Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 8, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:33:49

УДК 517.9

В. Е. Федоров

Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах

Исследуются вопросы существования сильно голоморфных в секторе экспоненциально ограниченных полугрупп линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu \quad (1)$$

с непрерывным оператором $L: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$, $\ker L \neq \{0\}$, и замкнутым и плотно определенным оператором $M: \operatorname{dom} M \rightarrow \mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – секвенциально полные локально выпуклые пространства. Показано, что для существования таких полугрупп, вырождающихся на M -присоединенных векторах оператора L высоты не больше p , и существования пар инвариантных подпространств операторов L и M необходимым и достаточным является условие сильной (L, p) -секториальности оператора M , обобщающее известное условие секториальности. Получено обобщение теоремы Иосиды, а также теорем о существовании голоморфных полугрупп уравнения (1) в банаховых пространствах. Полученные результаты применяются при исследовании ослабленной задачи Коши для уравнения (1) и для соответствующего неоднородного уравнения. Приложением абстрактных результатов является теорема о достаточных условиях разрешимости задачи Коши для одного класса уравнений в пространствах Фреше специального вида. Этот результат используется при исследовании периодической задачи Коши для уравнения в частных производных со смещением по пространственной переменной, не разрешенного относительно производной по времени.

Библиография: 18 названий.

Введение

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{V}$ – отделимые секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ векторное пространство линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$, а через $\operatorname{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ – множество линейных замкнутых операторов с плотными в $\mathfrak{U}$ областями определения, действующих в пространство $\mathfrak{F}$. В случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$ будем использовать обозначения $\mathcal{L}(\mathfrak{U}) = \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\operatorname{Cl}(\mathfrak{U}) = \operatorname{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Рассмотрим уравнение на пространстве $\mathfrak{V}$

$$\dot{v}(t) = Av(t). \quad (0.1)$$

Существует множество эквивалентных формулировок теоремы о существовании голоморфной полугруппы уравнения (0.1) (см. [1], [2; гл. 1, § 3], [3; гл. 5, § 6], [4]),

Работа поддержана грантом Минобразования России (№ PD02-1.1-82) на проведение молодыми учеными научных исследований и грантом для молодых ученых Правительства Челябинской области.

которую в дальнейшем мы будем называть *теоремой Иосиды* [1; гл. IX, § 10]. Наиболее удобной представляется следующая формулировка: голоморфная в секторе полугруппа уравнения (0.1) существует тогда и только тогда, когда оператор A секториален. *Секториальным* называется (см. [2]–[4]) оператор $A \in \text{Cl}(\mathfrak{V})$, для которого семейство непрерывных операторов

$$\{(\mu - a)(\mu I - A)^{-1} : |\arg(\mu - a)| < \theta\}$$

эквинепрерывно при некоторых $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$.

Следуя [5; гл. I, § 3], *ослабленной задачей Коши для уравнения* (0.1) будем называть задачу отыскания решения уравнения v из класса функций $C^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V}) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{V})$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, удовлетворяющего условию $v(0) = v_0$. В [5] показано, что достаточным условием разрешимости ослабленной задачи Коши для уравнения (0.1) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$ является секториальность оператора A .

В случае непрерывной обратимости оператора $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ уравнению (0.1) эквивалентно уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) \quad (0.2)$$

с оператором $M \in \text{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Однако это не так, если $\ker L \neq \{0\}$, при этом уравнение (0.2), следуя устоявшейся традиции, будем называть *уравнением соболевского типа*. О неумещающемся интересе к таким уравнениям говорит количество вышедших в последнее время посвященных им монографий [6]–[8].

Необходимо отметить, что полугруппа, разрешающая уравнение соболевского типа, вырождается на некотором подпространстве. Это подпространство, ядро единицы полугруппы, в дальнейшем будем называть *ядром полугруппы*. Ранее голоморфные полугруппы уравнения (0.2) исследовались в [7; гл. III], однако лишь в случае банаховых пространств и совпадения ядра полугруппы с ядром оператора L . В работах [9], [10] были изучены голоморфные полугруппы также в банаховых пространствах при условии (L, p) -секториальности оператора M , которое допускает вырождение полугруппы не только на ядре оператора L , но и на его M -присоединенных векторах высоты не больше p .

Настоящая работа продолжает начатое в [9], [10] исследование голоморфных полугрупп вырожденного ($\ker L \neq \{0\}$) уравнения (0.2). Перечислим основные новые моменты, послужившие стимулом для ее написания.

1) Следуя К. Иосиде, удалось показать, что и для вырожденного уравнения (0.2) результаты об экспоненциально ограниченных голоморфных разрешающих полугруппах переносятся со случая банаховых на случай локально выпуклых пространств по сути без изменений. Понятие сильно (L, p) -секториального оператора при этом обобщено на случай локально выпуклых пространств путем замены условий на рост нормы правой и левой (L, p) -резольвент в секторе на условия эквинепрерывности соответствующих семейств операторов.

2) Получены оценки на рост не только полугруппы уравнения (0.2), но и ее производных. Даже для случая банаховых пространств это новый результат.

3) В работе показано, что при условии (L, p) -секториальности оператора M образ разрешающей полугруппы уравнения (0.2) совпадает с его фазовым пространством, т.е. множеством допустимых начальных значений ослабленной задачи Коши для уравнения. Ранее даже в случае банаховых пространств такой результат

был доказан лишь при дополнительном условии бесконечной дифференцируемости всех решений (см. [10; док-во теоремы 3.1]).

4) Как и в случае банаховых пространств [10], доказана необходимость и достаточность условия сильной (L, p) -секториальности оператора M для существования разрешающих голоморфных полугрупп на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ и инвариантных пар подпространств операторов L и M . Этот результат обобщает теорему Иосиды (см. § 7). Кроме того, показана особая роль случая полурефлексивных пространств, в котором упомянутое обобщение можно получить, используя более слабое условие (L, p) -секториальности оператора M .

5) На основе результатов о полугруппах уравнения (0.2) получены условия разрешимости ослабленной задачи Коши для неоднородного вырожденного уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t)$.

6) Абстрактные результаты используются при исследовании рассматриваемого в специальном пространстве Фреше уравнения $P(A)\dot{u}(t) = Q(A)u(t) + f(t)$, где A – самосопряженный замкнутый плотно определенный в некотором банаховом пространстве оператор, P, Q – целые функции. К последнему уравнению, в свою очередь, сведена периодическая по пространственной переменной задача Коши для уравнения в частных производных со смещением по пространственной переменной, не разрешенного относительно производной по времени.

Обратим внимание, что в случае непрерывной обратимости оператора L уравнение (0.2) можно редуцировать к уравнению $\dot{u}(t) = L^{-1}Mu(t)$ на пространстве $\mathfrak{U}$ или к уравнению $\dot{f}(t) = ML^{-1}f(t)$, $f(t) = Lu(t)$, на пространстве $\mathfrak{F}$. Тем самым в случае секториальности оператора $L^{-1}M$ (или, что равносильно, оператора ML^{-1}) паре операторов соответствует пара разрешающих полугрупп: одна задана на пространстве $\mathfrak{U}$, другая – на пространстве $\mathfrak{F}$. Чтобы сохранить такую симметрию пространств и в вырожденном случае, наряду с уравнением (0.2) на пространстве $\mathfrak{U}$ будем рассматривать эквивалентное ему уравнение на пространстве $\mathfrak{F}$

$$L_{\alpha}^L(M)\dot{f}(t) = M(\alpha L - M)^{-1}f(t), \quad \alpha \in \rho^L(M). \quad (0.3)$$

В § 7 именно наличие двух полугрупп на различных пространствах позволяет получить полное обобщение теоремы Иосиды.

§ 1. Относительно p -секториальный оператор

Напомним, что локально выпуклые пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ секвенциально полны, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \text{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Кроме того, заметим, что когда доказательства утверждений, касающихся пространства $\mathfrak{F}$, не отличаются от доказательств аналогичных утверждений, касающихся пространства $\mathfrak{U}$, мы будем их опускать, не оговаривая это особо.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \rho^L(M) &= \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}, \\ R_{\mu}^L(M) &= (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \\ R_{(\lambda, p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p R_{\lambda_k}^L(M), \quad L_{(\lambda, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\lambda_k}^L(M). \end{aligned}$$

В дальнейших рассматриваниях нам понадобятся тождества

$$(\mu - \lambda)(\lambda L - M)^{-1}L(\mu L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1}, \quad (1.1)$$

$$L(\mu L - M)^{-1}Mu = M(\mu L - M)^{-1}Lu, \quad u \in \operatorname{dom} M. \quad (1.2)$$

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, тогда упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ называется *цепочкой M -присоединенных векторов вектора $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$* , если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \varphi_l \notin \ker L, \quad l = 1, 2, \dots$$

Порядковый номер k вектора в цепочке (он совпадает с нижним индексом k , где $k = 0, 1, 2, \dots$) будем называть его *высотой*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Цепочка M -присоединенных векторов оператора L , соответствующая вектору $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, – это в точности цепочка присоединенных векторов к собственному вектору φ_0 пучка операторов $L - \lambda M$ в точке $\lambda = 0$ [11; гл. V, §9].

Доказательства следующих двух лемм можно найти в [12].

ЛЕММА 1.1. Пусть φ_l – M -присоединенный вектор оператора L высоты $l \geq 1$. Тогда для всех $\mu \in \rho^L(M)$ имеем $-R_\mu^L(M)\varphi_l = \varphi_{l-1} + \mu\varphi_{l-2} + \dots + \mu^{l-1}\varphi_0$.

ЛЕММА 1.2. Если $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_p)$, $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (\rho^L(M))^{p+1}$, то

- i) $\ker R_{(\lambda,p)}^L(M)$ есть линейная оболочка множества M -присоединенных высоты не большей p векторов оператора L , $\operatorname{im} R_{(\lambda,p)}^L(M) = \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$;
- ii) $\ker L_{(\lambda,p)}^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker R_{(\lambda,p)}^L(M) \cap \operatorname{dom} M\}$, $\operatorname{im} L_{(\lambda,p)}^L(M) = \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M)$.

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) ядро $\ker R_{(\mu,p)}^L(M)$ ($\ker L_{(\mu,p)}^L(M)$), а через L_0 (M_0) – сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^0$ ($\operatorname{dom} M_0 = \mathfrak{U}^0 \cap \operatorname{dom} M$) соответственно. Очевидно, что $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_0: \operatorname{dom} M_0 \rightarrow \mathfrak{F}^0$.

Будем говорить, что семейство операторов $\{\Phi(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}) : x \in X\}$, X – множество индексов, *эквиинепрерывно*, если для любой непрерывной на $\mathfrak{F}$ полунормы $r(\cdot)$ существует непрерывная на $\mathfrak{U}$ полунорма $q(\cdot)$ такая, что $\forall x \in X, u \in \mathfrak{U}$ $r(\Phi(x)u) \leq q(u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Оператор M называется (L, p) -*секториальным*, если выполняются условия:

- i) при некоторых $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$ $S_{a,\theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta\} \subset \rho^L(M)$;
- ii) эквиинепрерывны семейства операторов

$$\left\{ R_{(\mu,p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) : \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (S_{a,\theta}^L(M))^{p+1} \right\},$$

$$\left\{ L_{(\mu,p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) : \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (S_{a,\theta}^L(M))^{p+1} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Если оператор $L^{-1}M$ (или оператор ML^{-1}) секториален, то оператор M (L, p) -секториален.

Следующие две леммы доказываются так же, как и аналогичные результаты в случае банаховых пространств [10].

ЛЕММА 1.3. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

- i) множество $\ker R_{(\mu, p)}^L(M)$ состоит в точности из M -присоединенных векторов оператора L высоты не больше p ;
- ii) $\ker R_{(\mu, p)}^L(M) \cap \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M) = \{0\}$, $\ker L_{(\mu, p)}^L(M) \cap \operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M) = \{0\}$.

Через $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ обозначим замыкание $\operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M)$ ($\operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M)$), через $\tilde{\mathfrak{U}}(\mathfrak{F}) - \mathfrak{U}^0 \dot{+} \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M)$ ($\mathfrak{F}^0 \dot{+} \operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M)$) в топологии пространства $\mathfrak{U}(\mathfrak{F})$.

ЛЕММА 1.4. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

- i) при любых $u \in \mathfrak{U}^1$, $f \in \mathfrak{F}^1$

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^{p+1} u = u, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_{\mu}^L(M))^{p+1} f = f;$$

- ii) $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Проектор вдоль $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0)$ на $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{P} = \text{s-lim}_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^{p+1} \quad (\tilde{Q} = \text{s-lim}_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_{\mu}^L(M))^{p+1}).$$

В дальнейшем нам понадобится степенное ограничение на рост оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$ на бесконечности, которое следует из (L, p) -секториальности оператора M . В случае банаховых пространств этот факт доказан в [10; лемма 1.3], хотя формулировка леммы 1.3 приведена в [10] не совсем точно. Уточним ее сразу для локально выпуклых пространств.

Положим $B_r(z) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - z| \leq r\}$.

ЛЕММА 1.5. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ семейство операторов $\{\mu^{-p}(\mu L - M)^{-1} : \mu \in S_{a, \theta}^L(M) \setminus B_{|a|+\varepsilon}(0)\}$ эквинепрерывно.

Мы докажем чуть более слабую оценку, но на более широком множестве.

ЛЕММА 1.6. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда при любых $\delta_1, \delta_2 > 0$ семейство операторов

$$\{\mu^{-p-1}(\mu L - M)^{-1} : \mu \in S_{a, \theta}^L(M) \setminus (B_{\delta_1}(a) \cup B_{\delta_2}(0))\}$$

эквинепрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\beta \in S_{a,\theta}^L(M)$. Тождество

$$\begin{aligned} (\mu L - M)^{-1} &= \sum_{k=0}^p (\beta - \mu)^k (R_\beta^L(M))^k (\beta L - M)^{-1} \\ &\quad + (\beta - \mu)^{p+1} R_\mu^L(M) (R_\beta^L(M))^p (\beta L - M)^{-1} \end{aligned}$$

можно доказать последовательным применением тождества (1.1). Из определения 1.1 следует, что для всякой непрерывной в $\mathfrak{U}$ полунормы $q(\cdot)$ существуют непрерывные в $\mathfrak{F}$ полунормы $r_k(\cdot)$, $k = \overline{0, p+1}$, такие, что для всех $f \in \mathfrak{F}$ и $\mu \in S_{a,\theta}^L(M) \setminus (B_{\delta_1}(a) \cup B_{\delta_2}(0))$

$$\begin{aligned} q(\mu^{-p-1}(\mu L - M)^{-1}f) &\leq |\mu|^{-p-1} \sum_{k=0}^p (|\beta| + |\mu|)^k r_k(f) \\ &\quad + \frac{(|\beta| + |\mu|)^{p+1}}{|\mu|^{p+1}|\mu - a|} |\beta - a|^{-p} r_{p+1}(f) \\ &\leq |\mu|^{-p-1} \sum_{k=0}^p (|\beta| + |\mu|)^k r_k(f) + \frac{(1 + |\beta|/\delta_2)^{p+1}}{\delta_1} |\beta - a|^{-p} r_{p+1}(f) \\ &\leq \sum_{k=0}^{p+1} c_k r_k(f) = r(f), \end{aligned}$$

где $r(\cdot)$ — непрерывная на пространстве $\mathfrak{F}$ полунорма.

§ 2. Существование голоморфных полугрупп

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Отображение $U(\cdot): \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\Sigma = \{\tau \in \mathbb{C} : \psi_1 < \arg \tau < \psi_2\}$, $-\pi < \psi_1 < \psi_2 < \pi$, называется *сильно голоморфной в секторе Σ разрешающей полугруппой уравнения (0.2)*, если

- i) $U(\sigma)U(\tau) = U(\sigma + \tau) \quad \forall \sigma, \tau \in \Sigma$;
- ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ функция $u(\tau) = U(\tau)u_0$ дифференцируема во всех точках $\tau \in \Sigma$ в топологии пространства $\mathfrak{U}$ и удовлетворяет уравнению (0.2).

Наличие единицы у полугруппы не постулируется.

Сильно голоморфную в секторе Σ полугруппу назовем *экспоненциально ограниченной*, если при некотором $a \in \mathbb{R}$ семейство операторов $\{e^{-a\tau}U(\tau) : \tau \in \Sigma\}$ эквинепрерывно.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда существует сильно голоморфная в секторе $\Sigma_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$ разрешающая полугруппа $\{U(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : \tau \in \Sigma_\theta\}$ ($\{F(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}) : \tau \in \Sigma_\theta\}$) уравнения (0.2) ((0.3)). Кроме того, при любом $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ семейство операторов $\{U(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta}\}$ ($\{F(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta}\}$) экспоненциально ограничено, и при любом $R > 0$ экспоненциально ограничены семейства операторов $\{\tau^n U^{(n)}(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta} \cap B_R(0)\}$ ($\{\tau^n F^{(n)}(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta} \cap B_R(0)\}$), $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы полугрупп имеют вид

$$U(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu\tau} d\mu, \quad F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu\tau} d\mu. \quad (2.1)$$

Контур Γ при этом взят следующий:

$$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \varepsilon - |x| + ix \operatorname{tg} \theta, x \in \mathbb{R}\}. \quad (2.2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq -a$, где a — из определения 1.1. Тогда при некоторых $\delta_1, \delta_2 > 0$ $\Gamma \subset S_{a,\theta}^L(M) \setminus (B_{\delta_1}(a) \cup B_{\delta_2}(0))$. Используя лемму 1.6, нетрудно показать сходимость интегралов

$$G_k^{\tau} u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^k R_{\mu}^L(M) e^{\mu\tau} u d\mu, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

равномерную по параметру $\tau \in B_R(0) \cap \Sigma_{\theta-\delta} \setminus B_r(0)$ при любых $R > r > 0$, $u \in \mathfrak{U}$, и получить оценку $q(e^{-a\tau} G_k^{\tau} u) \leq r(u)$, равномерную по $\tau \in \Sigma_{\theta-\delta} \setminus B_r(0)$. Поэтому внутри сектора Σ_{θ} $U^{(k)}(\tau)u = G_k^{\tau} u$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathfrak{U}$.

Возьмем контур

$$\Gamma_1 = \left\{ \nu \in \mathbb{C} : \nu = \varepsilon - |x| + ix \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right), x \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.3)$$

Пусть $\xi = (p+1)^{-1}\tau$, $\tau \in \Sigma_{\theta-\delta}$. Построим контуры

$$\Gamma_{\xi}^k = \{\mu_k \in \mathbb{C} : \xi(\mu_k - a) = \nu \in \Gamma_1\} \subset S_{a,\theta}^L(M).$$

Используя равенства

$$\begin{aligned} U(\tau) &= U(\xi(p+1)) = (2\pi i)^{-p-1} \int_{\Gamma_{\xi}^0} d\mu_0 \cdots \int_{\Gamma_{\xi}^{p-1}} d\mu_{p-1} \\ &\quad \times \int_{\Gamma_{\xi}^p} R_{(\mu,p)}^L(M) e^{\tau/(p+1) \sum_{k=0}^p \mu_k} d\mu_p, \\ U^{(n)}(\tau) &= (p+1)^{-n} (2\pi i)^{-p-1} \sum_{k_0+k_1+\cdots+k_p=n} \frac{n!}{k_0! k_1! \cdots k_p!} \\ &\quad \times \int_{\Gamma_{\xi}^0} \mu_0^{k_0} e^{\mu_0 \xi} d\mu_0 \cdots \int_{\Gamma_{\xi}^{p-1}} \mu_{p-1}^{k_{p-1}} e^{\mu_{p-1} \xi} d\mu_{p-1} \int_{\Gamma_{\xi}^p} R_{(\mu,p)}^L(M) \mu_p^{k_p} e^{\mu_p \xi} d\mu_p \end{aligned}$$

и стандартные рассуждения (см., например, [2; гл. 1, § 3]), нетрудно показать эквивалентность семейств $\{e^{-a\tau} \tau^n U^{(n)}(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta} \cap B_R(0)\}$, $\delta > 0$, $R > 0$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и экспоненциальную ограниченность семейства $\{U(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta}\}$.

Тот факт, что $\operatorname{im} U(\tau) \subset \operatorname{dom} M$ при всех $\tau \in \Sigma_{\theta}$, следует из замкнутости оператора M и сходимости интеграла

$$\int_{\Gamma} M R_{\mu}^L(M) e^{\mu\tau} u d\mu = \int_{\Gamma} \mu L R_{\mu}^L(M) e^{\mu\tau} u d\mu - \int_{\Gamma} L e^{\mu\tau} u d\mu = L G_1^{\tau} u.$$

Итак, $MU(\tau)u = LG_1^\tau u = LU^{(1)}(\tau)u$, что и требовалось.

Далее, возьмем контур $\Gamma' = \{\nu \in \mathbb{C} : \nu = \mu + 1, \mu \in \Gamma\}$, $\tau, \sigma \in \Sigma_\theta$, $u \in \mathfrak{U}$ и, используя тождество (1.1), получим

$$\begin{aligned} U(\tau)U(\sigma)u &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu\tau} d\mu \int_{\Gamma'} R_{\nu}^L(M) u e^{\nu\sigma} d\nu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) u e^{\mu\tau} d\mu \int_{\Gamma'} \frac{e^{\nu\sigma}}{\nu - \mu} d\nu \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} R_{\nu}^L(M) u e^{\nu\sigma} d\nu \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\tau}}{\nu - \mu} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) u e^{\mu(\tau+\sigma)} d\mu = U(\tau + \sigma)u, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{\nu\sigma}}{\nu - \mu} d\nu = 2\pi i e^{\mu\sigma}, \quad \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\tau}}{\nu - \mu} d\mu = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если оператор M (L, p) -секториален с константой $a = 0$, то эквинепрерывны семейства операторов

$$\{\tau^n U^{(n)}(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta}\}, \quad \{\tau^n F^{(n)}(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta-\delta}\}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть пространства $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ банаховы, а оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}, \forall T > 0 \exists C > 0 \forall t \in (0, T)$

$$\|U^{(n)}(t)\| \leq \frac{Ce^{at}}{t^n}, \quad \|F^{(n)}(t)\| \leq \frac{Ce^{at}}{t^n}.$$

При $n = 0$ или $a = 0$ оценка справедлива сразу для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В условиях теоремы 2.1 из (2.1), (1.2) имеем

$$\begin{aligned} LU(t)u &= F(t)Lu \quad \forall u \in \mathfrak{U}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ MU(t)u &= F(t)Mu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

§3. Ядра и образы разрешающих полугрупп

ЛЕММА 3.1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда справедливо следующее: $\forall u \in \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M) \ (\forall f \in \operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M)) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u = u$ ($\lim_{t \rightarrow 0+} F(t)f = f$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем вектор $u = (R_{\beta}^L(M))^{p+1}v$. В силу леммы 1.2, i) мы можем выбрать точку $\beta \in \mathbb{R}$ справа от контура Γ , удовлетворяющего (2.2). Тогда в силу тождества (1.1)

$$U(t)u = (R_{\beta}^L(M))^p \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_{\mu}^L(M)v}{\beta - \mu} e^{\mu t} d\mu + R_{\beta}^L(M) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu t} v}{\mu - \beta} d\mu \right),$$

причем последний интеграл равен нулю в силу выбора β . Из доказательства теоремы 2.1 следуют равномерная по $t \in (0, \delta)$ сходимость интеграла $U(t)u$ и возможность предельного перехода при $t \rightarrow 0+$ под знаком интеграла:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u = (R_\beta^L(M))^p \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_\mu^L(M)v}{\beta - \mu} d\mu.$$

При достаточно большом R построим окружность $S_R(0) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R\}$. В качестве контура $\gamma_{R,1}$ возьмем часть контура Γ , лежащую внутри $S_R(0)$, и правую часть окружности $S_R(0)$, отсекаемую контуром Γ , проходимую по часовой стрелке. Через $\gamma_{R,2}$ обозначим эту же часть окружности, проходимую против часовой стрелки. Кроме того, $\gamma_{R,3}$ — часть контура Γ , не попавшая внутрь $S_R(0)$. Нетрудно показать, что для любой непрерывной полуноормы $q(\cdot)$ на пространстве $\mathfrak{U}$ при $R \rightarrow \infty$

$$q\left((R_\beta^L(M))^p \int_{\gamma_{R,k}} \frac{R_\mu^L(M)v}{\beta - \mu} d\mu\right) \rightarrow 0, \quad k = 2, 3.$$

Отсюда, так как точка β лежит внутри контура $\gamma_{R,1}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u &= \frac{1}{2\pi i} (R_\beta^L(M))^p \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_{R,k}} \frac{R_\mu^L(M)v}{\beta - \mu} d\mu \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} (R_\beta^L(M))^p \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_{R,k}} \frac{R_\mu^L(M)v}{\beta - \mu} d\mu = (R_\beta^L(M))^{p+1} v = u. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $\{V(\tau) : \tau \in \Sigma\}$ — сильно голоморфная полугруппа, то, используя теорему единственности аналитической функции, нетрудно показать, что при всех $\tau_1, \tau_2 \in \Sigma$ $\ker V(\tau_1) = \ker V(\tau_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Ядром голоморфной полугруппы $\{V(\tau) : \tau \in \Sigma\}$ будем называть множество $\ker V(\cdot) = \ker V(\tau)$, $\tau \in \Sigma$.

В силу предыдущего замечания это определение корректно. Обозначим через $\widehat{L}_0$ ($\widehat{M}_0$) сужение оператора L (M) на $\ker U(\cdot)$ ($\ker U(\cdot) \cap \text{dom } M$). Из замечания 2.1 сразу следует

ЛЕММА 3.2. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

$$\widehat{L}_0 \in \mathcal{L}(\ker U(\cdot); \ker F(\cdot)), \quad \widehat{M}_0 : \ker U(\cdot) \cap \text{dom } M \rightarrow \ker F(\cdot).$$

ЛЕММА 3.3. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\sigma^{\widehat{L}_0}(\widehat{M}_0) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно доказывается, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\mu L - M)^{-1} e^{(\mu - \lambda)t}}{\mu - \lambda} d\mu = (\lambda L - M)^{-1},$$

если контур Γ , удовлетворяющий (2.2), выбрать лежащим “правее” точки λ .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\ker U(\cdot) = \mathfrak{U}^0$, $\ker F(\cdot) = \mathfrak{F}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varphi_q \in \mathfrak{U}^0 \setminus \{0\}$, т.е. φ_q – собственный или M -присоединенный вектор высоты $q \leq p$ оператора L . Понятно, что собственный вектор согласно (2.1) принадлежит $\ker U(\cdot)$. Для M -присоединенного вектора φ_q имеем то же самое согласно лемме 1.1. Таким образом, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker U(\cdot)$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим вектор $\psi = R_{(\mu, p)}^L(M)\varphi$, где $\varphi \in \ker U(\cdot)$. В силу лемм 3.2, 3.3 $\psi = R_{(\mu, p)}^{\hat{L}_0}(\widehat{M}_0)\varphi \in \ker U(\cdot)$, поэтому по лемме 3.1 $0 = \lim_{t \rightarrow 0+} U(t)\psi = \psi = R_{(\mu, p)}^L(M)\varphi$. Таким образом, вектор $\varphi \in \mathfrak{U}^0$. Следовательно, $\ker U(\cdot) = \mathfrak{U}^0$.

Теперь возьмем $f \in \mathfrak{F}^0$. В силу леммы 1.2, ii) $f = M\varphi$, где $\varphi \in \mathfrak{U}^0 \cap \text{dom } M$. Поэтому для любого $t \in \mathbb{R}_+$ $F(t)f = F(t)M\varphi = MU(t)\varphi = M0 = 0$ по доказанному. Таким образом, $\mathfrak{F}^0 \subset \ker F(\cdot)$.

Пусть $f \in \ker F(\cdot)$, тогда $\widehat{M}_0^{-1}f = \varphi \in \ker U(\cdot) = \mathfrak{U}^0$. Поэтому

$$L_{(\mu, p)}^L(M)f = L_{(\mu, p)}^L(M)\widehat{M}_0\varphi = MR_{(\mu, p)}^L(M)\varphi = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

- i) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$;
- ii) операторы $H = M_0^{-1}L_0$, $G = M_0^{-1}L_0$ нильпотентны степени не более p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение i) следует из леммы 3.3 и теоремы 3.1 ($0 \in \rho^{L_0}(M_0)$), утверждение ii) – из предыдущего и из леммы 1.3, i).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Образом полугруппы $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ назовем множество $\text{im } V(\cdot) = \{v \in \mathfrak{V} : v = \lim_{t \rightarrow 0+} V(t)v\}$.

ЛЕММА 3.4. Для сильно голоморфной полугруппы $\{V(t) : t \in \Sigma\}$ имеем $\ker V(\cdot) \cap \text{im } V(\cdot) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \ker V(\cdot) \cap \text{im } V(\cdot)$. Тогда в силу замечания 3.1 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $V(t)v = 0$. Поэтому $v = \lim_{t \rightarrow 0+} V(t)v = 0$.

ЛЕММА 3.5. Пусть полугруппа $\{V(t) \in \mathfrak{V} : t \in \mathbb{R}_+\}$ сильно непрерывна и экспоненциально ограничена. Тогда $\text{im } V(\cdot) = \overline{\bigcup_{t>0} \text{im } V(t)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем замкнутость образа полугруппы $\text{im } V(\cdot)$. Возьмем обобщенную последовательность $\{v_\alpha\} \subset \text{im } V(\cdot)$, сходящуюся к вектору $v \in \mathfrak{V}$. Тогда для любой непрерывной на $\mathfrak{V}$ полунормы $q(\cdot)$ существует непрерывная на $\mathfrak{V}$ полунорма $r(\cdot)$ такая, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} q(V(t)v - v) &= \lim_{t \rightarrow 0+} q(V(t)v - V(t)v_\alpha + V(t)v_\alpha - v_\alpha + v_\alpha - v) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0+} e^{at}r(v - v_\alpha) + \lim_{t \rightarrow 0+} q(V(t)v_\alpha - v_\alpha) + q(v - v_\alpha) \\ &= r(v - v_\alpha) + q(v - v_\alpha). \end{aligned}$$

Переходим к пределу по α , получаем, что $v \in \text{im } V(\cdot)$.

Вследствие сильной непрерывности полугруппы очевидно, что для всех $s \in \mathbb{R}_+$ $\text{im } V(s) \subset \text{im } V(\cdot)$. В силу замкнутости $\text{im } V(\cdot)$ имеем $\overline{\bigcup_{s>0} \text{im } V(s)} \subset \text{im } V(\cdot)$. Возьмем $v \in \text{im } V(\cdot)$. Тогда последовательность

$$\left\{ v_k = V\left(\frac{1}{k}\right)v \right\}_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{s>0} \text{im } V(s)$$

такова, что $v_k \rightarrow v$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому $v \in \overline{\bigcup_{s>0} \text{im } V(s)}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\text{im } U(\cdot) = \mathfrak{U}^1$, $\text{im } F(\cdot) = \mathfrak{F}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.1 $\text{im } R_{(\mu, p)}^L(M) \subset \text{im } U(\cdot)$. А в силу замкнутости $\text{im } U(\cdot)$ имеем $\mathfrak{U}^1 \subset \text{im } U(\cdot)$.

В соответствии с теоремой Коши и тождеством (1.1)

$$\begin{aligned} U(t)u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} u \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} u \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu_0}^L(M) e^{\lambda t} u \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} R_{\mu_0}^L(M) \int_{\Gamma} (\mu_0 - \lambda) R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} u \, d\lambda. \end{aligned}$$

Повторив эту процедуру p раз, для $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in \rho^L(M)$ получим

$$U(t)u = R_{(\mu, p)}^L(M) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \prod_{k=0}^p (\mu_k - \lambda) R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} u \, d\lambda.$$

Таким образом, в силу леммы 3.5 $\text{im } U(\cdot) \subset \mathfrak{U}^1$.

Обозначим

$$\tilde{U}(t) = U(t)|_{\mathfrak{U}^1}, \quad \tilde{F}(t) = F(t)|_{\mathfrak{F}^1}.$$

ЛЕММА 3.6. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

$$\tilde{P} = \text{s-lim}_{t \rightarrow 0+} \tilde{U}(t), \quad \tilde{Q} = \text{s-lim}_{t \rightarrow 0+} \tilde{F}(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекторы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ определены ранее в лемме 1.4, ii). Утверждение данной леммы следует из теорем 3.1, 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из леммы 3.6 следует, что при условии (L, p) -секториальности оператора M полугруппы $\{\tilde{U}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\{\tilde{F}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ можно доопределить в нуле по непрерывности: $\tilde{U}(0) = \tilde{P}$, $\tilde{F}(0) = \tilde{Q}$.

§4. Фазовые пространства

Пусть $\mathfrak{U}$ – секвенциально полное локально выпуклое пространство, функции $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}$, $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Их *сверткой* называется интеграл Римана

$$\int_{\mathbb{R}} u(s)w(t-s) ds = u * w: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}.$$

Сразу отметим симметричность свертки $u * w = \int_{\mathbb{R}} w(s)u(t-s) ds = w * u$.

Символом D^k будем обозначать k -ю производную функции, нижний индекс “нуль” при обозначении функционального пространства будет обозначать финитность входящих в него функций.

ЛЕММА 4.1. Пусть $u \in C_0^n(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, $w \in C_0^m(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Тогда вектор-функция $u * w \in C_0^{m+n}(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, причем

$$\begin{aligned} D^k(u * w) &= u * D^k w, & k \leq m \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \\ D^l(u * w) &= D^l u * w, & l \leq n \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следуя [13; гл. XVII, § 4], аппроксимативной единицей при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ будем называть семейство неотрицательных функций $\{\Delta_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \in \mathcal{A}\}$ таких, что, во-первых, при любом $\alpha \in \mathcal{A}$ $\int_{\mathbb{R}} \Delta_\alpha(s) ds = 1$, а во-вторых, для любой окрестности $\mathcal{O}$ нуля $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathcal{O}} \Delta_\alpha(s) ds = 1$.

ЛЕММА 4.2. Пусть функция $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}$ ограничена, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in \overline{\mathcal{A}}$, $\{\Delta_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \in \mathcal{A}\}$ – аппроксимативная единица при $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Если при любом $\alpha \in \mathcal{A}$ свертка $u * \Delta_\alpha$ существует, а функция u непрерывна на (a, b) , то $u * \Delta_\alpha(t)$ поточечно сходится к $u(t)$ на (a, b) при $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Леммы 4.1 и 4.2 доказываются стандартным образом.

ЛЕММА 4.3. i) Если функция $u \in C([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C^1((0, T]; \mathfrak{U})$ удовлетворяет уравнению (0.2) на интервале $(0, T]$, то при $\mu \in \rho^L(M)$

$$\int_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau = R_\mu^L(M)(u(0) - e^{-\mu t} u(t)); \quad (4.1)$$

ii) если функция $f \in C([0, T]; \mathfrak{F}) \cap C^1((0, T]; \mathfrak{F})$ удовлетворяет уравнению (0.3) на интервале $(0, T]$, то при $\mu \in \rho^L(M)$

$$\int_0^t e^{-\mu\tau} f(\tau) d\tau = L_\mu^L(M)(f(0) - e^{-\mu t} f(t)). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получаем

$$\mu L \int_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau = -e^{-\mu t} Lu(t) + Lu(0) + M \int_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau.$$

Если $\mu \in \rho^L(M)$, то имеем тождество (4.1). Выбирая в нем $u(t) = (\alpha L - M)^{-1} f(t)$, $\alpha \in \rho^L(M)$, и используя следующее из (1.1) тождество $(\mu L - M)^{-1} L_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L_\mu^L(M)$, получаем (4.2).

ЛЕММА 4.4 [14]. Пусть $\varphi \in L_1((0, T); \mathfrak{U})$ и для любой непрерывной в пространстве $\mathfrak{U}$ полунормы $q(\cdot)$

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu} \ln q \left(\int_0^T e^{\mu s} \varphi(s) ds \right) \leq h < T.$$

Тогда $\varphi(s) = 0$ почти всюду на $[h, T]$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$. Тогда для любой функции $u \in C^1((T_1, T_2); \mathfrak{U})$ ($f \in C^1((T_1, T_2); \mathfrak{F})$), удовлетворяющей уравнению (0.2) ((0.3)) на интервале (T_1, T_2) , имеем при $t \in (T_1, T_2)$

$$u(t) \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \operatorname{im} R_{(\mu, s)}^L(M)} \quad \left(f(t) \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \operatorname{im} L_{(\mu, s)}^L(M)} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C^\infty((T_1, T_2); \mathfrak{U})$ – решение уравнения (0.2). Тогда $R_\alpha^L(M) \dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u = \alpha R_\alpha^L(M) u - u$. Отсюда

$$u = R_\alpha^L(M) \left(\alpha - \frac{d}{dt} \right) u.$$

По индукции легко доказать, что при $k \in \mathbb{N}$

$$u = (R_\alpha^L(M))^k \sum_{m=0}^k (-1)^m C_k^m \alpha^{k-m} \frac{d^m}{dt^m} u = (R_\alpha^L(M))^k \left(\alpha - \frac{d}{dt} \right)^k u.$$

Следовательно, $u(t) \in \bigcap_{s=0}^{\infty} \operatorname{im} R_{(\mu, s)}^L(M) \quad \forall t \in (T_1, T_2)$.

Рассмотрим функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, равную $ke^{-(1-t^2)^{-1}}$ при $|t| < 1$ и нулю при $|t| \geq 1$. Здесь $k = \left(\int_{-1}^1 e^{-(1-s^2)^{-1}} ds \right)^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $\{\Delta_\alpha = \alpha^{-1} \varphi(\alpha^{-1} t) : \alpha > 0\}$ – аппроксимативная единица при $\alpha \rightarrow 0+$.

Доопределим решение $u \in C^1((T_1, T_2); \mathfrak{U})$ на всю числовую прямую, положив $u(t) = 0$, $t \notin [T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Возьмем $T > 0$ и достаточно малое α так, чтобы $\Delta_\alpha(s) = 0$ при $|s| \geq T$. Покажем, что свертки доопределенного решения уравнения (0.2) с функциями Δ_α будут решениями уравнения (0.2). Действительно,

$$\begin{aligned} L(u * \Delta_\alpha)_t &= L \frac{d}{dt} \int_{T_1-T}^{T_2+T} u(s) \Delta_\alpha(t-s) ds = L \frac{d}{dt} \int_{t-T_2-T}^{t-T_1+T} \Delta_\alpha(s) u(t-s) ds \\ &= L \Delta_\alpha(t-T_1+T) u(T_1-T) - L \Delta_\alpha(t-T_2-T) u(T_2+T) \\ &\quad + L \int_{t-T_2-T}^{t-T_1+T} \Delta_\alpha(s) \frac{d}{dt} u(t-s) ds \\ &= \int_{T_1-T}^{T_2+T} M u(s) \Delta_\alpha(t-s) ds = M(u * \Delta_\alpha), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Все указанные свертки существуют по лемме 4.1 и в силу приведенных тождеств. Согласно лемме 4.1 $u * \Delta_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$. Доопределенные нулем решения u ограничены и непрерывны на $[T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon]$, поэтому согласно лемме 4.2 получаем, что

бесконечно дифференцируемые решения $u * \Delta_\alpha$ на интервале $(T_1 + \varepsilon, T_2 - \varepsilon)$ поточечно стремятся к один раз непрерывно дифференцируемому решению u при $\alpha \rightarrow 0+$. Поэтому для решений из класса $C^1((T_1, T_2); \mathfrak{U})$ имеем $u \in \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \text{im } R_{(\mu, s)}^L(M)}$ при $t \in (T_1, T_2)$ в силу произвольности ε .

Следуя [5; гл. I, § 3, определение 3.1], *ослабленным решением уравнения (0.2)* будем называть функцию $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению при $t \in \mathbb{R}_+$. *Ослабленной задачей Коши для уравнения (0.2)* будем называть задачу нахождения ослабленного решения уравнения, удовлетворяющего условию $u(0) = u_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством уравнения (0.2)*, если

- i) любое ослабленное решение $u = u(t)$ уравнения (0.2) лежит в $\mathfrak{P}$, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P} \forall t \in \mathbb{R}_+$;
- ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение ослабленной задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (0.2).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) есть фазовое пространство уравнения (0.2) ((0.3)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидны включения

$$\overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \text{im } R_{(\mu, s)}^L(M)} \subset \overline{\bigcap_{s=0}^{\infty} \text{im } R_{(\mu, s)}^L(M)} = \bigcap_{s=0}^{\infty} \overline{\text{im } R_{(\mu, s)}^L(M)} \subset \mathfrak{U}^1.$$

Возьмем в предыдущей теореме $T_1 = 0$. Тогда для ослабленных решений u имеем $u(t) \in \mathfrak{U}^1$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ в силу теоремы 4.1. Принадлежность точки $u(0)$ множеству $\mathfrak{U}^1$ следует из его замкнутости и непрерывности ослабленных решений в точке $t = 0$.

Установим единственность решения ослабленной задачи Коши. Из (4.1) для ослабленного решения уравнения (0.2), удовлетворяющего условию $u(0) = 0$, при $t = T > 0$ получим

$$R_{\mu}^L(M)u(T) = \int_0^T e^{\mu(T-\tau)} u(\tau) d\tau = \int_0^T e^{\mu s} u(T-s) ds.$$

Согласно лемме 1.6 для $\varphi(s) = u(T-s)$ и любой непрерывной в $\mathfrak{U}$ полунормы $q(\cdot)$ существует непрерывная на $\mathfrak{F}$ полунорма $r(\cdot)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu} \ln q \left(\int_0^T e^{\mu s} \varphi(s) ds \right) \leq \overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu^{p+1} + \ln r(Lu(T))}{\mu} = 0.$$

Отсюда по лемме 4.4 $u(t) = 0$ почти всюду на $[0, T]$. А так как u — непрерывная функция, а T произвольно, то $u(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Существование решения ослабленной задачи Коши для уравнения (0.2) при $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ следует из теорем 2.1, 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из единственности решения ослабленной задачи Коши следует единственность разрешающей полугруппы.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда любое ослабленное решение уравнения (0.2) или уравнения (0.3) имеет голоморфное продолжение в сектор $\Sigma_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое ослабленное решение $u(t)$ уравнения (0.2) в силу его непрерывности вплоть до нуля является решением ослабленной задачи Коши с начальным значением $u(0)$, которое согласно теореме 4.2 принадлежит $\mathfrak{U}^1$. По той же теореме решение ослабленной задачи Коши единственно, поэтому задается полугруппой (2.1), которая сильно голоморфна в секторе Σ_θ .

§ 5. Единицы разрешающих полугрупп

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть пространство $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ полурефлексивно, оператор M (L, p) -секториален. Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный вектор $u \in \mathfrak{U}$. Из теоремы 2.1 следует, что для любой непрерывной полунормы $q(\cdot)$ существует полунорма $r(\cdot)$ такая, что сразу для всех $t \in (0, 1)$ $q(U(t)u) \leq r(u)$. Таким образом, множество $\mathcal{A}_u = \{U(1/n)u : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{U}$ ограничено. Из полурефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ следует, что $\mathcal{A}_u$ относительно слабо компактно [1; приложение к гл. V, § 3, теорема 1]. Поэтому из последовательности $\mathcal{A}_u \subset \mathfrak{U}^1$ мы можем выбрать подпоследовательность $\{U(1/n_k)u\}$, слабо сходящуюся к некоторому вектору $v \in \mathfrak{U}$. Из замкнутости линейного подпространства $\mathfrak{U}^1$ следует его слабая замкнутость, поэтому $v \in \mathfrak{U}^1$.

Пусть $v_k = U(1/n_k)u - v$, тогда

$$\text{w-lim}_{k \rightarrow \infty} v_k = 0. \quad (5.1)$$

По лемме 3.1

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{k \rightarrow \infty} (R_\mu^L(M))^{p+1} v_k &= \text{s-lim}_{k \rightarrow \infty} U\left(\frac{1}{n_k}\right) (R_\mu^L(M))^{p+1} u - (R_\mu^L(M))^{p+1} v \\ &= (R_\mu^L(M))^{p+1} (u - v). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для любого элемента u' сопряженного к $\mathfrak{U}$ пространства $\mathfrak{U}'$

$$u'((R_\mu^L(M))^{p+1} v_k) = v'(v_k),$$

где $v' \in \mathfrak{U}'$. Отсюда и в силу (5.1), (5.2)

$$\text{w-lim}_{k \rightarrow \infty} (R_\mu^L(M))^{p+1} v_k = 0 = (R_\mu^L(M))^{p+1} (u - v),$$

значит, $u - v \in \mathfrak{U}^0$. Таким образом, для произвольного $u \in \mathfrak{U}$ имеем $u = z + v$, где $z = u - v \in \mathfrak{U}^0$, $v \in \mathfrak{U}^1$.

Единицей сильно непрерывной полугруппы операторов $\{V(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется оператор $\text{s-lim}_{t \rightarrow 0+} V(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{W})$, если он существует. Понятно, что единица полугруппы является проектором.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Согласно теореме 5.1 и лемме 3.6 получаем, что в случае полурефлексивного пространства построенная на нем в теореме 2.1 полугруппа имеет единицу.

Чтобы получить существование единиц полугрупп операторов (2.1) без требования полурефлексивности пространств, приходится усиливать условия на операторы L, M . Для этого вводится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Оператор M называется *сильно (L, p) -секториальным справа (слева)*, если он (L, p) -секториален и при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a, \theta}^L(M)$ справедливо следующее: для любого $u \in \text{dom } M$ и для любой непрерывной в $\mathfrak{U}$ полунормы $r(\cdot)$ существует константа c_1 , зависящая от u , такая, что

$$r\left((\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) R_{(\mu, p)}^L(M) (\lambda L - M)^{-1} M u\right) \leq c_1(u),$$

соответственно для всех f из некоторого плотного в $\mathfrak{F}$ линейала $\mathfrak{F}^\circ$ и для любой непрерывной в $\mathfrak{F}$ полунормы $r(\cdot)$ существует константа c_2 , зависящая от f , такая, что

$$r\left((\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) M (\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu, p)}^L(M) f\right) \leq c_2(f).$$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева). Тогда существует единица полугруппы $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ($\{F(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \text{dom } M, s > t > 0, \tau = t/(p+1)$. Тогда

$$\begin{aligned} U(s)u - U(t)u &= U(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(R_{\lambda}^L(M) - \frac{I}{\lambda} \right) u e^{\lambda(s-t)} d\lambda \\ &= (2\pi i)^{-p-2} \int_{\Gamma_0} \dots \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma} R_{(\mu, p)}^L(M) (\lambda L - M)^{-1} M u \\ &\quad \times \exp\left(\sum_{k=0}^p \mu_k \tau + \lambda(s-t)\right) \frac{d\lambda}{\lambda} d\mu_0 \dots d\mu_p, \end{aligned}$$

где контуры $\Gamma, \Gamma_k, k = \overline{0, p}$, удовлетворяют (2.2) и расположены в комплексных плоскостях переменных $\lambda, \mu_k, k = \overline{0, p}$, соответственно. Сделаем замены $\lambda = a + \nu(s-t)^{-1}, \mu_k = a + \nu_k/\tau, k = \overline{0, p}$. Очевидно, новые контуры интегрирования можно выбрать не зависящими от s, t и τ так, чтобы все они имели вид (2.3). Обозначим эти контуры теми же символами $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$. Из сильной (L, p) -секториальности оператора M при любой полунорме $q(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} q(U(s)u - U(t)u) &\leq (s-t)(2\pi)^{-p-2} \int_{\Gamma_0} \dots \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma} \left| \exp\left(\sum_{k=0}^p \nu_k + \nu + as\right) \right| \\ &\quad \times q\left(\prod_{k=0}^p ((\nu_k + a\tau)L - \tau M)^{-1} L ((\nu + a(s-t))L - (s-t)M)^{-1} M u\right) \\ &\quad \times \frac{|d\nu|}{|\nu + a(s-t)|} |d\nu_0| \dots |d\nu_p| \\ &\leq e^{as}(s-t)c_1(u) \left(\int_{\Gamma_0} \frac{e^{\text{Re } \nu_0} |d\nu_0|}{|\nu_0|} \right)^{p+1} \int_{\Gamma} \frac{e^{\text{Re } \nu} |d\nu|}{|\nu| |\nu - \delta|} \end{aligned}$$

при $s - t < \delta|a|^{-1}$, $\delta < \varepsilon$ (из (2.3)). Отсюда

$$q(U(s)u - U(t)u) \leq e^{as}(s - t)c_3(u) \quad \forall u \in \text{dom } M. \quad (5.3)$$

Семейство операторов $\{U(t) : t \in (0, \delta)\}$ эквинепрерывно в силу экспоненциальной ограниченности полугруппы. Учитывая секвенциальную полноту пространства $\mathfrak{U}$ и плотность множества $\text{dom } M$ в $\mathfrak{U}$, из (5.3) получаем существование предела $P = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0+} U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева). Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проектором, расщепляющим пространство, является единица соответствующей полугруппы.

Итак, если оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева), либо если он (L, p) -секториален, а пространство $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) полурефлексивно, то в силу лемм 1.4, ii), 3.6 $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}$, $\tilde{P} = P$ ($\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$, $\tilde{Q} = Q$).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева). Тогда $P = s\text{-}\lim U(\tau)$ ($Q = s\text{-}\lim F(\tau)$) при $|\tau| \rightarrow 0$ в секторе $\Sigma_{\theta-\delta}$, $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужение полугруппы $\{U(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta}\}$ на подпространство $\mathfrak{U}^1$ дает полугруппу класса $H(-\theta + \pi/2, \theta - \pi/2)$ [15; гл. X, определение 10.6.1]. Осталось к ней применить теорему 10.6.6 [15; гл. X].

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа и слева. Тогда

- i) $\forall u \in \mathfrak{U} \quad L Pu = Q Lu$;
- ii) $\forall u \in \text{dom } M \quad Pu \in \text{dom } M, M Pu = Q Mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный вектор $u \in \text{dom } M$. С учетом замкнутости оператора M и того, что существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u = Pu, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} MU(t)u = \lim_{t \rightarrow 0+} F(t)Mu = QMu,$$

имеем второе утверждение леммы. Утверждение i) доказывается аналогично.

Обозначим $L_1 = L|_{\mathfrak{U}^1}$, $M_1 = M|_{\text{dom } M_1}$, $\text{dom } M_1 = \text{dom } M \cap \mathfrak{U}^1$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа и слева. Тогда $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, $M_0 \in \text{Cl}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ – биекция, $M_1 \in \text{Cl}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предыдущего следствия достаточно заметить лишь, что биективность оператора $M_0 : \text{dom } M_0 \rightarrow \mathfrak{U}^0$ вытекает из следствия 3.1, i). Плотная определенность операторов M_0 , M_1 следует из того, что для $u \in \text{dom } M$ имеем $(I - P)u, Pu \in \text{dom } M$.

ЛЕММА 5.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа и слева. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \text{Cl}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность оператора L_1 следует из того факта, что $\ker L \subset \mathfrak{U}^0$. Далее, $(L_\mu^L(M))^{p+1} = (G(\mu G - I)^{-1})^{p+1}(I - Q) + (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}Q$. Так как G нильпотентен степени не больше p в силу следствия 3.1, ii), то $\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M) = \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^{L_1}(M_1)$, $\mathfrak{F}^1 \subset \overline{\operatorname{im} L_1}$. Но $\operatorname{im} L_1 \subset \mathfrak{F}^1$, следовательно, $\operatorname{im} L_1$ плотен в $\mathfrak{F}^1$, а значит, L_1^{-1} плотно определен.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Утверждения следствий 5.2–5.4 и леммы 5.1 останутся в силе, если заменить требование сильной (L, p) -секториальности оператора M справа (слева) на требования (L, p) -секториальности оператора и полурефлексивности пространства $\mathfrak{U}(\mathfrak{F})$.

§ 6. Существование обратного оператора

Укажем условия существования оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$. Для этого определим семейство операторов $\{R(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}) : \tau \in \Sigma_\theta\}$,

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu\tau} d\mu, \quad (6.1)$$

где $\Sigma_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$, контур Γ удовлетворяет (2.2), а оператор M (L, p) -секториален (интеграл сходится по лемме 1.6).

ЛЕММА 6.1. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда семейство операторов $\{R(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$ голоморфно в секторе Σ_θ .

ЛЕММА 6.2. Пусть оператор M (L, p) -секториален. Тогда

- i) $\forall \tau \in \Sigma_\theta \quad R(\tau)L = U(\tau), \quad LR(\tau) = F(\tau);$
- ii) $\forall \sigma, \tau \in \Sigma_\theta \quad R(\sigma + \tau) = U(\sigma)R(\tau) = R(\tau)F(\sigma).$

Утверждение i) очевидно, ii) доказывается так же, как полугрупповое свойство в теореме 2.1.

ЛЕММА 6.3. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева). Тогда $R(\tau) = PR(\tau) \quad (R(\tau) = R(\tau)Q) \quad \forall \tau \in \Sigma_\theta$.

Для доказательства устремим в утверждении леммы 6.2, ii) σ к нулю справа.

ЛЕММА 6.4. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева). Тогда $\bigcup_{t>0} \operatorname{im} R(t) = \mathfrak{U}^1 \quad (\forall \tau \in \Sigma_\theta \quad \ker R(\tau) = \mathfrak{F}^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \operatorname{im} U(t) \subset \operatorname{im} R(t)$. В силу леммы 3.5 и теоремы 3.2 получаем, что $\mathfrak{U}^1 \subset \overline{\bigcup_{t>0} \operatorname{im} R(t)}$. По лемме 6.3 $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \operatorname{im} R(t) \subset \mathfrak{U}^1$. Из замкнутости подпространства $\mathfrak{U}^1$ получаем требуемое.

Пусть $\tau \in \Sigma_\theta, f \in \mathfrak{F}^0$. Тогда по лемме 6.3 $R(\tau)f = R(\tau)Qf = 0$. Поэтому $\mathfrak{F}^0 \subset \ker R(\tau)$. Если же $R(\tau)f = 0$, то $F(\tau)f = LR(\tau)f = 0$ в силу леммы 6.2, i). Из теоремы 3.1 следует, что $\ker R(\tau) \subset \mathfrak{F}^0$.

Непрерывный оператор L_1^{-1} нам необходим для того, чтобы решать неоднородное уравнение $L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t)$ без дополнительного и весьма ограничительного требования $Qf(t) \in \operatorname{im} L_1$ (см. § 8). Для получения этого оператора придется добавить еще одно условие на операторы L, M . Однако дополнительные требования на операторы в определениях 5.1 и 6.1 вписываются в рамки обобщения секториального оператора (см. по этому поводу замечание 6.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Оператор M называется *сильно (L, p) -секториальным*, если он сильно (L, p) -секториален слева и эквинепрерывно семейство операторов

$$\left\{ (\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) R_{(\mu, p)}^L(M) (\lambda L - M)^{-1} : \right. \\ \left. \lambda \in S_{a, \theta}^L(M), \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in (S_{a, \theta}^L(M))^{p+1} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Сильно (L, p) -секториальный оператор M сильно (L, p) -секториален справа ($c_1(u) = r(Mu)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ оператор M сильно (L, p) -секториален, если секториален оператор $L^{-1}M$ (или ML^{-1}). В качестве плотного в пространстве $\mathfrak{F}$ линейала $\mathring{\mathfrak{F}}$ можно взять $L[\text{dom } M]$.

ЛЕММА 6.5. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда для любого $\delta \in (0, \pi/2 - \theta)$ семейство операторов $\{R(\tau) : \tau \in \Sigma_{\theta - \delta}\}$ экспоненциально ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству экспоненциальной ограниченности полугруппы в теореме 2.1.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathfrak{F}$, $s > t > 0$. Тогда для любого $f \in \mathfrak{F}$ и для любой непрерывной на пространстве $\mathfrak{U}$ полунормы $q(\cdot)$

$$q(R(s)f - R(t)f) = q(R(t)(F(s - t) - Q)f) \leq e^{at} r((F(s - t) - Q)f)$$

в силу лемм 6.2, 6.3 и 6.5. Здесь $r(\cdot)$ – непрерывная на пространстве $\mathfrak{F}$ полунорма. Отсюда следует существование оператора $R(0) = \text{s-lim}_{t \rightarrow 0+} R(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, который непрерывен как предельный для эквинепрерывного семейства операторов $\{R(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}) : t \in (0, \delta)\}$. Согласно лемме 6.2 $R(0)L = P$ и $LR(0) = Q$. Сузив эти тождества на $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^1$ соответственно, получим $R_1(0)L_1 = I$, $L_1R_1(0) = I$, где $R_1(0) = R(0)|_{\mathfrak{F}^1}$. Таким образом, $R_1(0) = L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Как уже было замечено, сужение $\{U_1(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$ ($\{F_1(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$) полугруппы $\{U(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$ ($\{F(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$) на подпространство $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) является полугруппой класса $H(-\theta + \pi/2, \theta - \pi/2)$ [15; гл. X, определение 10.6.1].

Обозначим $S_1 = L_1^{-1}M_1 \in \text{Cl}(\mathfrak{U}^1)$, $\text{dom } S_1 = \text{dom } M_1$; $T_1 = M_1L_1^{-1} \in \text{Cl}(\mathfrak{F}^1)$, $\text{dom } T_1 = L_1[\text{dom } M_1]$. Ясно, что при условии сильной (L, p) -секториальности оператора M множество $L_1[\text{dom } M_1]$ плотно в $\mathfrak{F}^1$ в силу теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда инфинитезимальным генератором полугруппы $\{U_1(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$ ($\{F_1(\tau) : \tau \in \Sigma_\theta\}$) является оператор S_1 (T_1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегрального представления полугрупп (2.1), теоремы 6.1 и тождеств $R_\mu^{L_1}(M_1) = R_\mu(S_1)$, $L_\mu^{L_1}(M_1) = R_\mu(T_1)$ следует, что сужения полугрупп могут быть представлены в виде

$$U_1(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu(S_1) e^{\mu\tau} d\mu, \quad F_1(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\mu(T_1) e^{\mu\tau} d\mu,$$

где $R_\mu(A) = (\mu I - A)^{-1}$. Осталось сослаться на теорему Иосиды о генераторах голоморфных полугрупп.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда операторы S_1 и T_1 секториальны.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, то согласно следствию 6.1 оператор M сильно (I, p) -секториален при некотором $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда он секториален.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Если условие сильной (L, p) -секториальности заменить на условие сильной (L, p) -секториальности справа и слева и взять при этом $\text{dom } S_1 = \text{im}(\mu L_1 - M_1)^{-1} L_1$, $\text{dom } T_1 = \text{im } L_1(\mu L_1 - M_1)^{-1}$, то утверждения теоремы 6.2, следствия 6.1 и замечания 6.3 также будут справедливы. При этом в случае полурефлексивных пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ можно ограничиться требованием (L, p) -секториальности оператора M (см. замечание 5.2).

§ 7. Генераторы вырожденных сильно голоморфных полугрупп

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — секвенциально полные локально выпуклые линейные топологические пространства и выполняются следующие условия.

УСЛОВИЕ Н1. Существует пара

$$\{U(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : \tau \in \Sigma \cup \{0\}\}, \{F(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}) : \tau \in \Sigma \cup \{0\}\}$$

сильно голоморфных в секторе $\Sigma = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, сильно непрерывных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и экспоненциально ограниченных полугрупп операторов.

Положим $P = U(0)$, $Q = F(0)$, $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \text{im } P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \text{im } Q$. Имеем $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Через $\{U_1(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : \tau \in \Sigma \cup \{0\}\}$ и $\{F_1(\tau) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1) : \tau \in \Sigma \cup \{0\}\}$ обозначим сужения соответствующих полугрупп на подпространства $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^1$. Сужения являются невырожденными голоморфными полугруппами, и по теореме Иосиды они имеют инфинитезимальные генераторы $S_1 \in \text{Cl}(\mathfrak{U}^1)$ и $T_1 \in \text{Cl}(\mathfrak{F}^1)$ соответственно, являющиеся секториальными операторами.

УСЛОВИЕ Н2. Существует линейный гомеоморфизм $L_1: \mathfrak{U}^1 \rightarrow \mathfrak{F}^1$ такой, что $\text{dom } T_1 = L_1[\text{dom } S_1]$ и для всех $u \in \text{dom } S_1$ $L_1 S_1 u = T_1 L_1 u$.

УСЛОВИЕ Н3. Существует инъективный оператор $N_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ с плотным в $\mathfrak{U}^0$ образом.

Отсюда следует существование биективного оператора $M_0 = N_0^{-1} \in \text{Cl}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$ с областью определения $\text{dom } M_0 = \text{im } N_0$.

УСЛОВИЕ Н4. Существует такой оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, что оператор $H = M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени не больше $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

УСЛОВИЕ Н5. Справедливо следующее:

$$\begin{aligned} L &= L_0(I - P) + L_1P; & M &= M_0(I - P) + L_1S_1P, \\ \text{dom } M &= \text{dom } M_0 \dot{+} \text{dom } S_1. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7.1. Оператор M сильно (L, p) -секториален тогда и только тогда, когда выполнены условия Н1–Н5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий показана в предыдущих параграфах. Достаточность следует из секториальности операторов S_1, T_1 , нильпотентности оператора H и тождеств

$$\begin{aligned} (\mu L - M)^{-1} &= - \sum_{k=0}^p \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + (\mu I - S_1)^{-1} L_1^{-1} Q, \\ R_{(\nu, p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p R_{\nu_k}(S_1)P, & L_{(\nu, p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p R_{\nu_k}(T_1)Q, \\ M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\nu, p)}^L(M)f &= R_\lambda(T_1) \prod_{k=0}^p R_{\nu_k}(T_1)T_1Qf, \\ R_{(\nu, p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} &= R_\lambda(S_1) \prod_{k=0}^p R_{\nu_k}(S_1)L_1^{-1}Pu, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $\mu, \lambda, \nu_k \in S_{a, \theta}^L(M)$, $k = \overline{0, p}$, $f \in \mathring{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0 \dot{+} \text{dom } T_1$.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Из сильной (L, p) -секториальности оператора M следует его сильная $(L, p + q)$ -секториальность при $q \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, параметр p фигурирует лишь в условии Н4 и может быть увеличен произвольным образом.

Введем в рассмотрение еще одно

УСЛОВИЕ Н2'. Существует инъективный оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ с плотным в $\mathfrak{U}^1$ образом, при этом $L_1[\text{dom } S_1] \subset \text{dom } T_1 \subset \text{im } L_1$, и для всех $u \in \text{dom } S_1$ $L_1S_1u = T_1L_1u$.

ТЕОРЕМА 7.2. Оператор M (L, p) -секториален справа и слева тогда и только тогда, когда выполнены условия Н1, Н2', Н3–Н5.

Для доказательства необходимости условия Н2' надо положить $\text{dom } S_1 = \text{im}(\mu L_1 - M_1)^{-1}L_1$, $\text{dom } T_1 = \text{im } L_1(\mu L_1 - M_1)^{-1}$ и учесть замечание 6.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Каждая из теорем 7.1, 7.2 является обобщением теоремы Иосиды об инфинитезимальных генераторах голоморфных полугрупп операторов, поскольку при $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, $L = I$ условия Н2–Н5, Н2' становятся тривиальными, а сильная (I, p) -секториальность в точности означает секториальность оператора $M = S_1 = T_1$ согласно замечаниям 6.3 и 6.4.

Из замечаний 5.2 и 6.4 следует

ТЕОРЕМА 7.3. Если пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ полурефлексивны, то оператор M (L, p) -секториален в том и только том случае, если выполнены условия Н1, Н2', Н3–Н5.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Если пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ полурефлексивны, то оператор M (L, p) -секториален в том и только том случае, если он сильно (L, p) -секториален справа и слева.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. i) Из сильной (L, p) -секториальности оператора M справа и слева следует его сильная $(L, p+q)$ -секториальность справа и слева при любом $q \in \mathbb{N}$;

ii) если пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ полурефлексивны, то из (L, p) -секториальности оператора M следует его $(L, p+q)$ -секториальность при любом $q \in \mathbb{N}$.

Положим $\mathbb{C}_{a,+} = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > a\}$.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ полурефлексивны. Тогда оператор M (L, p) -секториален в том и только том случае, если $\mathbb{C}_{a,+} \subset \rho^L(M)$ и найдется константа $C > 0$ такая, что семейства операторов

$$\left\{ \left(C^{p+1} R_{(\mu,p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) \right)^n : \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}_{a,+}^{p+1}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (7.2)$$

$$\left\{ \left(C^{p+1} L_{(\mu,p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a) \right)^n : \mu = (\mu_0, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}_{a,+}^{p+1}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \prod_{k=0}^p (C(\mu_k - a) R_{\mu_k}^L(M))^{l_k+1} : (\mu_0, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}_{a,+}^{p+1}, l_0, \dots, l_p \in \overline{0, p} \right\}, \quad (7.3)$$

$$\left\{ \prod_{k=0}^p (C(\mu_k - a) L_{\mu_k}^L(M))^{l_k+1} : (\mu_0, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}_{a,+}^{p+1}, l_0, \dots, l_p \in \overline{0, p} \right\}$$

эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}_{a,+}$. Тогда

$$q((\lambda - \mu) L_{\mu}^L(M))^{k(p+1)} f \leq \frac{|\lambda - \mu|^{k(p+1)}}{(C|\mu - a|)^{k(p+1)}} r(f)$$

при всех $f \in \mathfrak{F}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда имеем при $|\lambda - \mu| < C|\mu - a|$

$$(\lambda L - M)^{-1} f = (\mu L - M)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (L_{\mu}^L(M))^n f. \quad (7.4)$$

Действительно, из (1.1) и (7.2) следует

$$\begin{aligned}
 (\lambda L - M)^{-1} &= (\mu L - M)^{-1} (I - (\mu - \lambda) L_\mu^L(M))^{-1}, \\
 q((\lambda L - M)^{-1} f) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \mu|^n q((\mu L - M)^{-1} (L_\mu^L(M))^n f) \\
 &= \sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda - \mu|^{k(p+1)+l} q((\mu L - M)^{-1} (L_\mu^L(M))^{k(p+1)+l} f) \\
 &\leq \sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda - \mu|^{k(p+1)+l} q_l((L_\mu^L(M))^{k(p+1)} f) \\
 &< \sum_{l=0}^p C^l |\mu - a|^l \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda - \mu}{C(\mu - a)} \right|^{k(p+1)} r_l(f) \\
 &= \left(1 - \frac{|\lambda - \mu|^{p+1}}{(C|\mu - a|)^{p+1}} \right)^{-1} \sum_{l=0}^p C^l |\mu - a|^l r_l(f).
 \end{aligned}$$

Здесь использована непрерывность операторов $(\mu L - M)^{-1} (L_\mu^L(M))^l$, $l = \overline{0, p}$, означающая, что для всякой непрерывной в $\mathfrak{U}$ полунормы $q(\cdot)$ существует непрерывная в $\mathfrak{F}$ полунорма $q_l(\cdot)$ такая, что для всех $g \in \mathfrak{F}$ выполняется

$$q((\mu L - M)^{-1} (L_\mu^L(M))^l g) \leq q_l(g).$$

Покажем, что точки $\lambda = a - \delta C|y| + iy$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\delta \in (0, 1)$, лежат в $\rho^L(M)$. Выберем $\mu = a + \varepsilon + iy$, $\varepsilon(y) \in (0, (1 - \delta)C|y|)$. Тогда

$$|\lambda - \mu| = \varepsilon + \delta C|y| < C|y| < C|\mu - a|.$$

Поэтому любая пара лучей вида $\{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| = \pi/2 + \arctg(\delta C), \mu \neq a\}$ лежит в $\rho^L(M)$. Отсюда

$$S_{a, \theta}^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta = \frac{\pi}{2} + \arctg C \right\} \subset \rho^L(M).$$

Далее, при $|\lambda_p - \mu_p| \leq \delta C|\mu_p - a|$, $\delta \in (0, 1)$, $u \in \mathfrak{U}$ из (7.4) следует

$$q(R_{\lambda_p}^L(M)u) \leq \sum_{l=0}^p \frac{|\lambda_p - \mu_p|^l}{1 - \delta^{p+1}} r((R_{\mu_p}^L(M))^{l+1}u).$$

Положим здесь $u = R_{(\lambda, p-1)}^L(M)v$. Тогда при $C_1 = (1 - \delta^{p+1})^{-1}$

$$\begin{aligned}
 q(R_{(\lambda, p)}^L(M)v) &\leq C_1^{p+1} \sum_{l_0=0}^p |\lambda_0 - \mu_0|^{l_0} \cdots \sum_{l_p=0}^p |\lambda_p - \mu_p|^{l_p} r_1 \left(\prod_{k=0}^p (R_{\mu_k}^L(M))^{l_k+1} v \right) \\
 &\leq \frac{C_1^{p+1}}{C^{p+1} \prod_{k=0}^p |\mu_k - a|} \sum_{l_0=0}^p \cdots \sum_{l_p=0}^p \delta^{\sum_{m=0}^p l_m} r_2(v) \\
 &< \left(\frac{C_1(p+1)(1 + \delta C)}{C} \right)^{p+1} \frac{r_2(v)}{\prod_{k=0}^p (\lambda_k - a)}.
 \end{aligned}$$

При этом мы использовали условие (7.3) и неравенство $|\lambda_k - a| \leq |\lambda_k - \mu_k| + |\mu_k - a| < (1 + \delta C)|\mu_k - a|$, $k = \overline{0, p}$. Возьмем непрерывную полунорму

$$r(\cdot) = \left(\frac{C_1(p+1)(1+\delta C)}{C} \right)^{p+1} r_2(\cdot)$$

и получим, что $q(R_{(\lambda, p)}^L(M) \prod_{k=0}^p (\lambda_k - a)v) \leq r(v)$ для $\lambda_k \in S_{a, \theta}^L(M)$, $k = \overline{0, p}$.

Итак, даже не используя полурефлексивность, мы получили, что оператор M (L, p) -секториален с константой $\theta = \pi/2 + \arctg(\delta C)$ при любом $\delta \in (0, 1)$.

Необходимость условий (7.2), (7.3) следует из тождеств (7.1) (с возможной заменой числа p на большее) и секториальности операторов S_1 и T_1 (см. замечание 6.4). Действительно, из их секториальности в свою очередь следует эквинепрерывность семейств

$$\{(C(\mu - a)R_\mu(S_1))^n : \mu \in \mathbb{C}_{a, +}, n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(C(\mu - a)R_\mu(T_1))^n : \mu \in \mathbb{C}_{a, +}, n \in \mathbb{N}\}$$

при некотором $C > 0$ [1; гл. IX, § 10].

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Можно показать, что во всех утверждениях данного параграфа условие полурефлексивности пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ можно заменить на условия $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

§ 8. Неоднородная задача Коши

Рассмотрим ослабленную задачу Коши $u(0) = u_0$ для неоднородного линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t) \quad (8.1)$$

с сильно (L, p) -секториальным оператором M .

Пусть $\mathfrak{V}$ — локально выпуклое пространство, вектор-функцию $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{V}$ будем называть *локально гёльдеровой*, если для любой непрерывной в пространстве $\mathfrak{V}$ полунормы $q(\cdot)$ и для любого $t \in \mathbb{R}_+$ найдутся окрестность $\mathcal{O}_t$ точки t и константы $C_{q, t}$, $\alpha_{q, t} > 0$ такие, что для любого $s \in \mathcal{O}_t$ $q(g(t) - g(s)) \leq C_{q, t}|t - s|^{\alpha_{q, t}}$.

ЛЕММА 8.1. Пусть $\mathfrak{V}$ — секвенциально полное локально выпуклое пространство, оператор A секториален, вектор-функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{V}$ локально гёльдерова и при некотором $\rho(q)$ $\int_0^{\rho(q)} q(g(t)) dt < \infty$. Тогда для любого начального значения $v_0 \in \mathfrak{V}$ существует единственное решение ослабленной задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения $\dot{v}(t) = Av(t) + g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, имеющее вид

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g(s) ds \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathfrak{V}) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathfrak{V}).$$

Аналогичное утверждение в случае банахова пространства $\mathfrak{V}$ доказано в [2; гл. 3, § 3.2]. Доказательство леммы 8.1 отличается от приведенных в [2] рассуждений только заменой нормы на произвольную непрерывную полунорму. Заметим, что, например, в [16; гл. 5, § 4] такое же утверждение для банахова пространства доказано при более сильном условии гёльдеровости вектор-функции g . Однако из приведенного в [16] доказательства видно, что это условие можно ослабить.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, вектор-функция f такова, что $f^0 = (I - Q)f \in C^{p+1}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{F}) \cap C^p(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{F})$, а функция $g = L_1^{-1}Qf: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{U}^1$ удовлетворяет условиям леммы 8.1. Тогда для любого начального значения

$$u_0 \in \mathfrak{P}_f = \left\{ u \in \mathfrak{U}: (I - P)u = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} f^{0(k)}(0) \right\}$$

существует единственное решение $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathfrak{U}) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{U})$ ослабленной задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (8.1), причем

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} f^{0(k)}(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подействуем на (8.1) оператором $L_1^{-1}Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}^1)$ и получим уравнение

$$\dot{u}(t) = S_1 u(t) + L_1^{-1}Qf(t) \quad (8.2)$$

на пространстве $\mathfrak{U}^1$ с секториальным оператором $S_1 = L_1^{-1}M_1$ в силу следствия 6.1. Поэтому согласно лемме 8.1 для любого $u_0^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное ослабленное решение

$$u(t) = U_1(t)Pu_0 + \int_0^t U_1(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds$$

задачи $u(0) = u_0^1 = Pu_0$ для уравнения (8.2).

Подействовав на уравнение (8.1) непрерывным оператором $M_0^{-1}(I - Q)$, получим уравнение $H\dot{u}(t) = u(t) + M_0^{-1}f^0(t)$ на пространстве $\mathfrak{U}^0$. Поочередно дифференцируя его и действуя оператором H на обе части уравнения и используя нильпотентность оператора H , получим $u(t) = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} f^{0(k)}(t)$. Для того чтобы это решение удовлетворяло условию $u(0) = (I - P)u_0 = u_0^0$, необходимо и достаточно, чтобы $u_0^0 \in \mathfrak{U}^0 \cap \mathfrak{P}_f$.

§ 9. Приложение к уравнениям в частных производных

Рассмотрим банахово пространство $\mathfrak{V}$ и некоторый оператор $A \in \text{Cl}(\mathfrak{V})$. Обозначим $\text{dom } A^\infty = \bigcap_{k=1}^\infty \text{dom } A^k$. Наделив это множество топологией, определяемой системой полунорм $q_k(u) = \sum_{l=0}^k \|A^l u\|_{\mathfrak{V}}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, получим пространство Фреше, которое обозначим через $\mathfrak{D}_A$. Зафиксируем положительное число τ . Пусть $\mathfrak{E}_A(\tau) = \{u \in \text{dom } A^\infty : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|A^k u\|_{\mathfrak{V}}^{1/k} \leq \tau\}$ — так называемое множество элементов A -экспоненциального типа, не превосходящего τ . Возьмем наибольшее замкнутое в топологии $\mathfrak{D}_A$ подпространство, содержащееся в $\mathfrak{E}_A(\tau)$, и обозначим его через $\mathfrak{E}_\tau$. Множество $\mathfrak{E}_\tau$, наделенное топологией, определяемой полунормами $q_k(\cdot)$, также является пространством Фреше. Обозначим $A_\tau = A|_{\mathfrak{E}_\tau}$. В работе [17; гл. 7, § 3] показано, что $\sigma(A_\tau) \subset \sigma(A) \cap B_\tau(0)$ и

$$\exists C > 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0 \exists \beta_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \mathfrak{E}_\tau \quad q_\beta(A^k u) \leq C^k q_{\beta_0}(u).$$

Пусть $L = P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, $M = Q(A) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k A^k$, где $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ – целые функции. Из сказанного выше сразу следует, что $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{E}_\tau)$.

Рассмотрим индуктивную шкалу локально выпуклых линейных топологических пространств $\{\mathfrak{E}_\tau : \tau \in \mathbb{N}\}$ и ее индуктивный предел $\mathfrak{E}_\infty$, который является внутренним и даже строгим [18; гл. I, дополнение]. Пространство $\mathfrak{E}_\infty = \bigcup_{\tau \in \mathbb{N}} \mathfrak{E}_\tau \subset \mathfrak{D}_A$ имеет отделимую локально выпуклую топологию, определяемую полунормами $q_{k,\tau}(u) = \sum_{l=0}^k \|A_\tau^l u\|_{\mathfrak{D}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{N}$. Из предложения 4.1 [18; гл. I, дополнение] сразу следует

ЛЕММА 9.1. *Операторы $P(A), Q(A) \in \mathcal{L}(\mathfrak{E}_\infty)$.*

Обозначим $\mathcal{P}_0 = \{\lambda \in \mathbb{R} : P(\lambda) = 0\}$.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть $\mathfrak{V}$ – гильбертово пространство, A – самосопряженный оператор, $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\infty$, целые функции $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ не имеют общих нулей на множестве $\sigma(A)$. Кроме того, пусть выполняются следующие условия:*

$$\text{dist}(\sigma(A) \setminus \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_0) > 0, \quad (9.1)$$

$$\exists b \in \mathbb{R}, \quad \exists \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{Q}{P}[\sigma(A) \setminus \mathcal{P}_0] \subset \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - b)| \in \left[\frac{\pi}{2} + \psi, \pi\right] \right\}. \quad (9.2)$$

Тогда оператор $Q(A)$ сильно $(P(A), 0)$ -секториален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в определении $(L, 0)$ -секториального оператора $a = b$, $\theta = \pi/2 + \psi/2$, при этом получим неравенство

$$\left| \mu - \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} \right| \geq |\mu - a| \sin \frac{\psi}{2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{P}_0, \quad \forall \mu \in S_{a,\theta}^L(M).$$

Через $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ обозначим спектральное семейство самосопряженного оператора A , а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{V}$. Для $\beta \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{N}$, $\mu \in S_{a,\theta}^L(M)$ имеем

$$\begin{aligned} q_{\beta,\tau}(R_\mu^L(M)u) &= \sum_{\gamma=0}^{\beta} \left\| \int_{\sigma(A_\tau) \setminus \mathcal{P}_0} \frac{\lambda^\gamma dE_\lambda u}{\mu - Q(\lambda)/P(\lambda)} \right\|_{\mathfrak{D}} \\ &\leq \frac{\sin^{-1}(\psi/2)}{|\mu - a|} \sum_{\gamma=0}^{\beta} \sqrt{\int_{\sigma(A_\tau) \setminus \mathcal{P}_0} \lambda^{2\gamma} d\langle E_\lambda u, u \rangle} \leq \frac{\sin^{-1}(\psi/2)}{|\mu - a|} q_{\beta,\tau}(u). \end{aligned}$$

Далее, заметим, что в силу условий теоремы и непрерывности функции $P(\lambda)$

$$\exists c > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \mathcal{P}_0 \quad |P(\lambda)| \geq c.$$

Тогда для $f \in \mathfrak{E}_\infty$

$$\begin{aligned} & q_{\beta, \tau} (M(\nu L - M)^{-1} L_\mu^L(M) f) \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\beta} \left\| \int_{\sigma(A_\tau) \setminus \mathcal{P}_0} \frac{\lambda^\gamma Q(\lambda) dE_\lambda f}{P(\lambda)(\mu - Q(\lambda)/P(\lambda))(\nu - Q(\lambda)/P(\lambda))} \right\|_{\mathfrak{H}} \\ &\leq \frac{c^{-1} \sin^{-2}(\psi/2)}{|\mu - a| |\nu - a|} \sum_{\gamma=0}^{\beta} \sqrt{\int_{\sigma(A_\tau)} \lambda^{2\gamma} |Q(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda f, f \rangle} \\ &= \frac{c^{-1} \sin^{-2}(\psi/2)}{|\mu - a| |\nu - a|} q_{\beta, \tau}(Mf). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален слева с константой $c_2(f) = c^{-1} \sin^{-2}(\psi/2) \cdot q_{\beta, \tau}(Mf)$ (см. определение 5.1). И, наконец,

$$\begin{aligned} & q_{\beta, \tau} (R_\mu^L(M)(\nu L - M)^{-1} f) \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\beta} \left\| \int_{\sigma(A_\tau) \setminus \mathcal{P}_0} \frac{\lambda^\gamma dE_\lambda f}{P(\lambda)(\mu - Q(\lambda)/P(\lambda))(\nu - Q(\lambda)/P(\lambda))} \right\|_{\mathfrak{H}} \\ &\leq \frac{c^{-1} \sin^{-2}(\psi/2)}{|\mu - a| |\nu - a|} \sum_{\gamma=0}^{\beta} \sqrt{\int_{\sigma(A_\tau)} \lambda^{2\gamma} d\langle E_\lambda f, f \rangle} = \frac{c^{-1} \sin^{-2}(\psi/2)}{|\mu - a| |\nu - a|} q_{\beta, \tau}(f). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Условие (9.1) означает, что множества $\sigma(A)$ и $\mathcal{P}_0$ пересекаются только в точках, являющихся изолированными собственными значениями оператора A .

Таким образом, в условиях теоремы 9.1 в пространстве $\mathfrak{E}_\infty$ существует сильно голоморфная в секторе полугруппа, разрешающая уравнение $P(A)\dot{u}(t) = Q(A)u(t)$ и имеющая вид

$$U(\tau)u_0 = \int_{\sigma(A) \setminus \mathcal{P}_0} \exp\left(\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\tau\right) dE_\lambda u_0, \quad \tau \in \Sigma_\theta, \quad u_0 \in \mathfrak{E}_\infty. \quad (9.3)$$

Ее ядро есть образ проектора $P = \int_{\mathcal{P}_0} dE_\lambda$, а фазовое пространство задачи Коши для уравнения – образ проектора $I - P$. Из теорем 8.1 и 9.1 сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть в условиях теоремы 9.1 вектор-функция $f: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathfrak{E}_\infty$ такова, что

$$\int_{\sigma(A) \cap \mathcal{P}_0} dE_\lambda f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathfrak{E}_\infty) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{E}_\infty),$$

$g(t) = \int_{\sigma(A) \setminus \mathcal{P}_0} dE_\lambda f(t)$ удовлетворяет условиям леммы 8.1,

$$u_0 \in \left\{ u \in \mathfrak{E}_\infty : \int_{\sigma(A) \cap \mathcal{P}_0} Q(\lambda) dE_\lambda u = - \int_{\sigma(A) \cap \mathcal{P}_0} dE_\lambda f(0) \right\}.$$

Тогда существует единственное решение $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathfrak{E}_\infty) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathfrak{E}_\infty)$ ос-
лабленной задачи Коши

$$u(0) = u_0, \quad P(A)\dot{u}(t) = Q(A)u(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

имеющее вид

$$\begin{aligned} u(t) = & - \int_{\sigma(A) \cap \mathcal{D}_0} \frac{dE_\lambda f(t)}{Q(\lambda)} + \int_{\sigma(A) \setminus \mathcal{D}_0} \exp\left(\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}t\right) dE_\lambda u_0 \\ & + \int_0^t \int_{\sigma(A) \setminus \mathcal{D}_0} \exp\left(\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}(t-s)\right) \frac{dE_\lambda f(s)}{P(\lambda)} ds. \end{aligned}$$

Полученный результат используем при исследовании периодической задачи Ко-
ши для уравнения в частных производных со смещением по пространственной пе-
ременной. Для этого рассмотрим в пространстве $L_2(0, 1)$ самосопряженный опе-
ратор

$$A = i \frac{d}{dx}, \quad \text{dom } A = \{v \in L_2(0, 1) : Av \in L_2(0, 1), v(0) = v(1)\}. \quad (9.4)$$

Его спектр состоит из собственных значений $\lambda_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которым соответ-
ствуют собственные функции $\varphi_k(x) = e^{-2\pi k i x}$. Возьмем индуктивный предел $\mathfrak{E}_\infty$
шкалы $\{\mathfrak{E}_\tau : \tau \in \mathbb{N}\}$, построенной по данному оператору $A \in \text{Cl}(L_2(0, 1))$. Поло-
жим $L = P(A)$, $M = R(A)e^{-ihA}$, где $P(\lambda)$, $R(\lambda)$ – целые функции, $h \in \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\infty$, $h \in \mathbb{R}$, целые функции $P(\lambda)$, $R(\lambda)$ не
имеют общих нулей в точках $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и, кроме того,

$$\begin{aligned} \exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \frac{R}{P}(2\pi k)e^{-2\pi k i h} \subset \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| \in \left[\frac{\pi}{2} + \psi, \pi\right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Тогда оператор $R(A)e^{-ihA}$ сильно $(P(A), 0)$ -секториален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно в теореме 9.1 взять оператор A вида (9.4),
 $Q(\lambda) = R(\lambda)e^{-ih\lambda}$. Условие (9.1) выполняется в силу отсутствия у спектра $\sigma(A)$
конечных предельных точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Условие (9.5) выполняется, например, если $R(\lambda)$ – многочлен
степени, не превосходящей степени многочлена $P(\lambda)$.

В условиях следствия 9.2 полугруппа операторов (9.3) имеет вид

$$U(\tau)u_0 = \sum_{P(2\pi k) \neq 0} \exp\left(\frac{\tau e^{-2\pi k i h} R(2\pi k)}{P(2\pi k)}\right) \int_0^1 u_0(y) e^{2\pi k i(y-x)} dy,$$

а ядром полугруппы является подпространство $\mathfrak{U}^0 = \overline{\text{span}}\{e^{-2\pi k i x} : P(2\pi k) = 0\}$.
Заметим, что это подпространство может быть бесконечномерным.

В следующей формулировке использованы обозначения $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \lambda^k$,
 $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_k \lambda^k$, $c_k = i^k \tilde{c}_k$, $d_k = i^k \tilde{d}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\langle u(y), v(y) \rangle = \int_0^1 u(y) \overline{v(y)} dy$.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть в условиях следствия 9.2 $f(x, t) = f(x+1, t)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{P(2\pi k)=0} \langle f(y, t), e^{-2\pi kiy} \rangle e^{-2\pi kix} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathfrak{E}_\infty) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{E}_\infty),$$

вектор-функция

$$g(t) = \sum_{P(2\pi k) \neq 0} \langle f(y, t), e^{-2\pi kiy} \rangle e^{-2\pi kix} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{E}_\infty$$

удовлетворяет условиям леммы 8.1,

$$u_0 \in \{u \in \mathfrak{E}_\infty : R(2\pi k)e^{-2\pi kih} \langle u(y), e^{-2\pi kiy} \rangle = -\langle f(y, 0), e^{-2\pi kiy} \rangle, \\ P(2\pi k) = 0\}.$$

Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, существует единственное решение задачи

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{\partial^{l+1}}{\partial x^l \partial t} u(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x+h, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}_+,$$

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} u(0, t) = \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(1, t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (9.6)$$

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in (a, b), \quad (9.7)$$

где $\tilde{u}_0(x)$ – периодическое с периодом 1 продолжение на интервал (a, b) функции $u_0(x)$ с отрезка $[0, 1]$. При этом решение имеет вид

$$u(x, t) = - \sum_{P(2\pi k)=0} \frac{e^{2\pi kih}}{R(2\pi k)} \langle f(y, t), e^{-2\pi kiy} \rangle e^{-2\pi kix} + U(t)u_0 \\ + \int_0^t \sum_{P(2\pi k) \neq 0} \exp\left(\frac{(t-s)e^{-2\pi kih} R(2\pi k)}{P(2\pi k)}\right) \frac{\langle f(y, s), e^{-2\pi kiy} \rangle e^{-2\pi kix}}{P(2\pi k)} ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решим задачу (9.6), (9.7) для уравнения

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = R\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(-ih i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + f(x, t)$$

на множестве $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$. Она будет иметь решение указанного в теореме вида в силу следствия 9.2 и следствия 9.1, в котором надо взять оператор A вида (9.4) и $Q(\lambda) = R(\lambda)e^{-ih\lambda}$. Правая часть последнего уравнения имеет вид

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{\partial^l}{\partial x^l} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x^s} u(x, t) + f(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x+h, t) + f(x, t).$$

Осталось полученное решение периодически продолжить по x на (a, b) в силу условия (9.6).

Список литературы

1. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
3. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангелент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
4. Костин В. А. К теореме Соломыка–Иосиды об аналитических полугруппах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 1. С. 25–42.
5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
6. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
7. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York: Marcel Dekker Inc., 1999.
8. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
9. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
10. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 3. С. 604–616.
11. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука 1965.
12. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 3. С. 173–200.
13. Зорич В. А. Математический анализ. II. М.: Наука, 1984.
14. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
15. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
16. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
17. Радыно Я. В. Линейные уравнения и борнология. Минск: Изд-во БГУ, 1982.
18. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. М.: Физматлит, 1994.

Челябинский государственный университет
E-mail: kar@csu.ru

Поступила в редакцию
25.07.2003 и 30.01.2004