Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Попова, Закон нуля или единицы для случайных подграфов некоторых дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 3, 153–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:19:49

УДК 519.179.4

С. Н. Попова

Закон нуля или единицы для случайных подграфов некоторых дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$

Изучается закон нуля или единицы для модели случайных дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$. Даются достаточные условия для того, чтобы последовательность случайных дистанционных графов подчинялась закону нуля или единицы, а также условия, при которых можно выбрать подпоследовательность, подчиняющуюся закону нуля или единицы.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: случайные графы, закон нуля или единицы, дистанционные графы.

DOI: 10.4213/sm8411

§ 1. Введение

Законы нуля или единицы для случайных графов были впервые исследованы Ю. В. Глебским, Д. И. Коганом, М. И. Лиогоньким и В. А. Талановым в [1]. В работе [1], а также во многих последующих статьях на эту тему рассматривалась модель случайного графа Эрдёша–Реньи.

В работах М. Е. Жуковского [2]–[6] были изучены законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов, вершины которых являются векторами из $\{0, 1\}^n$ с одинаковыми количествами нулевых и единичных координат. Оказалось (см. [2]), что закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов не выполнен. Однако в [5] были найдены последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющиеся закону нуля или единицы. Кроме того, в статье [6] были исследованы законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной. Затем в [7] нами была рассмотрена более общая модель – случайные дистанционные графы с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, зависящие от некоторого набора параметров.

Целью настоящей работы является изучение законов нуля или единицы для модели случайных дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$, являющейся естественным обобщением моделей, рассмотренных в [2]–[7]. Отметим, что изучение такого рода графов мотивировано как задачами комбинаторной геометрии (см. [8]–[15]), так и вопросами теории кодирования (см. [16]).

Работа выполнена в рамках Программы Президента РФ поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант № МК-2184.2014.1).

Дадим определение случайного дистанционного графа с вершинами в $\mathbb{Z}^n$. Пусть M – произвольное конечное множество целых чисел и $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть, кроме того, функции $a_m: \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, $m \in M$, таковы, что при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{m \in M} a_m(n) = n.$$

Пусть также задана функция $c: \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}$. При каждом $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ определим граф $G_n = (V_n, E_n)$ с множеством вершин V_n , состоящим из всех n -мерных векторов, которые имеют по $a_m(n)$ координат, равных m , для каждого $m \in M$:

$$V_n = \{\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) : v^i \in M, i = 1, \dots, n, \\ \forall m \in M \ |\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = m\}| = a_m(n)\}, \quad (1.1)$$

и множеством ребер

$$E_n = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n \times V_n : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(n)\}, \quad (1.2)$$

где $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – евклидово скалярное произведение. Таким образом, дистанционный граф G_n однозначно задается параметрами $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$.

Пусть $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. Случайным дистанционным графом с вершинами в $\mathbb{Z}^n$, $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, называется случайный элемент $\mathcal{G}(G_n, p)$ со значениями в множестве Ω_{G_n} и распределением $P_{G_n, p}$ на $\mathcal{F}_{G_n}$, где

$$\Omega_{G_n} = \{G = (V, E) : V = V_n, E \subseteq E_n\}, \\ \mathcal{F}_{G_n} = 2^{\Omega_{G_n}}, \quad P_{G_n, p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{|E_n| - |E|}.$$

Опишем частные случаи данной модели случайных дистанционных графов, которые изучались в предшествующих работах. Пусть $M = \{0, 1\}$. Положим

$$a_0(n) = \frac{n}{2}, \quad a_1(n) = \frac{n}{2}, \quad c(n) = \frac{n}{4}.$$

Получим случайные дистанционные графы, рассмотренные в [2]–[6]. Если положить $M = \{-1, 0, 1\}$, а в качестве параметров $a_{-1}(n)$, $a_0(n)$, $a_1(n)$ и $c(n)$ рассматривать произвольные функции от n , то получится модель случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, рассмотренная в [7].

Для того чтобы определить закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов, нам понадобится определение свойств графов первого порядка. Свойства графов первого порядка задаются формулами первого порядка, которые строятся с помощью символов отношения $\sim$, $=$, логических связок $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, переменных $x, y, \dots$, кванторов $\forall$, $\exists$. Символ отношения $\sim$ выражает свойство двух вершин быть соединенными ребром, символ отношения $=$ выражает свойство двух вершин быть совпадающими. Более подробное описание построения формул первого порядка дано в [17].

Последовательность случайных дистанционных графов $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется *закону нуля или единицы*, если для любого свойства L первого порядка выполнено

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{G_{n_i}, p}(G \models L) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P_{G_{n_i}, p}(G \models L) = 1,$$

где через $G \models L$ обозначено событие “граф G обладает свойством L ”, т.е. множество всех графов, обладающих свойством L .

§ 2. Методы доказательств законов нуля или единицы

Доказательство законов нуля или единицы для последовательностей случайных графов основывается на теореме Эренфойхта, связывающей справедливость этих законов с существованием выигрышной стратегии второго игрока в игре Эренфойхта (см. [18], [19]). В этой игре $EHR(G, H, t)$ на графах G и H с фиксированным числом раундов t участвуют два игрока – Новатор и Консерватор. Каждый раунд состоит из двух частей. В j -м раунде сначала Новатор выбирает вершину $x_j \in V(G)$ или же $y_j \in V(H)$. Затем Консерватор выбирает вершину в другом графе. Если Новатор выбирает, скажем, вершину $x_j \in V(G)$, совпадающую с некоторой вершиной x_i , выбранной ранее в i -м раунде ($i < j$), то Консерватор должен выбрать вершину $y_i \in V(H)$. К концу t -го раунда выбрано по t вершин из каждого графа. Пусть $x_1, \dots, x_t$ – вершины, выбранные из $V(G)$, $y_1, \dots, y_t$ – вершины, выбранные из $V(H)$, где x_i и y_i – вершины, выбранные в i -м раунде. Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда индуцированные подграфы на выбранных вершинах являются изоморфными, т.е. при всех $1 \leq i < j \leq t$ имеем $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $\{y_i, y_j\} \in E(H)$.

Из теоремы Эренфойхта (см. [18], [19]) следует, что последовательность случайных графов $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} P_{G_{n_i}, p} \times P_{G_{n_j}, p}(\text{Консерватор выигрывает в } EHR(\mathcal{G}(G_{n_i}, p), \mathcal{G}(G_{n_j}, p), t)) = 1,$$

где $P_{G_{n_i}, p} \times P_{G_{n_j}, p}$ – прямое произведение вероятностных мер.

В [1] для доказательства закона нуля или единицы для случайного графа Эрдёша–Реньи, а точнее, для доказательства существования выигрышной стратегии Консерватора, было предложено свойство полного расширения. Это свойство также было использовано при доказательстве законов нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов в работах [2]–[5] и [7].

Граф G обладает свойством *полного расширения уровня t* , если для любых $k, l \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $k + l \leq t$, для любых различных вершин $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l$ существует такая вершина x , что $\{x, u_i\} \in E(G)$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ и $\{x, v_j\} \notin E(G)$ для каждого $j \in \{1, \dots, l\}$.

Известно (см. [18]), что если графы G и H обладают свойством полного расширения уровня $t - 1$, то у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, t)$.

При доказательстве того, что случайный дистанционный граф $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1, мы будем использовать следующее свойство последовательностей графов. Скажем, что последовательность графов $\{G_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ обладает свойством L_t , где $t \in \mathbb{N}$, если существуют такие число $\beta > 0$ и функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n|^\beta)$, что для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in V_n$ в графе G_n есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

В настоящей работе даются условия, при которых последовательность случайных графов $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы, а также условия, при которых можно выделить подпоследовательность, подчиняющуюся этому закону. При доказательстве результатов используется свойство полного расширения случайных дистанционных графов. Основные результаты приводятся в § 3. В § 4 сформулированы вспомогательные утверждения. Доказательства теорем и вспомогательных утверждений содержат § 5 и § 6.

Стоит отметить, что свойство полного расширения (которое в нашей работе устанавливается для некоторых последовательностей случайных дистанционных графов) представляет отдельный интерес, так как, например, позволяет доказывать невыразимость свойств в терминах языка первого порядка (см., например, [20]). Такие результаты напрямую вытекают из теоремы Эренфойхта. Действительно, пусть L – некоторое свойство графов. Пусть, кроме того, для любого $t \in \mathbb{N}$ заданы два графа, G_t и H_t , которые обладают свойством полного расширения уровня t , причем G_t обладает свойством L , а H_t – нет. Предположим, что L можно записать с помощью формулы первого порядка. Тогда по теореме Эренфойхта для некоторого $k \geq 2$ у Новатора существует выигрышная стратегия в игре $EHR(G_t, H_t, k)$ для любого $t \in \mathbb{N}$ (в частности, для $t = k - 1$), что противоречит свойству полного расширения уровня $k - 1$ графов G_{k-1}, H_{k-1} .

§ 3. Основные результаты

Основные результаты настоящей работы посвящены описанию условий, при которых закон нуля или единицы будет выполняться либо для последовательности случайных дистанционных графов $\mathcal{G}(G_{n_i}, p)$, либо для некоторой ее подпоследовательности $\{\mathcal{G}(G_{n_{i_j}}, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Так как случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$, $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, полностью задается набором параметров $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$, эти условия представляют собой ограничения на функции $a_m(n)$ и $c(n)$.

Введем вспомогательную величину $\Phi(n)$, выражаемую через параметры $a_m(n)$ и используемую далее в формулировках теорем:

$$\Phi(n) = \sum_{m \in M} m a_m(n). \quad (3.1)$$

Заметим, что величина $\Phi(n)$ равна сумме всех координат произвольного вектора, являющегося вершиной дистанционного графа G_n .

Пусть функция $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ такова, что

$$\forall \gamma > 0 \quad \min(p(n), 1 - p(n)) |V_n|^\gamma \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

В следующей теореме даются ограничения на функции $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$, при которых последовательность случайных графов $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tilde{m} \in M$, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено

$$\Phi(n) = \tilde{m} \cdot n, \quad c(n) = \tilde{m}^2 \cdot n$$

и $a_{\tilde{m}}(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

Приведем достаточное условие выполнения закона нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, которое следует из теоремы 1 и было ранее доказано в [7].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $M = \{-1, 0, 1\}$, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено $a_1(n) = a_{-1}(n)$, $c(n) = 0$ и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

Сформулируем условия, при которых можно найти подпоследовательность случайных дистанционных графов, подчиняющуюся закону нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{m} \in M$, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено

$$\Phi(n) = (\tilde{m} + \alpha)n, \quad c(n) = (\tilde{m} + \alpha)^2 n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ – фиксированное число, и $a_{\tilde{m}}(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, подпоследовательность $\{n_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ такова, что для любого $d \in \mathbb{N}$ существует такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что при $j > j_0$ числа n_{i_j} делятся на d . Тогда последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_{i_j}}, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

В качестве следствия из теоремы 2 можно получить следующий результат, доказанный в [7], о существовании подпоследовательности случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, подчиняющейся закону нуля или единицы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $M = \{-1, 0, 1\}$ и последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ составлена из всех чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых число $\alpha^2 n$ является целым, где α – некоторое рациональное число из интервала $(0, 1)$. Пусть, кроме того, при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено $a_1(n) = a_{-1}(n) = \alpha n$, $c(n) = \alpha^2 n$ и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда существует подпоследовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_{i_j}}, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$, подчиняющаяся закону нуля или единицы.

§ 4. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся формулировки предложений, использующихся при доказательствах теорем. В этих предложениях даются достаточные условия для того, чтобы последовательность дистанционных графов обладала свойством L_t .

Следующее предложение применяется для доказательства теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено

$$\Phi(n) = 0, \quad c(n) = 0,$$

$0 \in M$ и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{G_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ обладает свойством L_t при каждом $t \in \mathbb{N}$.

Перед формулировкой следующего предложения введем несколько обозначений. Обозначим множество всех матриц, элементы которых принадлежат множеству M , размера $l \times h$ и ранга l через $\mathcal{M}_{l \times h}$. Пусть Δ_l – максимальный среди определителей всех матриц из $\mathcal{M}_{l \times l}$, D_l – наименьшее натуральное число, делящееся на все натуральные числа, не превосходящие Δ_l :

$$D_l = \text{НОК}(\Delta_l, \Delta_l - 1, \dots, 1). \quad (4.1)$$

Введем множество

$$M_+ = \{m \in M : m > 0\} \quad (4.2)$$

и обозначим через η наименьшее натуральное число, делящееся на все числа из множества M_+ :

$$\eta = \text{НОК}\{m : m \in M_+\}. \quad (4.3)$$

Следующее предложение применяется для доказательства теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ выполнено

$$\Phi(n) = \alpha n, \quad c(n) = \alpha^2 n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ – фиксированное число, $0 \in M$ и $a_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть $t \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{G_{n_{i_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ такова, что числа $\Phi(n_{i_j})$ и $c(n_{i_j})$ делятся на $\eta \cdot D_{t+1}$ при достаточно больших $j \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{G_{n_{i_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ обладает свойством L_t .

§ 5. Доказательства теорем

5.1. Доказательство теоремы 1. Сначала покажем, что при любых значениях параметров $a_m(n)$, $m \in M$, и $c(n)$ и при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ граф G_n изоморфен графу $\tilde{G}_n$, задаваемому с помощью (1.1) и (1.2) параметрами

$$\tilde{a}_l(n) = a_{l+\mu}(n), \quad l \in M - \mu, \quad \tilde{c}(n) = c(n) - 2\mu\Phi(n) + \mu^2 n,$$

где $M - \mu = \{m - \mu : m \in M\}$. Определим отображение $\varphi: V(G_n) \rightarrow V(\tilde{G}_n)$ следующим образом:

$$\varphi((v^1, \dots, v^n)) = (v^1 - \mu, \dots, v^n - \mu).$$

Тогда имеем скалярное произведение

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - 2\mu \sum_{i=1}^n v^i + \mu^2 n = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - 2\mu\Phi(n) + \mu^2 n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in E(G_n) &\iff (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c \iff (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \tilde{c} \\ &\iff \{\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})\} \in E(\tilde{G}_n). \end{aligned}$$

Следовательно, φ – изоморфизм графов G_n и $\tilde{G}_n$.

Перейдем теперь к рассмотрению графа G_n с параметрами, удовлетворяющими условиям $\Phi(n) = \tilde{m} \cdot n$, $c(n) = \tilde{m}^2 \cdot n$ при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $a_{\tilde{m}}(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Выбрав в качестве μ число $\tilde{m}$, получим, что такой граф G_n изоморфен графу $\tilde{G}_n$, для которого $\tilde{\Phi}(n) = 0$, $\tilde{c}(n) = 0$ при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{a}_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Докажем, что для каждого $t \in \mathbb{N}$ случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$, $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1. Пусть E_t – событие, заключающееся в том, что случайный граф $\mathcal{G}(G_n, p)$, $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, не обладает свойством полного расширения уровня t . Для различных вершин $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n$ введем событие $F_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l}$, состоящее в том, что в случайном графе $\mathcal{G}(G_n, p)$ не найдется вершины, соединенной ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ и не соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$. Заметим, что

$$E_t = \bigcup_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}_+ \\ k+l \leq t}} \bigcup_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n} F_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l}.$$

Из предложения 1 следует, что существуют такие число $\beta = \beta(t) > 0$ и функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n|^\beta)$, что для любых вершин $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in V_n$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $k + l \leq t$, в графе G_n есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$. Тогда

$$P_{G_n, p}(F_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l}) \leq (1 - \varepsilon(n)^t)^{\Omega(|V_n|^\beta)},$$

где $\varepsilon(n) = \min(p(n), 1 - p(n))$. Поэтому

$$P_{G_n, p}(E_t) \leq t^2 |V_{n_i}|^t (1 - \varepsilon(n_i)^t)^{\Omega(|V_{n_i}|^\beta)} \leq t^2 |V_{n_i}|^t \exp(-\varepsilon(n_i)^t \Omega(|V_{n_i}|^\beta)).$$

Последнее выражение стремится к 0 при $i \rightarrow \infty$ в силу условия (3.2) на функцию $p(n)$. Следовательно, случайный граф $\mathcal{G}(G_{n_i}, p)$ с вероятностью, стремящейся к единице, обладает свойством полного расширения уровня t , и поэтому последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_i}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

5.2. Доказательство теоремы 2. Пусть $\{n_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ – подпоследовательность, удовлетворяющая условию теоремы. Учитывая, что граф G_n изоморфен графу $\tilde{G}_n$, для которого $\tilde{\Phi}(n) = \alpha n$, $\tilde{c}(n) = \alpha^2 n$ при всех $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{a}_0(n_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, и применяя предложение 2, получаем, что существуют такие число $\beta = \beta(t) > 0$ и функция $\varphi(n, t) = \Omega(|V_n|^\beta)$, что при всех $n \in \{n_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in V_n$ в графе G_n есть не менее $\varphi(n, t)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$. Оценивая вероятность отсутствия свойства полного расширения уровня t таким же образом, как и в доказательстве теоремы 1, заключаем, что последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_{i_j}}, p)\}_{j \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

§ 6. Доказательства предложений

6.1. Предварительные обозначения. Обозначим через Λ максимум модулей элементов множества M :

$$\Lambda = \max_{m \in M} |m|. \quad (6.1)$$

Рассмотрим произвольные вершины $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \in V_n$. Они определяют разбиение $\{1, \dots, n\}$ на $|M|^t$ блоков

$$B_{w_1, \dots, w_t} = \{i \in \{1, \dots, n\} : v_1^i = w_1, \dots, v_t^i = w_t\},$$

где $w_1, \dots, w_t \in M$, а v_j^i – i -я координата вектора $\mathbf{v}_j$.

Обозначим $W = M^t$, $\tau = |W| = |M|^t$, и при каждом $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_t) \in W$ положим $k_{\mathbf{w}}$ равным размеру блока $B_{w_1, \dots, w_t}$:

$$k_{\mathbf{w}} = |B_{w_1, \dots, w_t}|.$$

Для вершины $\mathbf{v} \in V_n$ обозначим при всех $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$ через $x_{m, \mathbf{w}}$ количество координат этой вершины, равных m , в блоке $B_{w_1, \dots, w_t}$:

$$x_{m, \mathbf{w}} = x_{m, \mathbf{w}}(\mathbf{v}) = |\{i \in B_{w_1, \dots, w_t} : v^i = m\}|,$$

где v^i – i -я координата вектора $\mathbf{v}$. Тогда для любой вершины $\mathbf{v} \in V_n$ выполнено

$$\forall m \in M \quad \sum_{\mathbf{w} \in W} x_{m, \mathbf{w}} = a_m, \quad (6.2)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad \sum_{m \in M} x_{m, \mathbf{w}} = k_{\mathbf{w}}. \quad (6.3)$$

Вершина $\mathbf{v}$ соединена ребром с вершиной $\mathbf{v}_j$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\mathbf{w} \in W} \left(\sum_{m \in M} m x_{m, \mathbf{w}} \right) w_j = c. \quad (6.4)$$

Поэтому для нахождения вершины $\mathbf{v}$, соединенной ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$, необходимо и достаточно найти числа $x_{m, \mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, для которых выполнено (6.2), (6.3) и (6.4) для любого $j \in \{1, \dots, t\}$.

Обозначив

$$y_{\mathbf{w}} = y_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \sum_{m \in M} m x_{m, \mathbf{w}},$$

запишем условие (6.4) в виде

$$\sum_{\mathbf{w} \in W} y_{\mathbf{w}} w_j = c. \quad (6.5)$$

Из (3.1) и (6.2) следует, что

$$\sum_{\mathbf{w} \in W} y_{\mathbf{w}} = \Phi. \quad (6.6)$$

Запишем равенства (6.5) и (6.6) в матричном виде. Пусть A_0 – матрица размера $t \times \tau$, столбцами которой являются всевозможные наборы длины t с элементами из множества M (взятые по одному разу). Допишем к этой матрице снизу строку $(1, 1, \dots, 1)$. Полученную матрицу размера $(t+1) \times \tau$ обозначим $A = (a_{i, \mathbf{w}})$; $a_{i, \mathbf{w}} = w_i$ при $1 \leq i \leq t$, $a_{t+1, \mathbf{w}} = 1$, где $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_t) \in W$. Обозначим через $\mathbf{y} = (y_{\mathbf{w}})$ вектор, составленный из элементов $y_{\mathbf{w}}$, взятых в том же порядке, что и столбцы матрицы A . Условия (6.5) и (6.6) эквивалентны системе линейных уравнений на вектор $\mathbf{y}$

$$A\mathbf{y} = (c, \dots, c, \Phi)^T. \quad (6.7)$$

Доказательства предложений 1 и 2 будут проходить следующим образом: сначала находим вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^{\tau}$, являющийся решением (6.7) и удовлетворяющий некоторым дополнительным ограничениям, а затем, используя вектор $\mathbf{y}$, определяем числа $x_{m, \mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяющие (6.2), (6.3) и (6.4) для любого $j \in \{1, \dots, t\}$, и доказываем, что этим числам $x_{m, \mathbf{w}}$ соответствует $\Omega(|V_n|^\beta)$ вершин графа G_n для некоторого $\beta > 0$.

При построении чисел $x_{m, \mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, будем использовать упорядочение множества W по убыванию чисел $k_{\mathbf{w}}$:

$$W = \{\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(\tau)}\}, \quad k_{\mathbf{w}^{(1)}} \geq k_{\mathbf{w}^{(2)}} \geq \dots \geq k_{\mathbf{w}^{(\tau)}}.$$

6.2. Доказательство предложения 1. Пусть $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Из условий $\Phi = 0$, $c = 0$ следует, что вектор $\mathbf{y} = 0$ является решением системы (6.7). Построим числа $x_{m, \mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, которым соответствует вектор $\mathbf{y} = 0$, т.е. такие числа, для которых выполнены условия (6.2), (6.3) и

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad \sum_{m \in M} m x_{m, \mathbf{w}} = 0. \quad (6.8)$$

Учитывая, что множество W упорядочено, для нахождения чисел $x_{m, \mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, будем использовать индукцию по $i = 1, \dots, \tau$, определяя сначала $x_{m, \mathbf{w}^{(1)}}$, затем $x_{m, \mathbf{w}^{(2)}}$ и т.д. При каждом $i = 1, \dots, \tau$ применим следующий алгоритм для определения чисел $x_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$, $m \in M$.

Вначале положим $x_{m, \mathbf{w}^{(i)}} = 0$ для всех $m \in M$. Затем выполним несколько шагов, на каждом из которых будем увеличивать значения $x_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ до тех пор,

пока не станет выполнено (6.3). Каждый шаг состоит из следующих действий. При каждом $m \in M$ определим

$$r_m = a_m - \sum_{j=1}^i x_{m, \mathbf{w}^{(j)}}$$

и выберем число μ из $M \setminus \{0\}$ с максимальным значением r_μ . Определим также

$$\hat{k} = k_{\mathbf{w}^{(i)}} - \sum_{m \in M} x_{m, \mathbf{w}^{(i)}}.$$

Далее разберем три случая в зависимости от величин r_μ и $\hat{k}$.

- 1) Если $r_\mu \geq \Lambda^2|M|$ и $\hat{k} \geq 2\Lambda^2|M|^2$, где число Λ определено в (6.1), то действуем следующим образом. Выберем число $\nu \in M$ со знаком, противоположным знаку числа μ , для которого значение r_ν максимальное среди всех чисел из M с этим противоположным знаком. Пусть K – максимальное целое число, для которого

$$K|\mu| \leq r_\nu, \quad K|\nu| \leq r_\mu, \quad K(|\mu| + |\nu|) \leq \hat{k}. \quad (6.9)$$

Увеличим значение $x_{\mu, \mathbf{w}^{(i)}}$ на $K|\nu|$ и значение $x_{\nu, \mathbf{w}^{(i)}}$ на $K|\mu|$ и перейдем к следующему шагу алгоритма.

- 2) Если $0 < r_\mu < \Lambda^2|M|$ и $\hat{k} \geq 2\Lambda^2|M|^2$, то при каждом $m \in M \setminus \{0\}$ увеличим значение $x_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ на r_m и перейдем к следующему шагу алгоритма.
- 3) Если $r_\mu = 0$ или $\hat{k} < 2\Lambda^2|M|^2$, то положим $x_{0, \mathbf{w}^{(i)}} = \hat{k}$ и завершим выполнение алгоритма.

Докажем, что построенные числа $x_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ удовлетворяют условиям (6.2), (6.3) и (6.8).

Сначала покажем, что на каждом шаге алгоритма будут соблюдены условия (6.8) и

$$\hat{k} \geq 0, \quad \forall m \in M \setminus \{0\} \quad r_m \geq 0. \quad (6.10)$$

Очевидно, что эти условия выполнены в начале алгоритма. Докажем, что если эти условия были соблюдены перед выполнением какого-либо шага алгоритма, то они будут соблюдены и после выполнения этого шага. Заметим, что, так как перед выполнением шага было справедливо (6.8) и $\sum_{m \in M} m a_m = 0$, то $\sum_{m \in M} m r_m = 0$. Рассмотрим каждый из трех случаев, возможных при выполнении шага.

- 1) После увеличения значения $x_{\mu, \mathbf{w}^{(i)}}$ на $K|\nu|$ и значения $x_{\nu, \mathbf{w}^{(i)}}$ на $K|\mu|$ равенство (6.8) сохранится, так как $\mu \cdot K|\nu| + \nu \cdot K|\mu| = 0$. Неравенства (6.10) будут выполнены в силу определения (6.9) числа K и того, что $\hat{k}$ уменьшится на $K(|\mu| + |\nu|)$, r_ν уменьшится на $K|\mu|$, r_μ уменьшится на $K|\nu|$, а значения r_m при $m \in M \setminus \{\nu, \mu\}$ не изменятся.
- 2) Из условий $r_\mu < \Lambda^2|M|$ и $\hat{k} \geq 2\Lambda^2|M|^2$ следует, что $\sum_{m \in M \setminus \{0\}} r_m \leq r_\mu|M| \leq \hat{k}$. Поэтому после увеличения $x_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ на r_m при всех $m \in M \setminus \{0\}$ значение $\hat{k}$ будет неотрицательным. Следовательно, условие (6.10) будет соблюдено. Равенство (6.8) будет выполнено, так как $\sum_{m \in M} m r_m = 0$.

- 3) Очевидно, что после того, как мы положим $x_{0,\mathbf{w}^{(i)}} = \hat{k}$, условия (6.8) и (6.10) будут соблюдены.

Докажем теперь, что алгоритм завершится, т.е. после выполнения некоторого количества шагов мы обязательно придем к значениям r_μ и $\hat{k}$, для которых выполняются условия случая 3), и закончим работу алгоритма. Для этого достаточно показать, что на каждом шаге, на котором имел место один из случаев 1) и 2), уменьшается значение $\hat{k}$.

В случае 1) для доказательства того, что значение $\hat{k}$ уменьшится, необходимо и достаточно показать, что $K \geq 1$. По определению (6.9) числа K

$$K \geq 1 \iff (r_\nu \geq |\mu|) \wedge (r_\mu \geq |\nu|) \wedge (\hat{k} \geq |\mu| + |\nu|).$$

Для чисел r_μ и $\hat{k}$ верны нижние оценки

$$r_\mu \geq \Lambda^2 |M| \geq |\nu|, \quad \hat{k} \geq 2\Lambda^2 |M|^2 \geq |\mu| + |\nu|.$$

Оценим снизу r_ν . Из определения числа ν и того, что $\sum_{m \in M} mr_m = 0$, следует, что $|\nu r_\nu| \geq |\mu r_\mu|/|M|$. Поэтому

$$r_\nu \geq \frac{r_\mu}{\Lambda |M|} \geq \Lambda \geq |\mu|.$$

Следовательно, $K \geq 1$.

В случае 2) значение $\hat{k}$ уменьшится в силу того, что $r_\mu > 0$.

Итак, мы доказали, что алгоритм всегда завершается, причем на последнем его шаге имеет место случай 3).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству того, что числа $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяют (6.2), (6.3) и (6.8) при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Равенство (6.8) верно, потому что оно соблюдалось на каждом шаге алгоритма. Равенство (6.3) выполнено, так как при каждом $i \in \{1, \dots, \tau\}$ на последнем шаге алгоритма мы полагали $x_{0,\mathbf{w}^{(i)}} = \hat{k}$. Докажем (6.2). Поскольку числа $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяют (6.3), то

$$\sum_{\substack{m \in M \\ \mathbf{w} \in W}} x_{m,\mathbf{w}} = \sum_{\mathbf{w} \in W} k_{\mathbf{w}} = n = \sum_{m \in M} a_m. \quad (6.11)$$

Так как при всех $i \in \{1, \dots, \tau\}$ на каждом шаге алгоритма соблюдалось (6.10), то при всех $m \in M \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $\sum_{\mathbf{w} \in W} x_{m,\mathbf{w}} \leq a_m$. Если при некотором $i \in \{1, \dots, \tau\}$ на каком-то шаге было выполнено $r_\mu = 0$, то $\sum_{\mathbf{w} \in W} x_{m,\mathbf{w}} = a_m$ при всех $m \in M \setminus \{0\}$, откуда следует (6.2) в силу (6.11). Если же при каждом $i \in \{1, \dots, \tau\}$ на всех шагах алгоритма выполнялось $r_\mu > 0$, то из условия, описывающего случай 3), вытекает, что при каждом $i \in \{1, \dots, \tau\}$ справедливо $x_{0,\mathbf{w}^{(i)}} \leq 2\Lambda^2 |M|^2$. Поэтому

$$\sum_{\mathbf{w} \in W} x_{0,\mathbf{w}} \leq |W| \cdot 2\Lambda^2 |M|^2.$$

Так как по условию $a_0(n_j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ выполнено неравенство $\sum_{\mathbf{w} \in W} x_{0,\mathbf{w}} \leq a_0$. Таким образом, при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ имеем

$$\forall m \in M \quad \sum_{\mathbf{w} \in W} x_{m,\mathbf{w}} \leq a_m.$$

Отсюда, учитывая (6.11), заключаем, что выполнено (6.2).

Итак, числа $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяют (6.2), (6.3) и (6.8), а следовательно, они удовлетворяют (6.2)–(6.4), т.е. все вершины графа G_n , соответствующие этим числам, соединены ребрами с каждой из вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$.

Докажем, что количество S вершин графа G_n , соответствующих числам $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, достаточно велико, т.е. существует такое $\beta > 0$, что $S = \Omega(|V_n|^\beta)$. Воспользуемся неравенством

$$S \geq \frac{k_{\mathbf{w}^{(1)}}!}{\prod_{m \in M} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}!}.$$

Так как $\sum_{i=1}^{\tau} k_{\mathbf{w}^{(i)}} = n$, то

$$k_{\mathbf{w}^{(1)}} \geq \frac{n}{\tau} = \Theta(n). \quad (6.12)$$

Рассмотрим два случая в зависимости от значения $n - a_0$.

Случай $n - a_0 \geq n/(2\tau)$. Пусть μ – число из $M \setminus \{0\}$ с максимальным значением a_μ . Докажем, что

$$x_{\mu,\mathbf{w}^{(1)}} = \Theta(n), \quad k_{\mathbf{w}^{(1)}} - x_{\mu,\mathbf{w}^{(1)}} = \Theta(n).$$

Так как $\sum_{m \in M} a_m = n$, то

$$a_\mu \geq \frac{n - a_0}{|M|} = \Theta(n).$$

Из этого неравенства и (6.12) следует, что при достаточно больших n на первом шаге вычисления значений $x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}$, $m \in M$, будет иметь место случай 1). Тогда для числа ν , определяемого как число с максимальным значением a_ν среди всех чисел из M со знаком, противоположным знаку μ , выполнено

$$a_\nu \geq \frac{a_\mu}{\Lambda|M|} \geq \frac{n - a_0}{\Lambda|M|^2} = \Theta(n).$$

Получаем, что для числа K , определенного в (6.9), выполнено $K = \Theta(n)$, так как $a_\mu = \Theta(n)$, $a_\nu = \Theta(n)$ и $k_{\mathbf{w}^{(1)}} = \Theta(n)$. Следовательно,

$$x_{\mu,\mathbf{w}^{(1)}} \geq K = \Theta(n), \quad k_{\mathbf{w}^{(1)}} - x_{\mu,\mathbf{w}^{(1)}} \geq x_{\nu,\mathbf{w}^{(1)}} \geq K = \Theta(n).$$

Поэтому

$$S \geq C_{k_{\mathbf{w}^{(1)}}}^{x_{\mu,\mathbf{w}^{(1)}}} = \Omega(|V_n|^\beta)$$

для некоторого $\beta > 0$.

Случай $n - a_0 < n/(2\tau)$. Покажем, что при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ при всех $m \in M \setminus \{0\}$ выполнено $x_{m, \mathbf{w}^{(1)}} = a_m$. Предположим противное, т.е. что существует $m \in M \setminus \{0\}$, для которого $x_{m, \mathbf{w}^{(1)}} < a_m$. Тогда на последнем шаге алгоритма вычисления значений $x_{m, \mathbf{w}^{(1)}}$, $m \in M$, было выполнено неравенство $r_\mu > 0$ и, следовательно, $\hat{k} < 2\Lambda^2|M|^2$. Поэтому

$$k_{\mathbf{w}^{(1)}} \leq \sum_{m \in M \setminus \{0\}} x_{m, \mathbf{w}^{(1)}} + 2\Lambda^2|M|^2 \leq (n - a_0) + 2\Lambda^2|M|^2 < \frac{n}{2\tau} + 2\Lambda^2|M|^2.$$

При достаточно больших n это неравенство противоречит (6.12). Следовательно, $x_{m, \mathbf{w}^{(1)}} = a_m$ при всех $m \in M \setminus \{0\}$. Тогда

$$S \geq C_{k_{\mathbf{w}^{(1)}}}^{n-a_0} \cdot \frac{(n-a_0)!}{\prod_{m \in M \setminus \{0\}} a_m!} = \Omega(|V_n|^\beta)$$

для некоторого $\beta > 0$, так как $k_{\mathbf{w}^{(1)}}$ удовлетворяет (6.12) и

$$|V_n| = C_n^{n-a_0} \cdot \frac{(n-a_0)!}{\prod_{m \in M \setminus \{0\}} a_m!}.$$

6.3. Доказательство предложения 2. Будем использовать следующую лемму о целочисленных решениях систем линейных уравнений, являющуюся обобщением леммы 1 из [7].

ЛЕММА. Пусть вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^h$ удовлетворяет системе линейных уравнений $A\mathbf{k} = \mathbf{f}$, где $A \in \mathcal{M}_{l \times h}$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_l)^T \in \mathbb{Z}_+^l$. Пусть $\varepsilon > 0$, $\alpha = s/q$ ($s, q \in \mathbb{N}$, $s < q$) – некоторое рациональное число из интервала $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ и все координаты вектора $\mathbf{f}$ делятся на q . Обозначим $\mathbf{g} = \alpha\mathbf{f}$, $N = \text{НОД}(g_1, \dots, g_l)$ – наибольший общий делитель всех координат вектора $\mathbf{g}$. Тогда существуют такие числа $N_0 = N_0(l, h, \varepsilon)$ и $\xi = \xi(N, l, h)$, удовлетворяющие условию $\xi = \Theta(N)$ при $N \rightarrow \infty$, что если $N > N_0$ и N делится на D_l , где D_l определено в (4.1), то у системы $A\mathbf{y} = \mathbf{g}$ найдется целочисленное решение $\mathbf{y}$, удовлетворяющее условиям

$$(\alpha - \varepsilon)k_i \leq y_i \leq (\alpha + \varepsilon)k_i$$

при всех i , для которых $k_i \geq \xi$, и $y_i = 0$ при всех i , для которых $k_i < \xi$.

При нахождении целочисленного решения $\mathbf{y}$ системы (6.7) воспользуемся тем, что вектор $\mathbf{k} = (k_{\mathbf{w}})$, составленный из элементов $k_{\mathbf{w}}$, взятых в том же порядке, что и столбцы матрицы A , удовлетворяет системе линейных уравнений

$$A\mathbf{k} = (\Phi, \dots, \Phi, n)^T. \quad (6.13)$$

Заметим, что из условий $\Phi = \alpha n$ и $c = \alpha^2 n$ следует, что столбцы в правых частях систем (6.7) и (6.13) пропорциональны с коэффициентом α .

Построим вектор $\mathbf{y}$, удовлетворяющий системе (6.7), координаты которого не только являются целыми, но еще и делятся на число η , определенное в (4.3).

Такой вектор $\mathbf{y}$ можно представить в виде $\mathbf{y} = \eta \mathbf{z}$, где вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^\tau$ удовлетворяет системе

$$A\mathbf{z} = \left(\frac{c}{\eta}, \dots, \frac{c}{\eta}, \frac{\Phi}{\eta} \right)^T. \quad (6.14)$$

Учитывая, что правые части (6.13) и (6.14) пропорциональны с коэффициентом α/η , применим приведенную лемму для систем (6.13) и (6.14). Получим, что для любого $\varepsilon \in (0, \min(\alpha, 1 - \alpha))$ при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\eta \cdot D_{t+1} \mid \text{НОД}(\Phi, c)$ система (6.14) имеет целочисленное решение $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^\tau$, для которого

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w} \in W_< \quad z_{\mathbf{w}} &= 0, \\ \forall \mathbf{w} \in W_> \quad \left(\frac{\alpha}{\eta} - \varepsilon \right) k_{\mathbf{w}} &\leq z_{\mathbf{w}} \leq \left(\frac{\alpha}{\eta} + \varepsilon \right) k_{\mathbf{w}}, \end{aligned}$$

где

$$W_< = \{\mathbf{w} \in W : k_{\mathbf{w}} < \xi\}, \quad W_> = \{\mathbf{w} \in W : k_{\mathbf{w}} \geq \xi\}, \quad (6.15)$$

а $\xi = \xi(n, t)$ – некоторое число, удовлетворяющее условию

$$\xi = \Theta(n). \quad (6.16)$$

Полагая $\mathbf{y} = \eta \mathbf{z}$ и выбирая достаточно малое $\varepsilon > 0$, получаем, что при достаточно больших n и $\eta \cdot D_{t+1} \mid \text{НОД}(\Phi, c)$ система (6.7) имеет решение $\mathbf{y} \in \eta \mathbb{Z}_+^\tau$, для которого

$$\forall \mathbf{w} \in W_< \quad y_{\mathbf{w}} = 0, \quad (6.17)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W_> \quad \zeta_1 k_{\mathbf{w}} \leq y_{\mathbf{w}} \leq \zeta_2 k_{\mathbf{w}}, \quad (6.18)$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in (0, 1)$ – некоторые константы, зависящие только от α . Отметим, что из (6.15), (6.16) и (6.18) вытекает, что для ненулевых координат вектора $\mathbf{y}$ верна оценка снизу величиной порядка $\Theta(n)$:

$$\forall \mathbf{w} \in W_> \quad y_{\mathbf{w}} \geq \zeta_1 k_{\mathbf{w}} \geq \zeta_1 \xi = \Theta(n). \quad (6.19)$$

В дальнейшем мы будем использовать то, что для вектора $\mathbf{y}$ выполнено

$$\sum_{\mathbf{w} \in W_>} y_{\mathbf{w}} = \Phi. \quad (6.20)$$

Это равенство следует из (6.17) и того, что вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет (6.7).

Построим числа $x_{m, \mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, которым соответствует вектор $\mathbf{y}$, т.е. такие числа, для которых выполнены условия (6.2), (6.3) и

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad \sum_{m \in M} m x_{m, \mathbf{w}} = y_{\mathbf{w}}. \quad (6.21)$$

При определении чисел $x_{m, \mathbf{w}}$ будем пользоваться тем, что

$$W_> = \{\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(i_0)}\}, \quad \text{где } i_0 = |W_>|.$$

Введем несколько обозначений, которые будут использоваться при задании чисел $x_{m,\mathbf{w}}$. Пусть $H \in \mathbb{N}$ – такое число, что для любого непустого множества $\widetilde{M} \subseteq M_+$ и любого числа $l \in \mathbb{N}$ выполнено следующее. Если

$$l \geq H, \quad \text{НОД}\{m : m \in \widetilde{M}\} \mid l,$$

то l можно представить в виде линейной комбинации чисел из $\widetilde{M}$ с целыми неотрицательными коэффициентами:

$$l = \sum_{m \in \widetilde{M}} \lambda_m \cdot m, \quad \text{где } \lambda_m \in \mathbb{Z}_+.$$

Обозначим

$$R = (H + \Lambda)\tau, \quad \widetilde{M}_+ = \{m \in M_+ : a_m \geq R\},$$

где множество M_+ определено в (4.2), а Λ определено в (6.1).

Проведем построение чисел $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, двумя разными способами в зависимости от того, насколько велико количество отрицательных координат у векторов, являющихся вершинами графа G_n , а точнее, в зависимости от величины $\sum_{m \in M, m < 0} |m|a_m$.

Случай 1. Пусть

$$\sum_{\substack{m \in M \\ m < 0}} |m|a_m > \Lambda R |M_+|. \quad (6.22)$$

Перед тем как перейти к построению чисел $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, найдем вспомогательные числа $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$, $m \in \widetilde{M}_+$, $\mathbf{w} \in W_>$, удовлетворяющие условиям

$$\forall m \in \widetilde{M}_+ \quad \sum_{\mathbf{w} \in W_>} \tilde{x}_{m,\mathbf{w}} \leq a_m - R, \quad (6.23)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W_> \quad H \leq \tilde{y}_{\mathbf{w}} \leq H + \Lambda, \quad (6.24)$$

где

$$\tilde{y}_{\mathbf{w}} = y_{\mathbf{w}} - \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m \tilde{x}_{m,\mathbf{w}}.$$

Учитывая, что $W_> = \{\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(i_0)}\}$, для нахождения чисел $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$, $m \in \widetilde{M}_+$, $\mathbf{w} \in W_>$, будем использовать индукцию по $i = 1, \dots, i_0$, определяя сначала $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(1)}}$, затем $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(2)}}$ и т.д. При каждом $i \in \{1, \dots, i_0\}$ применим следующую процедуру для определения чисел $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}}$, $m \in \widetilde{M}_+$.

Сначала положим $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}} = 0$ для всех $m \in \widetilde{M}_+$. Затем выполним несколько шагов. На каждом шаге выбираем число $m \in \widetilde{M}_+$, для которого величина

$$\tilde{r}_m = a_m - \sum_{j \leq i} \tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(j)}}$$

максимальна, и увеличиваем $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}}$ на 1. После этого проверяем, верно ли, что $\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}} \leq H + \Lambda$, и, если это неравенство неверно, выполняем еще один шаг и т.д. В противном случае построение чисел $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}}$, $m \in \widetilde{M}_+$, завершено.

Покажем, что построенные числа $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$ удовлетворяют (6.23) и (6.24) при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Так как при всех $i \in \{1, \dots, i_0\}$ на каждом шаге процедуры определения чисел $x_{m,\mathbf{w}^{(i)}}$ значение $\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}}$ уменьшается не более, чем на Λ , и $y_{\mathbf{w}^{(i)}} = \Theta(n)$ в силу (6.19), то при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ для чисел $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$ выполнено (6.24).

Докажем (6.23). Предположим противное. Тогда $\tilde{r}_m < R$ для некоторого $m \in \widetilde{M}_+$. А следовательно,

$$\forall m \in \widetilde{M}_+ \quad \tilde{r}_m \leq R.$$

Это верно в силу того, что на каждом шаге мы увеличивали $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}}$ при том m , для которого текущее значение $\tilde{r}_m$ максимально, а в начале построения чисел $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$ выполнено $\tilde{r}_m = a_m \geq R$ при всех $m \in \widetilde{M}_+$.

Учитывая определение множества $\widetilde{M}_+$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{m \in M_+} ma_m &= \sum_{m \in M_+ \setminus \widetilde{M}_+} ma_m + \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m\tilde{r}_m + \sum_{\substack{m \in \widetilde{M}_+ \\ \mathbf{w} \in W_>}} m\tilde{x}_{m,\mathbf{w}} \\ &\leq \Lambda R|M_+| + \sum_{\substack{m \in \widetilde{M}_+ \\ \mathbf{w} \in W_>}} m\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $\sum_{m \in \widetilde{M}_+} m\tilde{x}_{m,\mathbf{w}} \leq y_{\mathbf{w}}$, верным, так как числа $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$ удовлетворяют (6.24), а затем равенством (6.20), получаем

$$\sum_{m \in M_+} ma_m \leq \Lambda R|M_+| + \sum_{\mathbf{w} \in W_>} y_{\mathbf{w}} = \Lambda R|M_+| + \Phi.$$

Приходим к противоречию с (6.22). Следовательно, условие (6.23) выполнено.

Итак, мы построили числа $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}}$, удовлетворяющие (6.23) и (6.24).

Теперь найдем числа $x'_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, для которых выполнены условия

$$\forall m \in M \quad \sum_{\mathbf{w} \in W} x'_{m,\mathbf{w}} \leq a_m, \quad (6.25)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad \sum_{m \in M} mx'_{m,\mathbf{w}} = y_{\mathbf{w}}. \quad (6.26)$$

Для этого покажем, что числа $\tilde{y}_{\mathbf{w}}$, $\mathbf{w} \in W_>$, можно представить в виде

$$\tilde{y}_{\mathbf{w}} = \sum_{m \in \widetilde{M}_+} \lambda_{m,\mathbf{w}} \cdot m, \quad \text{где } \lambda_{m,\mathbf{w}} \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.27)$$

Каждое из чисел $\tilde{y}_{\mathbf{w}}$, $\mathbf{w} \in W_>$, не меньше H в силу (6.24) и делится на $\text{НОД}\{m : m \in \widetilde{M}_+\}$, так как $y_{\mathbf{w}}$ делится на $\eta = \text{НОК}\{m : m \in M_+\}$ и разность $y_{\mathbf{w}} - \tilde{y}_{\mathbf{w}}$ является целочисленной линейной комбинацией чисел из $\widetilde{M}_+$. Учитывая определение H , получаем, что существуют числа $\lambda_{m,\mathbf{w}}$, для которых выполнено (6.27).

Положим

$$x'_{m,\mathbf{w}} = \begin{cases} \tilde{x}_{m,\mathbf{w}} + \lambda_{m,\mathbf{w}}, & \text{если } (m, \mathbf{w}) \in \widetilde{M}_+ \times W_>, \\ 0, & \text{если } (m, \mathbf{w}) \in (M \times W) \setminus (\widetilde{M}_+ \times W_>). \end{cases}$$

Докажем, что числа $x'_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяют (6.25) и (6.26). Равенство (6.26) при $\mathbf{w} \in W_>$ следует из определения $\tilde{y}_{\mathbf{w}}$ и (6.27), а при $\mathbf{w} \in W_<$ – из (6.17). Используя (6.23) и то, что в силу (6.24) $\lambda_{m,\mathbf{w}} \leq \tilde{y}_{\mathbf{w}} \leq H + \Lambda$ при всех $\mathbf{w} \in W_>$, $m \in \widetilde{M}_+$, получаем, что при всех $m \in \widetilde{M}_+$

$$\sum_{\mathbf{w} \in W_>} x'_{m,\mathbf{w}} \leq a_m - R + \sum_{\mathbf{w} \in W_>} \lambda_{m,\mathbf{w}} \leq a_m - R + |W_>|(H + \Lambda) \leq a_m.$$

Учитывая, что $x'_{m,\mathbf{w}} = 0$ при всех $(m, \mathbf{w}) \in (M \times W) \setminus (\widetilde{M}_+ \times W_>)$, заключаем, что (6.25) выполнено.

Из доказательства предложения 1 следует, что если $a_0(n_j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то при достаточно больших $n \in \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ можно найти числа $x''_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, для которых выполнено

$$\forall m \in M \quad \sum_{\mathbf{w} \in W} x''_{m,\mathbf{w}} = a_m - \sum_{\mathbf{w} \in W} x'_{m,\mathbf{w}}, \quad (6.28)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad \sum_{m \in M} x''_{m,\mathbf{w}} = k_{\mathbf{w}} - \sum_{m \in M} x'_{m,\mathbf{w}}, \quad (6.29)$$

$$\forall \mathbf{w} \in W \quad \sum_{m \in M} m x''_{m,\mathbf{w}} = 0. \quad (6.30)$$

Отметим, что правые части равенств (6.28) и (6.29) являются неотрицательными, так как для чисел $x'_{m,\mathbf{w}}$ выполнены неравенства (6.25) и при всех $\mathbf{w} \in W$

$$\sum_{m \in M} x'_{m,\mathbf{w}} = \sum_{m \in \widetilde{M}_+} x'_{m,\mathbf{w}} \leq \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m x'_{m,\mathbf{w}} = y_{\mathbf{w}} \leq k_{\mathbf{w}}.$$

Положим $x_{m,\mathbf{w}} = x'_{m,\mathbf{w}} + x''_{m,\mathbf{w}}$ при всех $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$. Тогда для чисел $x_{m,\mathbf{w}}$ выполнено условие (6.2) в силу (6.28), условие (6.3) в силу (6.29) и условие (6.21) в силу (6.26) и (6.30).

Случай 2. Пусть

$$\sum_{\substack{m \in M \\ m < 0}} |m| a_m \leq \Lambda R |M_+|. \quad (6.31)$$

Как и в случае 1, построим числа $\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}}$, $m \in \widetilde{M}_+$, $i \in \{2, \dots, i_0\}$, удовлетворяющие условиям

$$\forall m \in \widetilde{M}_+ \quad \sum_{i=2}^{i_0} \tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}} \leq a_m - R, \quad (6.32)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, i_0\} \quad H \leq \tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}} \leq H + \Lambda, \quad (6.33)$$

где

$$\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}} = y_{\mathbf{w}^{(i)}} - \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m \tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}. \quad (6.34)$$

А именно, зададим числа $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ с помощью индукции по $i = 2, \dots, i_0$. При каждом $i \in \{2, \dots, i_0\}$ (при $i = 1$ мы определим эти числа позднее) применим следующую процедуру для определения чисел $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$. Сначала положим $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}} = 0$ для всех $m \in \widetilde{M}_+$. Затем выполним несколько шагов. На каждом шаге выбираем число $m \in \widetilde{M}_+$, для которого величина

$$\tilde{r}_m = a_m - \sum_{j \leq i} \tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(j)}}$$

максимальна, и увеличиваем $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ на 1. После этого проверяем, верно ли, что $\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}} \leq H + \Lambda$, и, если это неравенство неверно, выполняем еще один шаг и т.д. В противном случае построение чисел $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$, $m \in \widetilde{M}_+$, завершено.

Покажем, что построенные числа $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ удовлетворяют (6.32) и (6.33) при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Так как на каждом шаге значение $\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}}$ уменьшается не более, чем на Λ , и $y_{\mathbf{w}^{(i)}} = \Theta(n)$ в силу (6.19), то при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ для чисел $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$ выполнено (6.33).

Докажем (6.32). Предположим противное. Тогда $\tilde{r}_m < R$ для некоторого $m \in \widetilde{M}_+$. А следовательно, $\tilde{r}_m \leq R$ при всех $m \in \widetilde{M}_+$. Отсюда, как и в случае 1, используя (6.33) и (6.34), получим

$$\sum_{m \in M_+} m a_m \leq \Lambda R |M_+| + \sum_{\substack{i \in \{2, \dots, i_0\} \\ m \in \widetilde{M}_+}} m \tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}} \leq \Lambda R |M_+| + \sum_{i=2}^{i_0} y_{\mathbf{w}^{(i)}}.$$

Учитывая (6.20), заключаем, что

$$\sum_{m \in M_+} m a_m \leq \Lambda R |M_+| + \Phi - y_{\mathbf{w}^{(1)}} \leq \Lambda R |M_+| + \sum_{m \in M_+} m a_m - y_{\mathbf{w}^{(1)}}.$$

Но при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ это неравенство не может быть верно, так как $y_{\mathbf{w}^{(1)}} = \Theta(n)$ в силу (6.19). Следовательно, при достаточно больших n условие (6.32) выполнено.

Итак, мы построили числа $\tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}}$, удовлетворяющие (6.32) и (6.33) при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Так же, как и в случае 1, представим каждое из чисел $\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}}$, $i \in \{2, \dots, i_0\}$, в виде

$$\tilde{y}_{\mathbf{w}^{(i)}} = \sum_{m \in \widetilde{M}_+} \lambda_{m, \mathbf{w}^{(i)}} \cdot m, \quad \text{где } \lambda_{m, \mathbf{w}^{(i)}} \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.35)$$

Положим

$$x_{m, \mathbf{w}^{(i)}} = \tilde{x}_{m, \mathbf{w}^{(i)}} + \lambda_{m, \mathbf{w}^{(i)}}, \quad \text{если } m \in \widetilde{M}_+, \quad i \in \{2, \dots, i_0\}, \quad (6.36)$$

$$x_{m, \mathbf{w}^{(i)}} = 0, \quad \text{если } m \in M \setminus (\widetilde{M}_+ \cup \{0\}), \quad i \in \{2, \dots, i_0\}, \quad (6.37)$$

$$x_{m,\mathbf{w}^{(i)}} = 0, \quad \text{если } m \in M \setminus \{0\}, \quad i \in \{i_0 + 1, \dots, \tau\}, \quad (6.38)$$

$$x_{m,\mathbf{w}^{(1)}} = a_m - \sum_{i=2}^{i_0} x_{m,\mathbf{w}^{(i)}}, \quad \text{если } m \in M \setminus \{0\}, \quad (6.39)$$

$$x_{0,\mathbf{w}} = k_{\mathbf{w}} - \sum_{m \in M \setminus \{0\}} x_{m,\mathbf{w}}, \quad \text{если } \mathbf{w} \in W. \quad (6.40)$$

Покажем, что при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ числа $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, являются неотрицательными. Неотрицательность чисел $x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}$, $m \in M \setminus \{0\}$, следует из (6.39), (6.36), (6.37), (6.32) и того, что $\lambda_{m,\mathbf{w}^{(i)}} \leq H + \Lambda$ при всех $m \in \widetilde{M}_+$, $i \in \{2, \dots, i_0\}$, в силу (6.35) и (6.33). Неотрицательность чисел $x_{0,\mathbf{w}^{(i)}}$ очевидна при $i \in \{i_0 + 1, \dots, \tau\}$, а при $i \in \{2, \dots, i_0\}$ следует из того, что

$$\sum_{m \in M \setminus \{0\}} x_{m,\mathbf{w}^{(i)}} = \sum_{m \in \widetilde{M}_+} x_{m,\mathbf{w}^{(i)}} \leq \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m x_{m,\mathbf{w}^{(i)}} = y_{\mathbf{w}^{(i)}} \leq k_{\mathbf{w}^{(i)}}.$$

Докажем, что число $x_{0,\mathbf{w}^{(1)}}$ является неотрицательным при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Оценим $\sum_{m \in M \setminus \{0\}} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}$ сверху. Заметим, что в силу (6.39) и (6.37)

$$\sum_{m \in M \setminus \{0\}} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}} = \sum_{m \in M \setminus (\widetilde{M}_+ \cup \{0\})} a_m + \sum_{m \in \widetilde{M}_+} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}. \quad (6.41)$$

Из определения множества $\widetilde{M}_+$ и неравенства (6.31) следует, что

$$\sum_{m \in M \setminus (\widetilde{M}_+ \cup \{0\})} a_m \leq 2\Lambda R |M_+|. \quad (6.42)$$

Оценим $\sum_{m \in \widetilde{M}_+} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}$:

$$\sum_{m \in \widetilde{M}_+} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}} \leq \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m x_{m,\mathbf{w}^{(1)}} = \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m a_m - \sum_{\substack{m \in \widetilde{M}_+ \\ i \in \{2, \dots, i_0\}}} m x_{m,\mathbf{w}^{(i)}}.$$

Из (6.33), (6.36) и (6.20) следует, что

$$\sum_{\substack{m \in \widetilde{M}_+ \\ i \in \{2, \dots, i_0\}}} m x_{m,\mathbf{w}^{(i)}} \geq \sum_{i=2}^{i_0} (y_{\mathbf{w}^{(i)}} - H - \Lambda) = \Phi - y_{\mathbf{w}^{(1)}} - (H + \Lambda)(i_0 - 1).$$

Поэтому

$$\sum_{m \in \widetilde{M}_+} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}} \leq \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m a_m - \Phi + y_{\mathbf{w}^{(1)}} + (H + \Lambda)(i_0 - 1) \leq y_{\mathbf{w}^{(1)}} + O(1), \quad (6.43)$$

где $O(1)$ – ограниченная величина при $n \rightarrow \infty$. Подставляя верхние оценки (6.42) и (6.43) для сумм в правой части (6.41), получаем

$$\sum_{m \in M \setminus \{0\}} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}} \leq y_{\mathbf{w}^{(1)}} + O(1).$$

Отсюда, а также из (6.18) и (6.40) следует, что

$$x_{0,\mathbf{w}^{(1)}} \geq k_{\mathbf{w}^{(1)}} - y_{\mathbf{w}^{(1)}} - O(1) \geq (1 - \zeta_2)k_{\mathbf{w}^{(1)}} - O(1),$$

и, значит, $x_{0,\mathbf{w}^{(1)}}$ неотрицательно при достаточно больших $n \in \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Теперь покажем, что для чисел $x_{m,\mathbf{w}}$ выполнены условия (6.2), (6.3) и (6.21). Условие (6.3) выполняется в силу (6.40). Справедливость (6.2) при $m \in M \setminus \{0\}$ следует из (6.39), а при $m = 0$ – из того, что числа $x_{m,\mathbf{w}}$ удовлетворяют (6.3). Равенство (6.21) вытекает из следующих трех соотношений:

– из (6.36), (6.37) следует, что

$$\forall i \in \{2, \dots, i_0\} \quad \sum_{m \in M} mx_{m,\mathbf{w}^{(i)}} = \sum_{m \in \widetilde{M}_+} m(\tilde{x}_{m,\mathbf{w}^{(i)}} + \lambda_{m,\mathbf{w}^{(i)}}) = y_{\mathbf{w}^{(i)}};$$

– из (6.38) и (6.17) следует, что

$$\forall i \in \{i_0 + 1, \dots, \tau\} \quad \sum_{m \in M} mx_{m,\mathbf{w}^{(i)}} = 0 = y_{\mathbf{w}^{(i)}};$$

– так как для чисел $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, выполнено (6.2), а также в силу (3.1) и (6.6)

$$\sum_{\substack{m \in M \\ \mathbf{w} \in W}} mx_{m,\mathbf{w}} = \sum_{m \in M} ma_m = \Phi = \sum_{\mathbf{w} \in W} y_{\mathbf{w}}.$$

Итак, в каждом из случаев 1 и 2 мы определили числа $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяющие (6.2), (6.3) и (6.21). Тогда эти числа удовлетворяют и условию (6.4) при всех $j \in \{1, \dots, t\}$, так как вектор $\mathbf{y}$ является решением системы (6.7). Следовательно, все вершины графа G_n , соответствующие числам $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, соединены ребрами с каждой из вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$.

Теперь докажем, что любому набору чисел $x_{m,\mathbf{w}}$, $m \in M$, $\mathbf{w} \in W$, удовлетворяющих (6.2), (6.3) и (6.21), соответствует достаточно большое количество S вершин графа G_n . Более точно, докажем, что существует такое $\beta > 0$, что $S = \Omega(|V_n|^\beta)$. Воспользуемся неравенством

$$S \geq C_{k_{\mathbf{w}^{(1)}}}^{l_+},$$

где $l_+ = \sum_{m \in M_+} x_{m,\mathbf{w}^{(1)}}$ – количество положительных координат в первом блоке. Обозначим через $l_- = k_{\mathbf{w}^{(1)}} - l_+$ количество неположительных координат в первом блоке и докажем, что $l_+ = \Theta(n)$ и $l_- = \Theta(n)$. Используя (6.21) и (6.19), оценим снизу l_+ и l_- :

$$l_+ \geq \frac{\sum_{m \in M_+} mx_{m,\mathbf{w}^{(1)}}}{\Lambda} \geq \frac{y_{\mathbf{w}^{(1)}}}{\Lambda} = \Theta(n),$$

$$l_- \geq \frac{|\sum_{m \in M, m \leq 0} mx_{m,\mathbf{w}^{(1)}}|}{\Lambda} = \frac{\sum_{m \in M_+} mx_{m,\mathbf{w}^{(1)}} - y_{\mathbf{w}^{(1)}}}{\Lambda} \geq \frac{l_+ - y_{\mathbf{w}^{(1)}}}{\Lambda}.$$

Подставляя в последнее неравенство $l_+ = k_{\mathbf{w}^{(1)}} - l_-$, получим

$$l_- \geq \frac{k_{\mathbf{w}^{(1)}} - l_- - y_{\mathbf{w}^{(1)}}}{\Lambda},$$

откуда с учетом (6.18)

$$l_- \geq \frac{k_{\mathbf{w}(1)} - y_{\mathbf{w}(1)}}{\Lambda + 1} \geq \frac{(1 - \zeta_2)k_{\mathbf{w}(1)}}{\Lambda + 1} = \Theta(n).$$

Таким образом, $l_+ = \Theta(n)$ и $l_- = \Theta(n)$, и, следовательно, существует такое $\beta > 0$, что $S = \Omega(|V_n|^\beta)$.

Список литературы

- [1] Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький, В. А. Таланов, “Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов”, *Кибернетика*, 1969, № 2, 17–27.
- [2] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон “нуля или единицы” для случайных дистанционных графов”, *Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика*, 2010, № 2 (1), 11–25.
- [3] М. Е. Жуковский, “Ослабленные законы “нуля или единицы” для случайных дистанционных графов”, *Докл. РАН*, **430**:3 (2010), 314–317; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “The weak zero-one laws for the random distance graphs”, *Dokl. Math.*, **81**:1 (2010), 51–54.
- [4] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов”, *ТВП*, **55**:2 (2010), 344–349; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “The weak zero-one law for the random distance graphs”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:2 (2011), 356–360.
- [5] М. Е. Жуковский, “О последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющейся закону нуля или единицы”, *Пробл. передачи информ.*, **47**:3 (2011), 39–57; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “On a sequence of random distance graphs subject to the zero-one law”, *Probl. Inf. Transm.*, **47**:3 (2011), 251–268.
- [6] М. Е. Жуковский, “Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 95–128; англ. пер.: М. Е. Zhukovskii, “A weak zero-one law for sequences of random distance graphs”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 1012–1044.
- [7] С. Н. Попова, “Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **50**:1 (2014), 64–86; англ. пер.: S. N. Popova, “Zero-one law for random distance graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Probl. Inf. Transm.*, **50**:1 (2014), 57–78.
- [8] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 107–146; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.
- [9] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука для целочисленных многогранников”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 139–160; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “The Borsuk problem for integral polytopes”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1535–1556.
- [10] А. М. Райгородский, “Задачи Борсука и Хадвигера и системы векторов с запретами на скалярные произведения”, *УМН*, **57**:3(345) (2002), 159–160; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “The Borsuk and Hadwiger problems and systems of vectors with restrictions on scalar products”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 606–607.
- [11] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 123–156; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “The Erdős–Hadwiger problem and the chromatic numbers of finite geometric graphs”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 115–146.

- [12] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 81–108; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “The problems of Borsuk and Grünbaum on lattice polytopes”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 513–537.
- [13] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, “О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 107–142; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, I. M. Shitova, “Chromatic numbers of real and rational spaces with real or rational forbidden distances”, *Sb. Math.*, **199**:4 (2008), 579–612.
- [14] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, “Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 3–22; англ. пер.: E. S. Gorskaya, I. M. Mitricheva (Shitova), V. Yu. Protasov, A. M. Raigorodskii, “Estimating the chromatic numbers of Euclidean space by convex minimization methods”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 783–801.
- [15] Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера”, *Матем. сб.*, **204**:4 (2013), 49–78; англ. пер.: E. E. Demekhin, A. M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “Distance graphs having large chromatic numbers and containing no cliques or cycles of a given size”, *Sb. Math.*, **204**:4 (2013), 508–538.
- [16] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Части I, II, Связь, М., 1979, 744 с.; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, Parts I, II, North-Holland Math. Library, **16**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
- [17] Н. К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, МЦНМО, М., 2000, 286 с.
- [18] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007, 320 с.; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000, xviii+301 pp.
- [19] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.
- [20] A. Blass, G. Exoo, F. Harary, “Paley graphs satisfy all first-order adjacency axioms”, *J. Graph Theory*, **5**:4 (1981), 435–439.

Светлана Николаевна Попова
(Svetlana N. Popova)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: popovaclaire@mail.ru

Поступила в редакцию
28.07.2014 и 13.07.2015