Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Главный член асимптотики Планшереля–Ротаха для решений рекуррентных соотношений, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 12, 17–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:11:32

УДК 517.53

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

Главный член асимптотики Планшереля–Ротаха для решений рекуррентных соотношений

Рассматриваются рекуррентные соотношения, порождающие многочлены Паде и Эрмита–Паде. Коэффициенты рассматриваемых соотношений растут вместе с их номером, но после деления на масштабирующую функцию (в соответствующей степени) они имеют конечные пределы. В результате после масштабирования переменной многочлены “стабилизируются” при больших номерах; такой вид асимптотик называется асимптотиками Планшереля–Ротаха. В работе получена формула для главного члена асимптотики вне множеств, содержащих нули многочленов, в широких классах трех- и четырехчленных соотношений. Для трехчленных рекуррентных соотношений полученный результат обобщает теорему Ван Ассше, доказанную для “регулярно” растущих коэффициентов рекуррентных соотношений.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения высокого порядка, совместно ортогональные многочлены, аппроксимации Эрмита–Паде, разностные операторы.

DOI: 10.4213/sm8416

§ 1. Введение

Пусть $\{P_n\}$ – последовательность многочленов, порожденных рекуррентными соотношениями

$$P_{n+1}(x) = (x - a_n) P_n(x) + b_n P_{n-1}(x) + \dots + c_n P_{n-d}(x) \quad (1.1)$$

с начальными условиями $P_0 = 1$, $P_{-k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Таким соотношениям удовлетворяют знаменатели *диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде* для набора d степенных рядов или *совместно ортогональные многочлены* (см. определения и детали в [1], [2]). Трехчленные соотношения при $d = 1$ определяют знаменатели *аппроксимаций Паде* и *ортогональные многочлены*.

В случае, когда коэффициенты рекуррентных соотношений (1.1) имеют при $n \rightarrow \infty$ конечные пределы

$$a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b, \quad \dots, \quad c_n \rightarrow c \neq 0, \quad |a|, |b|, \dots, |c| < \infty,$$

нахождение главного члена асимптотики при $n \rightarrow \infty$ последовательности $\{P_n\}$ восходит к замечательной теореме Пуанкаре [3], доказательство которой даже в современных изложениях требует сложного и тонкого анализа (см. [4], [5]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

Напомним, что главный член асимптотики в этом случае выражается через корень характеристического многочлена

$$\lambda^{d+1}(x) = (x - a)\lambda^d(x) + b\lambda^{d-1}(x) + \dots + c, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Когда же коэффициенты в соотношении (1.1) стремятся к бесконечности, ситуация становится гораздо сложнее, общих теорем нет, имеются некоторые результаты, относящиеся к трехчленным рекуррентным соотношениям.

Можно выделить случай согласованного роста коэффициентов в (1.1), когда существует масштабирующий множитель $\varphi(\cdot)$ такой, что $\varphi(n) \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и

$$\frac{a_n}{\varphi(n)} \rightarrow \alpha, \quad \frac{b_n}{\varphi(n)^2} \rightarrow \beta, \quad \dots, \quad \frac{c_n}{\varphi(n)^{d+1}} \rightarrow \gamma \neq 0, \quad |\alpha|, |\beta|, |\gamma| < \infty. \quad (1.2)$$

При этом для больших n можно ожидать “стабилизации” величин

$$\tilde{P}_n(x) := \frac{P_n(x)}{\prod_{k=1}^n \varphi(k)},$$

когда $|x|$ порядка $\varphi(n)$, и естественно задать вопрос об асимптотике при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{P}_n(x_n), \quad \frac{\varphi(n)}{x_n} \rightarrow t \in K_0 \quad (1.3)$$

на некотором компакте K_0 , содержащем точку 0. Асимптотики вида (1.3) называют *асимптотиками Планшереля–Ротаха* (они впервые появились в [6] для многочленов Эрмита). Общий метод получения глобальных асимптотических разложений Планшереля–Ротаха для многочленов, задаваемых рекуррентными соотношениями, был предложен в [7] и развит в [8]. Однако бывают ситуации, когда исходя из более слабых условий на коэффициенты рекуррентных соотношений достаточно определить главный член асимптотики, т. е. речь идет о пределах при $\varphi(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, функций

$$\frac{1}{n} \ln |\tilde{P}_n(x_n)|, \quad \text{где} \quad \frac{\varphi(n)}{x_n} \in K_0.$$

Именно получению таких асимптотик и посвящена настоящая работа. Мы исследуем трех- и четырехчленные рекуррентные соотношения (1.1) с единственным общим условием на растущие коэффициенты (1.2): существует непрерывная, монотонная на $\mathbb{R}_+$ и постоянная на $[0, 1]$ функция φ , для которой при $n \rightarrow \infty$

$$\varphi(n) \rightarrow \infty, \quad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \rightarrow 1. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) впервые появилось в работе Неваи и Дегезы [9] для трехчленных рекуррентных соотношений.

В следующих двух пунктах введения мы сформулируем и обсудим результаты работы. Параграфы 2, 3 и 4 посвящены доказательству теорем. Наконец, в § 5 мы приводим пример, иллюстрирующий основной результат.

1.1. Трехчленные рекурренции.

$$P_{n+1}(x) = (x - a_n)P_n(x) + b_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1, \quad (1.5)$$

для коэффициентов которых существует масштабирующая функция $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющая (1.4) и

$$\frac{a_n}{\varphi(n)} \rightarrow \alpha, \quad \frac{b_n}{\varphi(n)^2} \rightarrow \beta \neq 0. \quad (1.6)$$

Для решений (1.5)

$$\vec{V}(n) := \begin{pmatrix} P_n \\ \varphi(n)P_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{V}(n+1) := \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ \varphi(n+1)P_n \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

запишем трансляционное соотношение $\vec{V}(n+1) = \varphi(n+1)A_n \vec{V}(n)$, где значения элементов матриц перехода A_n в точках x_n имеют предел

$$A_n := \begin{pmatrix} \frac{x_n - a_n}{\varphi(n+1)} & \frac{b_n}{\varphi(n+1)\varphi(n)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A(t), \quad \text{когда } \frac{\varphi(n)}{x_n} \rightarrow t, \quad (1.8)$$

при $n \rightarrow \infty$. Введем следующие обозначения:

- $\{\lambda_j(t)\}_{j=1}^2$ – собственные значения предельной матрицы перехода A , занумерованные так, что $|\lambda_1(t)| \geq |\lambda_2(t)|$;
- Ω – максимальная содержащая нуль область такая, что для $t \in \Omega \setminus \{0\}$ справедливо $|\lambda_1(t)| > |\lambda_2(t)|$ и

$$F := \bigcup_{\theta \in [1, \infty)} \theta \Omega^c, \quad \Omega^c := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega. \quad (1.9)$$

В настоящей работе доказана

ТЕОРЕМА 1.1. *Для многочленов P_n , определяемых рекуррентными соотношениями (1.5) с коэффициентами, удовлетворяющими предельным соотношениям (1.6) с масштабирующей функцией $\varphi(\cdot)$ (1.4), справедливо*

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_n(x_n)}{\prod_{k=1}^n \varphi(k)} \right| = \int_0^1 \ln \left| \lambda_1 \left(\frac{\varphi(n\xi)}{x_n} \right) \right| d\xi + o(1) \quad (1.10)$$

при $n \rightarrow \infty$ и для таких последовательностей $\{x_n\}$, что

$$\frac{\varphi(n)}{x_n} \in K \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Отметим, что когда соотношения (1.5) определяют многочлены, ортогональные на $\mathbb{R}$ относительно положительной меры, т.е. когда $a_n \in \mathbb{R}$ и $b_n \in \mathbb{R}_+$, тогда множество F представляет собой два луча действительной оси, дополняющих отрезок, содержащий точку нуль. В общей ситуации многочленов Паде множество F может быть гораздо сложнее, например может иметь непустую внутренность.

Частный случай теоремы 1.1 был доказан ранее Ван Ассше [10] (см. также [11], [12]). Речь идет об ортогональных многочленах для $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, и на масштабирующую функцию вместо условия Неваи–Дегезы (1.4) наложено более ограничительное условие *регулярно растущих коэффициентов*:

$$\varphi(\cdot), \quad \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}_+, \quad \text{для всех } s > 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad \frac{\varphi(xs)}{\varphi(x)} \rightarrow s^\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Надо сказать, что все основные примеры классических ортогональных многочленов имеют регулярно растущие коэффициенты рекуррентных соотношений. Для многочленов Эрмита $\gamma = 1/2$, для многочленов Лагерра, Мейкснера и Мейкснера–Поллачека $\gamma = 1$.

1.2. Четырехчленные рекуррентные соотношения. Рассмотрим соотношения для диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде при $d = 2$

$$\begin{cases} P_{n+1,n}(x) = (x - a_n^{(1)})P_{n,n}(x) + b_n^{(1)}P_{n,n-1}(x) + c_n^{(1)}P_{n-1,n-1}(x), \\ P_{n+1,n+1}(x) = (x - a_n^{(2)})P_{n+1,n}(x) + b_n^{(2)}P_{n,n}(x) + c_n^{(2)}P_{n,n-1}(x). \end{cases} \quad (1.12)$$

В случае коэффициентов $\{a_n^{(i)}, b_n^{(i)}, c_n^{(i)}\}$, растущих при $n \rightarrow \infty$, мы рассматриваем ситуации, когда масштабирование (зависящее от n) переменной x приводит к соотношениям с коэффициентами, имеющими конечные пределы при $n \rightarrow \infty$. То есть мы предполагаем существование функции $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющей условию Неваи–Дегезы (1.4) и такой, что

$$\begin{cases} \frac{a_n^{(1)}}{\varphi(n+1)} \rightarrow \alpha_1, & \frac{b_n^{(1)}}{\varphi(n)\varphi(n+1)} \rightarrow \beta_1, & \frac{c_n^{(1)}}{\varphi^2(n)\varphi(n+1)} \rightarrow \gamma_1, \\ \frac{a_n^{(2)}}{\varphi(n+1)} \rightarrow \alpha_2, & \frac{b_n^{(2)}}{\varphi^2(n+1)} \rightarrow \beta_2, & \frac{c_n^{(2)}}{\varphi(n)\varphi^2(n+1)} \rightarrow \gamma_2, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$. Векторы

$$\vec{V}_1 := \begin{pmatrix} P_{n,n} \\ P_{n,n-1} \\ P_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 := \begin{pmatrix} P_{n+1,n} \\ P_{n,n} \\ P_{n,n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_3 := \begin{pmatrix} P_{n+1,n+1} \\ P_{n+1,n} \\ P_{n,n} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

связаны матрицами перехода

$$A_n^{(1)}\vec{V}_1 = \vec{V}_2, \quad A_n^{(2)}\vec{V}_2 = \vec{V}_3, \quad A_n = A_n^{(1)} \cdot A_n^{(2)}, \quad (1.15)$$

имеющими при $n \rightarrow \infty$ в точках x_n таких, что $\frac{\varphi(n)}{x_n} \rightarrow t$, пределы

$$A^{(1)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^{(2)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Обозначим через $\{\lambda_j(t)\}_{j=1}^3$ собственные значения матрицы $A := A^{(1)}A^{(2)}$, и пусть $\lambda_1(t)$ имеет максимальный модуль

$$|\lambda_1(t)| \geq \max(|\lambda_2(t)|, |\lambda_3(t)|). \quad (1.17)$$

Пусть Ω – максимальная область, содержащая точку 0, такая, что для $t \in \Omega \setminus \{0\}$ справедливо

$$|\lambda_1(t)| > |\lambda_j(t)|, \quad j = 2, 3. \quad (1.18)$$

Введем также обозначение

$$F := \bigcup_{\theta \in [1, \infty)} \theta \Omega^c, \quad \Omega^c := \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad (1.19)$$

$O_\varepsilon(\Omega^c)$ – окрестность Ω^c .

Сформулируем основной результат работы:

ТЕОРЕМА 1.2. *Для многочленов $P_{n,n}$, определяемых рекуррентными соотношениями (1.12) с коэффициентами, удовлетворяющими предельным соотношениям (1.13) с масштабирующей функцией $\varphi(\cdot)$ (1.4), справедливы равенства*

$$\frac{P_{n,n}(x_n)}{\varphi^2(n)P_{n-1,n-1}(x_n)} = \lambda_1\left(\frac{\varphi(n)}{x_n}\right) + o(1), \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{n,n}(x_n)}{\prod_{k=1}^n \varphi^2(k)} \right| = \int_0^1 \ln \left| \lambda_1\left(\frac{\varphi(n\xi)}{x_n}\right) \right| d\xi + o(1) \quad (1.21)$$

при $n \rightarrow \infty$ и таких последовательностях $\{x_n\}$, что

$$\frac{\varphi(n)}{x_n} \in K \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

Эта теорема была анонсирована в [13]. Асимптотики отношения (1.20) для аппроксимаций Эрмита–Паде также исследовались в [14].

Для доказательства теоремы нам понадобится

ЛЕММА 1.1. *Для матрицы $A(t)$ из (1.15), (1.16) существует представление*

$$A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \omega(t) \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vec{u}_3^T \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где вектор-столбцы $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^3$ и $\{\vec{u}_j\}_{j=1}^3$ удовлетворяют соотношениям

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vec{u}_3^T \end{pmatrix} = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\max(\|\vec{v}_j(t)\|, \|\vec{u}_j(t)\|, |\omega(t)|) < \infty, \quad t \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.25)$$

и $\lambda_j(t)$, $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$, $\omega(t)$ непрерывны по t на каждом связном участке произвольного луча $\arg t = \text{const}$, лежащем в области Ω , непрерывность равномерная по положению луча для $t \notin O_\varepsilon(\Omega^c)$.

В § 2 мы докажем теорему 1.2 в предположении справедливости леммы 1.1, а затем в § 3 приведем доказательство леммы.

§ 2. Доказательство теоремы 1.2

Утверждения теоремы 1.2 мы будем выводить из формулы асимптотики отношения (1.20), где режим при $n \rightarrow \infty$ определен в (1.22). Заметим, что при этом из (1.4) сразу вытекает $|x_n| \rightarrow \infty$. Следуя [15], запишем левую часть (1.21) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{n,n}(x_n)}{\prod_{k=1}^n \varphi^2(k)} \right| &= 2 \ln |x_n| + \frac{1}{n} \sum_{k=k_0+1}^n \ln \left| \frac{P_{k,k}(x_n)}{x_n^2 \varphi^2(k) P_{k-1,k-1}(x_n)} \right| \\ &\quad + \frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{k_0,k_0}(x_n)}{x_n^{2k_0}} \prod_{k=1}^{k_0} \varphi^2(k) \right| \end{aligned}$$

и, считая k_0 фиксированным (в отличие от n и $\{x_n\}$), проведем простую оценку

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{k_0,k_0}(x_n)}{x_n^{2k_0}} \prod_{k=1}^{k_0} \varphi^2(k) \right| = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по выбору последовательности $\{x_n\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{n,n}(x_n)}{\prod_{k=1}^n \varphi^2(k)} \right| &= 2 \ln |x_n| + \int_0^1 \ln \left| \frac{P_{[n\xi],[n\xi]}(x_n)}{x_n^2 \varphi^2(n\xi) P_{[n\xi]-1,[n\xi]-1}(x_n)} \right| d\xi + o(1) \\ &= \int_0^1 \ln \left| \frac{P_{[n\xi],[n\xi]}(x_n)}{\varphi^2(n\xi) P_{[n\xi]-1,[n\xi]-1}(x_n)} \right| d\xi + o(1). \end{aligned}$$

Последнее соотношение и (1.20) (с учетом того, что $\lambda_1(t) \neq 0$, так как $\det A$ не зависит от t – см. (1.16)) приводят к (1.21).

Для того чтобы доказать асимптотику отношения (1.20), запишем $\vec{P}_n$ в виде (здесь $e_1 := (1, 0, 0)^T$)

$$\begin{pmatrix} \frac{P_{n,n}}{\prod_{k=1}^n \varphi^2(k)} \\ \frac{P_{n,n-1}}{\varphi(n) \prod_{k=1}^{n-1} \varphi^2(k)} \\ \frac{P_{n-1,n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \varphi^2(k)} \end{pmatrix} = \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) e_1, \quad (2.1)$$

Имеем

$$A_k = A(t_k) + o(1) = V(t_k) \Lambda(t_k) U^T(t_k) + o(1), \quad t_k := \frac{\varphi(k)}{x_n},$$

где мы воспользовались представлением (1.23) леммы 1.1, введя обозначения

$$\begin{aligned} V(t) &:= (\vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t), \vec{v}_3(t)), & U(t) &:= (\vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t), \vec{u}_3(t)), \\ \Lambda(t) &:= \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \omega(t) \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обращаем внимание, что для каждой пары (n, x_n) значения t_k будут свои, но все t_k , построенные по заданным (n, x_n) , лежат на одном луче.

Заметим, что справедливость (1.20) будет следовать из того факта, что первая координата вектора $(\Gamma_1(n), \Gamma_2(n), \Gamma_3(n))^T$, определяемого с помощью

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1(m) \\ \Gamma_2(m) \\ \Gamma_3(m) \end{pmatrix} := \Lambda(t_m) \mathbf{U}^T(t_m) [A^{-1}(t_m) A_m] \left(\prod_{k=1}^{m-1} A_k \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

преобладает над остальными при $n \rightarrow \infty$ в режиме (1.22), т. е. что

$$\frac{\max(|\Gamma_2(n)|, |\Gamma_3(n)|)}{|\Gamma_1(n)|} = o(1). \quad (2.4)$$

Действительно, если (2.4) выполнено, то вектор $\vec{P}_n$, стоящий в левой части (2.1), при больших n приблизительно пропорционален первому столбцу матрицы $\mathbf{V}(t_n)$, т. е. собственному вектору $\vec{v}_1(t_n)$, причем коэффициент пропорциональности равен $\Gamma_1(n)$:

$$\vec{P}_n = \Gamma_1(n)(\vec{v}_1(t_n) + o(1)). \quad (2.5)$$

Собственный вектор определен с точностью до умножения на константу, поэтому возьмем в (2.5) отношение первой и третьей координат:

$$\frac{P_{n,n}(x_n)}{\varphi^2(n)P_{n-1,n-1}(x_n)} = \frac{v_{11}(t_n)}{v_{13}(t_n)} + o(1),$$

и, учитывая структуру матрицы A :

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, \quad A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем $v_{11} = \lambda_1 v_{13}$, что дает импликацию (2.4) $\implies$ (1.20).

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось доказать (2.4). Сделаем это в несколько шагов.

а) Сначала отметим (см. (1.13)), что в режиме (1.22) для

$$A_k^{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_k} - \alpha_j + o(1) & \beta_j + o(1) & \gamma_j + o(1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad k \geq k_0,$$

справедливо (константа в $o(1)$ зависит от k_0)

$$A_k = A_k^{(2)} A_k^{(1)} = A(t_k)(E + o(1)).$$

б) Также заметим, что для любого $\delta > 0$ существует k_0 такое, что для $k \geq k_0$ справедливо

$$\|\mathcal{E}^{(k,n)}\| < \delta, \quad \mathcal{E}^{(k,n)} := \mathbf{U}^T(t_{k+1}) A(t_{k+1})^{-1} A_{k+1} \mathbf{V}(t_k) - E, \quad (2.6)$$

при

$$\frac{\varphi(n)}{x_n} \in K \Subset \mathbb{C} \setminus O_\varepsilon(F), \quad n \geq n_0(\varepsilon, \delta).$$

Действительно, поскольку

$$t_k := \frac{\varphi(k)}{x_n} = O\left(\frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}\right),$$

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\varphi(k+1) - \varphi(k)}{x_n} = \frac{\varphi(k)}{x_n} \left(\frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} - 1 \right),$$

условие (1.4) позволяет выбрать k_0 так, чтобы последний сомножитель был достаточно мал. Элементы $U(t)$ непрерывны на лучах в $\mathbb{C} \setminus F$, и непрерывность равномерная в $\mathbb{C} \setminus O_\varepsilon(F)$, т. е. существует модуль непрерывности ψ , оценивающий изменение $U(t)$ на лучах для всех лучей сразу. Точки t_k и t_{k+1} всегда лежат на одном луче, поэтому если $|t_{k+1} - t_k| < \psi^{-1}(\frac{\delta}{M})$, то неравенство (2.6) выполнено. Здесь M – равномерная оценка сверху $\|V(t)\|$.

в) Докажем теперь, что для любых $\varepsilon > 0$ найдутся $\theta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $n \geq n_0$ выполняется

$$\tilde{M}(t_k) := \frac{\max(|\lambda_2(t_k)|, |\lambda_3(t_k)|)}{|\lambda_1(t_k)|} < 1 - \theta, \quad k \leq n, \quad t_k \notin O_\varepsilon(F). \quad (2.7)$$

Сначала докажем (2.7) для малых по модулю t . Отметим, что при $t \rightarrow 0$ из структуры матрицы $A(t)$ следует

$$\lambda_1(t) \sim \frac{1}{t^2}, \quad \lambda_2, \lambda_3(t) \sim t.$$

Здесь знак $\sim$ означает стремление к конечной ненулевой константе отношения правой и левой частей. Таким образом, существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для $|t_k| < \varepsilon_1$ неравенство (2.7) выполнено.

Перейдем теперь к $|t_k| \geq \varepsilon_1$. В этом случае

$$\varphi(k) \geq \text{const} \cdot \varepsilon_1 \varphi(n).$$

По условию (1.4) функция φ монотонно растет к бесконечности, откуда следует, что для достаточно больших n правая часть последнего неравенства превысит $\varphi(k_0)$, поэтому имеем $k \geq k_0$, т. е. нам надо проверить (2.7) для больших k .

Пусть

$$t_k \in \left[\frac{\varepsilon_1}{|t_n|}, 1 \right] \cdot t_n, \quad t_n \notin O_\varepsilon(F).$$

Тогда t_k принадлежит компакту, отграниченному от F и от 0. На нем собственные значения $\lambda_{1,2,3}(t)$ непрерывны, левая часть (2.7) также непрерывна и, следовательно, достигает своего максимума. Пусть $t_{\max}$ – точка, в которой этот максимум достигается. Тогда $t \notin O_\varepsilon(F)$ влечет за собой, что существует $\theta > 0$ такое, что

$$M(t_{\max}) < 1 - \theta.$$

Выберем произвольно малые $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ с условием

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} < \min \left(1, \min_{t \notin O_\varepsilon(F)} \frac{|\lambda_1| - |\lambda_3|}{2|\omega|} \right).$$

Теперь выберем $\delta > 0$, для которого

$$\delta \left[(|\lambda_2| + |\omega|) \frac{1 - \delta_1}{\delta_1} + |\lambda_3| \frac{1 - \delta_2}{\delta_2} + |\lambda_1| \right] \leq \begin{cases} (|\lambda_1| - |\lambda_3|)(1 - \delta_2) - |\omega| \frac{\delta_2(1 - \delta_1)}{\delta_1}, \\ (|\lambda_1| - |\lambda_2|)(1 - \delta_1) \end{cases} \quad (2.8)$$

для всех $t \notin O_\varepsilon(F)$, и используем (2.6) для выбранного δ .

г) Теперь перейдем непосредственно к оценке (2.4). Из определения (2.3) вектора $\vec{\Gamma}$ имеем для $\vec{\Gamma}(k_0)$ с учетом (1.24)

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1(k_0) \\ \Gamma_2(k_0) \\ \Gamma_3(k_0) \end{pmatrix} = V^{-1}(t_{k_0}) \left(\prod_{k=1}^{k_0} A_k \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const} \cdot U^T(t_{k_0}) \begin{pmatrix} P_{k_0, k_0}(x_n) & P_{k_0, k_0-1}(x_n) \\ \varphi(k_0) & \varphi^2(k_0) \\ P_{k_0-1, k_0-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Если $(\varphi(n)/x_n) \in K \Subset \mathbb{C}$, то $|x_n| > \varphi(n)/C$, поэтому для достаточно больших n координата $P_{k_0, k_0}(x_n)$ в последнем равенстве имеет наибольший порядок среди всех координат. В то же время

$$|t_{k_0}| = \frac{\varphi(k_0)}{|x|} < \frac{C\varphi(k_0)}{\varphi(n)} < C \cdot \text{const} \cdot \varepsilon_1,$$

поэтому матрица U^T не слишком отличается от своего предельного значения при $t \rightarrow 0$ на соответствующем луче (напомним, что непрерывность на лучах равномерная). Установим свойства матрицы U вблизи 0. При $t \rightarrow 0$ (см. (3.1))

$$M_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому на лучах $\arg t = \text{const}$ при $t \rightarrow 0$ имеем $\vec{v}_1(t) \rightarrow (e^{i\theta}, 0, 0)^T$, $\vec{u}_1(t) \rightarrow (e^{-i\theta}, 0, 0)^T$, где θ может быть свое на каждом луче. Так как $U^T V = E$, то

$$U^T \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

и порядок роста $\Gamma_1(k_0)$ больше порядков $\Gamma_2(k_0)$, $\Gamma_3(k_0)$.

Покажем по индукции, что для всех k из промежутка $k_0 \leq k \leq n$ выполняется оценка

$$\frac{\delta_2 |\Gamma_2(k)| + \delta_1 |\Gamma_3(k)|}{|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)| + |\Gamma_3(k)|} < \delta_1 \delta_2. \quad (2.9)$$

Из свойства максимальности порядка $\Gamma_1(k_0)$ следует, что для достаточно больших n база индукции (справедливость (2.9) при $k = k_0$) верна. Рекуррентные соотношения для $\vec{\Gamma}(k)$ удобно представить, вводя векторные величины $\vec{\gamma}(k)$ с помощью следующих ниже соотношений. Первое соотношение определяет $\vec{\gamma}(k)$, второе следует из него и (2.6). Соотношения имеют вид

$$\vec{\Gamma}(k+1) = \Lambda(t_k) \vec{\gamma}(k), \quad \vec{\gamma}(k) = (E + \mathcal{E}^{(k,n)}) \vec{\Gamma}(k).$$

Для неотрицательных чисел a, b, c , не равных одновременно 0, неравенство

$$\frac{\delta_2 b + \delta_1 c}{a + b + c} < \delta_1 \delta_2$$

равносильно неравенству

$$\delta_1 \delta_2 a - (1 - \delta_1) \delta_2 b - \delta_1 (1 - \delta_2) c > 0.$$

Поэтому если $a \geq A > 0$, $0 \leq b \leq B$, $0 \leq c \leq C$, то неравенство

$$\frac{\delta_2 b + \delta_1 c}{a + b + c} < \delta_1 \delta_2$$

следует из

$$\frac{\delta_2 B + \delta_1 C}{A + B + C} < \delta_1 \delta_2.$$

Значит, при проверке неравенства (2.9) достаточно оценивать $|\Gamma_1(k+1)|$ снизу, а $|\Gamma_2(k+1)|$, $|\Gamma_3(k+1)|$ – сверху. Соответствующие оценки имеют вид

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(k+1)| &= |\lambda_1| |\gamma_1(k)| \geq |\lambda_1| (|\Gamma_1(k)| - \delta(|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)| + |\Gamma_3(k)|)), \\ |\Gamma_2(k+1)| &\leq |\lambda_2| |\gamma_2(k)| + |\omega| |\gamma_3(k)| \leq |\lambda_2| |\Gamma_2(k)| + |\omega| |\Gamma_3(k)| \\ &\quad + \delta(|\lambda_2| + |\omega|) (|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)| + |\Gamma_3(k)|), \\ |\Gamma_3(k+1)| &= |\lambda_3| |\gamma_3(k)| \leq |\lambda_3| (|\Gamma_3(k)| + \delta(|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)| + |\Gamma_3(k)|)). \end{aligned}$$

По предположению индукции компоненты вектора $\vec{\Gamma}(k)$ удовлетворяют (2.9), поэтому вектор из модулей представляется в виде линейной комбинации векторов с положительными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} |\Gamma_1(k)| \\ |\Gamma_2(k)| \\ |\Gamma_3(k)| \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - \delta_1 \\ \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 - \delta_2 \\ 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad c_j > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Проверяемые неравенства линейны, поэтому их достаточно проверить на указанных трех векторах. Получаем

$$\begin{aligned} \delta_2 [\delta(|\lambda_2| + |\omega|)] + \delta_1 [\delta|\lambda_3|] &\leq \delta_1 \delta_2 [|\lambda_1|(1 - \delta) + \delta(|\lambda_2| + |\omega|) + \delta|\lambda_3|]; \\ \delta_2 [\delta_1 |\lambda_2| + \delta(|\lambda_2| + |\omega|)] + \delta_1 [\delta|\lambda_3|] &\leq \delta_1 \delta_2 [|\lambda_1|(1 - \delta_1 - \delta) + \delta_1 |\lambda_2| + \delta(|\lambda_2| + |\omega|) + \delta|\lambda_3|]; \\ \delta_2 [\delta_2 |\omega| + \delta(|\lambda_2| + |\omega|)] + \delta_1 [|\lambda_3|(\delta_2 + \delta)] &\leq \delta_1 \delta_2 [|\lambda_1|(1 - \delta_2 - \delta) + \delta_2 |\omega| + \delta(|\lambda_2| + |\omega|) + |\lambda_3|(\delta_2 + \delta)]. \end{aligned}$$

Первое неравенство слабее второго и является его следствием. Если во втором и третьем неравенствах перенести влево все множители, содержащие δ , а вправо – все, не содержащие δ , получится пара неравенств с одинаковой левой частью, совпадающая с условием (2.8) выбора δ . Следовательно, компоненты $\vec{\Gamma}(k+1)$ также удовлетворяют (2.9).

Индуктивный переход сделан, теорема 1.2 доказана.

§ 3. Доказательство леммы 1.1

Мы будем по очереди строить векторы $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, и функцию $\omega(t)$, проверяя их непрерывность и ограниченность на каждом луче и равномерность оценок модулей непрерывности и верхних оценок при изменении лучей. В завершение доказательства мы проверим, что построенные элементы действительно реализуют разложение (1.23), (1.24) матрицы $A(t)$.

Сделаем предварительный качественный анализ матрицы A , ее собственных значений и собственных векторов. Имеем: элементы A рационально зависят от t , поэтому собственные значения A являются алгебраическими функциями от t (возможно, ветвями одной и той же функции). Так как дискриминант характеристического многочлена A не является тождественным нулем (это проверяется), то имеется лишь конечное число значений t на комплексной плоскости, в которых какие-то из собственных значений совпадают. Если эти значения исключить, то для оставшихся t матрица A обладает набором собственных векторов. Наша цель – сделать выбор базиса (столбцов $\vec{v}_j$, $\vec{u}_j$) для каждого $t \in \Omega$ с нужными нам свойствами, включая непрерывность по лучам и равномерные оценки.

1) Конкретизируем выбор нумерации собственных значений матрицы $A(t)$. В области Ω собственное значение $\lambda_1(t)$ по модулю строго больше остальных, поэтому λ_1 – аналитическая (мероморфная) в Ω функция. Выбор между $\lambda_2(t)$ и $\lambda_3(t)$ пока не фиксирован. Сделаем его так, чтобы каждая из функций $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ в Ω обладала следующими свойствами: ее ограничение на любой луч вида $\arg t = \text{const}$ аналитично на каждом подотрезке, не содержащем точек ветвления; для любых двух точек a, b на луче $\arg t = \text{const}$, разделяемых точкой ветвления, существует путь, соединяющий их и имеющий длину не более $2|a-b|$, продолжение вдоль которого связывает значения функции в a и b ; набор $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ совпадает с набором корней характеристического многочлена матрицы $A(t)$ с учетом кратностей.

2) Строим векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{u}_1$. Для этого рассмотрим оператор

$$M_1 = \frac{(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}. \quad (3.1)$$

Вначале рассмотрим M_1 вне множества исключительных значений t . Ясно, что собственный вектор $\vec{v}_1$ матрицы A ,

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, \quad (3.2)$$

является собственным вектором матрицы M_1 , соответствующим собственному значению 1 (для любого неисклчительного t). Два других собственных вектора матрицы A принадлежат ядру M_1 . Следовательно,

$$\begin{cases} \text{rank } M_1 = 1, \\ \text{trace } M_1 = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Поэтому

$$M_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1^T, \quad \|\vec{v}_1\| \|\vec{u}_1\| = \|M_1\|_{L_2}.$$

Здесь вектор $\vec{v}_1(t)$ (как собственный вектор A) определен поточечно (для каждого t отдельно) с точностью до мультипликативной константы (то же касается и вектора $\vec{u}_1(t)$). Модуль этой константы можно зафиксировать условием

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\|M_1(t)\|_{L_2}}, \quad \|\vec{u}_1\| = \sqrt{\|M_1(t)\|_{L_2}}. \quad (3.4)$$

Ясно, что при t , отделенных от нуля, элементы матрицы A и ее собственные значения непрерывны по t . Если $t \notin \Omega^c$, то $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $|\lambda_1| > |\lambda_3|$. Соответственно если $\varepsilon > 0$, то найдется $\tilde{\varepsilon} > 0$, для которого для всех $t \notin O_\varepsilon(\Omega^c)$ верны неравенства $|\lambda_1 - \lambda_2| > \tilde{\varepsilon}$, $|\lambda_1 - \lambda_3| > \tilde{\varepsilon}$. Следовательно, M_1 непрерывна по t в рассматриваемой области $\overline{\mathbb{C}} \setminus O_\varepsilon(\Omega^c)$.

Мы показали, что в этой области изменения t для неисклчительных значений t имеет место $\text{rank } M_1 = 1$ и $\text{trace } M_1 = 1$. Тогда для исключительных значений t в силу непрерывности M_1 получаем $\text{rank } M_1 \leq 1$ (ранг может уменьшиться, но не может увеличиться) и $\text{trace } M_1 = 1$. Последнее исключает случай $\text{rank } M_1 = 0$, поэтому равенство $\text{rank } M_1 = 1$ выполняется также и в исключительных точках рассматриваемой области (где возможно равенство $\lambda_2 = \lambda_3$).

При $|t| \rightarrow 0$ коэффициенты характеристического многочлена асимптотически ведут себя как $\sim \frac{1}{t^2}$, $\sim \frac{1}{t}$ и ~ 1 , следовательно, $\lambda_1(t) \sim \frac{1}{t^2}$ и $\lambda_2, \lambda_3(t) \sim t$. Поэтому $t^2 \lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ непрерывны по t , включая 0. Отсюда (умножением каждой скобки в (3.1) на t^2) следует непрерывность и ограниченность M_1 в L_2 на $\overline{\mathbb{C}} \setminus O_\varepsilon(\Omega^c)$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \|M_1\|_{L_2} < \infty.$$

Сделаем замечание по применению леммы. В теореме 1.2 рассматриваются $t \in [0, t_n]$ с равномерными по t_n оценками. Чтобы $[0, t_n] \subset \mathbb{C} \setminus O_\varepsilon(\Omega^c)$, требуется $t_n \in \mathbb{C} \setminus O_\varepsilon(F)$, что и записано в условии теоремы.

Условие, что векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{v}_1$ удовлетворяют (3.2)–(3.4), фиксирует их длины (непрерывные по t), но оставляет произвол в выборе их аргументов. Зафиксируем эти аргументы, обеспечив их непрерывность по t . Делаем это следующим образом. Берем произвольное $\tilde{t}$. Так как

$$\sum_{i=1}^3 (M_1(t))_{ii} = 1,$$

то существует такое i , что

$$\text{Re}((M_1(\tilde{t}))_{ii}) \geq \frac{1}{3},$$

и, следовательно, в некоторой окрестности $O(\tilde{t}) \subset \Omega$ этой точки $\tilde{t}$ ввиду непрерывности M_1 найдется такое i , что

$$\text{Re}(M_1(t))_{ii} \geq \frac{1}{4}, \quad t \in O(\tilde{t}). \quad (3.5)$$

Покроем такими окрестностями множество Ω . Затем выберем подпокрытие, в котором любой компакт будет покрыт только конечным числом окрестностей.

Пусть $Z := \{z_p\}$ – индексированное множество центров выбранных окрестностей. Уменьшим это покрытие до покрытия выпуклыми множествами с непесекающимися внутренностями, приняв

$$\Delta_p := \left\{ z \in \Omega : |z - z_p| = \inf_{w \in Z} |z - w| \right\}.$$

Таким образом, в каждом Δ_p фиксирован индекс i из (3.5). Обозначим его $i(p)$. Тогда для $t \in \Delta_p$ имеем

$$\operatorname{Re}((M_1(t))_{i(p)i(p)}) \geq \frac{1}{4}.$$

Следовательно, ввиду (3.3)

$$u_{1,i(p)}(t) \neq 0, \quad v_{1,i(p)}(t) \neq 0, \quad t \in \Delta_p.$$

Выберем на каждой связной компоненте пересечения луча $\ell := \{t : \arg t = \text{const}\}$ с множеством Ω точку t_0 (назовем ее исходной точкой для этой компоненты) и будем определять $\vec{u}_1(t)$, $\vec{v}_1(t)$, первоначально определяя $\vec{u}_1(t_0)$. Не ограничивая общности, считаем, что компонента содержит точку 0, и полагаем $t_0 = 0$. Далее описывается именно этот случай. В случае, когда компонента не содержит точку 0, описываемый процесс продолжения нужно применить в обе стороны от выбранной точки t_0 .

На Δ_p выберем вектор $\vec{u}_1(t)$ пропорциональным $i(p)$ -й строке матрицы M_1 :

$$\vec{u}_1(t) := C((M_1(t))_{i(p)1}), (M_1(t))_{i(p)2}), (M_1(t))_{i(p)3}))^T, \quad t \in \Delta_p \cap \ell, \quad (3.6)$$

и фиксируем коэффициент пропорциональности так, чтобы длина $\vec{u}_1$ удовлетворяла (3.4), а

$$\arg u_{1,i(p)} = \text{const} \quad \text{на } \Delta_p \cap \ell, \quad (3.7)$$

причем в исходной точке эта константа фиксируется.

Связный участок произвольного луча $\arg t = \text{const}$, лежащий вне $O_\varepsilon(\Omega^c)$, пересекает конечное число Δ_p , что обеспечивает равномерную непрерывность при изменении положения луча.

Таким образом, определена непрерывная ветвь угла вектора $\vec{u}_1$ (а следовательно, и $\vec{v}_1$) на содержащей t_0 компоненте $\Omega \cap \ell$ (обозначим этот отрезок $[0, \hat{t}]$). Действительно, обозначим через Δ_{p_0} элемент покрытия $\{\Delta_p\}$, содержащий t_0 . Начинаем движение из точки $t_0 = 0$ вдоль отрезка $\Delta_{p_0} \cap \ell$, при этом аргумент $i(p_0)$ -й компоненты $\vec{u}_1(t)$ есть фиксированная константа (поэтому обозначаем отрезок $\Delta_{p_0} \cap \ell$ как $\Delta_{t_0}^{(i)}$), а две другие компоненты будут однозначно определенными (вследствие (3.6)) и равномерно непрерывными функциями (вследствие непрерывности M_1 и отдаленности от нуля $|(M_1)_{ii}|$). При переходе к соседнему отрезку $\Delta_{t_1}^{(i)}$ другая компонента $\vec{u}_1(t)$ становится выделенной i -й компонентой, и значение ее аргумента фиксируется постоянным, равным предельному значению этой компоненты в правом конце предыдущего отрезка $\Delta_{t_0}^{(i(p_0))}$, и т.д.

3) Теперь строим вектор $\vec{v}_2$ так же, как собственный вектор матрицы A . Рассмотрим

$$M_2 = \frac{(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_3 E)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (3.8)$$

Ясно, что $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$ влечет за собой

$$M_2\vec{v}_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)\vec{v}_2.$$

Два других собственных вектора A лежат в ядре M_2 . Оператор $M_2(t)$ не является тождественным нуль-оператором. Точки множества

$$\tilde{T} := \{t : \lambda_2(t) = \lambda_3(t)\} \quad (3.9)$$

(их конечное число) являются точками равенства ветвей алгебраических функций, причем обычно это точки ветвления. Имеем

$$\text{rank } M_2 = 1$$

в проколотовой окрестности точек множества (3.9). Так как

$$\text{trace } M_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)$$

и правая часть может обращаться в нуль, мы не можем напрямую, как в предыдущем пункте, обнаружить ненулевой элемент в $M_2(t)$ (точнее, элемент, отделенный равномерно по n от нуля) и с его помощью зафиксировать непрерывную ветвь $\vec{v}_2(t)$. Тем не менее, пользуясь возможностью выбора $\vec{v}_2$ с точностью до мультипликативной постоянной, можно убедиться в существовании ненулевого элемента после умножения (деления) $M_2(t)$ на специально подобранный множитель (делитель), зависящий от t . Для отрезка существования глобальных ветвей векторов $\vec{u}_j(t)$, $\vec{v}_j(t)$, $j = 2, 3$, мы сохраняем обозначение предыдущего пункта $[0, \hat{t}]$.

Для выбора этого множителя рассмотрим разветвленное накрытие области Ω , на котором собственные значения $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ определены как голоморфные функции, окружим каждую точку $\tilde{t}$ множества $T := \tilde{T} \cup \{0\}$ (см. (3.9)) парой окрестностей радиусов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и определим на разветвленном накрытии области Ω непрерывную функцию $\varrho(t)$, равную 1 вне объединения поднятий всех окрестностей радиуса ε_2 и равную $(t - \tilde{t})^{\alpha(\tilde{t})}$ внутри поднятия окрестности $O_{\varepsilon_1}(\tilde{t})$, где $\alpha(\tilde{t})$ – дробный показатель нуля (полюса) в $\tilde{t}$ минимального порядка среди элементов $M_2(t)$ как аналитической матрицы, построенной по формуле (3.8) на разветвленном накрытии Ω . Элементы матрицы M_2 в окрестности $\tilde{t}$ мероморфно выражаются через локальный параметр, равный $t - \tilde{t}$ или $\sqrt{t - \tilde{t}}$, и, значит, каждый элемент имеет конечный порядок нуля либо полюса (если элемент не обращается в нуль, то порядок нулевой, у полюса порядок отрицательный).

Значения функций $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ на $[0, \hat{t}]$ получаются как значения аналитических функций λ_2, λ_3 (на разветвленном накрытии области Ω) при помощи подходящего выбора прообраза $[0, \hat{t}]$ при его поднятии. Соответственно, матрица $M_2(t)$ есть ограничение на этот прообраз аналитической матрицы, определенной на разветвленном накрытии Ω . Ограничим функцию $\varrho(t)$ на этот прообраз $[0, \hat{t}]$ и разделим $M_2(t)$ в каждой точке t на $\varrho(t)$. Полученная в результате матрица $\tilde{M}_2$ будет равномерно (по n) непрерывна, ограничена и у нее будет ненулевой элемент с индексом $(i, j)(t)$:

$$(\tilde{M}_2(t))_{ij} \neq 0,$$

равномерно отделенный от нуля на $[0, \widehat{t}]$. Опять же, имеем $\text{rank } \widetilde{M}_2 = 1$ и в исключительных точках $t \in \widetilde{T}$.

Далее действуем, как и в предыдущем пункте, устраивая конечное покрытие отрезка $[0, \widehat{t}]$ интервалами $\Delta_t^{(ij)}$ с непересекающимися внутренностями, на которых элемент $(\widetilde{M}_2)_{ij}$ отграничен равномерно по n от нуля, выбирая $\vec{v}_2$ пропорциональным j -му столбцу $\widetilde{M}_2$, содержащему этот ненулевой элемент (так как $\text{rank } \widetilde{M}_2 = 1$, все столбцы пропорциональны собственному вектору):

$$\vec{v}_2(t) := C((\widetilde{M}_2(t)_{1j}), (\widetilde{M}_2(t)_{2j}), (\widetilde{M}_2(t)_{3j}))^T, \quad t \in \Delta_t^{(i,j)},$$

фиксируя длину

$$\|\vec{v}_2(t)\| = 1, \quad t \in [0, \widehat{t}],$$

и аргумент i -й компоненты

$$\arg v_{2,i} = \text{const} \quad \text{на } \Delta_t^{(i,j)}.$$

Непрерывный (равномерно по положению луча) вектор $\vec{v}_2(t)$ построен.

4) Вектор $\vec{v}_3$ выбираем, принадлежащим линейной оболочке

$$\vec{v}_3 \in \text{span}\{\vec{u}_1^*, \vec{v}_2\}^\perp. \quad (3.10)$$

Правая часть (3.10) – одномерное пространство, непрерывно зависящее от t , так как $\vec{u}_1^* \perp \vec{v}_2$. Фиксируем

$$\|\vec{v}_3\| = 1 \quad \forall t \in [0, \widehat{t}].$$

В окрестности $\widetilde{O}$ точки t у него есть координата

$$|(\vec{v}_3)_i| > \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad t \in \widetilde{O}.$$

Непрерывная ветвь угла вектора $\vec{v}_3$ фиксируется, как и прежде (см. п. 1)).

5) Вектор $\vec{u}_2$ выбирается так, чтобы удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{u}_2 &\in \text{span}\{\vec{v}_1^*, \vec{v}_3^*\}^\perp, \\ \text{b) } \langle \vec{u}_2, \vec{v}_2^* \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если векторы $\vec{v}_1(t)$ и $\vec{v}_3(t)$ не коллинеарны, то $\text{span}\{\vec{v}_1^*, \vec{v}_3^*\}^\perp$ – непрерывно зависящее от t одномерное пространство. Так как по построению (см. (3.3), (3.10))

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle \vec{u}_1, \vec{v}_1^* \rangle &= 1, \\ \text{b) } \langle \vec{u}_1, \vec{v}_3^* \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

и нормы $\|\vec{u}_1(t)\|, \|\vec{v}_1(t)\|, \|\vec{v}_3(t)\| < \infty$, то $\vec{v}_1(t) \nparallel \vec{v}_3(t)$ и угол между ними равномерно по направлению l отделен от нуля. Наконец, вспомним п. б) в определении $\vec{u}_2$ (3.11), который фиксирует не только длину $\vec{u}_2$, но и его угол. Непрерывный по t вектор $\vec{u}_2(t)$, $t \in [0, \widehat{t}]$, построен.

6) Наконец, выбираем $\vec{u}_3$ такой, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{u}_3 &\in \text{span}\{\vec{v}_1^*, \vec{v}_2^*\}^\perp, \\ \text{б) } \langle \vec{u}_3, \vec{v}_3^* \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ неколлинеарны, как собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям. Однако просто неколлинеарности $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ нам мало. Нам нужно показать равномерную по n отграниченность от нуля угла между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Сделаем это. Начнем с неравенства Шварца,

$$\|A(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2)\|^2 \leq \|A^*A\| \|(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2)\|^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{C},$$

которое, с учетом того, что $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ суть собственные векторы A , переписывается в виде

$$\begin{aligned} &|a|^2|\lambda_1|^2|\vec{v}_1|^2 + |b|^2|\lambda_2|^2|\vec{v}_2|^2 + 2\text{Re}(a\bar{b}\lambda_1\bar{\lambda}_2\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle) \\ &\leq \|A^*A\|(|a|^2|\vec{v}_1|^2 + |b|^2|\vec{v}_2|^2 + 2\text{Re}(a\bar{b}\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle)). \end{aligned}$$

Группируя члены, получаем

$$\begin{aligned} &2\text{Re}(a\bar{b}(\lambda_1\bar{\lambda}_2 - \|A^*A\|)\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle) \\ &\leq (\|A^*A\| - |\lambda_1|^2)|a|^2|\vec{v}_1|^2 + (\|A^*A\| - |\lambda_2|^2)|b|^2|\vec{v}_2|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая, что a и b – произвольные комплексные числа, подкруткой их аргументов (умножая на $e^{i\varphi}$) можно добиться того, что левая часть (3.14) будет равна

$$2|a||b||\lambda_1\bar{\lambda}_2 - \|A^*A\||\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle|,$$

а выбором модулей a и b можно добиться того, что правая часть (3.14) будет равна

$$2|a||b|\sqrt{\|A^*A\| - |\lambda_1|^2}\sqrt{\|A^*A\| - |\lambda_2|^2}|\vec{v}_1||\vec{v}_2|$$

(речь идет о достижении равенства в неравенстве между средними геометрическим и арифметическим или об отрицательном дискриминанте у положительного квадратного трехчлена). Таким образом, получаем

$$\frac{|\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} \leq \frac{\sqrt{(\|A^*A\| - |\lambda_1|^2)(\|A^*A\| - |\lambda_2|^2)}}{\|\|A^*A\| - \lambda_1\bar{\lambda}_2\|} = \sqrt{1 - \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2\|A^*A\|}{\|\|A^*A\| - \lambda_1\bar{\lambda}_2\|^2}}.$$

Так как $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ и $|\lambda_1|^2 \leq \|A^*A\| < \infty$ равномерно, то

$$\exists \varepsilon > 0: \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|^2\|A^*(t)A(t)\|}{\|\|A^*(t)A(t)\| - \lambda_1(t)\bar{\lambda}_2(t)\|^2} < 1, \quad t \in [0, \hat{t}],$$

равномерно по t . Таким образом, равномерная по t отделенность от нуля угла между собственными векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ доказана.

Теперь так же, как и в предыдущих пунктах, с помощью п. б) в определении $\vec{u}_3(t)$ – (3.13) выбираем длину и аргумент при $t \in [0, \hat{t}]$.

7) Итак, непрерывно зависящие от $t \in [0, \hat{t}]$ векторы $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, построены и непрерывность равномерна по $t \in \mathbb{C} \setminus O_\varepsilon(F)$. Осталось проверить, что они удовлетворяют (1.24) и реализуют (при соответствующем выборе непрерывной функции $\omega(t)$) представление (1.23) матрицы A .

Докажем последнее соотношение со скалярным произведением, которого нам не хватает для соотношения (1.24). M_1 – полином от A , поэтому $AM_1 = M_1A$. Далее, $M_1 = \vec{v}_1 \vec{u}_1^T$; $\vec{u}_1^T \vec{v}_1 = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^T A &= 1 \cdot \vec{u}_1^T A = \vec{u}_1^T \vec{v}_1 \vec{u}_1^T A = \vec{u}_1^T M_1 A = \vec{u}_1^T A M_1 \\ &= \vec{u}_1^T A \vec{v}_1 \vec{u}_1^T = \vec{u}_1^T (\lambda_1 \vec{v}_1) \vec{u}_1^T = \lambda_1 \cdot 1 \cdot \vec{u}_1^T. \end{aligned}$$

Теперь имеем $\lambda_2 \cdot \vec{u}_1^T \vec{v}_2 = \vec{u}_1^T \cdot (\lambda_2 \vec{v}_2) = \vec{u}_1^T A \vec{v}_2 = (\lambda_1 \vec{u}_1^T) \vec{v}_2 = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1^T \vec{v}_2$. Поскольку $\lambda_2 \neq \lambda_1$, приходим к

$$\vec{u}_1^T \vec{v}_2 = 0. \quad (3.15)$$

Итак, соотношение (1.24) удовлетворено по построению (см. (3.12), а), (3.11), б), (3.13), б) в связи с равенством единице диагональных элементов в (1.24) и с условиями (3.15), (3.12), б), (3.11), а), (3.13), а), которые обеспечивают равенство нулю остальных элементов):

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^T \vec{v}_1 &= 1; & \vec{u}_1^T \vec{v}_2 &= 0; & \vec{u}_1^T \vec{v}_3 &= 0; \\ \vec{u}_2^T \vec{v}_1 &= 0; & \vec{u}_2^T \vec{v}_2 &= 1; & \vec{u}_2^T \vec{v}_3 &= 0; \\ \vec{u}_3^T \vec{v}_1 &= 0; & \vec{u}_3^T \vec{v}_2 &= 0; & \vec{u}_3^T \vec{v}_3 &= 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Теперь проверяем (1.23). Тот факт, что $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ суть собственные векторы A , дает для центральной матрицы представление (1.23) (см. обозначение (2.2)):

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Отметим, что справедливость (1.23) теперь эквивалентна

$$A\vec{v}_3 = \lambda_3 \vec{v}_3 + \omega \vec{v}_2, \quad (3.17)$$

т. е. $A\vec{v}_3 \in \text{span}\{\vec{v}_3, \vec{v}_2\}$ и $\langle A\vec{v}_3, \vec{v}_3^* \rangle = \lambda_3$.

Докажем (3.17).

$$\vec{u}_1^T A\vec{v}_3 = \lambda_1 (\vec{u}_1^T \vec{v}_3) = 0 \implies A\vec{v}_3 \in \text{span}\{\vec{u}_1^*\}^\perp = \text{span}\{\vec{v}_3, \vec{v}_2\}.$$

Теперь проверим, что величина проекции $A\vec{v}_3$ на $\vec{v}_3$ равна λ_3 . Имеем из определений M_1 и M_2 (см. (3.1) и (3.8))

$$(\lambda_1 - \lambda_3)M_1 + M_2 = (A - \lambda_3 E),$$

поэтому (с учетом (3.1) и (3.16))

$$(A - \lambda_3 E)\vec{v}_3 = [(\lambda_1 - \lambda_3)M_1 + M_2]\vec{v}_3 = M_2\vec{v}_3 + (\lambda_1 - \lambda_3)\vec{v}_1 \vec{u}_1^T \vec{v}_3 = M_2\vec{v}_3 \in \text{span}\{\vec{v}_2\}.$$

Наконец, выбирая $\omega(t) := \langle (A - \lambda_3 E)\vec{v}_3, \vec{u}_2^* \rangle$, завершаем доказательство леммы 1.1.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1 для трехчленных рекуррентий

Начнем с аналога леммы 1.1 для теоремы 1.1.

ЛЕММА 4.1. Для матрицы $A(t)$ из (1.8) существует представление

$$A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где вектор-столбцы $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^2$ и $\{\vec{u}_j\}_{j=1}^2$ удовлетворяют соотношению

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \end{pmatrix} = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

причем $\max(\|\vec{v}_j(t)\|, \|\vec{u}_j(t)\|) < \infty$, $t \in \Omega$, $j = 1, 2$, и $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$ – собственные векторы $A(t)$, непрерывные по t на каждом связном участке произвольного луча $\arg t = \text{const}$, лежащем в области Ω , непрерывность равномерная по положению луча для $t \notin O_\varepsilon(\Omega^c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы 4.1 для трехчленных рекуррентных соотношений проверяется гораздо проще, чем для четырехчленного случая, так как мы можем построить векторы $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^2$ и $\{\vec{u}_j\}_{j=1}^2$ в явном виде, подбирая соответствующие собственные векторы матрицы $A(t)$. Пусть

$$W(t) := \left(\frac{1 - (\alpha + 2\sqrt{-\beta})t}{1 - (\alpha - 2\sqrt{-\beta})t} \right)^{1/2},$$

где ветвь выбирается так, что $W(0) = 1$, а затем продолжается непрерывно по t . Положим

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &:= \left(\frac{1+W}{2W}, \frac{1-W}{2\sqrt{-\beta}W} \right); & \vec{v}_2 &:= \left(\frac{\sqrt{-\beta}(1-W)}{2W}, \frac{1+W}{2W} \right); \\ \vec{u}_1 &:= \left(\frac{1+W}{2}, \frac{\sqrt{-\beta}(1-W)}{2} \right); & \vec{u}_2 &:= \left(\frac{1+W}{2\sqrt{-\beta}}, \frac{1+W}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то для собственных значений A имеем

$$\lambda_1 = -\sqrt{-\beta} \frac{W+1}{W-1}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{-\beta} \frac{W-1}{W+1}.$$

Теперь легко проверить тождества (4.1), (4.2)

$$U^T A V = \Lambda, \quad A = V \Lambda U^T, \quad U^T V = E,$$

где (как и ранее) использованы обозначения

$$V(t) := (\vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t)), \quad U(t) := (\vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t)), \quad \Lambda(t) := \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Непрерывность и ограниченность $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$ следует из их явного вида.

Лемма 4.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Мы следуем схеме доказательства теоремы 1.2. Утверждение теоремы будем выводить из формулы асимптотики отношения

$$\frac{P_n(x)}{\varphi(n)P_{n-1}(x)} = \lambda_1 \left(\frac{\varphi(n)}{x} \right) + o(1), \quad (4.4)$$

где режим при $n \rightarrow \infty$ определен в (1.11). В свою очередь асимптотика отношения (4.4) будет следовать из вклада первой координаты вектора

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1(x) \\ \Gamma_2(x) \end{pmatrix} := \Lambda(t_n) \mathbf{U}^T(t_n) \left(\prod_{k=1}^{n-1} A(t_k) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_k := \frac{\varphi(k)}{x_k}. \quad (4.5)$$

Напомним, что здесь использованы обозначения (4.3), и разложение (4.1) леммы 4.1 применяется для

$$\begin{pmatrix} \frac{P_n}{\prod_{k=1}^n \varphi(k)} \\ \frac{P_{n-1}}{\varphi(n) \prod_{k=1}^{n-1} \varphi(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \prod_{k=1}^n A(t_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, для завершения доказательства теоремы проверяем, что при $n \rightarrow \infty$ в режиме (1.11)

$$\frac{|\Gamma_2(n)|}{|\Gamma_1(n)|} = o(1). \quad (4.6)$$

Зафиксируем произвольное $\delta_1 \in (0, 1)$. Докажем по индукции, что существует такое k_0 , что для k из интервала $k_0 \leq k \leq n$ выполняется оценка

$$\frac{|\Gamma_2(k)|}{|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)|} < \delta_1. \quad (4.7)$$

Для определения номера базы индукции k_0 выберем $\delta > 0$, для которого выполняется

$$\delta \left[|\lambda_2| \frac{1 - \delta_1}{\delta_1} + |\lambda_1| \right] \leq (|\lambda_1| - |\lambda_2|)(1 - \delta_1) \quad (4.8)$$

для всех $t \notin O_\varepsilon(F)$, и используем (2.6) для выбранного δ . Таким образом, база индукции устанавливается сразу.

Напомним, что рекуррентные соотношения для $\vec{\Gamma}(k)$ можно записать с помощью векторных величин $\vec{\gamma}(k)$. Соотношения имеют вид

$$\vec{\Gamma}(k+1) = \Lambda(t_k) \vec{\gamma}(k); \quad \vec{\gamma}(k) = (E + \mathcal{E}^{(k,n)}) \vec{\Gamma}(k).$$

При проверке неравенств шага индукции достаточно оценивать $|\Gamma_1(k+1)|$ снизу, а $|\Gamma_2(k+1)|$ сверху. Соответствующие оценки имеют вид

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(k+1)| &= |\lambda_1| |\gamma_1(k)| \geq |\lambda_1| (|\Gamma_1(k)| - \delta(|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)|)); \\ |\Gamma_2(k+1)| &= |\lambda_2| |\gamma_2(k)| \leq |\lambda_2| (|\Gamma_2(k)| + \delta(|\Gamma_1(k)| + |\Gamma_2(k)|)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

По предположению индукции компоненты $\vec{\Gamma}(k)$ удовлетворяют (4.7), поэтому вектор из модулей представляется в виде линейной комбинации векторов с положительными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} |\Gamma_1(k)| \\ |\Gamma_2(k)| \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - \delta_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}, \quad c_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

Проверяемые индукцией неравенства линейны, поэтому их достаточно проверить на указанных двух векторах.

Подстановка первого вектора в (4.9) дает правые части $|\lambda_1|(1 - \delta)$ и $|\lambda_2|(0 - \delta)$, что приводит к неравенству

$$|\lambda_1|\delta \leq \delta_1(|\lambda_1|(1 - \delta) + \delta|\lambda_2|).$$

Подстановка второго вектора дает в (4.9) правые части $|\lambda_1|(1 - \delta_1 - \delta)$ и $|\lambda_2|(\delta_1 + \delta)$, что приводит к неравенству

$$|\lambda_2|(\delta_1 + \delta) \leq \delta_1(|\lambda_2|(\delta_1 + \delta) + |\lambda_1|(1 - \delta_1 - \delta)).$$

Первое неравенство слабее второго и является его следствием. Если во втором перенести влево все множители, содержащие δ , а вправо – все, не содержащие δ , получится пара неравенств с одинаковой левой частью, совпадающая с условием (4.8) выбора δ . Следовательно, компоненты $\vec{\Gamma}(k + 1)$ также удовлетворяют (4.7). Индуктивный переход сделан. Теорема 1.1 доказана.

§ 5. Пример

Проиллюстрируем основной результат работы – теорему 1.2 – его применением к конкретной системе рекуррентных соотношений. Рассмотрим один пример, который впервые был изучен методом производящих функций в работе В. Н. Сорокина [18]. Мы же следуем работе [16], где содержатся несколько конкретных систем.

Рассмотрим последовательность $M_{\vec{n}}^{\vec{\beta};c}$ совместно ортогональных многочленов Мейкснера (второго типа). Для векторного индекса $\vec{n} = (n_1, n_2)$, параметров $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_i > 0$ ($\beta_1 - \beta_2 \notin \mathbb{Z}$) и $0 < c < 1$, эти многочлены (степени $\deg M_{\vec{n}} = |\vec{n}| := (n_1 + n_2)$) определяются соотношениями ортогональности для $j = 0, \dots, n_i - 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M_{\vec{n}}^{\vec{\beta};c}(k)(-k)_j w^{\beta_i}(k) = 0, \quad w^{\beta_i}(k) := \frac{(\beta_i)_k c^k}{k!}, \quad i = 1, 2,$$

относительно дискретной на $\mathbb{N}$ меры $\mu_i = \sum_{k=0}^{+\infty} w^{\beta_i}(k) \delta_k$. Для последовательности многочленов $M_{n_1, n_2}^{\beta_1, \beta_2; c}(x)$ в [17] получен явный вид рекуррентных соотношений

$$x M_{n_1, n_2}^{\vec{\beta};c} = M_{n_1+1, n_2}^{\vec{\beta};c} + b_{n_1, n_2} M_{n_1, n_2}^{\vec{\beta};c} + c_{n_1, n_2} M_{n_1, n_2-1}^{\vec{\beta};c} + d_{n_1, n_2} M_{n_1-1, n_2-1}^{\vec{\beta};c},$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned} b_{n_1, n_2} &= n_1(2a + 1) + n_2(a + 1) + a\beta_1, & a &:= \frac{c}{1 - c}, \\ c_{n_1, n_2} &= a(a + 1)(n_1 n_2 + n_1(n_1 + \beta_1 - 1) + n_2(n_2 + \beta_2 - 1)), \\ d_{n_1, n_2} &= a^2(a + 1)n_1(n_1 + \beta_1 - 1)(n_1 + \beta_1 - \beta_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Теорема 1.2 дает асимптотику корня n -й степени для многочленов (решений рекуррентных соотношений) в масштабе переменной x_n (1.22), из которой, в свою очередь, можно извлечь явный вид предельной меры распределения нулей многочлена, сжатого в масштабе (1.22).

Нам будет удобно ввести дополнительные к (1.17) обозначения. Пусть

$$L_1(\tilde{t}) = \lambda_1(t), \quad \tilde{t} = \frac{1}{t}, \quad t := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{x_n}.$$

В новых обозначениях асимптотическая формула (1.21) теоремы 1.2 примет вид

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{M_{n,n}(x_n)}{(n!)^2} \right| = \frac{1}{n} \int_0^n \ln \left| L_1 \left(\frac{x_n}{\eta} \right) \right| d\eta + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

равномерно для $\frac{x_n}{n} \in K \Subset \Omega$, где Ω – область, содержащая бесконечно удаленную точку ∞ и ограниченная кривой $\Gamma := \{\tilde{t} : |L_1(\tilde{t})| = |L_2(\tilde{t})|\}$.

Заметим, что $L(\tilde{t})$ является алгебраической функцией как корень характеристического многочлена матрицы $A(\tilde{t})$ из рациональных от $\tilde{t}$ функций. Это обстоятельство позволяет нам использовать униформизацию алгебраической кривой $L(\tilde{t})$:

$$\begin{cases} L = F_1(s), \\ n = \frac{x}{F_2(s)}, \end{cases}$$

где s есть униформизирующий параметр, и вычислить в явном виде интеграл в правой части (5.2).

Так как левая часть (5.2) есть взятый с обратным знаком потенциал меры величины 2 равномерно распределенной в нулях многочлена $M_{n,n}$ (минус постоянная), то для преобразования Коши H – предельной меры распределения λ ,

$$H(t) = \ln \phi_0(t) = \int \frac{d\lambda(\xi)}{t - \xi},$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{n} \int_0^n \ln \left(L_1 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) d\eta \right] \Big|_{n=x/t} = H(t). \quad (5.3)$$

Реализуем эту схему для $M_{n,n}$, определяемых рекуррентными соотношениями (5.1). Обе матрицы перехода $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ (1.16) имеют одинаковый предел

$$A^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}a - 1 & -\frac{3}{4}a(a+1) & -\frac{1}{8}a^2(a+1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это обстоятельство позволяет использовать матрицу

$$A^{(1)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(1)}, \quad t \in K \Subset \mathbb{C},$$

вместо матрицы перехода из (1.17), мы только должны удвоить правую часть формулы (5.2).

Характеристический многочлен $P(L, t)$ матрицы $A^{(1)}(t)$ имеет вид

$$P = L^3 - \frac{1}{2}L^2t + \frac{3}{2}L^2a + \frac{3}{4}a^2L + \frac{3}{4}aL + \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{8}a^2.$$

Уравнение $P(L, t) = 0$ определяет алгебраическую функцию $L(t)$ рода нуль, следовательно, эта функция допускает рациональную униформизацию. Более того, ввиду линейного вхождения t в $P(L, t)$ мы сразу получаем эту униформизацию, если возьмем L в качестве униформизирующей переменной:

$$\begin{cases} L = L, \\ t = \frac{P(L, t) + \frac{1}{2}L^2t}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{4} \frac{(2L + b + b^2)(2L - b + b^2)(2L - 1 + b^2)}{L^2}, \end{cases}$$

где для большей компактности выражений a заменено на $a := b^2 - 1$. Отсюда, так как $t = \frac{x}{n}$, получаем

$$n = \frac{4L^2x}{(2L + b + b^2)(2L - b + b^2)(2L - 1 + b^2)}. \quad (5.4)$$

Теперь мы можем вычислить интеграл в правой части (5.2); получаем

$$2 \int \ln(L) dn = 2n \ln(L) + x \ln(2L + b + b^2) + x \ln(2L - b + b^2) - 2x \ln(2L - 1 + b^2).$$

Затем подставляем $x(n)$ из (5.4) в полученное выражение, умножаем на $1/n$, и в результате получаем правую часть (5.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L) &:= \frac{2}{n} \int \ln(L) dn = 2 \ln(L) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{L^2} \left((2L + b + b^2)(2L - 1 + b^2) \ln \left(\frac{(2L + b + b^2)(2L - b + b^2)}{(2L - 1 + b^2)^2} \right) (2L - b + b^2) \right). \end{aligned}$$

Для получения преобразования Коши H предельной меры распределения λ согласно (5.3) мы дифференцируем полученное выражение по t , используя униформизирующую переменную L . Получаем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(L(t)) = \frac{\frac{d}{dL} \mathcal{F}(L)}{\frac{d}{dL} t(L)} = \ln \left(\frac{(2L + b + b^2)(2L - b + b^2)}{(2L - 1 + b^2)^2} \right) = H.$$

Наконец, подставляя

$$\begin{aligned} z &:= t = \frac{1}{4} \frac{(2L + b + b^2)(2L - b + b^2)(2L - 1 + b^2)^2}{L^2}, \\ \phi &:= e^H = \frac{(2L + b + b^2)(2L - b + b^2)}{(2L - 1 + b^2)^2}, \quad b := \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\sigma}}, \quad \sigma = c^{-1}, \end{aligned}$$

получаем уравнение для функции $\phi(z)$

$$z^2 \phi^3 - \phi^2 (2\sigma z^2 + z^2 - 2z\sigma + 2z - \sigma + 1) + z\sigma (z\sigma + 2z - 2\sigma + 2)\phi - \sigma^2 z^2 = 0. \quad (5.5)$$

Эта алгебраическая функция однозначна и рациональна на трехлистной римановой поверхности $\mathcal{R}$, она имеет четыре точки ветвления: бесконечно удаленную точку ∞ и три точки e_- , e_1 , e_2 ($e_- < 0 < e_1 < e_2$) на действительной оси. Разрежем $\mathcal{R}$ так, чтобы сделать функцию H на ней однозначной. Разрез, соединяющий логарифмические сингулярности функции H , начинается в точке 0 на главном листе $\mathcal{R}_0$ и идет вдоль $\mathbb{R}_+$ к точке ветвления e_1 , где переходит на лист $\mathcal{R}_1$ и идет по нему назад через точку 0 к точке ветвления e_- , где, в свою очередь, переходит на $\mathcal{R}_2$ и идет там назад к точке 0. Таким образом, получили, что функция H мероморфна на открытой римановой поверхности

$$\mathcal{R} \setminus \{[0, e_1]^{(0)} \cup [e_-, e_1]^{(1)} \cup [e_-, 0]^{(2)}\}.$$

Напомним, что плотность меры λ находится по предельным значениями мнимой части функции $\ln \phi(z)/\pi$ в точках отрезка $[0, e_2]$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} H(t + i0), \quad t \in [0, e_2] \subset \mathcal{R}_0. \quad (5.6)$$

Так как функция φ отрицательна на $[0, e_1] \subset \mathcal{R}_0$, имеем, что плотность меры λ равна там единице. Следовательно, отрезок $[0, e_1]$ соответствует *зоне насыщения* нулей многочлена, ортогонального относительно дискретной меры, а отрезок $\Sigma = [e_1, e_2]$ – *свободная зона*, где нули распределены в соответствии с некоторым законом равновесия.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В заключение отметим, что в последнее время вызывают интерес рекуррентные соотношения совместно ортогональных многочленов, связывающие соседние мультииндексы в многомерных таблицах см. [19], где вместо (1.12) рассматривают

$$\begin{cases} P_{n+1,m}(x) = (x - a_n^{(1)})P_{n,m}(x) + b_n P_{n,m-1} + c_n P_{n-1,m}, \\ P_{n,m+1}(x) = (x - a_n^{(2)})P_{n,m}(x) + b_n P_{n,m-1} + c_n P_{n-1,m}. \end{cases}$$

Проведение асимптотического анализа решений таких рекуррентных соотношений представляется нам интересной открытой задачей.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, “Multiple orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1-2 (1998), 423–447.
- [2] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [3] H. Poincaré, “Sur les equations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies”, *Amer. J. Math.*, **7**:3 (1885), 203–258.
- [4] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 2-е изд., ГИФМЛ, М., 1959, 400 с.; нем. пер. 1-го изд.: A. O. Gel’fond, *Differenzenrechnung*, Hochschulbücher für Math., **41**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958, viii+336 pp.
- [5] В. И. Буслаев, “О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 13–28; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Poincaré’s theorem and its applications to the convergence of continued fractions”, *Sb. Math.*, **189**:12 (1998), 1749–1764.

- [6] M. Plancherel, W. Rotach, “Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d’Hermite $H_n(x) = (-I)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$ ”, *Comment. Math. Helv.*, **1** (1929), 227–257.
- [7] Д. Н. Туляков, “Асимптотика типа Планшереля–Ротаха для решений линейных рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **201**:9 (2010), 111–158; англ. пер.: D. N. Tulyakov, “Plancherel–Rotach type asymptotics for solutions of linear recurrence relations with rational coefficients”, *Sb. Math.*, **201**:9 (2010), 1355–1402.
- [8] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Асимптотики многочленов Мейкснера и ядер Кристоффеля–Дарбу”, Тр. ММО, **73**, МЦНМО, М., 2012, 87–132; англ. пер.: A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, “Asymptotics of Meixner polynomials and Christoffel–Darboux kernels”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2012**, 2012, 67–106.
- [9] P. G. Nevai, J. S. Dehesa, “On asymptotic average properties of zeros of orthogonal polynomials”, *SIAM J. Math. Anal.*, **10**:6 (1979), 1184–1192.
- [10] W. Van Assche, *Asymptotics for orthogonal polynomials*, Lecture Notes in Math., **1265**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, vi+201 pp.
- [11] W. Van Assche, “Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula. II”, *J. Approx. Theory*, **52**:3 (1988), 322–338.
- [12] W. Van Assche, J. S. Geronimo, “Asymptotics for orthogonal polynomials with regularly varying recurrence coefficients”, *Rocky Mountain J. Math.*, **19**:1 (1989), 39–49.
- [13] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Главный член асимптотики решений четырехчленных рекурсий”, *Препринты ИПМ*, 2013, 001, 20 с.
- [14] А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, “Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **196**:8 (2005), 3–20; англ. пер.: A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “Ratio asymptotics of Hermite–Padé polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **196**:8 (2005), 1089–1107.
- [15] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, “Asymptotics of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice”, *J. Phys. A*, **34**:48 (2001), 10627–10637.
- [16] A. Aptekarev, J. Arvesú, “Asymptotics for multiple Meixner polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, **411**:2 (2014), 485–505.
- [17] J. Arvesú, J. Coussement, W. Van Assche, “Some discrete multiple orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **153**:1-2 (2003), 19–45.
- [18] В. Н. Сорокин, “О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера”, *Матем. сб.*, **201**:10 (2010), 137–160; англ. пер.: V. N. Sorokin, “On multiple orthogonal polynomials for discrete Meixner measures”, *Sb. Math.*, **201**:10 (2010), 1539–1561.
- [19] W. Van Assche, “Nearest neighbor recurrence relations for multiple orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **163**:10 (2011), 1427–1448.

Александр Иванович Аптекарев
(Alexander I. Aptekarev)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Поступила в редакцию
25.08.2014 и 21.10.2014

Дмитрий Николаевич Туляков
(Dmitrii N. Tulyakov)

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: dntulyakov@gmail.com