицательной матрицы – множество пар индексов ее положительных элементов. Неотрицательная $(d \times d)$ -матрица A называется *положительно приводимой*, если найдется собственное непустое подмножество Ω' множества $\Omega = \{1, \dots, d\}$ такое, что для любого $i \in \Omega'$ носитель i -го столбца матрицы A лежит в Ω' . Это означает, что координатное подпространство $L_{\Omega'} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_j = 0 \ \forall j \notin \Omega'\}$ является инвариантным для A . Если такого координатного подпространства не существует, то A *положительно неприводима*. Это означает, что для любых $i, j \in \Omega$ в графе матрицы A существует путь из i в j . Матрица A называется *примитивной*, если $A^N > 0$ (т.е. все элементы матрицы A^N положительны) для некоторого N . Известно, что для любой примитивной матрицы можно взять $N = (d - 1)^2 - 1$. Примитивность матрицы определяется только ее носителем и не зависит от значений положительных элементов. Примитивные матрицы наследуют большинство свойств положительных матриц и потому важны для приложений. Например, наибольшее по модулю собственное значение примитивной матрицы единственно и положительно, нормированные степени примитивной матрицы сходятся к одноранговой матрице, цепь Маркова с примитивной матрицей перехода сходится и т.д.

Известно несколько критериев примитивности матрицы. Если матрица A положительно приводима, она, конечно, не может быть примитивной (для любой степени A^N имеем $(A^N)_{ij} = 0$, если $i \notin \Omega', j \in \Omega'$). Если же она положительно неприводима, то она либо примитивна, либо имеет $r \geq 2$ максимальных по модулю собственных значений $\lambda_k = \rho e^{2\pi i k/r}$, $k = 1, \dots, r$. В последнем случае существует разбиение множества Ω на r непустых подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_r$, на которых A действует как циклическая перестановка. Это означает, что для любого $i \in \Omega_k$ носитель i -го столбца матрицы A лежит в Ω_{k+1} (для $k = r$ полагаем $\Omega_{k+1} = \Omega_1$). Если обозначить через $e_1, \dots, e_d$ векторы канонического базиса $\mathbb{R}^d$, то носитель вектора Ae_i является линейной комбинацией векторов e_s , $s \in \Omega_{k+1}$. Существует перестановка базисных векторов, после которой A приобретает следующий блочный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_r \\ B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{r-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Блоки имеют размеры $|\Omega_i| \times |\Omega_j|$, $i, j = 1, \dots, r$ (как обычно, $|M|$ обозначает мощность множества M), все диагональные блоки квадратные. Число r называется *индексом непримитивности* матрицы A . Для примитивной матрицы $r = 1$, для непримитивной матрицы $r \geq 2$. Согласно теореме Романовского r равен наибольшему общему делителю длин всех циклов графа матрицы A ; подробнее см. [26], [28].

Вышеперечисленные результаты могут быть обобщены со случая одной матрицы на семейства матриц.

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольное компактное семейство неотрицательных $(d \times d)$ -матриц. Оно называется *положительно приводимым*, если найдется собственное непустое подмножество $\Omega' \subset \Omega$, для которого при любом $i \in \Omega'$ носитель i -го столбца каждой матрицы $A \in \mathcal{A}$ лежит в Ω' . Это означает, что координатное подпространство $L_{\Omega'}$ является общим инвариантным подпространством для всех $A \in \mathcal{A}$. В противном случае $\mathcal{A}$ называется *положительно неприводимым*.

Семейство $\mathcal{A}$ называется *примитивным*, если существует положительное произведение матриц из $\mathcal{A}$, т.е. найдутся индексы (возможно, повторяющиеся) $d_1, \dots, d_N$ из множества $\{1, \dots, m\}$, для которых $A_{d_N} \cdots A_{d_1} > 0$.

Примитивность семейств матриц изучалась в связи с приложениями к неоднородным цепям Маркова, показателям Ляпунова, динамическим системам, задачам популяционной динамики и т.д. (см. [27]–[30]). Важность данного свойства объясняется тем, что если матрицы $\mathcal{A}$ не имеют нулевых столбцов (например, если они стохастические), то из примитивности $\mathcal{A}$ следует, что почти все длинные произведения матриц из $\mathcal{A}$ положительны. Для конечного семейства $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ это означает, что доля положительных произведений среди всех m^N произведений длины N стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$.

Будем предполагать выполненными два условия:

- а) $\mathcal{A}$ положительно неприводимо;
- б) матрицы семейства $\mathcal{A}$ не имеют нулевых строк и нулевых столбцов.

Критерий примитивности семейства матриц был доказан в [21; теорема 1]: при выполнении условий а) и б) либо семейство $\mathcal{A}$ примитивно, либо существует разбиение множества Ω на r непустых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^r$, на которых все матрицы из $\mathcal{A}$ действуют как перестановки, уже не обязательно циклические. Это означает, что каждой матрице $A \in \mathcal{A}$ соответствует перестановка σ множества $\{1, \dots, r\}$ такая, что для любого $k \in \{1, \dots, r\}$ и любого $i \in \Omega_k$ носитель i -го столбца A лежит в $\Omega_{\sigma(k)}$. Существует перестановка базисных векторов, после которой каждая матрица $A \in \mathcal{A}$ приобретает блочную форму (9.1), в которой в i -м блочном столбце есть единственный ненулевой блок, находящийся в блочной строке с номером $\sigma(i)$, где σ – перестановка, соответствующая A . Теперь дадим строгую формулировку критерия примитивности.

ТЕОРЕМА В (см. [21]). Семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям а) и б), не является примитивным тогда и только тогда, когда существует разбиение $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^r \Omega_j$, $r \geq 2$, на котором все матрицы из $\mathcal{A}$ действуют как перестановки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия а) и б) существенны. Условие а), конечно же, необходимо для примитивности. Условие б) не является необходимым, однако без него теорема В неверна (см. [21; пример 2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На самом деле теорема 1 работы [21] содержит несколько больше, чем мы процитировали. Среди всех разбиений $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^r \Omega_j$, $r \geq 2$, существует единственное разбиение с наибольшим числом множеств r , оно называется каноническим. Число $r = r(\mathcal{A})$ называется индексом импримитивности семейства $\mathcal{A}$. Оно совпадает с минимальным числом n таким, что любая матрица полугруппы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ имеет не менее n столбцов с непересекающимися носителями, а также не менее n максимальных собственных значений (с учетом кратности). Все блоки канонического разбиения заполняются, т.е. существует блочно-диагональная матрица $D \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, у которой все диагональные блоки (соответствующие множествам $\Omega_1, \dots, \Omega_r$) строго положительны.

Все эти факты, однако, устанавливаются относительно несложно по сравнению с доказательством главного утверждения – существования хотя бы одного разбиения, на котором все матрицы семейства $\mathcal{A}$ действуют как перестановки.

Кроме того, существует полиномиальный алгоритм, который для любого конечного семейства матриц определяет, является ли оно примитивным, и в случае отрицательного ответа строит каноническое разбиение и, соответственно, находит индекс импримитивности (см. [21; § 2]).

Несмотря на простую формулировку, доказательство теоремы В достаточно длинное и сложное. Доказательство, приведенное в [21], содержит три с половиной страницы, оно основано на геометрии выпуклых многогранников. В той же работе авторы поставили вопрос о существовании чисто комбинаторного доказательства, возможно, более простого. Вопрос естественный, учитывая комбинаторный характер теоремы. На него успешно откликнулись Ю. А. Альпин и В. С. Альпина (см. [31]) а также В. Блондель, Р. Юнгерс и А. Ольшевский (см. [32]), представив (различные) комбинаторные доказательства, хотя и по-прежнему длинные. Наша теорема 1 о компактных несжимающих полугруппах позволяет дать короткое доказательство теоремы В. Его можно назвать аналитическим, учитывая, что сама теорема 1 доказывается аналитическими методами с помощью функциональных уравнений. Оно занимает около страницы, при этом большая часть посвящена доказательству известного факта о том, что сжимаемость семейства $\mathcal{A}$ на гиперплоскости L равносильна примитивности $\mathcal{A}$. За вычетом этого аналитическое доказательство теоремы В занимает менее трети страницы. Идея проста: если семейство $\mathcal{A}$ непримитивно, а значит, несжимающее, то согласно теореме 1 оно имеет общее инвариантное аффинное подпространство $V \subset L$, пересекающее симплекс Δ . Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве Ω : элементы i и j эквивалентны тогда и только тогда, когда вектор $e_i - e_j$ параллелен V . Это отношение определяет искомое разбиение на классы $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^r \Omega_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Для данной матрицы $A \in \mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{T}(A)$ множество всех стохастических матриц, носители которых содержатся в носителе A . Условие б) гарантирует, что $\mathcal{T}(A) \neq \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Положим $\mathcal{A}' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{T}(A)$. Каждая матрица $A \in \mathcal{A}'$ определяет аффинный оператор на гиперплоскости L . Если семейство $\mathcal{A}'$ сжимающее на L , то найдется матрица $B \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$, для которой $\|B^k|_L\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Следовательно (см., например, [26]), некоторая степень матрицы B имеет положительную строку. Пусть матрица $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$ имеет максимальное число $k \geq 1$ положительных строк; считаем, что это первые k строк. Пусть $k < d$ и $(k+1)$ -я строка содержит положительный элемент $(A)_{k+1,i}$. Хорошо известно, что в силу условия а) существует матрица $C \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$, у которой $(C)_{i,1} > 0$. Для удобства читателя приведем доказательство. Предположим, что найдется пара индексов i, j таких, что $A_{ij} = 0$ для любой матрицы полугруппы. Обозначим через $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ минимальное по включению множество индексов таких, что $Ae_j \in L = \text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ для всякой матрицы полугруппы $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$. Ясно, что $AL \subset L$ для любой матрицы $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$. Если существует индекс i такой, что для всех матриц полугруппы $A_{ij} = 0$, то $Ae_j \perp e_i$, следовательно, $L \subset e_i^\perp$ и $L \neq \mathbb{R}^d$. Тогда множество индексов I не совпадает с полным набором $\{1, \dots, d\}$ и семейство $\mathcal{A}'$ по определению приводимо; противоречие. Тогда i -я строка матрицы CA положительна. По условию б) для любого $F \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$ матрица AF также имеет первые k положительных строк. Следовательно, первые $k+1$ строк матрицы ACA положительны. Таким образом, $k = d$.

Итак, если $\mathcal{A}'$ сжимающее на L , то оно примитивно. Если оно не сжимающее, то согласно теореме 1 операторы из $\mathcal{A}'$ имеют общее инвариантное аффинное подпространство $V \subset L$, $\dim V \leq d-2$, которое пересекает Δ . В силу неприводимости $\mathcal{A}'$ подпространство V пересекает внутренность Δ . В противном случае V является аффинной оболочкой некоторого набора вершин Δ и матрицы набора $\mathcal{A}$ будут иметь инвариантное базисное подпространство. Таким образом, V содержит положительную точку $a \in \Delta$. Рассмотрим следующее соотношение на множестве Ω : $i \sim j$, если вектор $e_i - e_j$ принадлежит $\tilde{V}$ (линейной части V). Это отношение эквивалентности разбивает Ω на классы $\Omega_1, \dots, \Omega_r$. Так как $\dim V \leq d-2$, то $r \geq 2$. Покажем, что для любых $i \in \Omega$ и $A \in \mathcal{A}$ носители всех векторов множества $M_i(A) = \{A'e_i, A' \in \mathcal{T}(A)\}$ лежат в одном и том же множестве Ω_k . Для этого достаточно доказать, что разность любых двух векторов из $M_i(A)$ лежит в $\tilde{V}$. Возьмем произвольные $A', B' \in \mathcal{T}(A)$ и матрицу $C' \in \mathcal{T}(A)$, у которой i -й столбец такой же, как у A' , а остальные столбцы такие же, как у B' . Для положительного вектора $a = \sum_i a_i e_i \in V$ имеем

$$a_i(A'e_i - B'e_i) = a_i(C'e_i - B'e_i) = C'(a_i e_i) - B'(a_i e_i) = C'a - B'a \in \tilde{V}.$$

Поскольку $C'a \in V$ и $B'a \in V$, имеем $C'a - B'a \in \tilde{V}$, значит, и $A'e_i - B'e_i \in \tilde{V}$. Итак, носители i -х столбцов всех матриц из $\mathcal{T}(A)$ лежат в одном множестве Ω_k . Тогда носители всех столбцов с индексами, принадлежащими тому же классу, что и индекс i (скажем, Ω_j), лежат в том же Ω_k . Следовательно, матрица A определяет отображение $\sigma(i) = k$. Поскольку A не имеет нулевых строк, у каждого k есть прообраз, т.е. σ – перестановка.

Авторы приносят благодарность рецензенту за множество ценных замечаний.

Список литературы

- [1] J. L. Mott, H. Schneider, “Matrix algebras and groups relatively bounded in norm”, *Arch. Math.*, **10**:1 (1959), 1–6.
- [2] W. E. Longstaff, H. Radjavi, “On permutability and submultiplicativity of spectral radius”, *Canad. J. Math.*, **47**:5 (1995), 1007–1022.
- [3] M. Omladič, H. Radjavi, “Irreducible semigroups with multiplicative spectral radius”, *Linear Algebra Appl.*, **251** (1997), 59–72.
- [4] A. I. Popov, “On matrix semigroups bounded above and below”, *Linear Algebra Appl.*, **438**:11 (2013), 4439–4447.
- [5] V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, “Matrix semigroups with constant spectral radius”, *Proc. London Math. Soc.* (3), 2015 (submitted to).
- [6] J. C. Lagarias, Yang Wang, “Self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$ ”, *Adv. Math.*, **121**:1 (1996), 21–49.
- [7] Ding-Xuan Zhou, “Self-similar lattice tilings and subdivision schemes”, *SIAM J. Math. Anal.*, **33**:1 (2001), 1–15 (electronic).
- [8] C. A. Micchelli, H. Prautzsch, “Uniform refinement of curves”, *Linear Algebra Appl.*, **114/115** (1989), 841–870.
- [9] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, Ch. A. Micchelli, *Stationary subdivision*, Mem. Amer. Math. Soc., **93**, no. 453, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, vi+186 pp.
- [10] I. Daubechies, J. C. Lagarias, “Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:4 (1992), 1031–1079.
- [11] C. A. Cabrelli, Ch. Heil, U. M. Molter, *Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc., **170**, no. 807, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, viii+82 pp.
- [12] В. Ю. Протасов, “Фрактальные кривые и всплески”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 123–162; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Fractal curves and wavelets”, *Izv. Math.*, **70**:5 (2006), 975–1013.
- [13] V. Yu. Protasov, “Extremal L_p -norms of linear operators and self-similar functions”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:10 (2008), 2339–2356.
- [14] А. С. Войнов, “Самоаффинные многогранники. Приложения к функциональным уравнениям и теории матриц”, *Матем. сб.*, **202**:10 (2011), 3–30; англ. пер.: A. S. Voynov, “Self-affine polytopes. Applications to functional equations and matrix theory”, *Sb. Math.*, **202**:10 (2011), 1413–1439.
- [15] G. Jacob, “Un algorithme calculant le cardinal, fini ou infini, des demi-groupes de matrices”, *Theoret. Comput. Sci.*, **5**:2 (1977/78), 183–204.
- [16] A. Mandel, I. Simon, “On finite semigroups of matrices”, *Theoret. Comput. Sci.*, **5**:2 (1977/78), 101–111.
- [17] R. M. Jungers, V. Protasov, V. D. Blondel, “Efficient algorithms for deciding the type of growth of products of integer matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:10 (2008), 2296–2311.
- [18] E. Hertel, C. Richter, “Self-affine convex polygons”, *J. Geom.*, **98**:1-2 (2010), 79–89.
- [19] C. Richter, “Self-affine convex discs are polygons”, *Beitr. Algebra Geom.*, **53**:1 (2012), 219–224.
- [20] А. С. Войнов, “К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел”, *Матем. сб.*, **204**:8 (2013), 41–50; англ. пер.: A. S. Voynov, “On the structure of self-affine convex bodies”, *Sb. Math.*, **204**:8 (2013), 1122–1130.
- [21] V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, “Sets of nonnegative matrices without positive products”, *Linear Algebra Appl.*, **437**:3 (2012), 749–765.

- [22] M. A. Berger, Yang Wang, “Bounded semigroups of matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **166** (1992), 21–27.
- [23] В. Л. Загускин, “Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема”, *УМН*, **13:6(84)** (1958), 89–93.
- [24] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy, *Unsolved problems in geometry*, Problem Books in Math., Unsolved problems in intuitive mathematics, II, Springer-Verlag, New York, 1991, xvi+198 pp.
- [25] J. Wolfowitz, “Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14:5** (1963), 733–737.
- [26] E. Seneta, *Non-negative matrices. An introduction to theory and applications*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York, 1973, x+214 pp.
- [27] D. J. Hartfiel, *Nonhomogeneous matrix products*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, x+224 pp.
- [28] H. Schneider, “The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov”, *Linear Algebra Appl.*, **18:2** (1977), 139–162.
- [29] J. C. Watkins, “Limit theorems for products of random matrices: a comparison of two points of view”, *Random matrices and their applications* (Brunswick, Maine, 1984), Contemp. Math., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 5–22.
- [30] E. S. Key, “Lower bounds for the maximal Lyapunov exponent”, *J. Theoret. Probab.*, **3:3** (1990), 477–488.
- [31] Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, “Комбинаторные свойства неприводимых полугрупп неотрицательных матриц”, *Численные методы и вопросы организации вычислений. XXV*, Посвящается памяти Веры Николаевны Кублановской, Зап. научн. сем. ПОМИ, **405**, ПОМИ, СПб., 2012, 13–23; англ. пер.: Yu. A. Al’pin, V. S. Al’pina, “Combinatorial properties of irreducible semigroups of nonnegative matrices”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **191:1** (2013), 4–9.
- [32] V. D. Blondel, R. M. Jungers, A. Olshevsky, “On primitivity of sets of matrices”, arXiv:1306.0729.

Андрей Сергеевич Войнов
(Andrey S. Voynov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: an.voynov@gmail.com

Поступила в редакцию
21.07.2014 и 11.02.2015

Владимир Юрьевич Протасов
(Vladimir Yu. Protasov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protasov@yandex.ru