Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 8, 63–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:28:52

УДК 517.518.87

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

**Квадратурные формулы Гаусса и Маркова
по нулям собственных функций
задачи Штурма–Лиувилля,
точные для целых функций экспоненциального типа**

Доказываются квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа. Они обобщают квадратурные формулы по нулям функций Бесселя, впервые построенные К. Фрапье и П. Оливье. Квадратуры Бесселя отвечают интегральному преобразованию Фурье–Ганкеля. Приводятся другие примеры, связанные с интегральным преобразованием Якоби, рядом Фурье по ортогональным многочленам Якоби и общей задачей Штурма–Лиувилля с регулярным весом.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: квадратурные формулы Гаусса и Маркова, целая функция экспоненциального типа, задача Штурма–Лиувилля, преобразование Якоби, функции и многочлены Якоби.

DOI: 10.4213/sm8413

§ 1. Введение

В математике хорошо известны квадратурные формулы Гаусса вида

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k f(z_k), \quad (1.1)$$

где интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$, мера $d\sigma \geq 0$, узлы $a < z_1 < \dots < z_n < b$, а веса γ_k (числа Кристоффеля) положительны. Обычно полагают $[a, b] = [-1, 1]$.

Формулам Гаусса и их вариантам посвящена обширная литература (см., например, [1]–[3]). В основном, они изучались для меры σ с конечными моментами

$$\int_a^b x^j d\sigma(x) < +\infty, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

В этом случае справедливость формулы (1.1) естественно требовать на классе алгебраических многочленов. Если в качестве узлов z_k взять нули ортогонального по мере σ многочлена $\pi_n(x)$ степени n , удовлетворяющего трехчленному рекуррентному соотношению, то формула (1.1) при соответствующих γ_k будет

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00045), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К) и Фонда Д. Зимина “Династия”.

иметь наивысшую алгебраическую степень точности $2n - 1$. Самим К. Гауссом был рассмотрен случай $d\sigma(x) = dx$, когда π_n – ортогональный многочлен Лежандра $P_n(x)$.

В формулах Маркова (или Гаусса–Радо) фиксируются узлы на границе промежутка интегрирования (см. [1], [3]). Например,

$$\int_{-1}^1 f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=0}^n \gamma'_k f(z'_k), \quad z'_0 = 1.$$

Появляется еще один вес γ'_0 , поэтому формула справедлива для многочленов степени, не большей $2n$. При этом узлами z'_k будут нули z_k^1 ортогонального по мере $d\sigma_1 = (1-x)d\sigma$ многочлена $\pi_n^1(x)$. В частности, для $d\sigma = dx$ имеем многочлен Якоби $P_n^{(1,0)}(x)$. Формула Маркова вытекает из формулы Гаусса

$$\int_{-1}^1 f d\sigma_1 = \sum_{k=1}^n \gamma_k^1 f(z_k^1),$$

если ее применить к многочлену $(f(x) - f(1)p^2(x))/(1-x)$ степени $2n - 1$, где $p(x) = (\pi_n^1(x)/\pi_n^1(1))^2$. Веса будут

$$\gamma'_0 = \int_{-1}^1 p^2 d\sigma, \quad \gamma'_k = \frac{\gamma_k^1}{1 - z_k^1}, \quad k > 0.$$

Экстремальный характер формул Гаусса и Маркова и положительность весов в них позволяют решить многие задачи для многочленов, имеющие важные приложения в теории функций и дискретной математике (см., например, [4]–[6]). Приведем два примера.

1. Покажем, что многочлен f степени $2n - 1$ с нулевым средним значением

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad f(1) > 0,$$

строго положителен на промежутке $[-1, \lambda]$ при $\lambda > z_n$. Если это не так, то применим квадратурную формулу Гаусса:

$$0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \gamma_k f(z_k) \leq 0.$$

Таким образом, в точках z_k многочлен f имеет двойные нули, что невозможно. Отсюда следует, что $\lambda \leq z_n$. При этом единственным с точностью до положительной константы экстремальным многочленом будет $P_n^2(x)(x - z_n)^{-1}$.

2. Найдем $\max f(1)$, где f – неотрицательный многочлен степени $2n$ со средним значением

$$\int_{-1}^1 f dx = 1.$$

Применим формулу Маркова:

$$1 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \gamma'_0 f(1) + \sum_{k=1}^n \gamma'_k f(z'_k) \geq \gamma'_0 f(1).$$

Отсюда находим, что $\max f(1) \leq (\gamma'_0)^{-1}$. Равенство достигается на единственном с точностью до положительной константы многочлене $(P_n^{(1,0)}(x))^2$, имеющим двойные нули в узлах z_k^1 .

Решения приведенных экстремальных задач для многочленов важны при оценке параметров кодов и дизайнов на сфере и других компактных римановых пространствах (см. [5], [4]).

В работе изучаются квадратурные формулы Гаусса

$$\int_0^\infty f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k f(z_k), \quad 0 < z_1 < z_2 < \dots, \quad \gamma_k > 0, \quad (1.2)$$

и Маркова

$$\int_0^\infty f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=0}^\infty \gamma'_k f(z'_k), \quad z'_0 = 0 < z'_1 < z'_2 < \dots, \quad \gamma'_k > 0, \quad (1.3)$$

где мера σ – неубывающая функция ограниченной вариации ($d\sigma \geq 0$) с моментами

$$\int_0^\infty x^j d\sigma(x) = +\infty, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Рассматриваются случаи непрерывной и дискретной меры σ :

1) $\sigma \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $s = \sigma'$ – непрерывный неотрицательный вес,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = \int_0^\infty f(x) s(x) dx; \quad (1.4)$$

2) $\sigma(x) = \sum_{\zeta_k \leq x} s_k$ – функция скачков, $s_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\zeta_0 = 0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots, \quad \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \Delta\zeta_k > 0, \quad \Delta\zeta_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=0}^\infty s_k f(\zeta_k). \quad (1.5)$$

При этом в непрерывном и дискретном случаях соответственно предполагается, что

$$s(x) \asymp x^\nu, \quad x \rightarrow +\infty, \quad s_k \asymp \zeta_k^\nu, \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

где показатель $\nu \geq 0$. Поскольку для таких мер не существует ни одного момента, точность формул (1.2) и (1.3) будет требоваться для действительных и ограниченных на $\mathbb{R}$ четных целых функций f экспоненциального типа $\tau(f) \leq d$, $d > 0$. Их множество обозначается через $B_d^0 \subset B_d$, где B_d – класс Бернштейна (см. [7; гл. IV]). Типом $\tau(f)$ целой функции f называется нижняя грань чисел $a > 0$, для которых справедливо неравенство $|f(z)| \leq C_a e^{a|z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Пусть $L_v^p(I)$ или $L_{d\mu}^p(I)$ обозначают весовой класс функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_I |f|^p v dt \right)^{1/p}$$

или

$$\|f\|_{p,d\mu} = \left(\int_I |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad (f, g)_v = \int_I f \bar{g} v dt, \quad (f, g)_{d\mu} = \int_I f \bar{g} d\mu.$$

Из условия (1.6) следует, что если для $\delta > \nu + 1$

$$f(x) = O(x^{-\delta}), \quad x \rightarrow +\infty$$

(или просто $f = O_{+\infty}(x^{-\delta})$), то для произвольного $a > 0$

$$\int_a^\infty |f| d\sigma \lesssim \int_a^\infty x^{-\delta} d\sigma \asymp \int_a^\infty x^{-\delta+\nu} dx \asymp a^{\nu+1-\delta},$$

где асимптотическое неравенство $\lesssim$ означает $\leq C \cdot$. В непрерывном случае это очевидно, а в дискретном можно воспользоваться интегральным признаком сходимости Коши–Маклорена. Поэтому $f \in L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+) \cap L_{d\sigma}^1(\mathbb{R}_+)$. Мы часто будем пользоваться этим простым фактом.

Впервые формулы Гаусса на полуоси, точные для целых функций экспоненциального типа меньших или равных 2τ , были установлены К. Фрапье и П. Оливье в [8] для случая степенного веса $s(x) = x^{2\alpha+1}$ при $\alpha > -1$ (мы ограничимся случаем $\alpha \geq -1/2$). Узлами в этом случае (при $\tau = 1$) являются положительные нули $0 < q_{\alpha,1} < q_{\alpha,2} < \dots$ функции Бесселя J_α (см. [9; гл. 7]). Положим $q_k = q_{\alpha,k}$.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [8]). *Пусть $\alpha > -1$ и $\tau > 0$. Тогда для любой функции $f \in B_{2\tau}$, удовлетворяющей условию*

$$f(x) = O(|x|^{-\delta}), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \delta > 2\alpha + 2, \quad (1.7)$$

справедлива квадратурная формула Бесселя

$$\int_0^\infty x^{2\alpha+1} (f(x) + f(-x)) dx = \frac{2}{\tau^{2\alpha+2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{q_k^{2\alpha}}{(J'_\alpha(q_k))^2} \left(f\left(\frac{q_k}{\tau}\right) + f\left(-\frac{q_k}{\tau}\right) \right). \quad (1.8)$$

Формула (1.8) оптимальна в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in B_{2\tau+\varepsilon}$, удовлетворяющая условию (1.7), для которой равенство (1.8) неверно.

Ясно, что теорему 1.1 достаточно рассмотреть для четных функций $f \in B_{2\tau}^0$. При этом равенство (1.8) приобретает вид (1.2), где

$$z_k = \frac{q_k}{\tau}, \quad \gamma_k = \frac{2q_k^{2\alpha}}{\tau^{2\alpha+2} (J'_\alpha(q_k))^2},$$

$$z_k \sim \frac{\pi}{\tau} k, \quad \gamma_k \sim \frac{\pi q_k^{2\alpha+1}}{\tau^{2\alpha+2}} = \frac{\pi}{\tau} z_k^{2\alpha+1}, \quad k \rightarrow \infty.$$

В работе [8] отмечается идейная связь теоремы 1.1 с классическими формулами Гаусса на отрезке. Кроме того, при $\alpha = -1/2$ имеем

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad z_k = \frac{\pi(k-1/2)}{\tau}, \quad \gamma_k = \frac{\pi}{\tau},$$

и равенство (1.8) может быть получено из классической формулы суммирования Пуассона на оси

$$\frac{2\pi}{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{x + 2\pi k}{d}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(dn) e^{inx}, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad (1.9)$$

если учесть, что для функции $f \in B_d$, $f = O_{\pm\infty}(|x|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq d$ (следствие теоремы Пэли–Винера; см. [7; гл. IV]).

К. Фрапье и П. Оливье вывели формулу (1.8) методами комплексного анализа. Мы поступим аналогично.

Условие (1.7) теоремы 1.1 можно ослабить. В работе [10] доказано, что теорема справедлива, если

$$f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+). \quad (1.10)$$

Позднее изучались варианты приведенных формул по нулям функций Бесселя. В частности, доказаны формулы марковского типа, а также квадратуры с учетом значений производных функции в узлах (см. [11]). Однако аналогичные формулы для весов, отличных от степенного, авторам неизвестны.

Наши основные результаты (теоремы 3.1, 4.1 из § 2, 3) состоят в обобщении теоремы 1.1 с условием (1.10) на случай меры σ , являющейся спектральной функцией задачи Штурма–Лиувилля (см. [12]). Мы доказываем, что для произвольной функции $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+)$ справедливы квадратурные формулы Гаусса и Маркова

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\tau) f(z_k(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma'_k(\tau) f(z'_k(\tau)).$$

Узлами здесь являются нули собственных функций задач Штурма–Лиувилля, веса положительны, ряды сходятся абсолютно. Формулы оптимальны в том смысле, что существуют допустимые функции типа $> 2\tau$, для которых равенства нарушаются.

Квадратуры Бесселя связаны с интегральным преобразованием Фурье–Ганкеля. Они вкладываются в нашу схему и подробно изложены в § 5. В § 5 рассмотрены и другие важные примеры, отвечающие интегральному преобразованию Якоби и ряду Фурье по ортогональным многочленам Якоби, а также общей задаче Штурма–Лиувилля с регулярным весом.

Основной мотивацией наших исследований являются приложения квадратурных формул для решения экстремальных задач, связанных с гармоническим анализом на многомерных многообразиях. В частности, квадратурные формулы Бесселя применяются в задачах для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [13]–[16]).

Далее, в основном, мы будем работать с нормированной функцией Бесселя (см. [12; гл. V])

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) z^{-\alpha} J_\alpha(z) = F\left(0, 0; \alpha + 1; -\frac{z^2}{4}\right), \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad (1.11)$$

где $F = {}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса,

$$j_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)(z/2)^{2k}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{q_k^2}\right).$$

Это четная целая функция экспоненциального типа из класса B_1^0 , $\tau(j_\alpha) = 1$. В частности,

$$j_{-1/2}(z) = \cos z, \quad j_{1/2}(z) = \frac{\sin z}{z}. \quad (1.12)$$

Кроме того,

$$|j_\alpha(x)| \leq j_\alpha(0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j'_\alpha(z) = -\frac{z}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(z), \quad (1.13)$$

и при $|z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z \geq 0$,

$$z^{\alpha+1/2} j_\alpha(z) = A_\alpha (\cos(z - a_\alpha) + O(|z|^{-1} e^{|\operatorname{Im} z|})), \quad (1.14)$$

где

$$A_\alpha = \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}, \quad a_\alpha = \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2}. \quad (1.15)$$

В асимптотическом равенстве (1.14) и похожих оценках используется главное значение степенной функции.

§ 2. Задача Штурма–Лиувилля

Мы рассматриваем меры σ , которые являются спектральными функциями задач Штурма–Лиувилля (см. [12], [17]–[20]). Это означает, что σ участвует в равенстве Парсеваля и теореме разложения по собственным функциям. Отметим, что многие сведения из теории задачи Штурма–Лиувилля в классических трудах приведены в разрозненном виде, что вызывает определенные сложности при их цитировании.

Пусть $T = (0, l)$, $l \leq +\infty$, и $w \in C^1(T)$ – весовая функция, $w(t) > 0$, $t \in T$. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля с дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(w(t) \frac{d}{dt} u(t) \right) + z^2 w(t) u(t) = 0, \quad t \in T, \quad (2.1)$$

краевыми условиями

$$u'(0) = 0, \quad u'(l) = 0, \quad l < +\infty, \quad (2.2)$$

и спектром $\{z\} \subset \mathbb{R}_+$. Для $l = +\infty$ он предполагается сплошным ($z \geq 0$) и ему будет отвечать случай дифференцируемой меры σ (см. (1.4)). Соответственно при $l < +\infty$ спектр дискретный с нулевым минимальным собственным значением и σ – функция скачков (1.5). Для сингулярной задачи в краевых точках обычно требуется ограниченность решения.

К задаче (2.1), (2.2), которую будем называть стандартной, сводится более общая задача

$$(pv')' + (\lambda - q)pv = 0, \quad p(t) > 0, \quad t \in T, \quad (2.3)$$

$$v(0) \cos \alpha + v'(0) \sin \alpha = 0, \quad (2.4)$$

с аналогичным краевым условием при $t = l < +\infty$ и спектром $\{\lambda\} \subset [\lambda_0, +\infty)$.

Действительно, пусть v_0 – первая собственная функция задачи (2.3), (2.4), отвечающая минимальному собственному значению $\lambda = \lambda_0$:

$$(pv'_0)' + (\lambda_0 - q)pv_0 = 0.$$

Тогда $|v_0(t)| \neq 0$, $t \in T$ (см. [17; гл. VI]). Применяя стандартную в теории задачи Штурма–Лиувилля формулу

$$(p(v'v_0 - vv'_0))' + (\lambda - \lambda_0)pvv_0 = 0, \quad (2.5)$$

и положив в ней $u = v/v_0$, $w = v'_0/v_0$, $z^2 = \lambda - \lambda_0$, приходим к задаче (2.1), (2.2).

Пусть $\varphi(t, z)$ – решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, z) = 1, \quad \varphi'_t(0, z) = 0.$$

Ясно, что $\varphi(t, 0) = 1$, $t \in T$.

Если $l < +\infty$, то мера σ является функцией скачков (1.5), где ζ_k – собственные значения задачи Штурма–Лиувилля, которые определяются из уравнения $\varphi'_t(l, z) = 0$. Скачки $s_k = \|\varphi_{\zeta_k}\|_{2,w}^{-2}$, где $\varphi_{\zeta_k}(t) = \varphi(t, \zeta_k)$ – собственные функции задачи Штурма–Лиувилля. В частности, $\zeta_0 = 0$, $\varphi_0 = 1$ и $s_0 = \left(\int_T w dt\right)^{-1}$. Необходимые асимптотики $\Delta\zeta_k \gtrsim 1$ и $s_k \asymp \zeta_k^\nu$, $k \rightarrow \infty$, обеспечиваются приводимыми далее свойствами функций $\varphi(t, z)$.

При $l = +\infty$ функции $\varphi(t, z)$ также называются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля. Способы построения меры σ в этом (сингулярном) случае см. в литературе, приведенной в начале параграфа.

Нам потребуется проверить справедливость следующих свойств функций $\varphi(t, z)$, естественных для теории задачи Штурма–Лиувилля.

1. Аналитичность: для фиксированного $t \in T$ функция $\varphi(t, z) \in B_t^0$ и

$$\varphi(t, z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_k^2(t)}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

где $0 < z_1(t) < z_2(t) < \dots$ – положительные нули функции $\varphi(t, z)$ по второму аргументу.

2. Ограниченность: для $t \in T$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$|\varphi(t, x)| \leq \varphi(t, 0) = \varphi(0, x) = 1. \quad (2.6)$$

3. Асимптотика: равномерно на каждом компакте $\Delta \subset T$, $t \in \Delta$ (для простоты будем говорить равномерно по $t \in T$) при $|z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, имеем

$$z^{\nu/2} \varphi(t, z) = C_t (\cos(tz - c_t) + O(|z|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} z|})), \quad (2.7)$$

где ν – показатель из формулы (1.6).

4. Равенства Парсеваля: имеем

$$\|\widehat{f}\|_{2,d\sigma} = \|f\|_{2,w}, \quad \|\widetilde{f}\|_{2,w} = \|f\|_{2,d\sigma}, \quad (f,g)_w = (\widehat{f},\widehat{g})_{d\sigma}, \quad (f,g)_{d\sigma} = (\widetilde{f},\widetilde{g})_w,$$

где

$$\widehat{f}_w(z) = \int_T f(t)\varphi(t,z)w(t)dt, \quad \widetilde{f}_{d\sigma}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\varphi(t,x)d\sigma(x)$$

– соответственно прямое и обратное преобразования Фурье функций $f \in L_w^2(T)$ и $f \in L_{d\sigma}^2(\mathbb{R}_+)$ по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

5. Теорема разложения: если $f \in C(T) \cap L_w^1(T)$ (тогда $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}_+)$) и интеграл $\int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}\varphi(t,x)d\sigma$ сходится абсолютно и равномерно по $t \in T$, то справедливо поточечное равенство

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(x)\varphi(t,x)d\sigma(x), \quad t \in T.$$

Свойства 1–5 достаточно хорошо изучены и выполняются для широкого класса задач Штурма–Лиувилля, например, с регулярным весом w (он положителен в граничных точках). В важных для приложений сингулярных случаях многие необходимые свойства доказаны методами специальных функций и относятся к теории гипергеометрической функции (см. § 5).

Прокомментируем указанные свойства. При этом для наглядности будем отмечать соответствующие свойства собственных функций Бесселя $\varphi(t,z) = j_\alpha(tz)$, $\alpha \geq -1/2$. В этом случае (см. [12; гл. V, § 3])

$$w(t) = \frac{t^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha}\Gamma^2(\alpha+1)}, \quad T = (0, +\infty), \quad s(x) = x^{2\alpha+1}, \quad \{z\} = \mathbb{R}_+,$$

показатель из асимптотики (1.6) $\nu = 2\alpha + 1 \geq 0$.

В свойстве 1 нули $z_k(t)$ являются собственными значениями задачи $(wu')' + z^2wu = 0$ на интервале $(0, t)$, $u'(0) = 0$, $u(t) = 0$, $t \in T$. Они связаны с нулями $t_k(z)$, $z \in \mathbb{R}_+$, уравнения $\varphi(t,z) = 0$ равенством $t_k(z_k(t)) = t$ или $z_k(t) = t_k^{-1}(t)$. Из теории Штурма известно, что нули $t_k(z)$ непрерывны и монотонно убывают к нулю при возрастании z (см. [17; гл. VI], [19; гл. I]). Поэтому нули $z_k(t)$ также непрерывны и монотонно убывают к нулю при возрастании t . При этом из асимптотики собственных функций (2.7) для $\text{Im } z = 0$ получаем

$$z_k(t) = \frac{\pi(k-1/2) + c_t}{t} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Для собственных функций Бесселя имеем $t_k(z) = q_k/z$ и $z_k(t) = q_k/t$, где $q_k \sim \pi k$.

Свойства 1, 2 частично вытекают из интегрального представления Мелера

$$\varphi(t,z) = \int_0^t \cos(zu) d\mu_t(u), \quad (2.9)$$

где $d\mu_t \geq 0$. В этом случае принадлежность классу B_t^0 очевидна и

$$|\varphi(t,x)| \leq \int_0^t d\mu_t = 1, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in T.$$

Для функций Бесселя при $\alpha > -1/2$

$$j_\alpha(tz) = \frac{2C_\alpha}{t^{2\alpha}} \int_0^t (t^2 - u^2)^{\alpha-1/2} \cos(zu) du, \quad (2.10)$$

где

$$C_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)}. \quad (2.11)$$

Неравенство (2.6) также выполняется, если вес w не убывает (см. [2; гл. VII]). В этом случае для функции $h(t) = z^2 u^2 + (u')^2$ из уравнения (2.1) имеем $h' = (w^{-2})' w^2 (u')^2 \leq 0$ и h не возрастает. Следовательно, последовательные максимумы $u^2(t_i)$, равные $z^{-2} h(t_i)$ ($u'(t_i) = 0$), не возрастают и $|u(t)| \leq u(0)$, $t \in T$.

Вес Бесселя $w(t) = 2^{-2\alpha} \Gamma^{-2}(\alpha + 1) t^{2\alpha+1}$ не убывает, если $\alpha \geq -1/2$.

Функции $\varphi(t, z)$ по переменному z аналитичны во всей комплексной области и четны. По переменному t аналитичность можно гарантировать только в окрестности интервала T . Отсюда, следуя [21; гл. 1], из асимптотического равенства (2.7) (свойство 3) находим, что при тех же z и $j = 0, 1, 2, \dots$

$$z^{\nu/2} \varphi_z^{(j)}(t, z) = t^j C_t \left(\cos \left(tz - c_t + \frac{\pi j}{2} \right) + O(|z|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} z|}) \right), \quad (2.12)$$

$$z^{\nu/2} \varphi_t^{(j)}(t, z) = z^j C_t \left(\cos \left(tz - c_t + \frac{\pi j}{2} \right) + O(|z|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} z|}) \right). \quad (2.13)$$

Для функций Бесселя асимптотики (2.7), (2.12), (2.13) вытекают из формулы (1.14). При этом можно независимо использовать формулу дифференцирования (1.13).

Отметим, что во всех наших примерах $c_t = \text{const}$ и

$$z^{-\nu/2} C_t \sim \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(w(t)s(z))^{1/2}}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad t \in T. \quad (2.14)$$

Причем это верно и в дискретных случаях, если определить вес $s(x) \asymp x^\nu$ так, чтобы $s(\zeta_k) \sim s_k$.

Доказательства полноты собственных функций, равенства Парсеваля и теоремы разложения (свойства 4, 5) являются одними из основных выводов теории задачи Штурма–Лиувилля. Обычно вначале они доказываются на плотных классах гладких функций. В наших примерах (см. §5) свойства 4 и 5 справедливы.

Отметим, что в силу (2.7) имеем $\varphi(t, x) = O_{+\infty}(x^{-\nu/2})$, $t \in \Delta \subset T$. Поэтому для абсолютной и равномерной сходимости интеграла $\int_{\mathbb{R}_+} \hat{f} \varphi(t, x) d\sigma$ достаточным условием будет $f = O_{+\infty}(x^{-\delta})$, где $\delta > \nu/2 + 1$.

Случаю веса Бесселя отвечает преобразование Фурье–Ганкеля (см. [12]), для которого свойства 4, 5 хорошо известны. При $\alpha = -1/2$ и $1/2$ в силу (1.12) оно сводится к косинус- и синус-преобразованиям Фурье соответственно.

§ 3. Квадратурная формула Гаусса

Перейдем к формулировке основного результата. Зафиксируем $\tau \in T$, и пусть везде далее

$$z_k = z_k(\tau), \quad \varphi(z) = \varphi(\tau, z), \quad \varphi'(z) = \varphi'_z(\tau, z).$$

Нули z_k будут узлами конструируемой квадратурной формулы Гаусса.

Для $k \in \mathbb{N}$ введем функции

$$\Phi_k(z) = \Phi_k(\tau, z) = \frac{2z_k \varphi(z)}{\varphi'(z_k)(z^2 - z_k^2)} \in B_\tau^0. \quad (3.1)$$

Таким образом, $\Phi_k(z_j) = \delta_{kj}$. В силу (2.7) имеем

$$\Phi_k(x) = O(x^{-\nu/2-2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.2)$$

Поэтому по условию на меру (1.6) функции $\Phi_k^2 \in L_{d\sigma}^1(\mathbb{R}_+)$ и можно положить

$$\gamma_k = \gamma_k(\tau) = \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k^2(\tau, x) d\sigma(x). \quad (3.3)$$

Это будут веса квадратурной формулы. Другое выражение для них дается ниже в лемме 3.2.

Сформулируем основной результат для меры σ , удовлетворяющей вышеперечисленным условиям. Пусть $T/2 = (0, l/2)$ при $l < +\infty$ и $T/2 = (0, +\infty)$ при $l = +\infty$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для $\tau \in T/2$ и произвольной функции $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+)$ справедлива квадратурная формула Гаусса*

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f(z_k). \quad (3.4)$$

Ряд в (3.4) сходится абсолютно.

Формула (3.4) оптимальна в том смысле, что для любого ε больше нуля существует допустимая функция $f_\varepsilon \in B_{2\tau+\varepsilon}^0 \cap L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+)$, для которой равенство (3.4) неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Согласно асимптотике (2.8) плотность узлов z_k из квадратурной формулы (3.4) равна

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{z_k} = \frac{\tau}{\pi}.$$

Было бы интересно показать, что никакая квадратурная формула с плотностью узлов τ/π не может быть точной для всех четных целых функций экспоненциального типа $> 2\tau$. Это доказывало бы оптимальный характер квадратурной формулы (3.4) в терминах плотности узлов и точности на целых функциях экспоненциального типа.

Доказательство теоремы 3.1 разобьем на ряд вспомогательных утверждений. Вначале, следуя работе [8; лемма 3], выведем вспомогательную интерполяционную формулу.

ЛЕММА 3.1. Для функций $f \in B_{2\tau}^0$, удовлетворяющих условию

$$f(x) = O(x^{-\delta}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \delta > \nu + 1, \quad (3.5)$$

на любом компакте из $\mathbb{C}$ справедливо поточечное равенство

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(z)f(z_k) + B_k(z)f'(z_k)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.6)$$

где

$$A_k(z) = \left(1 + \left(\frac{1}{z_k} - \frac{\varphi''(z_k)}{\varphi'(z_k)}\right) \frac{z^2 - z_k^2}{2z_k}\right) \Phi_k^2(z), \quad B_k(z) = \frac{z^2 - z_k^2}{2z_k} \Phi_k^2(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [8; леммы 1, 2] показано, что:

1) равномерно по $|\theta| \leq \pi$

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= O\left(\frac{e^{2\tau r|\sin \theta|}}{r^\delta}\right), \quad r \rightarrow +\infty, \\ f'(z) &= O(z^{-\delta}), \quad z \rightarrow +\infty; \end{aligned} \quad (3.7)$$

2) для $|\theta| \leq \pi$

$$|\cos(Re^{i\theta} - c)| \geq Ke^{R|\sin \theta|},$$

где $K > 0$, $R = \pi N + c$, N – большое целое число.

Отсюда, из асимптотики (2.7) и четности функции φ следует, что для $r = R/\tau$, $c = c_\tau$

$$r^{\nu/2} |\varphi(re^{i\theta})| \gtrsim |\cos(Re^{i\theta} - c)| + O(r^{-1}e^{\tau r|\sin \theta|}) \gtrsim e^{\tau r|\sin \theta|} (1 + O(r^{-1})).$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\varphi^2(\zeta)} d\zeta,$$

где $r = (\pi N + c)/\tau$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$. При $z \in \{z_k\}$ формула (3.6) очевидна, поэтому можно считать, что $z \notin \{z_k\}$.

Имеем

$$|I_N| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta} - z| |\varphi(re^{i\theta})|^2} d\theta \lesssim r^{-\delta+\nu}.$$

Поскольку $\delta > \nu + 1$, то $-\delta + \nu < -1$ и $I_N(z) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно по z на любом компакте из $\mathbb{C}$.

С другой стороны, учитывая положение полюсов интегрируемой функции, имеем

$$I_N = \text{Res}_z + \sum_{|z_k| < r} \text{Res}_{z_k},$$

где $z_k = -z_{-k}$ при $k < 0$.

Найдем соответствующие вычеты. В точке $\zeta = z$ имеем простой полюс и

$$\operatorname{Res}_z \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\varphi^2(\zeta)} = \frac{f(z)}{\varphi^2(z)}.$$

В нулях $\zeta = z_k$ функции φ – полюсы второго порядка. Поэтому

$$\operatorname{Res}_{z_k} = \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \frac{d}{d\zeta} \frac{(\zeta - z_k)^2 f(\zeta)}{(\zeta - z)\varphi^2(\zeta)}.$$

Имеем

$$\left(\frac{f}{\zeta - z} \left(\frac{\zeta - z_k}{\varphi} \right)^2 \right)' = \left(\frac{f}{\zeta - z} \right)' \left(\frac{\zeta - z_k}{\varphi} \right)^2 + 2 \frac{f}{\zeta - z} \frac{\zeta - z_k}{\varphi} \left(\frac{\zeta - z_k}{\varphi} \right)'.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \left(\frac{f}{\zeta - z} \right)' &= \frac{f'(z_k)(z_k - z) - f(z_k)}{(z_k - z)^2}, \\ \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \frac{\zeta - z_k}{\varphi} &= \frac{1}{\varphi'(z_k)}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \frac{f}{\zeta - z} = \frac{f(z_k)}{z_k - z}, \\ \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \left(\frac{\zeta - z_k}{\varphi} \right)' &= \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \frac{\varphi - (\zeta - z_k)\varphi'}{\varphi^2} = \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \frac{-(\zeta - z_k)\varphi''}{2\varphi\varphi'} = \frac{-\varphi''(z_k)}{2(\varphi')^2(z_k)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Res}_{z_k} = \left(\frac{f'(z_k)}{z_k - z} - \frac{f(z_k)}{(z_k - z)^2} \right) \frac{1}{(\varphi')^2(z_k)} + \frac{f(z_k)}{z_k - z} \frac{-\varphi''(z_k)}{(\varphi')^3(z_k)},$$

или

$$\operatorname{Res}_{z_k} = -a_k f(z_k) - b_k f'(z_k),$$

где

$$a_k = \frac{(\varphi')^{-2}(z_k)}{(z - z_k)^2} - \frac{\varphi''(z_k)(\varphi')^{-3}(z_k)}{z - z_k}, \quad b_k = \frac{(\varphi')^{-2}(z_k)}{z - z_k}.$$

Собирая полученные результаты вместе, получаем

$$\frac{f}{\varphi^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \operatorname{Res}_{z_k} = 0.$$

Отсюда, используя четность функции f , нечетность функции f' и равенство $z_{-k} = -z_k$, находим

$$f = \varphi^2 \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k + a_{-k})f(z_k) + (b_k - b_{-k})f'(z_k)).$$

В силу четности функции φ имеем

$$a_k + a_{-k} = \frac{(\varphi')^{-2}(z_k)}{(z - z_k)^2} - \frac{\varphi''(z_k)(\varphi')^{-3}(z_k)}{z - z_k} + \frac{(\varphi')^{-2}(z_k)}{(z + z_k)^2} + \frac{\varphi''(z_k)(\varphi')^{-3}(z_k)}{z + z_k},$$

откуда

$$A_k = (a_k + a_{-k})\varphi^2 = \left(\frac{2(z^2 + z_k^2)}{(\varphi')^2(z_k)(z^2 - z_k^2)^2} - \frac{2z_k\varphi''(z_k)}{(\varphi')^3(z_k)(z^2 - z_k^2)} \right) \varphi^2.$$

Аналогично

$$B_k = (b_k - b_{-k})\varphi^2 = \frac{2z_k}{(\varphi')^2(z_k)(z^2 - z_k^2)} \varphi^2.$$

В терминах функции (3.1) имеем

$$A_k = \left(1 + \left(\frac{1}{z_k} - \frac{\varphi''(z_k)}{\varphi'(z_k)} \right) \frac{z^2 - z_k^2}{2z_k} \right) \Phi_k^2, \quad B_k = \frac{z^2 - z_k^2}{2z_k} \Phi_k^2.$$

Лемма 3.1 доказана.

В качестве примера рассмотрим случай веса Бесселя при $\tau = 1$. Тогда

$$\varphi(z) = j_\alpha(z), \quad z_k = q_k, \quad (z^\nu \varphi')' + z^\nu \varphi = 0,$$

где $\nu = 2\alpha + 1$. Отсюда следует, что $z_k \varphi''(z_k) = -\nu \varphi'(z_k)$ и

$$A_k = \left(1 + \frac{(\nu + 1)(z^2 - z_k^2)}{2z_k^2} \right) \Phi_k^2.$$

В терминах функции Бесселя J_α после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \frac{2q_k^{\alpha+1} J_\alpha(z)}{J'_\alpha(q_k) z^\alpha (z^2 - q_k^2)}, \\ A_k(z) &= \frac{q_k^{2\alpha} J_\alpha^2(z)}{(J'_\alpha(q_k))^2 z^{2\alpha}} \left(\frac{1}{(z - q_k)^2} + \frac{1}{(z + q_k)^2} + \frac{2(2\alpha + 1)}{z^2 - q_k^2} \right), \\ B_k(z) &= \frac{2q_k^{2\alpha+1} J_\alpha^2(z)}{(J'_\alpha(q_k))^2 z^{2\alpha} (z^2 - q_k^2)}. \end{aligned}$$

Эти выражения совпадают с выражениями, приведенными в [8; (45)].

Далее для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi_k(t) = \varphi(t, z_k), \quad \varphi'_k(t) = \varphi'_t(t, z_k), \quad v_k(t) = \gamma_k \varphi_k(t) \chi_{[0, \tau]}(t), \quad (3.8)$$

где χ_I – характеристическая функция множества I .

Имеем $v_k(\tau - 0) = \gamma_k \varphi(\tau, z_k) = 0$, поэтому $v_k \in C(T)$. Также очевидно, что $v_k \in L^1_w(T)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Функция v_k и ее преобразование Фурье $\widehat{v}_k$ удовлетворяют условиям теоремы разложения и

$$\widehat{v}_k = \Phi_k, \quad \widetilde{\Phi}_k = v_k.$$

В частности,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k(x) \varphi(x) d\sigma(x) = \widetilde{\Phi}_k(\tau) = v_k(\tau) = 0. \quad (3.9)$$

Кроме того, справедливы соотношения ортогональности

$$(v_j, v_k)_w = (\Phi_j, \Phi_k)_{d\sigma} = \gamma_j \delta_{jk}$$

и формула для весов

$$\gamma_k = \|\varphi_k\|_{L_w^2(0, \tau)}^{-2} = \frac{2z_k}{w(\tau)\varphi'_k(\tau)\varphi'(z_k)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $v_k \in C(T) \cap L_w^1(T)$ и справедливо (3.2), то теорема разложения будет выполнена, если показать, что $\hat{v}_k = \Phi_k$.

Пусть u_1, u_2 – решения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующие значениям z_1, z_2 . Тогда по аналогии с равенством (2.5) имеем

$$(w(u'_1 u_2 - u_1 u'_2))' + (z_1^2 - z_2^2)w u_1 u_2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\tau u_1 u_2 w dt = - \frac{w(u'_1 u_2 - u_1 u'_2)}{z_1^2 - z_2^2} \Big|_{t=0}^\tau = \frac{w(\tau)(u'_1(\tau)u_2(\tau) - u_1(\tau)u'_2(\tau))}{z_2^2 - z_1^2}.$$

Полагая $z_1 = z_k, z_2 = z, u_1 = \varphi(t, z_k), u_2 = \varphi(t, z)$ и пользуясь принятыми обозначениями, получаем

$$\int_0^\tau \varphi_k \varphi(t, z) w dt = \frac{w(\tau)\varphi'_k(\tau)\varphi(z)}{z^2 - z_k^2} = d_k^{-1} \Phi_k(z),$$

где

$$d_k = \frac{2z_k}{w(\tau)\varphi'_k(\tau)\varphi'(z_k)}.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{v}_k = \gamma_k d_k^{-1} \Phi_k, \quad \tilde{\Phi}_k = d_k \gamma_k^{-1} v_k.$$

Кроме того, при $z = z_j$

$$d_k \int_0^\tau \varphi_k \varphi_j w dt = \Phi_k(z_j) = \delta_{kj}.$$

Покажем, что $d_k = \gamma_k$. Воспользуемся равенством Парсеваля:

$$(\Phi_j, \Phi_k)_{d\sigma} = (\tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_k)_w = d_j \gamma_j^{-1} d_k \gamma_k^{-1} (v_j, v_k)_w = d_j d_k \int_0^\tau \varphi_j \varphi_k w dt = d_j \delta_{jk},$$

откуда, используя определение (3.3), находим $\gamma_k = (\Phi_k, \Phi_k)_{d\sigma} = d_k$.

Таким образом, $\hat{v}_k = \Phi_k$ и поточечно при $t \in T$

$$\tilde{\Phi}_k(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k(x) \varphi(t, x) d\sigma(x) = v_k(t).$$

Лемма доказана.

Заметим, что функции v_k являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля на интервале $(0, \tau)$ с дифференциальным уравнением (2.1), крайевыми условиями $u'(0) = 1$, $u(\tau) = 0$ и собственными значениями z_k . Они образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_w^2(0, \tau)$ (см. [12]).

Выведем асимптотику весов γ_k .

ЛЕММА 3.3. При $k \rightarrow \infty$

$$\gamma_k \asymp z_k^\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.2 имеем

$$\gamma_k = \frac{2z_k}{w(\tau)\varphi'_k(\tau)\varphi'(z_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся асимптотиками (2.8) и (2.12), (2.13) для $j = 1$. Тогда при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi'_z(\tau, z_k) &\sim z_k^{-\nu/2} \tau C_\tau \left\{ -\sin\left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right) + O(k^{-1})\right) \right\} \sim (-1)^{k+1} z_k^{-\nu/2} \tau C_\tau, \\ \varphi'_t(\tau, z_k) &\sim z_k^{-\nu/2+1} C_\tau \left\{ -\sin\left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right) + O(k^{-1})\right) \right\} \sim (-1)^{k+1} z_k^{-\nu/2+1} C_\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi'_k(\tau)\varphi'(z_k) \sim z_k^{-\nu+1} \tau C_\tau^2$ и $\gamma_k \asymp z_k^\nu$.

Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 вытекает квадратурная формула Гаусса при выполнении условия (3.5). Она является аналогом теоремы 1.1.

ЛЕММА 3.4. Если функция $f \in B_{2\tau}^0$ удовлетворяет оценке (3.5), то справедлива квадратурная формула (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проинтегрировать с мерой σ интерполяционную формулу (3.6) из леммы 3.1 и воспользоваться определением весов (3.3) и равенством (3.9) из леммы 3.2:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k^2 d\sigma = \gamma_k, \quad \int_{\mathbb{R}_+} (x^2 - z_k^2) \Phi_k^2 d\sigma = \frac{2z_k}{\varphi'(z_k)} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k \varphi d\sigma = 0.$$

Для обоснования возможности почленного интегрирования докажем, что ряд в равенстве (3.6) сходится в пространстве $L_{d\sigma}^1(\mathbb{R}_+)$.

Оценим $\|B_k\|_{1,d\sigma}$. Из определения функции B_k и равенства

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi^2}{x^2 - z_k^2} d\sigma = \frac{\varphi'(z_k)}{2z_k} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k \varphi d\sigma = 0$$

находим

$$\int_{\mathbb{R}_+} |B_k| d\sigma \leq \frac{2z_k}{(\varphi')^2(z_k)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi^2}{|x^2 - z_k^2|} d\sigma = \frac{4z_k}{(\varphi')^2(z_k)} \int_{z_k}^{\infty} \frac{\varphi^2}{x^2 - z_k^2} d\sigma \lesssim z_k^{\nu+1} I,$$

где

$$I = \int_{z_k}^{\infty} \frac{\varphi^2}{x^2 - z_k^2} d\sigma = \int_{z_k}^{z_k+z_1} + \int_{z_k+z_1}^{3z_k} + \int_{3z_k}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Для третьего слагаемого имеем

$$I_3 \lesssim \int_{3z_k}^{\infty} \frac{\varphi^2}{x^2} d\sigma \lesssim \int_{3z_k}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \lesssim z_k^{-1},$$

где использована оценка $|\varphi(x)| \lesssim x^{-\nu/2}$, $x \gtrsim 1$. Аналогично, для второго слагаемого

$$I_2 \lesssim \int_{z_k+z_1}^{3z_k} \frac{\varphi^2}{(x-z_k)(x+z_k)} d\sigma \lesssim \frac{1}{z_k} \int_{z_k+z_1}^{3z_k} \frac{dx}{x-z_k} \lesssim z_k^{-1} \ln z_k.$$

По теореме Лагранжа о среднем значении и асимптотике для производной (2.12) находим

$$\frac{\varphi^2(z)}{x^2 - z_k^2} = \frac{\varphi}{x + z_k} \varphi'(\theta) = O(z_k^{-\nu-1}), \quad \theta \in (z_k, z_k + z_1).$$

Поэтому для первого слагаемого имеем

$$I_1 \lesssim z_k^{-\nu-1} \int_{z_k}^{z_k+z_1} x^\nu dx \lesssim z_k^{-1}.$$

Собирая оценки вместе, получаем

$$\|B_k\|_{1,d\sigma} \lesssim z_k^{\nu+1} z_k^{-1} \ln z_k = z_k^\nu \ln z_k.$$

Теперь оценим $\|A_k\|_{1,d\sigma}$. Из оценок $|\varphi'_z(z_k)| \asymp z_k^{-\nu/2}$ и $|\varphi''_z(z_k)| \lesssim z_k^{-\nu/2}$ имеем $|\varphi''(z_k)/\varphi'(z_k)| \lesssim 1$. Отсюда, из определения (3.3) и леммы 3.3 следует, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} |A_k| d\sigma \lesssim \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_k^2 d\sigma + \int_{\mathbb{R}_+} |B_k| d\sigma = \gamma_k + \|B_k\|_{1,d\sigma} \lesssim z_k^\nu \ln z_k.$$

Наконец, воспользуемся оценкой (3.5), вытекающей из нее оценкой (3.7) и асимптотикой $z_k \asymp k$. Тогда $\forall z \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|f(z_k)| \int_{\mathbb{R}_+} |A_k(x)| d\sigma + |f'(z_k)| \int_{\mathbb{R}_+} |B_k(x)| d\sigma \right) \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{\nu-\delta} \ln z_k < \infty,$$

если $\nu - \delta < -1$.

Лемма 3.4 доказана.

Заменим условие (3.5) более общим $\|f\|_{1,x^\nu} < \infty$. Основную сложность представляет случай дискретной меры σ . Для этого случая докажем вариант известного неравенства Планшереля–Полия (см. [7; дополнения и задачи II]) (случай $\nu = 0$).

ЛЕММА 3.5. Пусть $\xi_0 = 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$, $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \Delta \xi_k > 0, \quad a_k = O(\xi_k^\nu), \quad k \rightarrow \infty,$$

где $\nu \geq 0$. Тогда для любой четной или нечетной функции $f \in B_d \cap L^1_{x^\nu}(\mathbb{R}_+)$, $d > 0$, справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k |f(\xi_k)| \lesssim (1+d) \int_{\mathbb{R}_+} |f(x)| x^\nu dx, \quad (3.10)$$

где константа в неравенстве не зависит от типа d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим неотрицательную на $\mathbb{R}$ функцию $\omega \in B_2^0$, для которой $\omega(x) \asymp x^\nu$ при $x \rightarrow +\infty$. Для этого представим показатель $\nu \geq 0$ в виде $\nu = 2n - (2\alpha + 1)$, где $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq 1/2$ ($\alpha = 0$, если $\nu = 2n - 1$), и положим

$$\omega(z) = z^{2n} j_\alpha(z+i) j_\alpha(z-i).$$

Имеем $\tau(\omega) = 2$ и в силу (1.14) при $x \rightarrow +\infty$

$$\omega(x) \asymp x^{2n} x^{-2\alpha-1} (\cos(x+i-a) \cos(x-i-a) + O(x^{-1}))$$

или

$$\omega(x) \asymp x^\nu (\operatorname{ch}^2 1 \cos^2(x-a) + \operatorname{sh}^2 1 \sin^2(x-a) + O(x^{-1})) \asymp x^\nu.$$

Отсюда и из того, что все нули функции ω , кроме $z = 0$, лежат на прямых $\operatorname{Im} z = \pm 1$, следует, что $\omega(x) > 0$ при $|x| > 0$.

Пусть f – допустимая функция и положим $g = f\omega$. Тогда функция $g \in B_{d+2}$ и имеет ту же четность, что и f , поэтому $|g(x)| = |g(-x)|$, $|g'(x)| = |g'(-x)|$. Отсюда и из оценки $\omega(x) \lesssim x^\nu$, верной для любого $x \in \mathbb{R}_+$, имеем

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2 \int_{\mathbb{R}_+} |g(x)| dx \lesssim \int_{\mathbb{R}_+} |f(x)| x^\nu dx < \infty.$$

Следуя [22; гл. 3] покажем, что

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |g(\xi_k)| \lesssim \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

По теореме о среднем значении имеем

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |g(x)| dx = |g(\theta_k)| \Delta \xi_k,$$

где $\theta_k \in (\xi_k, \xi_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда, поскольку $\Delta \xi_k \gtrsim 1$, получаем

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |g(\theta_k)| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} |g(\theta_k)| \Delta \xi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |g(x)| dx = \int_0^{\infty} |g(x)| dx.$$

Из равенства

$$g(\xi_k) = g(\theta_k) - \int_{\xi_k}^{\theta_k} g'(x) dx,$$

следует, что

$$\begin{aligned} |g(\xi_k)| &\leq |g(\theta_k)| + \int_{\xi_k}^{\theta_k} |g'(x)| dx \leq |g(\theta_k)| + \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |g'(x)| dx, \\ S &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |g(\theta_k)| + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |g'(x)| dx = S_1 + \int_0^{\infty} |g'(x)| dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S \lesssim \int_0^{\infty} |g(x)| dx + \int_0^{\infty} |g'(x)| dx = \frac{1}{2} (\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|g'\|_{L^1(\mathbb{R})}).$$

Применяя неравенство Бернштейна (см. [7; гл. IV])

$$\|g'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (d+2)\|g\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

получаем

$$S \lesssim \frac{1+d+2}{2} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim (1+d) \int_{\mathbb{R}_+} |f(x)| x^\nu dx.$$

Учитывая, что $a_k = O(\xi_k^\nu)$ и $\xi_k^\nu \lesssim \omega(\xi_k)$, $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k |f(\xi_k)| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^\nu |f(\xi_k)| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} |g(\xi_k)| = S.$$

Тип d в оценках появляется только после применения неравенства Бернштейна.

Лемма 3.5 доказана.

Отметим, что неравенство (3.10) можно записать в виде

$$\|f\|_{1,d\alpha} \lesssim \|f\|_{1,x^\nu}, \quad (3.11)$$

где $\alpha(x) = \sum_{\xi_k \leq x} a_k$ — функция скачков. Неравенство (3.11) верно и в непрерывном случае $d\alpha(x) = a(x) dx$, $a(x) = O_{+\infty}(x^\nu)$.

Приведем еще один простой факт, вытекающий из леммы 3.5:

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \int_{\mathbb{R}_+} f(\theta x) d\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\alpha(x). \quad (3.12)$$

Действительно, для $\theta \in [1/2, 3/2]$ имеем

$$\begin{aligned} I &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(\theta x) d\alpha(x) - \int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\alpha(x) \right| \leq \|f(\theta x) - f(x)\|_{1,d\alpha} \\ &\lesssim (1 + \max\{\theta d, d\}) \|f(\theta x) - f(x)\|_{1,x^\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда для любого ε больше нуля

$$I \lesssim R^{\nu+1} \max_{0 \leq z \leq R} |f(\theta x) - f(x)| + \left(1 + \frac{1}{\theta^{\nu+1}}\right) \int_R^\infty |f(x)| x^\nu dx < \varepsilon,$$

если R достаточно велико, а θ достаточно близко к 1.

Оценка (3.11) и равенство (3.12) справедливы для изучаемых нами мер σ .

Завершим доказательство теоремы 3.1. По лемме 3.4 она справедлива, если функция $f \in B_{2\tau}^0$ удовлетворяет оценке (3.5).

Пусть теперь $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда в силу оценки (3.11) и леммы 3.3 интеграл $\int_{\mathbb{R}_+} f d\sigma$ и ряд $\sum_1^\infty \gamma_k f(z_k)$ сходятся абсолютно.

Пусть $\theta \in [1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1/2]$, $\theta + \varepsilon \leq 1$, $a > \nu$ и $g(z) = f(\theta z)j_{a/2}^2(\varepsilon \tau z)$. Тогда $g \in B_{2\tau}^0$, $g = O_{+\infty}(x^{-a-1})$ и можно применить лемму 3.4:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(\theta x)j_a^2(\varepsilon \tau x) d\sigma(x) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k f(\theta z_k)j_a^2(\varepsilon \tau z_k).$$

Осталось последовательно устремить ε к 0 и θ к 1, воспользовавшись при этом равенством (3.12).

Чтобы показать оптимальность типа 2τ в квадратурной формуле (3.4), воспользуемся функцией

$$f_\varepsilon(z) = \varphi^2(z)j_{a/2}^2(\varepsilon z/2) \in B_{2\tau+\varepsilon}^0,$$

где $\varepsilon > 0$, $a > 0$. Имеем $f_\varepsilon = O_{+\infty}(x^{-\nu-a-1})$, $\sum_1^\infty \gamma_k f_\varepsilon(z_k) = 0$, но $\int_{\mathbb{R}_+} f_\varepsilon d\sigma > 0$.

Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Интерполяционные формулы по нулям целых функций хорошо изучены (см., например, [23; гл. IV], [24; § 3.7]). Однако не каждая такая формула годится для построения оптимальной квадратурной формулы с положительными весами, поскольку должна выполняться лемма 3.2. А она существенно использует тот факт, что функция φ является решением задачи Штурма–Лиувилля. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае квадратурных формул на отрезке. Если система многочленов π_n не является ортогональной и не удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению, являющемуся аналогом задачи Штурма–Лиувилля, то по этой системе в общем случае нельзя построить квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности с положительными весами.

§ 4. Квадратурная формула Маркова

Продолжаем использовать результаты предыдущих параграфов. Докажем квадратурную формулу Маркова вида (1.3) с фиксированным узлом в нуле. Для этого нам потребуются удовлетворяющие свойствам 1–5 собственные функции $\varphi^0(t, z)$ задачи Штурма–Лиувилля со спектральной функцией $d\sigma_0(x) = x^2 d\sigma(x)$. Показатель ν_0 для меры σ_0 в формуле (1.6) равен $\nu + 2$.

Выведем задачу для φ^0 из задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2). Для этого положим

$$v(t) = \frac{1}{W(t)} \int_0^t u(s)w(s) ds, \quad w_0(t) = \frac{W^2(t)}{w(t)}, \quad W(t) = \int_0^t w(s) ds, \quad t \in T.$$

ЛЕММА 4.1. *Функция*

$$v = -z^{-2}wW^{-1}u'$$

является решением задачи Штурма-Лиувилля с дифференциальным уравнением

$$(w_0v')' + z^2w_0v = 0, \quad t \in T,$$

краевыми условиями вида (2.2), спектральной функцией σ_0 и собственными функциями

$$\varphi^0(t, z) = \frac{1}{W(t)} \int_0^t \varphi(s, z)w(s) ds = -z^{-2}w(t)W^{-1}(t)\varphi'_t(t, z), \quad (4.1)$$

которые удовлетворяют свойствам 1–5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя уравнение (2.1), получаем

$$wu' + z^2 \int_0^t wu ds = 0$$

или $wu' + z^2Wv = 0$ и $v = -z^{-2}wW^{-1}u'$. При этом по определению v имеем $u = w^{-1}(Wv)'$. Таким образом,

$$(w^{-1}(Wv)')' + z^2w^{-1}Wv = 0.$$

Отсюда, раскрывая производные, находим

$$(w^{-1})'(W'v + Wv') + w^{-1}(W''v + 2W'v' + Wv'') + z^2w^{-1}Wv = 0$$

или, с учетом равенства $W' = w$,

$$-w'w^{-2}(wv + Wv') + w^{-1}(w'v + 2wv' + Wv'') + z^2w^{-1}Wv = 0.$$

После упрощений имеем

$$(-w'w^{-2}W + 2)v' + w^{-1}Wv'' + z^2w^{-1}Wv = 0.$$

Умножим это равенство на W и учтем, что

$$w'_0 = (w^{-1}W^2)' = -w'w^{-2}W^2 + w^{-1}2WW' = -w'w^{-2}W^2 + 2W.$$

Получим $w'_0v' + w_0v'' + z^2w_0v = 0$ или $(w_0v')' + z^2w_0v = 0$.

Покажем, что $v(0) = u(0)$ и $v'(0) = 0$ (случай $t = l < +\infty$ рассматривается аналогично). Поскольку $u'(0) = 0$, в окрестности точки $t = 0$ имеем $u(t) = u(0) + o(t)$. Поэтому

$$v(t) = W^{-1} \int_0^t (u(0) + o(s))w ds = u(0) + o(t).$$

Теперь соотношение (4.1) для собственных функций очевидно. Найдём из него спектральную функцию. Для этого установим связь между преобразованиями Фурье задач Штурма-Лиувилля. При этом можно ограничиться плотными классами функций, удовлетворяющих теореме разложения.

Пусть $f(t)$ – гладкая функция с компактным носителем. Тогда

$$\widehat{f}_w(z) = \int_T f\varphi(t, z)w dt = \int_T f d(W\varphi^0) = \int_T g\varphi^0(t, z)w_0 dt = \widehat{g}_{w_0}(z),$$

где $g = -wW^{-1}f'$. При этом

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}_w\varphi(t, z) d\sigma,$$

откуда в силу (4.1)

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}_w(z)(-wW^{-1})\varphi'_t(t, z) d\sigma = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{g}_{w_0}(z)\varphi^0(t, z)z^2 d\sigma = \widetilde{h}_{d\sigma_0}(t),$$

где $h = \widehat{g}_{w_0}$ и $d\sigma_0 = z^2 d\sigma$. Таким образом, свойства 4, 5 можно считать выполненными.

Свойство 1 следует из общей теории задачи Штурма–Лиувилля. Имеем

$$\varphi^0(t, z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(z_k^0)^2}\right) \in B_t^0,$$

где $z_k^0 = z_k^0(t)$ – положительные нули по переменному z производной $\varphi'_t(t, z)$. Они являются собственными значениями задачи $(w_0v')' + z^2w_0v = 0$ на интервале $(0, t)$, $v'(0) = 0$, $v(t) = 0$. Так же, как и для нулей t_k , z_k , имеем $t_k^0(z_k^0) = t$, где $t_k^0(z)$ – нули уравнения $\varphi'_t(t, z) = 0$ и одновременно последовательные точки экстремума $\varphi(t, z)$. Поэтому нули t_k , t_k^0 и z_k , z_k^0 перемежаются: $t_k < t_k^0 < t_{k+1}$, $z_k < z_k^0 < z_{k+1}$.

Свойство 2 следует из равенства (4.1): для $t \in T$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$|\varphi^0(t, x)| \leq \frac{1}{W(t)} \int_0^t |\varphi(s, x)|w(s) ds \leq 1 = \varphi^0(t, 0) = \varphi^0(0, x).$$

В дополнение к свойствам 1, 2 отметим связь представлений Мелера. Пусть справедливо представление (2.9). Тогда, используя определения φ^0 , W и представляя пределы, находим

$$\varphi^0(t, z) = \frac{1}{W(t)} \int_0^t w(s) \int_0^s \cos(zu) d\mu_t(u) ds = \int_0^t \cos(zu) d\mu_t^0(u),$$

где

$$d\mu_t^0(u) = \left(1 - \frac{W(u)}{W(t)}\right) d\mu_t(u) \geq 0, \quad \int_0^t d\mu_t^0 = 1.$$

Для получения асимптотики $\varphi^0(t, z)$ (свойство 3) воспользуемся формулами (4.1) и (2.13) при $j = 1$. Тогда соответственно имеем

$$\begin{aligned} z^{\nu_0/2}\varphi^0(t, z) &= -w(t)W^{-1}(t)z^{\nu/2-1}\varphi'_t(t, z), \\ z^{\nu_0/2}\varphi^0(t, z) &= C_t^0(\cos(tz - c_t^0) + O(|z|^{-1}e^{t|\operatorname{Im} z|})), \end{aligned}$$

где $C_t^0 = wW^{-1}C_t$, $c_t^0 = c_t + \pi/2$. Отметим, что если справедливо соотношение (2.14), то аналогично

$$z^{-\nu_0/2}C_t^0 \sim \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(w_0(t)s_0(z))^{1/2}}.$$

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.1 позволяет применить квадратурную формулу Гаусса с мерой σ_0 по нулям z_k^0 . Из нее выведем квадратурную формулу Маркова.

Пусть $\tau \in T$, $\varphi^0(z) = \varphi^0(\tau, z)$ (имеем $\varphi^0(x) = O_{+\infty}(x^{-\nu/2-1})$), $z_k^0 = z_k^0(\tau)$,

$$\gamma_k^0 = \gamma_k^0(\tau) = \frac{2z_k^0}{w_0(\tau)(\varphi^0)'_t(\tau, z_k^0)(\varphi^0)'_z(\tau, z_k^0)},$$

и определим узлы $z'_k = z'_k(\tau)$ и веса $\gamma'_k = \gamma'_k(\tau)$ формулами

$$\begin{aligned} z'_0 &= 0, & \gamma'_0 &= \int_{\mathbb{R}_+} (\varphi^0)^2 d\sigma > 0, \\ z'_k &= z_k^0, & \gamma'_k &= (z_k^0)^{-2} \gamma_k^0 > 0, & k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.1. Для $\tau \in T/2$ и произвольной функции $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+)$ справедлива квадратурная формула Маркова

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma'_k f(z'_k), \quad (4.2)$$

где $\gamma'_0 = W^{-1}(\tau)$. Ряд в (4.2) сходится абсолютно.

Формула (4.2) оптимальна в том смысле, что для любого ε больше нуля существует допустимая функция $f_\varepsilon \in B_{2\tau+\varepsilon}^0 \cap L_{x^\nu}^1(\mathbb{R}_+)$, для которой равенство (4.2) неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — допустимая функция и

$$g(z) = z^{-2} \{f(z) - f(0)(\varphi^0(z))^2\} \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^{\nu_0}}^1(\mathbb{R}_+).$$

Применим к функции g формулу Гаусса с мерой σ_0

$$\int_{\mathbb{R}_+} g(x) d\sigma_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^0 g(z_k^0).$$

Имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} \{f(x) - f(0)(\varphi^0(x))^2\} d\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^0 (z_k^0)^{-2} \{f(z_k^0) - f(0)(\varphi^0(z_k^0))^2\}$$

или

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = f(0) \int_{\mathbb{R}_+} (\varphi^0(x))^2 d\sigma(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^0 (z_k^0)^{-2} f(z_k^0).$$

Отсюда с учетом определения узлов z'_k и весов γ'_k получаем равенство (4.2).

Покажем, что $\gamma'_0 = W^{-1}(\tau)$. Из формулы (4.1) следует, что

$$\varphi^0(z) = \frac{1}{W(\tau)} \int_0^\tau \varphi(t, z) w(t) dt = \int_T h(t) \varphi(t, z) w(t) dt,$$

где $h(t) = W^{-1}(\tau) \chi_{[0, \tau]}(t)$. Таким образом, $\varphi^0 = \widehat{h}$. Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\gamma'_0 = \|\varphi^0\|_{2, d\sigma}^2 = \|h\|_{2, w}^2 = W^{-2}(\tau) \int_0^\tau w(t) dt = W^{-1}(\tau).$$

Для доказательства оптимальности типа 2τ для формулы (4.2) берем функцию вида $f_\varepsilon(z) = (\varphi^0(z))^2 j_{\alpha/2}^2(\varepsilon z/2)$.

Теорема доказана.

§ 5. Примеры

Вначале сформулируем квадратурные формулы Бесселя в наших обозначениях. Они отвечают преобразованию Фурье–Ганкеля, связанному с многомерным анализом в $\mathbb{R}^n$. Затем приведем два интересных примера, также связанных с многомерным анализом на римановых многообразиях. Первый из них отвечает преобразованию Якоби и анализу на гиперboloидах $\mathbb{H}^n$. Второй пример связан с рядом Фурье по ортогональным многочленам Якоби и анализу на компактных римановых пространствах ранга 1, в частности, евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$. В конце параграфа кратко рассмотрим общий случай задачи Штурма–Лиувилля с регулярным весом.

5.1. Преобразование Фурье–Ганкеля. Квадратурные формулы Бесселя, как отмечалось во введении, были построены в работах [8], [10], [11]. Приведем их в наших обозначениях в качестве следствия из теорем 3.1, 4.1. Для этого воспользуемся свойствами преобразования Фурье–Ганкеля и нормированной функции Бесселя, изложенными выше. В результате для $\alpha \geq -1/2$ имеем:

$$\begin{aligned} s_\alpha(x) &= x^{2\alpha+1}, \quad s_{\alpha 0}(x) = x^2 s(x) = x^{2\alpha+3} = s_{\alpha+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ w_\alpha(t) &= \frac{t^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha} \Gamma^2(\alpha+1)}, \quad \varphi(t, z) = j_\alpha(tz), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ W(t) &= \int_0^t w(s) ds = \frac{t^{2\alpha+2}}{2^{2\alpha} \Gamma^2(\alpha+1)(2\alpha+2)} = \frac{tw(t)}{2\alpha+2}, \\ w_{\alpha 0}(t) &= \frac{W^2(t)}{w(t)} = \frac{t^2 w(t)}{(2\alpha+2)^2} = \frac{t^{2\alpha+3}}{2^{2\alpha+2} \Gamma^2(\alpha+2)} = w_{\alpha+1}(t), \\ \varphi^0(t, z) &= -z^{-2} w(t) W^{-1}(t) \varphi'_t(t, z) = -z^{-2} \frac{2\alpha+2}{t} (j_\alpha(tz))'_t = j_{\alpha+1}(tz). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что задачи Штурма–Лиувилля для мер $d\sigma = s_\alpha dx$ и $d\sigma_0 = s_{\alpha+1} dx$ отличаются только индексами α и $\alpha+1$. Это значительно упрощает получение формул для узлов и весов формулы Маркова.

Для $\tau > 0$, $k \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi(z) = j_\alpha(\tau z)$, $\varphi_k(t) = j_\alpha(q_k t/\tau)$,

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{q_k}{\tau}, \quad \gamma_k = \frac{2z_k}{w(\tau)\varphi'_k(\tau)\varphi'(z_k)} = \frac{2}{\tau^{2\alpha+2}} \left(\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)}{q_k j_{\alpha+1}(q_k)} \right)^2, \\ z'_k &= z_k^0 = \frac{q_{\alpha+1,k}}{\tau}, \quad \gamma'_k = (z_k^0)^{-2} \gamma_k^0 = \frac{\gamma_{\alpha+1,k}}{(z'_k)^2}, \\ z'_0 &= 0, \quad \gamma'_0 = W^{-1}(\tau) = \frac{2^{2\alpha}\Gamma^2(\alpha+1)(2\alpha+2)}{\tau^{2\alpha+2}}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для произвольной функции $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)$, $\tau > 0$, $\alpha \geq -1/2$, справедливы оптимальные по типу 2τ квадратурные формулы Гаусса и Маркова с положительными весами

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) x^{2\alpha+1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f(z_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma'_k f(z'_k),$$

где ряды сходятся абсолютно.

Это следствие полностью согласуется с результатами работ [8], [11] и теоремой 1.1, если учесть определение (1.11).

5.2. Преобразование Якоби. Необходимые свойства функций и преобразования Якоби возьмем из работ [25]–[29]. Приведем их практически дословно. При этом чуть подробнее остановимся на асимптотических свойствах функций Якоби. Затем вложим эти результаты в построенную выше схему.

Функции Якоби определяются при помощи гипергеометрической функции Гаусса равенством

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(\frac{\rho + i\lambda}{2}, \frac{\rho - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -(\operatorname{sh} t)^2\right), \quad (5.1)$$

где все параметры комплексные, $\rho = \alpha + \beta + 1$. Однако далее в примере предполагается, что $t \geq 0$ и $\alpha \geq \beta \geq -1/2$.

В частных случаях имеем

$$\varphi_\lambda^{(-1/2,-1/2)}(t) = \cos(\lambda t), \quad \varphi_\lambda^{(1/2,1/2)}(t) = \frac{2 \sin(\lambda t)}{\lambda \operatorname{sh} 2t}, \quad (5.2)$$

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\alpha)}(t) = \varphi_{\lambda/2}^{(\alpha,-1/2)}(2t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1) P_{-1/2+i\lambda/2}^{-\alpha}(\operatorname{ch} 2t)}{(\operatorname{sh} 2t)^\alpha}, \quad (5.3)$$

где P_ν^μ – функция Лежандра.

Пусть $\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$. Прямое и обратное преобразования Якоби определяются соответственно равенствами

$$Jf(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \varphi_\lambda(t) \Delta(t) dt, \quad J^{-1}f(t) = \int_0^\infty f(\lambda) \varphi_\lambda(t) s(\lambda) d\lambda,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= 2^{2\rho} (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1} (\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad s(\lambda) = (2\pi)^{-1} |c(\lambda)|^{-2}, \\ c(\lambda) &= \frac{2^{\rho-i\lambda} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2) \Gamma((\rho+i\lambda)/2 - \beta)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Преобразование Якоби является биективным преобразованием между пространством четных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем и пространством четных быстро убывающих целых функций экспоненциального типа. Эта биекция расширяется до изоморфизма между пространствами $L^2_{\Delta}(\mathbb{R}_+)$ и $L^2_s(\mathbb{R}_+)$. При этом справедливы равенства Парсеваля

$$\|Jf\|_{L^2_s(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L^2_{\Delta}(\mathbb{R}_+)}, \quad \|f\|_{L^2_s(\mathbb{R}_+)} = \|J^{-1}f\|_{L^2_{\Delta}(\mathbb{R}_+)}. \quad (5.5)$$

Теорема разложения является следствием этих утверждений.

Для $\alpha = \beta$ (случай функций Лежандра (5.3)) преобразование Якоби известно как преобразование Мелера–Фока (см. [30]). При $\alpha = \beta = -1/2$ в силу формул (5.2) и (5.4) преобразование Якоби сводится к косинус-преобразованию Фурье. Поэтому далее сосредоточимся на случае

$$\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Перечислим другие свойства функций Якоби.

1. Задача Штурма–Лиувилля: при $t, \lambda \geq 0$ функции $\varphi_{\lambda}(t)$ являются собственными функциями задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\Delta(t) \frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}(t) \right) + (\rho^2 + \lambda^2) \Delta(t) \varphi_{\lambda}(t) &= 0, \\ \varphi_{\lambda}(0) &= 1, \quad \frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

2. Формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}(t) = -\frac{(\rho^2 + \lambda^2) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{2(\alpha + 1)} \varphi_{\lambda}^{(\alpha+1, \beta+1)}(t). \quad (5.7)$$

3. Представление Мелера (см. [27]):

$$\varphi_{\lambda}(t) = \frac{C_{\alpha}}{\Delta(t)} \int_0^t A_{\alpha, \beta}(s, t) \cos(\lambda s) ds, \quad A_{\alpha, \beta}(s, t) \geq 0,$$

где константа C_{α} определена в формуле (2.11) и

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \beta}(s, t) &= 2^{\alpha+2\beta+5/2} \operatorname{sh}(2t) (\operatorname{ch} t)^{\beta-\alpha} (\operatorname{ch}(2t) - \operatorname{ch}(2s))^{\alpha-1/2} \\ &\quad \times F\left(\alpha + \beta, \alpha - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s}{2 \operatorname{ch} t}\right). \end{aligned}$$

В частности, независимо, убеждаемся, что

$$\varphi_0(t) = C_{\alpha} (\Delta(t))^{-1} \int_0^t A(s, t) ds > 0$$

при $t \geq 0$.

4. Асимптотика веса $s(\lambda)$. При $\lambda \rightarrow 0$

$$|c(\lambda)| = c_0 \lambda^{-1} (1 + O(\lambda)), \quad c_0 = \frac{2^{\rho} \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\rho/2) \Gamma(\rho/2 - \beta)}.$$

Для $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$, имеем

$$\ln \Gamma(z + a) = \left(z + a - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + O(z^{-1}).$$

Отсюда следует, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \ln c(\lambda) &= (\rho + \alpha) \ln 2 + \ln \Gamma(\alpha + 1) - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \ln(i\lambda) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + O(|\lambda|^{-1}), \\ |c(\lambda)| &= \frac{2^{\rho+\alpha} \Gamma(\alpha + 1) (2\pi)^{-1/2}}{\lambda^{\alpha+1/2}} (1 + O(|\lambda|^{-1})). \end{aligned}$$

Таким образом, для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\arg \lambda| < \pi$, имеем

$$\begin{aligned} s(\lambda) &= (2\pi)^{-1} c_0^{-2} \lambda^2 (1 + O(|\lambda|^{-1})), \quad |\lambda| \lesssim 1, \\ s(\lambda) &= (2^{\rho+\alpha} \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \lambda^{2\alpha+1} (1 + O(|\lambda|^{-1})), \quad |\lambda| \gtrsim 1. \end{aligned}$$

5. Асимптотики функций Якоби. В связи с приложениями многие авторы приводили асимптотические разложения функций Якоби (см., например, [31]). Мы затруднились найти их в нужной степени общности. Поэтому чуть подробнее остановимся на этом вопросе.

Имеем $F(a, b; c; z) = 1 + O(|z|)$, $|z| \rightarrow 0$, и при $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(-z)| < \pi$,

$$F(a, a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \ln(-z) (1 + O(|\ln(-z)|^{-1})), \quad (5.8)$$

если $c - a \notin \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ (см. [32]). Положим здесь

$$a = b = \frac{\rho}{2}, \quad c = \alpha + 1, \quad z = -(\operatorname{sh} t)^2.$$

Тогда

$$\varphi_0(t) = 1 + O(t^2), \quad t \lesssim 1. \quad (5.9)$$

Далее при $t \rightarrow +\infty$

$$\operatorname{sh} t = \operatorname{ch} t (1 + O(e^{-2t})), \quad -z = (\operatorname{sh} t)^2 = \frac{e^{2t}}{4} (1 + O(e^{-2t})). \quad (5.10)$$

Поэтому, учитывая определения (5.4), для $t \gtrsim 1$ имеем

$$\varphi_0(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1) 2t}{\Gamma(\rho/2) \Gamma(\rho/2 - \beta) (\operatorname{sh} t)^\rho} (1 + O(t^{-1})) = \frac{2c_0 t}{(\Delta(t))^{1/2}} (1 + O(t^{-1})). \quad (5.11)$$

В работе [33] доказано, что

$$F\left(a + \mu, b - \mu; c; \frac{1 - z}{2}\right) = \frac{\Gamma(c) 2^{(a+b-1)/2} (\theta \operatorname{sh} \theta)^{1/2} (I_{c-1}(\gamma\theta) + \varepsilon_1)}{\gamma^{c-1} (z - 1)^{c/2} (z + 1)^{(a+b+1-c)/2}}. \quad (5.12)$$

Здесь $z = \operatorname{ch} \theta$, $\gamma = (a - b)/2 + \mu$ и равномерно по θ и γ

$$|\varepsilon_1| \leq \frac{A_1 e^{A_2/|\gamma|}}{|\theta| |\gamma|^2 |K_c(\gamma\theta)|}, \quad |\arg(\gamma\theta)| \leq \frac{\pi}{2},$$

где A_1 и A_2 – положительные константы, не зависящие от θ и γ , I_ν и K_ν – модифицированные функции Бесселя.

ЛЕММА 5.1. При $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, равномерно по $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(t) &= \frac{1}{(\Delta(t)s(\lambda))^{1/2}} ((\lambda t)^{1/2} J_\alpha(\lambda t) + O(|\lambda|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} \lambda|})) \\ &= \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(\Delta(t)s(\lambda))^{1/2}} (\cos(\lambda t - a_\alpha) + e^{t|\operatorname{Im} \lambda|} O(|\lambda t|^{-1} + |\lambda|^{-1})),\end{aligned}\quad (5.13)$$

где константа a_α определена в формуле (1.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в равенстве (5.12)

$$a = b = \frac{\rho}{2}, \quad \mu = \frac{i\lambda}{2}, \quad c = \alpha + 1, \quad \theta = 2t.$$

Тогда

$$\begin{aligned}z &= \operatorname{ch} 2t, & \frac{1-z}{2} &= -(\operatorname{sh} t)^2, \\ \gamma &= \frac{i\lambda}{2}, & \gamma\theta &= i\lambda t, & I_{c-1}(\gamma\theta) &= i^\alpha J_\alpha(\lambda t).\end{aligned}$$

Отсюда и из определения нормированной функции Бесселя (1.11) находим

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(t) &= \frac{t^{\alpha+1/2}}{(\operatorname{sh} t)^{\alpha+1/2} (\operatorname{ch} t)^{\beta+1/2}} (j_\alpha(\lambda t) + \varepsilon), \\ \varepsilon &= 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) (i\lambda t)^{-\alpha} \varepsilon_1, \quad |\varepsilon| \lesssim \frac{e^{2A_2/|\lambda|}}{|\lambda|^{\alpha+2} t^{\alpha+1} |K_{\alpha+1}(i\lambda t)|},\end{aligned}\quad (5.14)$$

где $|\arg(i\lambda t)| \leq \pi/2$, откуда $-\pi \leq \arg \lambda \leq 0$ или $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$.

При $\alpha+1 > -1/2$ и $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| < 3\pi/2$, имеем (см. [9])

$$K_{\alpha+1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + O(|z|^{-1})).$$

Следовательно, при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ равномерно по $t > 0$

$$|K_{\alpha+1}(i\lambda t)| \asymp (|\lambda|t)^{-1/2} e^{-t|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

В результате для (5.14) имеем

$$|\varepsilon| \lesssim \frac{e^{t|\operatorname{Im} \lambda|}}{|\lambda| (|\lambda|t)^{\alpha+1/2}}.$$

Теперь, применяя (1.11), (1.14), определения (5.4) и асимптотику веса $s(\lambda)$, приходим к асимптотикам (5.13). При этом в силу $\varphi_{\bar{\lambda}}(t) = \overline{\varphi_\lambda(t)}$ и аналогичного равенства для веса $s(\lambda)$ (5.4) условие $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ можно опустить.

Лемма 5.1 доказана.

Чтобы теперь выписать квадратурную формулу Якоби, необходимо преобразовать задачу Штурма–Лиувилля (5.6) в соответствии со схемой, изложенной

в § 2 на примере задачи с уравнением (2.3). Для этого введем модифицированные функции Якоби и вес

$$\varphi(t, z) = \frac{\varphi_z(t)}{\varphi_0(t)}, \quad w(t) = (\varphi_0(t))^2 \Delta(t), \quad (5.15)$$

где $t \in T = (0, +\infty)$, $z = \lambda \in \mathbb{R}_+$. Вес $s = \sigma'$ и спектр при этом не изменяются.

Из приведенных выше свойств функций Якоби имеем

$$\begin{aligned} w(t) &\asymp \Delta(t) \asymp t^{2\alpha+1}, & t &\lesssim 1, \\ w(t) &\asymp (t(\Delta(t))^{-1/2})^2 \Delta(t) \asymp t^2, & t &\gtrsim 1, \end{aligned}$$

или $w(t) \asymp t^{(2\alpha+1,2)}$, $t > 0$, где $t^{(a,b)}$ обозначает кусочно-степенную функцию

$$t^{(a,b)} = \begin{cases} t^a, & |t| \leq 1, \\ t^b, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Для веса s имеем противоположное поведение $s(z) \asymp z^{(2,2\alpha+1)}$. Таким образом, параметр ν как и в бесселевом случае для $\alpha > -1/2$ равен $\nu = 2\alpha + 1 > 0$.

Отметим, что $w(t)s(1/t) \asymp 1$ при $t > 0$. Это свойство важно для приложений преобразования Якоби в гармоническом анализе, в частности, для доказательства неравенств Питта и их приложений (см. [34]–[36]).

Модифицированное преобразование Якоби определяется стандартными равенствами из § 2. При этом имеем следующую простую связь между преобразованиями Якоби:

$$\widehat{f}(z) = J[\varphi_0(t)f(t)](\lambda), \quad \widetilde{f}(t) = (\varphi_0(t))^{-1} J^{-1} f(t). \quad (5.16)$$

Отсюда следует необходимое равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\|_{L_s^2(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L_w^2(T)}, \quad \|f\|_{L_s^2(\mathbb{R}_+)} = \|\widetilde{f}\|_{L_w^2(T)}.$$

Выпишем еще основные свойства модифицированных функций Якоби при $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$. Используем свойства функций Якоби и результаты § 2.

1. Функции $\varphi(t, z)$ являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля

$$(wu')' + z^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \quad (5.17)$$

2. Справедливо представление Мелера

$$\varphi(t, z) = \int_0^t a(s, t) \cos(zs) ds, \quad a(s, t) = \frac{A_{\alpha, \beta}(s, t)}{\int_0^t A_{\alpha, \beta}(u, t) du} \geq 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\varphi(t, z)| &\leq \varphi(t, 0) = \varphi(0, z) = 1, & t &\in T, \quad z \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(t, z) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_k^2(t)}\right), \end{aligned}$$

где $z_k(t)$ являются положительными нулями функции Якоби $\varphi_z(t)$.

3. Из определения (5.15) по лемме 5.1 при $|z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, и фиксированном $t > 0$

$$\varphi(t, z) = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(w(t)s(z))^{1/2}} (\cos(tz - a_\alpha) + O(|z|^{-1}e^{t|\operatorname{Im} z|})),$$

где $s(z) \asymp z^{2\alpha+1} = z^\nu$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Асимптотические формулы для производных, как ранее отмечалось, вытекают из аналитичности собственных функций φ . Нужная асимптотика для φ'_t может быть получена также из (5.7) и (5.13).

Собственные функции связанной задачи Штурма–Лиувилля

$$\varphi^0 = -z^{-2}wW^{-1}(\varphi)'_t = -z^{-2}wW^{-1}\left(\frac{\varphi z}{\varphi_0}\right)'_t = -z^{-2}\Delta W^{-1}((\varphi z)'_t\varphi_0 - \varphi z(\varphi_0)'_t),$$

где $W(t) = \int_0^t w ds$, производные $(\varphi z)'_t$ в силу равенства (5.7) можно выразить через функции $\varphi_z^{(\alpha+1, \beta+1)}(t)$.

Таким образом, для модифицированного преобразования Якоби выполнены необходимые свойства и можно применить основные утверждения работы.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$, и $\varphi_z(t) = \varphi_z^{(\alpha, \beta)}(t)$ – функция Якоби. Тогда для произвольной функции $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)$, $\tau > 0$, справедливы оптимальные по типу 2τ квадратурные формулы Гаусса и Маркова с положительными весами

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x)s_{\alpha, \beta}(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f(z_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma'_k f(z'_k),$$

где z_k и z'_k , $k \in \mathbb{N}$, – положительные нули функций $\varphi_z(\tau)$ и $(\varphi_z/\varphi_0)'_t(\tau)$ соответственно, $z'_0 = 0$, $\gamma'_0 = W^{-1}(\tau)$. Ряды в них сходятся абсолютно.

Отметим, что преобразование Ганкеля и Якоби являются частными случаями преобразования Чебли–Тримеша (см. [37]), для которого многие необходимые свойства собственных функций задачи Штурма–Лиувилля известны. Интересно построить квадратурные формулы в этом случае.

5.3. Ряд Якоби. Приведем пример допустимой дискретной меры σ , связанной с рядом Фурье–Якоби (см. [9; гл. 10], [2]).

Пусть $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $T = (0, \pi)$. На интервале T рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля с дифференциальным уравнением Якоби

$$(pv')' + \left(z^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2\right)pv = 0, \quad v'(0) = v'(\pi) = 0, \quad (5.18)$$

где $\rho = \alpha + \beta + 1$,

$$p(t) = 2^\rho \sin^{2\alpha+1} \frac{t}{2} \cos^{2\beta+1} \frac{t}{2}, \quad t \in T.$$

Как и в случае с преобразованием Якоби, удобно вначале привести свойства общепринятой задачи (5.18), а затем преобразовать ее, положив $u = v/v_0$:

$$(wu')' + z^2wu = 0, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0, \quad w = v_0^2 p. \quad (5.19)$$

При этом для удобства мы сразу обозначили общий спектр через z .

Пусть $\pi_k(u)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – ортогональные многочлены Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}(u)$ с весом $(1-u)^\alpha(1+u)^\beta$, $u \in [-1, 1]$, и нормировкой $\pi_k(1) = 1$. Тогда собственными функциями задачи (5.18), регулярными в краевых точках, являются косинус-многочлены $\pi_k(\cos t)$. При этом собственные значения находятся из равенства

$$z^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 = k(k + \rho).$$

Поэтому общей спектральной функцией σ для задач (5.18) и (5.19) является функция скачков

$$\sigma(z) = \sum_{\zeta_k \leq z} s_k, \quad \zeta_k = k + \frac{\rho}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$s_k = \left(\int_0^\pi \pi_k^2(\cos t) p(t) dt \right)^{-1} = 2^{-\rho} (2k + \alpha + \beta + 1) \binom{k + \alpha}{k} \binom{k + \alpha + \beta}{k + \beta},$$

кроме случая $\alpha = \beta = -1/2$, $k = 0$, когда $s_0 = 1/\pi$. Интеграл по мере σ является взвешенной суммой по скачкам:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k f(\zeta_k).$$

Для $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\zeta_k = k + O(k^{-1}), \quad s_k = s(\zeta_k)(1 + O(k^{-1})) \asymp \zeta_k^\nu,$$

где $s(z) = 2^{1-\rho} \Gamma^{-2}(\alpha + 1) z^{2\alpha+1}$ и $\nu = 2\alpha + 1 \geq 0$.

Собственные функции задачи (5.18), удовлетворяющие начальным условиям $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$, выражаются через гипергеометрическую функцию:

$$\phi_z(t) = \phi_z^{(\alpha, \beta)}(t) = F\left(\frac{\rho}{2} + z, \frac{\rho}{2} - z; \alpha + 1; \sin^2 \frac{t}{2}\right). \quad (5.20)$$

При этом $\pi_k(\cos t) = \phi_{\zeta_k}(t)$. Соответственно собственными функциями задачи (5.19) и весом будут

$$\varphi(t, z) = \frac{\phi_z(t)}{\phi_0(t)}, \quad w = \phi_0^2 p.$$

Если $f \in L_w^2(T)$, то $\widehat{f}(z) = \int_0^\pi f(t) \varphi(t, z) w(t) dt$ и

$$\widehat{f}(\zeta_k) = \int_0^\pi \phi_0(t) f(t) \pi_k(\cos t) p(t) dt = \widehat{g}_k,$$

где $\widehat{f}_k$ – коэффициенты Фурье–Якоби функции $g = \phi_0 f$. При этом

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(x) \varphi(t, x) d\sigma(x)$$

или

$$g(t) = \phi_0(t) \sum_{k=0}^{\infty} s_k \widehat{f}(\zeta_k) \varphi(t, \zeta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \widehat{g}_k \pi_k(\cos t).$$

Это классический ряд Фурье–Якоби функции g , для которого теорема разложения общеизвестна.

Сравнивая определения собственных функций (5.20) и функций Якоби (5.1) для комплексных t и z , имеем

$$\begin{aligned} \phi_z(t) &= \varphi_{2z/i}^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{it}{2}\right), \quad \Delta_{\alpha, \beta}\left(\frac{it}{2}\right) = 2^\rho i^{2\alpha+1} p(t), \\ s_{\alpha, \beta}\left(\frac{2z}{i}\right) &= \frac{(2z/i)^{2\alpha+1}}{(2^{\rho+\alpha} \Gamma(\alpha+1))^2} (1 + O(|z|^{-1})), \quad |z| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Поэтому многие свойства этих функций похожи.

В частности, справедливо представление Мелера

$$\phi_z(t) = \frac{C_\alpha}{p(t)} \int_0^t A(s, t) \cos(zs) ds,$$

где

$$A(s, t) = 2^{\beta+1/2} \sin t \cos^{\beta-\alpha} \frac{t}{2} (\cos s - \cos t)^{\alpha-1/2} F\left(\alpha + \beta, \alpha - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \zeta\right),$$

$$\zeta = \frac{\cos(t/2) - \cos(s/2)}{2 \cos(t/2)}.$$

Здесь

$$F\left(\alpha + \beta, \alpha - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \zeta\right) = \frac{F(\alpha + \beta, \beta + 1/2; \alpha + 1/2; \zeta/(\zeta - 1))}{(1 - \zeta)^{\alpha+\beta}}.$$

Для $\zeta \leq 0$ имеем $\zeta/(\zeta - 1) \in [0, 1)$, поэтому $A(s, t) \geq 0$.

Кроме того, в силу (5.12), как и при выводе (5.13), справедлива асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} \phi_z(t) &= \frac{t^{\alpha+1/2}}{2^{\alpha+1/2} \sin^{\alpha+1/2}(t/2) \cos^{\beta+1/2}(t/2)} (j_\alpha(tz) + \varepsilon), \\ |\varepsilon| &\lesssim \frac{1}{t^{\alpha+1} |z|^{\alpha+2} |K_{\alpha+1}(-itz)|}, \quad |K_{\alpha+1}(-itz)| \asymp (t|z|)^{-1/2} e^{-t \operatorname{Im} z}, \end{aligned}$$

где $|\arg(-itz)| \leq \pi/2$, откуда $0 \leq \arg \lambda \leq \pi$ или $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Таким образом, при $|z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, фиксированном $t \in T$

$$\phi_z(t) = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(p(t)s(z))^{1/2}} (\cos(tz - a_\alpha) + O(|z|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} z|})),$$

где $s(z) = 2^{1-\rho} \Gamma^{-2}(\alpha+1) z^\nu$. Эта оценка согласуется с равенствами (5.21).

Как и в случае преобразования Якоби для функций $\varphi(t, z)$ и $\varphi^0(t, z)$, необходимые свойства следуют из приведенных выше свойств функций $\phi_z(t)$. Отметим только, что

$$W(t) = \int_0^t w \, ds = \int_0^t \phi_0^2 p \, ds.$$

Таким образом, для ряда Фурье–Якоби можно применить основные утверждения работы.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ и $\phi_z(t) = \phi_z^{(\alpha, \beta)}(t)$ – функция Якоби. Тогда для произвольной функции $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{x^{2\alpha+1}}^1(\mathbb{R}_+)$, $\tau > 0$, справедливы оптимальные по типу 2τ квадратурные формулы Гаусса и Маркова с положительными весами

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k f(\zeta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f(z_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma'_k f(z'_k),$$

где z_k и z'_k , $k \in \mathbb{N}$, – положительные нули функций $\phi_z(\tau)$ и $(\phi_z/\phi_0)'_t(\tau)$ соответственно, $z'_0 = 0$, $\gamma'_0 = W^{-1}(\tau)$. Все ряды сходятся абсолютно.

В качестве тестового примера рассмотрим случай $\alpha = \beta = -1/2$. Имеем косинус-задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} u'' + z^2 u &= 0, & u'(0) &= u'(\pi) = 0, & w(t) &= 1, \\ \varphi(t, z) &= \cos(tz), & \zeta_k &= k, & \pi_k(\cos t) &= \cos(kt), \\ s_k &= \|\cos(kt)\|_{L^2(0, \pi)}^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & k = 0, \\ \frac{2}{\pi}, & k > 0, \end{cases} & \nu &= 0. \end{aligned}$$

Для связанной задачи Штурма–Лиувилля имеем $W = \int_0^t ds = t$, $w_0 = t^2$ и

$$\varphi^0(t, z) = \frac{1}{t} \int_0^t \cos(zs) \, ds = \frac{\sin(zt)}{zt} = -z^2 t^{-1} (\cos(zt))'_t.$$

Пусть $\tau \in T = (0, \pi)$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi'_t(t, z) &= -z \sin(tz), & \varphi'_z(t, z) &= -t \sin(tz), \\ z_k(\tau) &= \frac{\pi(k - 1/2)}{\tau}, & \varphi'_k(\tau) &= -z_k \sin(\tau z_k), & \varphi'(z_k) &= -\tau \sin(\tau z_k), \end{aligned}$$

поэтому

$$\gamma_k(\tau) = \frac{2z_k}{w(\tau)\varphi'_k(\tau)\varphi'(z_k)} = \frac{2}{\tau}.$$

Аналогично для $k \in \mathbb{N}$

$$z'_k = z_k^0 = \frac{\pi k}{\tau}, \quad \gamma_k^0 = \frac{2z_k^0}{w_0(\tau)(\varphi^0)'_t(\tau, z_k^0)(\varphi^0)'_z(\tau, z_k^0)} = \frac{2(\pi k)^2}{\tau^3}, \quad \gamma'_k = \frac{2}{\tau}.$$

При $k = 0$ имеем $z'_0 = 0$, $\gamma'_0 = W^{-1}(\tau) = \tau^{-1}$.

Пусть $f \in B_{2\tau}^0 \cap L_{d\sigma}^1(\mathbb{R}_+)$, $\tau \in T/2 = (0, \pi/2)$. В данном случае это означает, что

$$f \in B_{2\tau}^0, \quad |f(0)| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty.$$

Тогда справедливы квадратурные формулы Гаусса и Маркова

$$\frac{1}{\pi} f(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{2}{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi(k-1/2)}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} f(0) + \frac{2}{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{\tau}\right).$$

Отметим, что эти равенства являются простым следствием формулы суммирования Пуассона (1.9): все они равны

$$\pi^{-1} \hat{f}(0) = 2\pi^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} f dz.$$

5.4. Задача Штурма–Лиувилля с регулярным весом. Выше были рассмотрены сингулярные задачи Штурма–Лиувилля, когда вес w дифференциального уравнения обращается в нуль на границе интервала T . Больше общей информации представлено для случая регулярного веса w , когда $w > 0$ на границе T (см. [12], [19], [20], [38], [39]).

Для простоты рассмотрим случай $T = (0, +\infty)$ и непрерывного спектра. В приведенных источниках задача Штурма–Лиувилля изучается в виде

$$y''(t) + (\lambda - q(t))y(t) = 0 \quad (5.22)$$

с краевым условием

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad 0 \leq h < +\infty, \quad (5.23)$$

или

$$y(0) = 0, \quad h = +\infty.$$

Отметим, что случай $h = +\infty$ исследован не так подробно.

Пусть спектр задачи $\lambda = z^2 \geq 0$, спектральная функция $\sigma \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и вес $s = \sigma'$. Достаточные условия на функцию q , когда выполняются эти предположения, можно найти в приведенных источниках.

Через $y(t, z)$ обозначим решение задачи Штурма–Лиувилля с начальными условиями $y(0, z) = 1$, $y'(0, z) = h$ для $h < +\infty$ или $y(0, z) = 0$, $y'(0, z) = 1$ для $h = +\infty$ соответственно. Тогда известно из [12], [38], что при $|z| \rightarrow \infty$

$$y(t, z) = \cos(tz) + O(|z|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} z|}), \quad s(z) = \frac{2}{\pi} (1 + O(|z|^{-1}))$$

для $h < +\infty$ и

$$zy(t, z) = \cos\left(tz - \frac{\pi}{2}\right) + O(|z|^{-1} e^{t|\operatorname{Im} z|}), \quad s(z) = \frac{2}{\pi} z^2 (1 + O(|z|^{-1}))$$

для $h = +\infty$. При этом для $h < +\infty$

$$y(t, z) = \cos(tz) + \int_0^t L_1(t, u) \cos(zu) du,$$

где ядро $L_1 \geq 0$, если, например, $q \geq 0$ (см. [39]).

Свойства нулей собственных функций и достаточные условия справедливости теоремы разложения также общеизвестны.

Для сведения задачи к стандартной вновь полагаем $u = y/y_0$. В случае $h < +\infty$ удобно взять $y_0(t) = y(t, 0)$, тогда собственными функциями стандартной задачи будут $\varphi(t, z) = y(t, z)/y(t, 0)$. Спектральная функция и спектр не изменяются, вес $w = y_0^2$,

$$\varphi(t, z) = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(w(t)s(z))^{1/2}} (\cos(tz) + O(|z|^{-1}e^{t|\operatorname{Im} z|})),$$

$$\varphi(t, z) = \int_0^t \cos(zu) d\mu_t(u).$$

Связанная задача Штурма–Лиувилля вводится обычным образом.

В качестве примера, который можно вложить в нашу схему, упомянем преобразование Вебера–Оппа (см. [20; § 21], [9; гл. 7]):

$$f(t) = \int_0^\infty \hat{f}(x)y(t, x)x dx, \quad \hat{f}(x) = \int_a^\infty f(t)y(t, x) dt,$$

где

$$y(t, z) = \frac{\sqrt{t}(J_\alpha(tz)Y_\alpha(az) - J_\alpha(az)Y_\alpha(tz))}{\{(J_\alpha(az))^2 + (Y_\alpha(az))^2\}^{1/2}}, \quad a > 0.$$

В этом случае имеем дифференциальное уравнение Бесселя

$$y'' + \left(z^2 - \frac{\alpha^2 - 1/4}{t^2}\right)y = 0, \quad t \geq a, \quad y(a) = 0.$$

Для сведения задачи к стандартной требуется сдвинуть аргумент t и выполнить описанные преобразования.

Список литературы

- [1] В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов*, Физматгиз, М., 1959, 327 с.; англ. пер.: V. I. Krylov, *Approximate calculation of integrals*, The Macmillan Co., New York–London, 1962, x+357 pp.
- [2] Г. Cere, *Ортгогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962, 500 с.; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1959, ix+421 pp.
- [3] W. Gautschi, “Orthogonal polynomials and quadrature”, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **9** (1999), 65–76 (electronic).
- [4] Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, “Одна экстремальная задача для многочленов, связанная с кодами и дизайнами”, *Матем. заметки*, **67**:4 (2000), 508–513; англ. пер.: D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, “An extremum problem for polynomials related to codes and designs”, *Math. Notes*, **67**:4 (2000), 433–438.
- [5] В. А. Юдин, “Код и дизайн”, *Дискрет. матем.*, **9**:2 (1997), 3–11; англ. пер.: V. A. Yudin, “Codes and designs”, *Discrete Math. Appl.*, **7**:2 (1997), 147–155.
- [6] V. I. Levenshtein, “Universal bounds for codes and designs”, *Handbook of coding theory*, v. 1, North-Holland, Amsterdam, 1998, 499–648.
- [7] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965, 407 с.; нем. пер.: N. I. Achieser, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Math. Lehrbücher und Monogr., **II**, Akademie-Verlag, Berlin, 1967, xiii+412 pp.

- [8] C. Frappier, P. Oliver, “A quadrature formula involving zeros of Bessel functions”, *Math. Comp.*, **60**:201 (1993), 303–316.
- [9] Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1966, 295 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. II, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1953, xvii+396 pp.
- [10] G. R. Grozev, Q. I. Rahman, “A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes”, *Math. Comp.*, **64**:210 (1995), 715–725.
- [11] R. B. Ghanem, C. Frappier, “Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type”, *J. Approx. Theory*, **92**:2 (1998), 267–279.
- [12] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию*, Наука, М., 1970, 672 с.; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators*, Transl. Math. Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, xi+525 pp.
- [13] Д. В. Горбачев, “Экстремальная задача для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами”, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **6**:1 (2000), 71–78.
- [14] Д. В. Горбачев, “Экстремальные задачи для целых функций экспоненциально-сферического типа”, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 179–187; англ. пер.: D. V. Gorbachev, “Extremum problems for entire functions of exponential spherical type”, *Math. Notes*, **68**:2 (2000), 159–166.
- [15] Д. В. Горбачев, “Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре”, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 346–352; англ. пер.: D. V. Gorbachev, “Extremum problem for periodic functions supported in a ball”, *Math. Notes*, **69**:3 (2001), 313–319.
- [16] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 338–348; англ. пер.: A. V. Ivanov, V. I. Ivanov, “Optimal arguments in Jackson’s inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$ ”, *Math. Notes*, **94**:3 (2013), 320–329.
- [17] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, ГТТИ, М.–Л., 1933, 528 с.; пер. с нем.: R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, v. I, Grundlehren Math. Wiss., **12**, J. Springer, Berlin, 1931, xiv+469 pp.
- [18] Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, т. 1, ИЛ, М., 1960, 278 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1946, 175 pp.
- [19] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988, 432 с.; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **59**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, xii+350 pp.
- [20] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969, 526 с.; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Naimark, *Linear differential operators*, v. I, II, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1967, 1968, xiii+144 pp., xv+352 pp.
- [21] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978, 375 с.; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Introduction to asymptotics and special functions*, Academic Press, New York, 1974, xii+297 pp.
- [22] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 455 с.; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol’skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975, viii+418 pp.

- [23] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956, 632 с.; англ. пер.: В. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964, viii+493 pp.
- [24] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е изд., Наука, М., 1979, 320 с.; англ. пер. 1-го изд.: М. А. Evgrafov, *Asymptotic estimates and entire functions*, Gordon and Breach, Inc., New York, 1961, x+181 pp.
- [25] М. Flensted-Jensen, Т. Н. Koornwinder, “The convolution structure for Jacobi function expansions”, *Ark. Mat.*, **11**:1-2 (1973), 245–262.
- [26] М. Flensted-Jensen, Т. Н. Koornwinder, “Jacobi functions: the addition formula and the positivity of the dual convolution structure”, *Ark. Mat.*, **17**:1-2 (1979), 139–151.
- [27] Т. Koornwinder, “A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform”, *Ark. Mat.*, **13**:1-2 (1975), 145–159.
- [28] Т. Н. Koornwinder, “Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups”, *Special functions: group theoretical aspects and applications*, Math. Appl., Reidel, Dordrecht, 1984, 1–85.
- [29] N. Ben Salem, K. Trimèche, “Mehler integral transforms associated with Jacobi functions with respect to the dual variable”, *J. Math. Anal. Appl.*, **214**:2 (1997), 691–720.
- [30] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представления групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991, 576 с.; англ. пер. 1-го изд.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Monogr., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968, x+613 pp.
- [31] W. O. Bray, M. A. Pinsky, “Pointwise Fourier inversion on rank one symmetric spaces and related topics”, *J. Funct. Anal.*, **151**:2 (1997), 306–333.
- [32] Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, М., 1965, 294 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. I, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1953, xxvi+302 pp.
- [33] D. S. Jones, “Asymptotics of the hypergeometric function”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **24**:6 (2001), 369–389.
- [34] L. De Carli, D. Gorbachev, S. Tikhonov, “Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms”, *J. Math. Anal. Appl.*, **408**:2 (2013), 762–774.
- [35] D. Gorbachev, E. Liflyand, S. Tikhonov, “Weighted Fourier inequalities: Boas’ conjecture in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Anal. Math.*, **114**:1 (2011), 99–120.
- [36] D. Gorbachev, S. Tikhonov, “Moduli of smoothness and growth properties of Fourier transforms: two-sided estimates”, *J. Approx. Theory*, **164**:9 (2012), 1283–1312.
- [37] N. B. Andersen, “On real Paley–Wiener theorems for certain integral transforms”, *J. Math. Anal. Appl.*, **288**:1 (2003), 124–135.
- [38] Б. М. Левитан, “Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:1 (1955), 33–58.
- [39] Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщенного сдвига*, Наука, М., 1973, 312 с.

Дмитрий Викторович Горбачев
(Dmitriy V. Gorbachev)
 Тульский государственный университет
E-mail: dv@mail.ru

Поступила в редакцию
 31.07.2014 и 14.11.2014

Валерий Иванович Иванов
(Valeriy I. Ivanov)
 Тульский государственный университет
E-mail: ivaleryi@mail.ru