Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ч. Кулаев, Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 12, 79–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:23:48

УДК 517.927.6

Р. Ч. Кулаев

Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе

В работе развивается теория неосцилляции уравнений четвертого порядка на геометрическом графе, возникающих при моделировании стержневых конструкций. Определение неосцилляции уравнения дается в терминах свойств специальной фундаментальной системы решений однородного уравнения. Устанавливается связь свойства неосцилляции со свойством положительности функции Грина некоторых классов краевых задач для уравнения четвертого порядка на графе. Также формулируется принцип максимума для уравнения четвертого порядка на графе и доказываются свойства дифференциальных неравенств.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: неосцилляция, дифференциальное уравнение на графе, функция Грина, принцип максимума, осцилляционность.

DOI: 10.4213/sm8417

В настоящей работе некоторые из основных фактов теории неосцилляции переносятся на уравнение четвертого порядка на геометрическом графе (пространственной сети). Напомним, что в классической теории уравнение n -го порядка называется неосциллирующим на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если любое его нетривиальное решение имеет не более $n - 1$ нулей, которые считаются с учетом их кратностей (см. [1], [2]). Впервые понятие неосцилляции появилось в отечественной литературе в конце 1950-х годов (введен этот термин Н. В. Азбелевым). В зарубежной литературе соответствующий термин носит название *disconjugacy* (см. работу А. Винтнера [3]). Вопрос о неосцилляции дифференциального уравнения занимает одно из центральных мест в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное значение это свойство приобретает в контексте исследования осцилляционных свойств спектра краевых задач и в первую очередь – положительности функции Грина того или иного класса краевых задач. Так, например, для уравнения второго порядка на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ неосцилляция эквивалентна, с одной стороны, существованию положительного на полуинтервале $[a, b)$ решения уравнения, а с другой стороны – положительности функции Грина задачи Дирихле.

Известные на сегодняшний день результаты, связанные с неосцилляцией уравнений на графах, касаются уравнения второго порядка и подробно изложены в монографиях [4], [5]. Свойство неосцилляции уравнения второго порядка на графе базируется на понятии S -зоны, являющейся аналогом промежутка между соседними нулями непрерывной на отрезке функции. Для непрерывной на графе функции под S -зоной понимается любой подграф, на котором функция не имеет нулей и на границе которого она равна нулю. Уравнение второго порядка на графе называется неосциллирующим, если любое его нетривиальное решение не имеет S -зон на графе. Замена в определении неосцилляции

уравнения второго порядка “числа нулей” на “число S -зон” позволила получить для уравнения второго порядка на графе точный аналог теории неосцилляции уравнения на отрезке – аналоги теорем сравнения Штурма и критерия неосцилляции Валле Пуссена. При этом, как и в случае уравнения на отрезке, условия неосцилляции уравнения второго порядка на графе оказались эквивалентны, с одной стороны, положительности решений специальных задач Дирихле, а с другой стороны – положительности функции Грина задачи Дирихле. Причем при других краевых условиях функция Грина может оказаться и неположительной.

В настоящей работе мы изучаем свойство неосцилляции уравнений четвертого порядка на графе специального вида, которые возникают при моделировании упругих стержневых конструкций. В работе [6] дан критерий положительности функции Грина некоторых краевых задач для таких уравнений. Согласно [6] положительность функции Грина эквивалентна положительной разрешимости специфических краевых задач четвертого порядка. Этот результат и приведенные выше соображения дают основание в качестве отправной точки при изучении неосцилляции уравнения на графе брать свойство положительности специальной фундаментальной системы решений уравнения на графе. Тем более, что фундаментальная система решений характеризует дифференциальное уравнение в целом. При таком подходе проявляется специфика уравнений четвертого порядка. Если для уравнения второго порядка пространство его решений допускает параметризацию граничными значениями функций, то в случае уравнения четвертого порядка решение однозначно определяется уже *парам*и значений – самого решения и его первой (или второй) производной – в граничных вершинах графа. Поскольку в каждой граничной вершине у нас два параметра, то, естественно, возникает вопрос об иерархии зависимости свойства знакопостоянства решений от одного и от другого параметра. Как будет показано ниже, параметр, соответствующий граничному значению функции, оказывается более существенным, чем параметр, соответствующий значению производной. В связи с этим для уравнения четвертого порядка возникает два вида неосцилляции – слабая и сильная. Для классического случая, когда внутренние вершины графа отсутствуют, эти понятия не различимы, а в случае, когда множество внутренних вершин графа не пусто, они, вообще говоря, различаются. Слабая неосцилляция обеспечивает положительность функции Грина для класса задач Дирихле, а сильная неосцилляция – положительность функции Грина для более широкого класса краевых задач. Помимо этого, свойство слабой неосцилляции позволяет получить теоремы сравнения для функций Грина краевых задач Дирихле, а в терминах сильной неосцилляции удастся сформулировать принцип максимума и получить свойства дифференциальных неравенств для уравнения четвертого порядка на графе.

§ 1. Основные определения и обозначения

Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается связное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i , а вершины — через a, b, c или a_j, b_j, c_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер).

Обозначим через $V(\Gamma)$ множество всех вершин графа, а через $J(\Gamma)$ – множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть граничными и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Мы считаем, что граф Γ – это объединение множества всех его ребер γ_i и множества всех внутренних вершин $J(\Gamma)$. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i , то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a . Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a , обозначим $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$. Подграфом графа Γ назовем любое связное подмножество графа Γ .

Под функцией на графе понимается отображение $u: \overset{\circ}{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i . Если a – граничная вершина графа Γ , то под $u(a)$ понимается

$$\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x), \quad i \in I(a).$$

Во внутренних вершинах графа функцию мы не определяем. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ . Для таких функций в каждой вершине $a \in J(\Gamma)$ при $i \in I(a)$ существует предел $\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$, который мы также обозначаем через $u_i(a)$. При этом величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$, $k, i \in I(a)$. Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых $u_k(a) = u_i(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любых $k, i \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их непрерывными на графе. Такое определение вполне естественно, так как мы можем доопределить их по непрерывности на весь граф.

Определим понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\mu(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset \Gamma$ на некоторый интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$ при $l_i > 0$. Функцию $\mu(x)$ будем называть метрической, а величину l_i – длиной ребра γ_i . Для сужения функции $\mu(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\mu)$ интервала $(0, l_i)$ на ребро γ_i . Метрическая функция определяет на каждом ребре графа ориентацию. Более того, она позволяет ввести для точек, принадлежащих замыканию одного и того же ребра графа, отношение порядка, а также понятие окрестности точки графа. Именно, для $x_1, x_2 \in \bar{\gamma}_i$ будем писать $x_1 < x_2$ (или $x_1 \leq x_2$), если $\mu(x_1) < \mu(x_2)$ (или $\mu(x_1) \leq \mu(x_2)$). Следует отметить, что при такой упорядоченности точки, принадлежащие разным ребрам, не сравнимы. Назовем ε -окрестностью точки $x_0 \in \Gamma \cup \partial\Gamma$ множество всех точек графа Γ , для которых $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \varepsilon$. Для ε -окрестности точки $x \in \Gamma \cup \partial\Gamma$ введем обозначение $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$. Заметим, что при нашем определении окрестность граничной вершины по сути является полукрестностью и не содержит саму граничную вершину. Мы будем иногда использовать выражение “вблизи точки $a \in \gamma$ ” (или “вблизи вершины a графа”) вместо выражения “в некоторой малой окрестности точки a , содержащейся в γ ” (или “в некоторой малой окрестности вершины a , содержащейся в Γ ”).

Пусть a – некоторая граничная вершина графа и γ – примыкающее к ней ребро. Если функция $u \in C[\Gamma]$ имеет конечное число нулей на γ , то через $\sigma u(a + 0)$ обозначим знак $u(x)$ вблизи вершины a при ориентации ребра от данной вершины.

S^- -зоной функции $u(x) \in C(\Gamma)$ будем называть подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u(x) < 0$ на Γ_0 и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$.

Функцию $u(x) \in C[\Gamma]$ назовем дифференцируемой на графе Γ , если для каждого ребра $\gamma_i \subset \Gamma$ ее сужение $u_i(x)$ дифференцируемо относительно $\mu_i(x)$. При этом полагаем

$$u'_i(x) = \frac{du_i(x)}{d\mu_i(x)} = \lim_{\Delta\mu_i(x) \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i(x)}{\Delta\mu_i(x)}, \quad x \in \gamma_i.$$

Аналогично определяются производные высших порядков. Отметим, что производные нечетных порядков зависят от направления ориентации ребер графа, т.е. определяются с точностью до знака, а для четной производной ориентация не важна. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$, а через $C^n(\Gamma)$ обозначим $C^n[\Gamma] \cap C(\Gamma)$. Пространство $C^n[\Gamma]$ допускает естественную нормировку

$$\|u\| = \sum_{j=0}^n \sup_{x \in \Gamma} |u^{(j)}(x)|.$$

Под интегралом функции $u(x) \in C[\Gamma]$ по графу Γ понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа, т.е.

$$\int_{\Gamma} u(x) dx = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} \int_{\gamma_i} u_i(x) dx = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} \int_0^{l_i} u(x(\mu_i)) d\mu_i(x).$$

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$Lu = F(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

заданное на геометрическом графе Γ . При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя работе [4], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

При обсуждении понятия дифференциального уравнения на графе важное значение имеет вопрос о том, для каких наборов условий связи в вершинах графа следует ожидать распространения таких ключевых свойств уравнения, как характер расположения точек экстремума (принцип максимума), положительность функции Грина соответствующей краевой задачи, свойства спектра и тому подобное. Понятно, что такое распространение вряд ли возможно для всех условий. Поэтому основой для выделения классов наборов условий в вершинах графа, в сочетании с которыми уравнение на графе наследует ключевые свойства уравнения на отрезке, должны служить математические модели реальных физических явлений. Именно это соображение мы берем в качестве посыла при выделении классов уравнений 4-го порядка на графе, для которых изучаются аналоги свойств скалярных уравнений на отрезке.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u''_i)' - (q_i(x)u'_i)' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \Gamma, \quad (2)$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geq 0$ на Γ , $f(x) \in C[\Gamma]$, дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u_k(a), & u'_i(a) &= \alpha_{ki}(a)u'_k(a) + \alpha_{ji}(a)u'_j(a), \\ \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\alpha_{ki}(a)u''_i(a) &= 0, & \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\alpha_{ji}(a)u''_i(a) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + \delta(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma). \quad (4)$$

При этом мы считаем, что в условиях (3), (4) все производные считаются в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j – фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $f(a)$ – заданные числа, причем $\alpha_{kk}(a) = \alpha_{jj}(a) = 1$ и $\alpha_{kj}(a) = \alpha_{jk}(a) = 0$, $\delta(a) \geq 0$, а в (4) через $D^3 u$ обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$. Кроме того, если к внутренней вершине a примыкает всего два ребра γ_i и γ_k , то полагаем, что все величины и соотношения, связанные с индексом j в системе условий (3), (4), отсутствуют. В этом случае условия (3), (4) принимают вид:

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u_k(a), & u'_i(a) &= \alpha_{ki}(a)u'_k(a), \\ \alpha_{ki}(a)p_i(a)u''_i(a) + p_k(a)(a)u''_k(a) &= 0, \\ D^3 u_i(a) + D^3 u_k(a) + \delta(a)u(a) &= f(a). \end{aligned}$$

Таким образом, левая часть Lu уравнения (1) представляет собой на ребрах графа Γ левую часть уравнения (2), а на $J(\Gamma)$ – задается равенствами (3) и левыми частями условий (4). Правая часть $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \overset{\circ}{\Gamma}; \\ f(a), & \text{если } a \in J(\Gamma). \end{cases}$$

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине – условиям (3), (4).

При исследовании свойств решений уравнения (1) будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geq 0$ на Γ , $f(x) \in C[\Gamma]$;
- граф Γ является деревом;
- для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;
- для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leq 0$, $\alpha_{ki}(a) \leq 0$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Уравнение (1) имеет естественную физическую интерпретацию (см. [7], [8]). Оно возникает при моделировании малых деформаций (без учета деформаций

кручения) плоской механической системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней и имеющей структуру сети. Узлы системы образованы в результате жесткого соединения трех и более концов различных стержней. При этом предполагается, что в некоторых точках (не обязательно узловых или граничных) система упруго оперта. Поэтому первая серия предположений определяется физическим смыслом задачи. А вот последние два предположения требуют дополнительного объяснения.

Условия непрерывности вида $u_i(a) = u_k(a)$ для каждой внутренней вершины мы можем задавать, перебирая всевозможные индексы $i, k \in I(a)$, однако содержательную часть несут лишь $|I(a)| - 1$ из всех таких условий, где $|I(a)|$ – число ребер графа, примыкающих к вершине a . Таковыми, например, являются условия с произвольно фиксированным индексом $k \in I(a)$ и всеми $i \in I(a) \setminus k$. Аналогичные суждения можно делать относительно условий для первых производных из (4), которые с физической точки зрения описывают компланарность всех троек касательных векторов $u'_i(a)$, $i \in I(a)$: если θ_{is} – угол между осевыми линиями i -го и s -го стержней, примыкающих к вершине $a \in J(\Gamma)$, то

$$\alpha_{ji}(a) = -\frac{\sin \theta_{ki}}{\sin \theta_{kj}}, \quad \alpha_{ki}(a) = -\frac{\sin \theta_{ij}}{\sin \theta_{kj}},$$

причем фиксированные индексы k и j выбираются так, чтобы $0 < \theta_{kj} < \pi$. Поэтому предположение о том, что для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля, означает, что осевые линии различных стержней системы не накладываются друг на друга. Из этого же предположения следует, что условия для первых производных могут быть заменены их линейными комбинациями того же вида так, что любой наперед заданный индекс $i \in I(a)$ будет одним из двух базисных. Что касается второго базисного индекса, то он не всегда может быть выбран произвольно. Такая ситуация возникает в случае, когда в заданных условиях для первых производных из (4) одна из констант $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$, $i \neq j, k$, равна нулю: если, например, для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ будет выполняться равенство $\alpha_{ji}(a) = 0$, то индексы i и k не могут быть сделаны одновременно базисными. Из этого следует, что из всех возможных вариантов условий гладкости содержательную часть несут лишь $|I(a)| - 2$ из всех таких соотношений, например, когда фиксированы два каких-нибудь возможных базисных индекса $j, k \in I(a)$, а $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$.

Учитывая эти комментарии и результаты работы [9], последнее из наших предположений гарантирует невырожденность краевой задачи для уравнения (1) на графе Γ (или на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$) с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} u(a) + \alpha(a)D^3u(a) &= 0, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= 0, & a \in \partial\Gamma \ (a \in \partial\Gamma_0), \\ \alpha(a), \vartheta(a), \beta(a) &\geq 0, & \vartheta(a) + \beta(a) &> 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В краевых условиях мы всегда полагаем, что каждое граничное ребро графа Γ (подграфа Γ_0) ориентировано от граничной вершины, к которой оно примыкает.

Вид условий (5) обоснован физическим смыслом краевой задачи (1), (5) – они охватывают все возможные случаи закрепления концов стержневой системы.

§ 2. Фундаментальная система решений уравнения (1)

Однозначная разрешимость краевой задачи (1), (5) дает возможность параметризации пространства решений уравнения (1) на графе парами значений функций и их первой (или второй) производной в граничных вершинах графа.

ЛЕММА 1. *Соответствие между решениями однородного дифференциального уравнения (1) и упорядоченными парами значений решений и их первой (или второй) производной на границе является взаимно однозначным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположений относительно коэффициентов дифференциального уравнения (1) и краевых условий (5), а также результатов работы [9], однородная краевая задача (1), (5) имеет только тривиальное решение. Следовательно, неоднородная краевая задача (1), (5) имеет единственное решение. Это означает, что отображение

$$u \mapsto \{(u(a), u^{(\omega_a)}(a))\}_{a \in \partial\Gamma},$$

где $\omega_a = 1$ или $\omega_a = 2$, является обратимым и сюръективным, а значит, и взаимно однозначным. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $|\partial\Gamma| = m$. Тогда размерность пространства решений однородного дифференциального уравнения (1) равна $2m$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $|\partial\Gamma| = m$. Тогда множество всех решений однородного уравнения (1), удовлетворяющих n условиям из полного набора краевых условий (5), образует подпространство размерности $2m - n$.*

Лемма 1 и ее следствия 1, 2 позволяют построить фундаментальную систему решений однородного уравнения (1). Для каждой вершины $a \in \partial\Gamma$ введем в рассмотрение две краевые задачи

$$\begin{aligned} Lu &= 0, & x &\in \Gamma, \\ u(a) &= 0, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= 1, \\ u(b) + \alpha(b)D^3u(b) &= 0, & \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) &= 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Lu &= 0, & x &\in \Gamma, \\ u(a) + \alpha(a)D^3u(a) &= 1, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= 0, \\ u(b) + \alpha(b)D^3u(b) &= 0, & \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) &= 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a. \end{aligned} \quad (7)$$

Из леммы 1 и ее следствий 1, 2 следует, что для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ краевые задачи (6) и (7) однозначно разрешимы, а набор всех $2m$ решений этих задач образует фундаментальную систему решений однородного уравнения (1). Здесь и всюду далее мы считаем $|\partial\Gamma| = m$.

§ 3. Некоторые свойства решений уравнения (1)

Результаты этого параграфа носят вспомогательный характер и описывают некоторые общие свойства решений однородного уравнения (1). В частности, мы обсудим вопрос о том, как ведут себя решения краевых задач (6) и (7), если мы меняем в этих задачах значения коэффициентов в одном из краевых условий. Начнем с двух результатов, описывающих поведение решений

дифференциального уравнения (1) на отрезке, на которые впоследствии будем ссылаться.

ТЕОРЕМА 1 (см. [4; гл. 8]). 1) Всякое решение $u(x)$ однородного уравнения

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' &= 0, & p &\in C^2[a, b], \\ \inf_{x \in [a, b]} p(x) &> 0, & q &\in C^1[a, b], & q(x) &\geq 0, \end{aligned}$$

заданного на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0, \quad \vartheta(b)u'(b) + \beta(b)u''(b) = 0$$

при $\vartheta(\cdot), \beta(\cdot) \geq 0$, $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) \neq 0$, либо постоянно, либо строго монотонно.

2) Если $q(x) \not\equiv 0$ или $q(x) \equiv 0$, но $\vartheta(a) + \vartheta(b) \neq 0$, то $u(x)$ строго возрастает (убывает или постоянно) тогда и только тогда, когда $D^3u < 0$ (больше нуля или равно нулю).

ЛЕММА 2. Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение уравнения

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' &= 0, & p &\in C^2[a, b], \\ \inf_{x \in [a, b]} p(x) &> 0, & q &\in C^1[a, b], & q(x) &\geq 0, \end{aligned}$$

заданного на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, имеющее в граничной точке a нуль кратности три. Если $\sigma u(a+0) > 0$, то всюду на полуинтервале $(a, b]$ имеют место неравенства $u(x) > 0$, $u'(x) > 0$, $u''(x) > 0$ и $D^3u(x) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим уравнение в факторизованном виде Фробениуса–Пойа:

$$Lu \equiv \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} p(x) h^2(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{du}{dx} = 0, \quad x \in [a, b].$$

Здесь $h(x) \in C^3[a, b]$ является решением задачи Коши

$$(p(x)h')' - q(x)h = 0, \quad h(a) = 1, \quad h'(a) = 0$$

и удовлетворяет неравенствам $\inf_{x \in [a, b]} h(x) > 0$, $h'(x) \geq 0$ на $[a, b]$ (см., например, [4; гл. 8, § 8.5]). Возможность такой факторизации обосновывается известным результатом Пойа (см. [10], [11]), а принадлежность функции $h(x)$ пространству $C^3[a, b]$ следует из включений $p(x) \in C^2[a, b]$, $q(x) \in C^1[a, b]$.

Легко видеть, что функции

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 1, & w_2(x) &= \int_a^x h(\zeta) d\zeta, & w_3(x) &= p(a_1) \int_a^x h(\zeta) \int_a^\zeta \frac{d\xi}{p(\xi)h^2(\xi)} ds, \\ w_4(x) &= \int_a^x h(\zeta) \int_a^\zeta \frac{1}{p(\xi)h^2(\xi)} \int_a^\xi h(\eta) d\eta d\xi d\zeta \end{aligned}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) на $[a, b]$ и удовлетворяют в точке a начальным условиям

$$w_k^{(j-1)}(a) = \delta_{kj}, \quad D^3 w_k(a) = \delta_{k4}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера.

Используя свойства функции $p(x)$ и $h(x)$, не сложно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} w_4'(x) &= h(x) \int_a^x \frac{1}{p(\xi)h^2(\xi)} \int_a^\xi h(\eta) d\eta d\xi > 0, \\ w_4''(x) &= h'(x) \int_a^x \frac{1}{p(\xi)h^2(\xi)} \int_a^\xi h(\eta) d\eta d\xi + \frac{1}{p(x)h(x)} \int_a^x h(\eta) d\eta > 0, \\ D^3 w_4(x) &= \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} p(x)h^2(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{h(x)} \frac{dw_4}{dx} = 1. \end{aligned}$$

Из условий леммы следует, что функция $u(x)$ на $[a, b]$ пропорциональна функции $w_4(x)$, причем знак коэффициента пропорциональности совпадает со знаком самой функции $u(x)$. Поэтому утверждение леммы следует из свойств функции $w_4(x)$. Лемма 2 доказана.

Дальнейшие результаты настоящего параграфа посвящены исследованию зависимости знакопостоянства решений краевых задач (6) и (7) от значений коэффициентов краевых условий, а точнее, от значений коэффициентов одного краевого условия в некоторой произвольно фиксированной вершине $b \in \partial\Gamma$. Сначала мы рассмотрим случай, когда $b \in \partial\Gamma \setminus a$.

Для каждой упорядоченной пары различных граничных вершин a и b графа Γ рассмотрим краевую задачу (6) и заменим в ней первое краевое условие $u(b) + \alpha(b)D^3 u(b) = 0$ в вершине $b \in \partial\Gamma$ на более общее условие

$$u(b)D^3 u(b) \leq 0. \quad (8)$$

При этом все остальные условия остаются без изменения. Обозначим через $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$ множество всех решений получившейся краевой задачи, удовлетворяющих дополнительному условию: если $D^3 u(b) = 0$, то и $u(b) = 0$.

Аналогично, рассмотрев краевую задачу (7) и заменив в ней первое краевое условие в вершине $b \in \partial\Gamma$ на условие (8), введем множество $\mathfrak{W}_{a,b}^1$, состоящее из всех решений получившейся краевой задачи, которые удовлетворяют условию:

$$(D^3 u(b) = 0) \implies (u(b) = 0).$$

Далее, заменим в краевой задаче (6) (или (7)) второе краевое условие

$$\vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = 0$$

в вершине $b \in \partial\Gamma$ на более общее условие

$$u'(b)u''(b) \geq 0 \quad (9)$$

и обозначим через $\mathfrak{Y}_{a,b}^2$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^2$) множество всех решений полученной краевой задачи.

Очевидно, что решение задачи (6) принадлежит $\mathfrak{Y}_{a,b}^1 \cap \mathfrak{Y}_{a,b}^2$, а решение задачи (7) принадлежит $\mathfrak{W}_{a,b}^1 \cap \mathfrak{W}_{a,b}^2$.

Поставим в соответствие каждому единичному вектору $(\vartheta, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ с неотрицательными координатами функцию $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^2$) такую, что векторы $(-u'(b), u''(b)) \in \mathbb{R}^2$ и (ϑ, β) ортогональны. Из невырожденности краевых задач (6) (или (7)) и условия (9) следует, что такая функция всегда существует и единственна. Полученное отображение $(\vartheta, \beta) \mapsto u(x)$ множества

$O^+ = \{(\vartheta, \beta) : \vartheta^2 + \beta^2 = 1, \vartheta, \beta \geq 0\}$ в $\mathfrak{Y}_{a,b}^2$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^2$) ввиду непрерывной зависимости решений краевой задачи (1), (5) от коэффициентов краевых условий является непрерывным в норме $C^3(\Gamma)$ (мы полагаем, что норма в O^+ индуцирована из $\mathbb{R}^2$).

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^1$) и поставим в соответствие каждому вектору $(1, \alpha) \in \mathbb{R}_+^2$ функцию $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^1$) такую, что векторы $(u(b), D^3 u(b)) \in \mathbb{R}^2$ и $(1, \alpha)$ ортогональны. Тогда множество $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^1$) можно рассматривать как образ полупрямой $0 \leq \alpha(b) < \infty$, а получаемое при этом отображение $\alpha \mapsto u(x)$ также является непрерывным в норме $C^3(\Gamma)$.

ЛЕММА 3. Пусть некоторая функция $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ (или $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^2$) удовлетворяет условиям $u'(b) = u''(b) = 0$. Тогда $\mathfrak{Y}_{a,b}^2 = \{u\}$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^2 = \{u\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u'(b) = u''(b) = 0$, то вектор $(-u'(b), u''(b))$ ортогонален любому вектору $(\vartheta, \beta) \in O^+$. Поэтому из невырожденности краевой задачи (6) следует, что для любой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ выполнено тождественное равенство $v(x) \equiv u(x)$ на Γ .

Для функции $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^2$ рассуждения аналогичные. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Отображение $O^+ \mapsto \mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $O^+ \mapsto \mathfrak{W}_{a,b}^1$) либо постоянно, либо является гомеоморфизмом.

Аналогично получается

ЛЕММА 4. Пусть некоторая функция $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^1$) удовлетворяет условиям $u(b) = D^3 u(b) = 0$. Тогда $\mathfrak{Y}_{a,b}^1 = \{u\}$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^1 = \{u\}$).

СЛЕДСТВИЕ 4. Отображение $[0, +\infty) \mapsto \mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $[0, +\infty) \mapsto \mathfrak{W}_{a,b}^1$) либо постоянно, либо является гомеоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если отображение $\alpha(b) \mapsto v(x)$ является гомеоморфизмом между $[0, +\infty)$ и $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $\mathfrak{W}_{a,b}^1$), то функция $\alpha(b) \mapsto v(b)$ строго монотонна.

ЛЕММА 5. Пусть $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ (или $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^2$). Если $u(b) = 0, \sigma u(b+0) > 0$, то для любой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ ($v(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^2$), удовлетворяющей условию $v(b) = 0$, будет выполнено неравенство $\sigma v(b+0) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из возможности факторизации Фробениуса–Пойа (см. доказательство леммы 2) уравнения (1) на ребре γ_b , примыкающем к вершине $b \in \partial\Gamma$, следует, что любая функция $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ либо имеет на этом ребре конечное число нулей, либо равна тождественно нулю. Если бы некоторая функция $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ была равна тождественно нулю на γ_b , то в силу леммы 3 выполнялось бы равенство $\mathfrak{Y}_{a,b}^2 = \{v\}$. А поскольку по условию леммы $\sigma u(b+0) > 0$, то $u(x) \not\equiv 0$ на γ_b и, значит, $v(x) \not\equiv 0$ на γ_b . Следовательно, для каждой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ величина $\sigma v(b+0)$ определена корректно.

Предположим, что доказываемое утверждение не верно, т.е. существует функция $z(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$ такая, что $z(b) = 0$ и $\sigma z(b+0) < 0$. Тогда в силу леммы 3 вектор $(-z'(b), z''(b))$ ненулевой и ввиду (9) принадлежит замыканию четвертой четверти плоскости, а вектор $(-u'(b), u''(b))$ в силу условий $u(b) = 0$ и $\sigma u(b+0) > 0$ принадлежит замыканию второй четверти $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим отображение $O^+ \mapsto \mathfrak{Y}_{a,b}^2$. Поскольку функции $u(x)$ и $z(x)$ различны, то из следствия 3

вытекает, что это отображение взаимно однозначное. Пусть (ϑ_u, β_u) и (ϑ_z, β_z) прообразы функций $u(x)$ и $z(x)$ при отображении $O^+ \mapsto \mathfrak{Y}_{a,b}^2$. При непрерывном изменении точки $(\vartheta, \beta) \in O^+$ от $(\vartheta_z, \beta_z) \in O^+$ до $(\vartheta_u, \beta_u) \in O^+$ ненулевой вектор $(-v'(b), v''(b))$, соответствующий образу точки (ϑ, β) , непрерывно меняясь, должен перейти из $(-z'(b), z''(b))$ в $(-u'(b), u''(b))$. Это невозможно, так как $v'(b)v''(b) \geq 0$ и $|v'(b)| + |v''(b)| > 0$ для любой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$, а векторы $(-z'(b), z''(b))$ и $(-u'(b), u''(b))$ принадлежат разным четвертям плоскости. Следовательно, какова бы ни была функция $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$, векторы $(-v'(b), v''(b))$ и $(-u'(b), u''(b))$ должны лежать в одной четверти плоскости, т.е. $\sigma v(b+0) > 0$ для всех $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^2$.

Случай $v(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^1$). Если $u(b) = 0$ и $D^3u(b) > 0$, то любая функция $v \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$ ($v \in \mathfrak{W}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$) меняет знак на графе Γ , причем $v(b) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лемму для функции $u(x)$ из $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$, другой случай доказывается аналогично.

Из условий доказываемой леммы, а также леммы 4 и следствия 5 следует, что для любой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$ выполнены неравенства $v(b) \neq 0$ и $D^3v(b) \neq 0$. Поэтому для любой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$ вектор $(v(b), D^3v(b))$ ненулевой и ввиду (8) лежит внутри второй или четвертой четверти плоскости $\mathbb{R}^2$.

Предположим, что теорема не верна. Тогда некоторому $\alpha_0 > 0$ соответствует функция $z(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$, знакопостоянная на Γ . По определению множества $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$ выполнены соотношения $z(a) = 0$ и $z'(a) > 0$, а значит, $z(x) \geq 0$ на всем графе Γ . Поскольку $z(b) \neq 0$, то $z(b) > 0$ и $D^3z(b) < 0$, т.е. вектор $(z(b), D^3z(b))$ лежит внутри четвертой четверти плоскости. При этом вектор $(u(b), D^3u(b))$ в силу условий леммы принадлежит замыканию второй четверти. Рассмотрим отображение $[0, +\infty) \ni \alpha \mapsto v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1$. Очевидно, что значению $\alpha = 0$ соответствует функция $u(x)$. Поскольку отображение $\alpha \mapsto v(x)$ непрерывно в норме $C^3(\Gamma)$, то при непрерывном и монотонном изменении α от $\alpha_0 > 0$ до нуля функция $v(x)$ будет непрерывно меняться от $z(x)$ до $u(x)$ в норме $C^3(\Gamma)$. Но тогда ненулевой вектор $(v(b), D^3v(b))$ должен непрерывно перейти от вектора $(z(b), D^3z(b))$ четвертой четверти в вектор $(u(b), D^3u(b))$ второй четверти, минуя первую и третью четверти плоскости, что невозможно. Следовательно, для любой функции $v(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$ вектор $(v(b), D^3v(b))$ должен лежать в той четверти, замыканию которой принадлежит $(u(b), D^3u(b))$. Следовательно, $v(b) < 0$ для всех $v \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $u(x) \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1$ (или $u(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^1$). Если $u(b) = 0$ и $D^3u(b) < 0$, то для любой функции $v \in \mathfrak{Y}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$ ($v \in \mathfrak{W}_{a,b}^1 \setminus \{u\}$) выполнено неравенство $v(b) > 0$.

Доказательство леммы опирается на те же идеи, что и доказательство предыдущей леммы. На подробностях не останавливаемся.

Мы определили множества $\mathfrak{Y}_{a,b}^1$ и $\mathfrak{Y}_{a,b}^2$ ($\mathfrak{W}_{a,b}^1$ и $\mathfrak{W}_{a,b}^2$) для случая $a \neq b$. Теперь рассмотрим случай $a = b$. Здесь мы воспользуемся результатом работы [6].

ЛЕММА 8 (см. [6]). Пусть $a \in \partial\Gamma$, а $u(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (1) на графе Γ , удовлетворяющее на $\partial\Gamma \setminus a$ соответствующим условиям из (5). Тогда имеют место следующие свойства:

- 1) если $u(a) = 0$, то $u'(a)u''(a) < 0$;
- 2) если $u'(a)u''(a) = 0$, то $u(a) \neq 0$ и $u(a)D^3u(a) \geq 0$.

Используя лемму 8, введем обобщения краевых задач (6) и (7). Для этого заменим в задаче (6) краевое условие $\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 1$ на

$$u'(a)u''(a) < 0,$$

а остальные условия оставим без изменения. Обозначим через $\mathfrak{Y}_{a,a}^2$ множество всех решений получившейся краевой задачи.

Аналогично, заменим в задаче (7) краевое условие $u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = 1$ на два условия

$$u(a) > 0, \quad D^3u(a) \geq 0$$

и обозначим через $\mathfrak{W}_{a,a}^1$ множество всех решений получившейся краевой задачи. Что касается множеств $\mathfrak{Y}_{a,a}^1$ и $\mathfrak{W}_{a,a}^2$, то они определяются точно так же, как и для случая $a \neq b$.

ЛЕММА 9. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – решения краевых задач (6) и (7), удовлетворяющие условиям $u'(a) = 1$ и $v(a) = 1$. Тогда $\mathfrak{Y}_{a,a}^2 = \{\lambda u(x), \lambda > 0\}$ и $\mathfrak{W}_{a,a}^1 = \{\lambda v(x), \lambda > 0\}$.

Утверждение леммы следует из леммы 1, следствия 2 и леммы 8.

§ 4. Слабая неосцилляция уравнения (1)

В настоящем параграфе мы приступаем к изучению теории неосцилляции для уравнения четвертого порядка на графе. Свойство неосцилляции уравнения на графе нас интересует, в первую очередь, в контексте изучения свойств функций Грина краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе. Поэтому основой развития теории неосцилляции уравнений четвертого порядка на графе служит критерий положительности функции Грина краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями (5) (см. [6]), тем более, что идеи и методы работы [6] применимы к более широкому классу уравнений четвертого порядка и, в частности, к уравнению с условиями упруго-шарнирного соединения в узлах, которое изучалось в монографии [4; гл. 8]. Формулируется этот критерий в терминах свойства знакопостоянства однозначно определяемой системы m решений однородного уравнения, где m – число граничных вершин графа. Согласно лемме 1 пространство решений однородного уравнения (1) допускает параметризацию парами $\{(u(a), u^{(\omega_a)}(a))\}_{a \in \partial\Gamma}$ значений решения и его производной (первой или второй) в граничных вершинах графа. Вследствие этого возникает определенная иерархия зависимости свойства знакопостоянства решений однородного уравнения от параметров, составляющих каждую пару. При этом для решений однородного уравнения (1) помимо этой иерархии еще имеется иерархия, обусловленная порядком производной ($\omega_a = 1$ и $\omega_a = 2$), входящей в пару. Отметим, что для классического случая уравнения на отрезке, когда множество внутренних вершин графа пусто – $J(\Gamma) = \emptyset$ – обе эти иерархии отсутствуют. Однако в случае простейшего графа Γ , составленного

из последовательно соединенных в цепь ребер ($J(\Gamma) \neq \emptyset$ и $|\partial\Gamma| = 2$), у решений однородного уравнения (1) возникает иерархия параметров (значение функции и значение производной), но отсутствует иерархия порядка производных, которая начинает выявляться лишь в случае графа, не гомеоморфного интервалу – когда $J(\Gamma) \neq \emptyset$ и $|\partial\Gamma| \geq 3$. В последнем случае проявляется вся специфика уравнений четвертого порядка на графе. Стоит также отметить, что для уравнений второго порядка на графах такая ситуация также не возникает, поскольку решение уравнения второго порядка однозначно определяется своими значениями на границе.

В настоящем параграфе мы исследуем качественные свойства решений однородного уравнения (1), которые равны нулю на всей границе графа. Как показывают результаты работы [6], свойства таких функций определяют знак функции Грина задачи Дирихле для уравнения (1). Начнем мы с вопроса о зависимости положительности функции Грина краевой задачи Дирихле (1), (5) от коэффициентов $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ краевых условий (5).

Всюду в этом параграфе считаем, что в краевых условиях (5) выполнено тождественное равенство $\alpha(\cdot) \equiv 0$ на $\partial\Gamma$. В данном случае функция Грина краевой задачи (1), (5) строго положительна на $\Gamma \times \Gamma$ тогда и только тогда, когда для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (6) положительно на всем графе Γ (см. [6]). Понятно, что решение краевой задачи (6) зависит от значений функций $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$: $\partial\Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$, определяющих коэффициенты в краевых условиях (5). В работе [12] показано, что если граница графа Γ состоит только из двух вершин, т.е. если граф Γ состоит из последовательно соединенных в цепь ребер, то знакопостоянство решений краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, никак не связано со значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$, а зависит только от коэффициентов дифференциального уравнения (1). Если же граница графа содержит хотя бы три точки, то здесь ситуация совершенно иная. При изменении коэффициентов краевых условий решение краевой задачи (6) (а с ним и функция Грина) может потерять свойство положительности, а может и, наоборот, приобрести его. Соответствующий пример будет приведен ниже.

Рассмотрим две пары неотрицательных функций $\beta(\cdot)$, $\tilde{\beta}(\cdot)$ и $\vartheta(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$, определенных на $\partial\Gamma$ и удовлетворяющих условиям

$$\beta(a) + \vartheta(a) > 0, \quad \tilde{\beta}(a) + \tilde{\vartheta}(a) > 0, \quad a \in \partial\Gamma.$$

Каждая пара $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ и $\tilde{\beta}(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$ определяет свой набор краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, решения которых мы обозначим через $z_a(x)$ и $\tilde{z}_a(x)$.

ЛЕММА 10. Пусть всюду на $\partial\Gamma$ выполнено неравенство

$$\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} \geq \frac{\tilde{\beta}(a)}{\tilde{\vartheta}(a)}$$

(в случае $\vartheta(a) = 0$ полагаем $\beta(a)/\vartheta(a) = \infty$, аналогично при $\tilde{\vartheta}(a) = 0$). Если все функции $\tilde{z}_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ , то и все функции $z_a(x)$ положительны на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\beta(\cdot)/\vartheta(\cdot) \equiv \tilde{\beta}(\cdot)/\tilde{\vartheta}(\cdot)$ на $\partial\Gamma$, то в силу невырожденности задач (6) будем иметь $z_a(x) \equiv \tilde{z}_a(x) > 0$ для всех $a \in \partial\Gamma$. Поэтому

рассмотрим случай $\beta(\cdot)/\vartheta(\cdot) \not\equiv \tilde{\beta}(\cdot)/\tilde{\vartheta}(\cdot)$. Доказательство будем вести индукцией по количеству граничных вершин графа, в которых выполнено строгое неравенство $\beta(\cdot)/\vartheta(\cdot) > \tilde{\beta}(\cdot)/\tilde{\vartheta}(\cdot)$.

Пусть неравенство $\beta(\cdot)/\vartheta(\cdot) > \tilde{\beta}(\cdot)/\tilde{\vartheta}(\cdot)$ выполняется только в одной вершине $b \in \partial\Gamma$. Из леммы 6 следует, что $z_b(x) \equiv \lambda \tilde{z}_b(x)$ при некотором $\lambda > 0$. Поэтому $z_b(x) > 0$ на всем Γ .

Рассмотрим теперь функции $z_a(x)$, соответствующие другим граничным вершинам. Зафиксируем произвольную граничную вершину $a \in \partial\Gamma \setminus b$ и определим функцию $r(x) = z_a(x) - \tilde{z}_a(x)$. Очевидно, что функция $r(x)$ удовлетворяет на $\partial\Gamma \setminus \{a, b\}$ тем же краевым условиям, что и функции $z_a(x)$, $\tilde{z}_a(x)$, а в вершине a — однородному краевому условию

$$\vartheta(a)r'(a) - \beta(a)r''(a) = 0.$$

Посмотрим на свойства функции $r(x)$ в вершине b . Сразу отметим, что поскольку $\tilde{z}_a(x) > 0$ на всем графе Γ , то из краевых условий $\tilde{z}_a(b) = 0$ и $\tilde{\vartheta}(b)\tilde{z}'_a(b) - \tilde{\beta}(b)\tilde{z}''_a(b) = 0$ следует, что $\tilde{z}'_a(b)\tilde{z}''_a(b) \geq 0$, а значит, $\tilde{z}'_a(b) \geq 0$ и $\tilde{z}''_a(b) \geq 0$. Далее, так как $\beta(b)/\vartheta(b) > \tilde{\beta}(b)/\tilde{\vartheta}(b)$, то $\beta(b) > 0$ и $\tilde{\vartheta}(b) > 0$. Поэтому для функции $r(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \vartheta(b)r'(b) - \beta(b)r''(b) &= \vartheta(b)z'_a(b) - \beta(b)z''_a(b) - \vartheta(b)\tilde{z}'_a(b) + \beta(b)\tilde{z}''_a(b) \\ &= \beta(b) \left[-\frac{\vartheta(b)}{\beta(b)}\tilde{z}'_a(b) + \tilde{z}''_a(b) \right] \geq \beta(b) \left[-\frac{\tilde{\vartheta}(b)}{\tilde{\beta}(b)}\tilde{z}'_a(b) + \tilde{z}''_a(b) \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $r(x)$ является решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} r(b) &= 0, & \vartheta(b)r'(b) - \beta(b)r''(b) &\geq 0, \\ r(c) &= 0, & \vartheta(c)r'(c) - \beta(c)r''(c) &= 0, & c \in \partial\Gamma \setminus b. \end{aligned}$$

Следовательно, либо $r(x) \equiv 0$ на Γ , либо $r(x) \in \mathfrak{V}_{b,b}^2$ и в силу леммы 9 $r(x) \equiv \lambda \tilde{z}_b(x)$ при некотором $\lambda > 0$. Значит, $r(x) \geq 0$ на всем графе, т.е. $z_a(x) \geq \tilde{z}_a(x) > 0$, $a \in \partial\Gamma$.

Предположим, что утверждение леммы верно для случая, когда неравенство $\beta(\cdot)/\vartheta(\cdot) > \tilde{\beta}(\cdot)/\tilde{\vartheta}(\cdot)$ выполняется в любых n граничных вершинах графа при некотором $n \leq m - 1$, и покажем, что тогда оно верно и в случае строгих неравенств в $(n + 1)$ -й граничной вершине. Выберем произвольную вершину $b \in \partial\Gamma$, в которой выполнено строгое неравенство $\beta(b)/\vartheta(b) > \tilde{\beta}(b)/\tilde{\vartheta}(b)$. Заменим значение функции $\beta(\cdot)$ в точке $b \in \partial\Gamma$ на $\tilde{\beta}(b)$, а значение $\vartheta(b)$ — на $\tilde{\vartheta}(b)$ и обозначим через $\tilde{\beta}(\cdot)$ и $\tilde{\vartheta}(\cdot)$ получаемые таким образом функции. Через $\hat{z}_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, обозначим решения получающихся при такой замене краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$. В силу предположения индукции сразу при всех $a \in \partial\Gamma$ на всем графе Γ будут выполнены неравенства $\hat{z}_a(x) > 0$. Далее, для произвольной вершины $a \in \partial\Gamma$ определим функцию $r(x) = z_a(x) - \hat{z}_a(x)$ и, дословно повторяя рассуждения проведенные выше, показываем, что функция $r(x)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяющим на $\partial\Gamma$ краевым условиям

$$\begin{aligned} r(b) &= 0, & \vartheta(b)r'(b) - \beta(b)r''(b) &\geq 0, \\ r(c) &= 0, & \vartheta(c)r'(c) - \beta(c)r''(c) &= 0, & c \in \partial\Gamma \setminus b. \end{aligned}$$

Откуда следует тождественное равенство $r(x) \equiv \lambda \tilde{z}_a(x)$ при некотором $\lambda \geq 0$. Поэтому $r(x) \geq 0$ на всем графе, а значит, $z_a(x) \geq \tilde{z}_a(x) > 0$. Лемма 10 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дифференциальное уравнение (1) назовем *слабо неосциллирующим* на графе Γ , если для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ краевая задача

$$\begin{aligned} Lu &= 0, & x &\in \Gamma, \\ u(a) &= 0, & u'(a) &= 1, & u(b) &= 0, & u'(b) &= 0, & b &\in \partial\Gamma \setminus a, \end{aligned} \quad (10)$$

имеет положительное на Γ решение.

Понятие слабой неосцилляции применительно к уравнению (1) на интервале, когда внутренние вершины графа отсутствуют ($J(\Gamma) = \emptyset$), не дает ничего нового и на самом деле является следствием возможности представления уравнения (1) в факторизованном виде Фробениуса–Пойа (см. доказательство леммы 2), а вот в случае $J(\Gamma) \neq \emptyset$ свойство слабой неосцилляции нетривиально. Введенное нами определение перекликается с имеющимися результатами из теории неосцилляции для уравнений второго порядка на графах. Как показывают результаты монографий [4; гл. 4], [5; § 2.4], определение 1 может быть взято в качестве отправной точки при изучении неосцилляции для уравнения второго порядка на графе, а точнее, можно определить уравнение второго порядка на графе как неосциллирующее, если все решения однородного уравнения, равные нулю во всех граничных вершинах, кроме одной, сохраняют строгий знак внутри графа. Тогда неосцилляция уравнения второго порядка на графе будет эквивалентна тому, что любое нетривиальное решение этого уравнения не имеет S -зон на графе. Напомним, что именно это свойство берется в качестве определения неосциллирующего уравнения в [4; гл. 4], [5; § 2.4]. Кроме того, определение 1 дает возможность получить ряд полезных свойств решений уравнения четвертого порядка, а с ними и свойств функций Грина краевых задач Дирихле для уравнения четвертого порядка (1).

Следует отметить, что определение слабой неосцилляции распространяется и на уравнение, порожденное обыкновенными дифференциальными уравнениями (2) на ребрах графа с условиями упруго-шарнирного сочленения

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u_k(a), & \vartheta_i(a)u'_i(a) - \beta_i(a)u''_i(a) &= 0, & i, k &\in I(a), & a &\in J(\Gamma), \\ \vartheta_i(\cdot), \beta_i(\cdot) &\geq 0, & \vartheta_i(\cdot) + \beta_i(\cdot) &> 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и условиями (4) на $J(\Gamma)$ (все производные считаются от вершин $a \in J(\Gamma)$). Свойства решений этого уравнения, которое мы назовем $(1')$, изучались в работах Ю. В. Покорного, А. В. Боровских, К. П. Лазарева и Р. О. Мустафокулова [13]–[16] и подробно представлены в монографии [4; гл. 8]. Учитывая результаты [4], можно утверждать, что уравнение $(1')$ всегда является слабо неосциллирующим. Действительно, если заменить в краевой задаче (10) однородное уравнение (1) на однородное уравнение $(1')$ и обозначить через $v_a(x)$ решение полученной краевой задачи, то, как следует из теоремы 1, функция $v_a(x)$ монотонна на каждом ребре графа кроме граничного ребра $\gamma_a = (a, b)$, $a \in \partial\Gamma$, $b \in J(\Gamma)$. Кроме того (см. [4], [16]), любое решение этого уравнения, удовлетворяющее в каждой граничной вершине графа условию $u'(\cdot)u''(\cdot) \geq 0$, достигает своих максимума и минимума на границе графа (принцип максимума). Поскольку $v'_a(a) = 1$, то либо функция $v_a(x)$ имеет точку максимума

$\xi \in \gamma_a$ такую, что $v'_a(\xi) = 0$ и $v_a(x) > 0$ на $(a, \xi] \subset \gamma_a$, либо $v'_a(x) > 0$ на γ_a и функция $v_a(x)$ возрастает на всем ребре γ_a . В первом случае в силу принципа максимума $v_a(x) > 0$ на $\Gamma \setminus (a, \xi)$, а значит, $v_a(x) > 0$ на всем Γ . Во втором случае функция $v_a(x)$ положительна на ребре γ_a и в вершине $b \in J(\Gamma)$. Отсюда и из принципа максимума следует, что $v_a(x) > 0$ на каждой ветви графа, выходящей из вершины $b \in J(\Gamma)$. Следовательно, в любом случае решение $v_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительно на Γ , т.е. уравнение (1') слабо не осциллирует.

Вернемся к уравнению (1), порожденному соотношениями (2)–(4). Это уравнение не всегда является слабо неосциллирующим. Более того, даже если уравнение (1) слабо не осциллирует на графе Γ , то отсюда не следует его слабая неосцилляция на любом подграфе $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. Мы поясним этот факт на следующем простом примере.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим плоский граф $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из трех ребер $\gamma_i = (a_i, b)$, имеющих общий конец b , который является внутренней вершиной графа. Считая ребра γ_i ориентированными от граничных вершин a_i , рассмотрим на Γ однородное уравнение

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= 0, & x \in \gamma_i, \\ u_1(b) &= u_2(b) = u_3(b), & u'_1(b) = \alpha_{12}(b)u'_2(b) + \alpha_{13}(b)u'_3(b), \\ \alpha_{12}(b)u''_1(b) + u''_2(b) &= 0, & \alpha_{13}(b)u''_1(b) + u''_3(b) = 0, & \sum_{i=1}^3 u'''_i(b) = 0. \end{aligned}$$

Если длины всех ребер равны между собой, то, как показывают вычисления, уравнение слабо не осциллирует на Γ . Если же длина одного ребра достаточно мала по сравнению с длинами двух других ребер, то рассматриваемое уравнение теряет свойство слабой неосцилляции. Это вполне объяснимо, если привлечь физическую интерпретацию уравнения. В §2 отмечалось, что оно описывает малые деформации (без учета деформаций кручения) плоской стержневой системы. Если концы всех стержней жестко закреплены и внешнее воздействие на систему происходит только вдоль стержней, соответствующих, например, ребрам γ_1 и γ_2 , то стержень, соответствующий третьему ребру, выступает для системы из первых двух стержней в роли упругой опоры. Когда мы “укорачиваем” ребро γ_3 , мы тем самым повышаем жесткость упругой опоры в точке b . Причем если длина ребра γ_3 будет стремиться к нулю, то жесткость опоры будет стремиться к бесконечности. Поэтому если длина ребра γ_3 достаточно мала по сравнению с длинами ребер γ_1 и γ_2 , то решение краевой задачи (10), соответствующей граничной вершине a_1 , оставаясь всегда положительным на ребре γ_1 (см. [17]), будет знакопеременным на ребре γ_2 , а решение задачи (10), соответствующей граничной вершине a_2 , будет положительным на ребре γ_2 и знакопеременным на ребре γ_1 . Особенно наглядно это прослеживается в случае $\alpha_{12}(b) = -1$, $\alpha_{13}(b) = 0$, когда оси первых двух стержней лежат на одной прямой. Если длина ребра γ_3 достаточно мала по сравнению с длинами ребер γ_1 и γ_2 , решение краевой задачи (10) для $a_1 \in \partial\Gamma$ будет менять знак на ребре γ_2 , а решение краевой задачи (10) для a_2 , наоборот, будет менять знак на γ_1 (см. [17], [18]). Таким образом, уменьшение длины одного ребра системы оказывает влияние на свойство знакопостоянства решений вдоль других двух ребер графа. Если же число граничных вершин графа равно двум, то из неосцилляции уравнения на графе будет следовать его неосцилляция на любом

подграфе. Последний факт совсем не очевиден. Его доказательство требует более глубокого анализа и будет проведено в отдельной статье.

Интересно также отметить, что если в рассмотренном примере стержневой системы заменить граничные условия жесткого закрепления условиями шарнирного закрепления, то зависимости положительности решений краевых задач от длин ребер не возникает (см. [19]). Решения таких задач всегда оказываются положительными. Однако эта ситуация носит частный характер и возникает только при рассмотрении уравнения (1) на графе, у которого к каждой внутренней вершине примыкает ровно по три ребра (см. [19]).

Далее мы рассмотрим некоторые следствия слабой неосцилляции уравнения (1). Из леммы 10 и определения 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть уравнение (1) слабо не осциллирует на графе Γ . Тогда для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (6) положительно на всем графе Γ при любых допустимых значениях коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ краевых условий.

ЛЕММА 11. Пусть уравнение (1) слабо не осциллирует на Γ . Тогда для любого решения уравнения (1), равного нулю на $\partial\Gamma$, из неравенства $u'(x) \geq 0$ на $\partial\Gamma$ следует, что $u(x) \geq 0$ на Γ . Если при этом $u'(x) \not\equiv 0$ на $\partial\Gamma$, то $u(x) > 0$ на всем графе Γ .

Доказательство почти очевидно: из лемм 1, 9 и следствия 6 следует, что функция $u(x)$ есть линейная комбинация положительных решений краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, с неотрицательными коэффициентами. Причем если $u'(a) > 0$ для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$, то и соответствующий коэффициент в линейной комбинации положителен.

Лемма 10 вместе со следствием 6 позволяют также сформулировать принцип сравнения для функции Грина краевой задачи Дирихле (1), (5).

ТЕОРЕМА 2 (признак сравнения). Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и всюду на $\partial\Gamma$ выполнено неравенство $\beta(a)/\vartheta(a) \geq \tilde{\beta}(a)/\tilde{\vartheta}(a)$ (в случае $\vartheta(a) = 0$ полагаем $\beta(a)/\vartheta(a) = \infty$, аналогично при $\tilde{\vartheta}(a) = 0$). Тогда положительность функции Грина $\tilde{G}(x, s)$ краевой задачи (1), (5) с коэффициентами $\tilde{\beta}(\cdot)$ и $\tilde{\vartheta}(\cdot)$ в условиях (5) влечет положительность функции Грина $G(x, s)$ задачи (1), (5) с коэффициентами $\beta(\cdot)$ и $\vartheta(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [6] показано, что функция Грина краевой задачи (1), (5) положительна на $\Gamma \times \Gamma$ тогда и только тогда, когда для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ решение $v_a(x)$ задачи (6) положительно на всем графе Γ . Так как $\tilde{G}(x, s) > 0$ на $\Gamma \times \Gamma$, то для всех $a \in \partial\Gamma$ будут выполнены строгие неравенства $\tilde{v}_a(x) > 0$ на всем графе Γ . Из леммы 10 и условий теоремы следует, что для всех $a \in \partial\Gamma$ на всем графе Γ выполняются неравенства $v_a(x) > 0$, влекущие уже положительность функции $G(x, s)$. Теорема доказана.

В качестве следствий теоремы сравнения выделим ее предельные случаи.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если функция Грина краевой задачи Дирихле для уравнения (1) с условиями жесткого закрепления на границе положительна на $\Gamma \times \Gamma$, то положительной будет и функция Грина краевой задачи (1), (5) Дирихле с любыми допустимыми значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ в краевых условиях (5).

СЛЕДСТВИЕ 8. Если функция Грина краевой задачи Дирихле для уравнения (1) с условиями шарнирного закрепления на границе меняет знак на $\Gamma \times \Gamma$, то знакопеременной будет и функция Грина краевой задачи Дирихле с любыми допустимыми значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ в краевых условиях (5).

Следующее утверждение также является следствием теоремы 2, но ввиду его важности мы выделяем его в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Слабая неосцилляция уравнения (1) на графе Γ эквивалентна положительности функции Грина задачи Дирихле (1), (5) с любыми допустимыми значениями коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ краевых условий.

Следует отметить связь свойства слабой неосцилляции уравнения (1) с теорией осцилляционных по Гантмахеру–Крейну ядер [20], [21]. Привлекая результаты работы [22], легко показать, что функция Грина двухточечной краевой задачи Дирихле (1), (5) (в случае $J(\Gamma) = \emptyset$, $|\partial\Gamma| = 2$) является осцилляционной тогда и только тогда, когда уравнение слабо не осциллирует. Аналогичный вывод можно сделать и в случае $J(\Gamma) \neq \emptyset$, $|\partial\Gamma| = 2$, т.е. когда граф Γ представляет собой цепь последовательно соединенных ребер. Как показывают результаты работ [12], [23], в этом случае условие слабой неосцилляции также является необходимым и достаточным для осцилляционности функции Грина задачи Дирихле (1), (5).

Таким образом, слабая неосцилляция уравнения (1) обеспечивает положительность функции Грина любой краевой задачи (1), (5) с неподвижными концами ($\alpha(\cdot) \equiv 0$), однако оставляет открытым вопрос о положительности функции Грина задачи с подвижными концами ($\alpha(\cdot) \not\equiv 0$). Исследованию этого вопроса будут посвящены наши дальнейшие рассуждения.

§ 5. Об иерархии зависимости знакопостоянства решений краевых задач (6) и (7)

В настоящем параграфе мы изучим вопрос об иерархии зависимости свойства знакопостоянства решений краевых задач (6) и (7). Точнее, нас будет интересовать вопрос: будет ли из положительности решений краевых задач (6) следовать положительность решений задач (7) и наоборот. Здесь нам потребуются некоторые результаты работы [6], с напоминания которых мы и начнем.

ЛЕММА 12 (см. [6]). Пусть $a \in \partial\Gamma$, а $u(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma \setminus a$ соответствующим условиям из (5). Если функция $u(x)$ имеет внутри некоторого ребра $\gamma \subset \Gamma$ кратный нуль, то $u(x) \equiv 0$ на γ .

Всюду далее решения краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, будем обозначать $y_a(x)$, а решения краевых задач (7) – через $w_a(x)$. Через γ_a по-прежнему обозначаем граничное ребро графа, примыкающее к вершине $a \in \partial\Gamma$.

Согласно результатам работы [6] функция Грина $G(x, s)$ краевой задачи (1), (5) существует, обладает свойством симметричности. При $x = s \in \Gamma$ выполнено неравенство $G(s, s) > 0$, а при $s \in \gamma_a$, $a \in \partial\Gamma$, и $x \in \Gamma \setminus (a, s)$ имеет место представление

$$G(x, s) = w_a(x)\psi_1(s) + y_a(x)\psi_2(s), \quad (12)$$

где функции $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ непрерывны на замыкании граничного ребра γ_a и удовлетворяют при $s \rightarrow a$ соотношениям

$$\begin{aligned} \psi_2(s) \rightarrow +0, \quad \psi_1(s) < 0, \quad \psi_1(s) = o(\psi_2(s)), \quad \text{если } \alpha(a) = 0; \\ \frac{\psi_1(s)}{\alpha} = O(1), \quad \psi_2(s) = o(\psi_1(s)), \quad \text{если } \alpha(a) = \alpha > 0. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие каждой граничной вершине $a \in \partial\Gamma$ функцию, определяемую следующим образом:

$$u_a(x) = \begin{cases} w_a(x), & \text{если } \alpha(a) \neq 0; \\ v_a(x), & \text{если } \alpha(a) = 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4 (см. [6]). *Для положительности функции Грина краевой задачи (1), (5) на $\Gamma \times \Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы для всех граничных вершин графа, кроме, быть может, одной, функции $u_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, были положительны на всем графе Γ .*

Рассмотрим произвольную точку $s \in \Gamma$. Точка s разбивает граф Γ на несколько подграфов, для которых она является граничной вершиной. Поэтому можно сказать, что каждая точка $s \in \Gamma$ порождает конечное множество непересекающихся ветвей графа Γ . Если s является внутренней точкой некоторого ребра графа, то таких ветвей будет две. Если же $s \in J(\Gamma)$, то количество ветвей равно количеству ребер, примыкающих к внутренней вершине $s \in J(\Gamma)$. При этом каждая граничная вершина $a \in \partial\Gamma$ принадлежит границе только одной из этих ветвей, которую мы будем обозначать через $\Gamma_a(s)$.

ЛЕММА 13 (см. [6]). *Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (5) во всех граничных вершинах графа Γ , кроме некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$. Если функция $u(x)$ равна нулю в точке $x_0 \in \Gamma$ и сохраняет знак в некоторой ее окрестности, то найдется граничная вершина $b \in \partial\Gamma \setminus a$ такая, что $u(x) \equiv 0$ на $\Gamma_b(x_0)$.*

Теперь мы можем приступить к изучению качественных свойств решений краевых задач (6) и (7).

ЛЕММА 14. *Пусть $a \in \partial\Gamma$. Если $w_a(x) > 0$ на Γ , то на замыкании любого из внутренних ребер графа функция $y_a(x)$ либо равна тождественно нулю, либо имеет не более одного простого нуля.*

Действительно, если бы на замыкании какого-либо внутреннего ребра $\gamma \subset \Gamma$ функция $y_a(x)$ имела два различных нуля, будучи не равной тождественно нулю, то нашлась бы линейная комбинация функций $w_a(x)$ и $y_a(x)$, которая внутри ребра γ имела бы кратный нуль. Тогда из леммы 12 следовало бы, что функции $w_a(x)$ и $y_a(x)$ пропорциональны на ребре γ . Но это невозможно, поскольку $\inf_{x \in \gamma} |y_a(x)| = 0$, а из положительности функции $w_a(x)$ на Γ следует $\inf_{x \in \gamma} w_a(x) > 0$. Следовательно, функция $y_a(x)$, не равная тождественно нулю на внутреннем ребре, может иметь только один нуль на этом ребре. При этом из невырожденности краевой задачи (1), (5) на любом подграфе графа Γ , следует, что этот единственный нуль не может быть кратным.

ЛЕММА 15. *Пусть γ_a – граничное ребро, примыкающее к вершине $a \in \partial\Gamma$. Если $u(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma \setminus a$ соответствующим условиям из (5), то на любом граничном*

ребре графа функция $u(x)$ либо равна тождественно нулю, либо имеет не более одного простого нуля. Если, при этом, $u(a) = 0$ и $w_a(x) > 0$ на γ_a , то $u(x)$ не имеет нулей на γ_a .

Первое утверждение леммы доказано в работе [6], а второе следует из тех же соображений, что и предыдущая лемма.

ЛЕММА 16. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – решения однородного уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (5) во всех граничных вершинах графа Γ , кроме некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$. Если $u(x) > 0$ на Γ и $\sigma v(b+0) > 0$ для всякой вершины $b \in \partial\Gamma$, то $v(x) > 0$ на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция $v(x)$ неположительна на Γ . Покажем, что в таком случае она должна менять знак на Γ . Действительно, если $v(x) \geq 0$ на Γ и существует точка $x_0 \in \Gamma$ такая, что $v(x_0) = 0$, то согласно лемме 13 функция $v(x)$ равна тождественно нулю на некотором граничном ребре, а значит, не может быть строго положительной вблизи всей границы $\partial\Gamma$. Следовательно, в предположении, что функция $v(x)$ неположительна на Γ , она имеет внутри графа хотя бы одну S^- -зону, которую мы обозначим через Γ^- .

Рассмотрим множество P таких чисел $\rho \in \mathbb{R}$, что $\rho v(x) \leq u(x)$ на подграфе Γ^- . Это множество, очевидно, не пусто (оно содержит $\rho = 0$) и ограничено снизу. Если $\rho_0 = \inf P$, то для функции $z(x) = u(x) - \rho_0 v(x)$ справедливы следующие свойства: $z(x) \geq 0$ на Γ^- и существует точка $x_0 \in \Gamma^-$ такая, что $z(x_0) = 0$. Следовательно, функция $z(x)$ удовлетворяет условиям леммы 13, а значит, найдется граничная вершина $b \in \partial\Gamma \setminus a$ такая, что $z(x) \equiv 0$ на ветви $\Gamma_b(x_0)$. Но тогда получается, что, с одной стороны, функция $v(x)$ пропорциональна функции $u(x)$ на ветви $\Gamma_b(x_0)$, т.е. $v(x) < 0$ при всех $x \in \Gamma_b(x_0)$, а с другой, что $v(x)$ меняет знак на $\Gamma_b(x_0)$ (так как $v(x_0) < 0$ и $\sigma v(b+0) > 0$). Полученное противоречие показывает, что функция $v(x)$ не имеет внутри графа S^- -зон и, значит, положительна на всем графе Γ . Лемма 16 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически, при доказательстве леммы 16 было показано, что если одно из фигурирующих в ее формулировке решений положительно, то второе не может иметь внутри графа S^- -зону.

Как показывает формула (12), свойства решений краевых задач (6) и (7) тесно связаны со свойствами соответствующей функции Грина (см. также теорему 4). В связи с этим для дальнейшего изучения свойств решений краевых задач (6) и (7) нам понадобятся некоторые свойства функции Грина краевой задачи (1), (5).

ЛЕММА 17. Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующая функция $w_a(x)$ положительна на всем графе Γ . Тогда в предположении, что при некотором $s_0 \in \Gamma$ срезка $g_{s_0}(\cdot) = G(\cdot, s_0)$ функции Грина краевой задачи (1), (5) равна нулю в точке $x_0 \in \Gamma$, функция $g_{s_0}(x)$ должна менять знак в любой окрестности точки x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция $g_{s_0}(x)$ не меняет знак в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Gamma$. Тогда ввиду леммы 13 $g_{s_0}(x) \equiv 0$ на некотором граничном ребре γ_b , $b \in \partial\Gamma$. Ввиду симметричности функции Грина, $G(s_0, x) \equiv 0$ при $x \in \gamma_b$. Поэтому из формулы (12) следует, что $y_b(s_0) = w_b(s_0) = 0$, что противоречит условию $w_b(x) > 0$ на Γ . Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующая функция $w_a(x)$ положительна на всем графе Γ . Тогда из неравенства $g_s(x) \geq 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_b(s)$ при некоторых $s \in \Gamma$ и $b \in \partial\Gamma$ следует строгая положительность $g_s(x)$ на $\Gamma \setminus \Gamma_b(s)$.

ЛЕММА 18. Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующая функция $w_a(x)$ положительна на всем графе Γ . Тогда в предположении, что какая-нибудь из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, неположительна на Γ , найдется точка $s \in \Gamma$ такая, что срезка $g_s(x) = G(\cdot, s)$ функции Грина краевой задачи (1), (5) отрицательна вблизи некоторой граничной вершины графа, отличной от a , и меняет знак на ребре, примыкающем к этой вершине.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ функция $y_a(x)$ принимает неположительное значение на Γ . Из определения этой функции следует $\sigma y_a(a+0) > 0$, а значит, функция $y_a(x)$ равна нулю в некоторой точке $\xi \in \Gamma$. Тогда из формулы (12) и положительности функции $w_a(x)$ на всем графе Γ следует, что при всех $s \in \gamma_a$ достаточно близких к вершине $a \in \partial\Gamma$ должно выполняться неравенство $G(\xi, s) < 0$. Пусть $\gamma_a = (a, a_1)$ – ребро графа, примыкающее к вершине $a \in \partial\Gamma$. Поскольку $G(s, s) > 0$ при всех $s \in \Gamma$ (см. [6]), то при некотором $s_0 \in \gamma_a$ достаточно близком к вершине $a \in \partial\Gamma$ срезка $g_{s_0}(x)$ положительна в точке $x = s_0$ и меняет знак на $\Gamma \setminus \Gamma_a(s_0)$. Для каждого $s \in [s_0, a_1] \subset \bar{\gamma}_a$ определим на графе Γ функцию

$$\mathcal{G}_s(x) = \begin{cases} g_s(x), & x \in \Gamma \setminus \Gamma_a(s), \\ g_s(s), & x \in \Gamma_a(s). \end{cases}$$

Функции семейства $\{\mathcal{G}_s(x), s \in [s_0, a_1]\}$ обладают следующими свойствами:

1) каждая функция семейства принадлежит классу $C(\Gamma)$, а из непрерывности функции Грина $G(x, s)$ следует, что отображение $s \mapsto \mathcal{G}_s(x)$ непрерывно в норме $C(\Gamma)$;

2) так как $g_s(s) > 0$ (см. [6]), то функция $\mathcal{G}_s(x)$ положительна в точке $x = s$ и на $\Gamma_a(s)$;

3) функция $\mathcal{G}_{s_0}(x)$ меняет знак на $\Gamma \setminus \Gamma_a(s_0)$;

4) из леммы 17 получаем, что если $\mathcal{G}_s(x_0) = 0$, $x_0 \in \Gamma$, $s \in [s_0, a_1]$, то функция $\mathcal{G}_s(x)$ меняет знак в любой окрестности точки x_0 ;

5) каждая функция $\mathcal{G}_s(x)$ имеет внутри любого граничного ребра графа не более одного нуля (лемма 15).

Рассмотрим функцию $\mathcal{G}_{s_0}(x)$. Если $\mathcal{G}_{s_0}(x)$ отрицательна вблизи некоторой граничной вершины графа и меняет знак на ребре, примыкающем к этой вершине, то лемму можно считать доказанной. В противном случае рассмотрим функцию $\mathcal{G}_{a_1}(x)$. Если окажется, что функция $\mathcal{G}_{a_1}(x)$ положительна на Γ , то ввиду свойств 3), 1) и 4) найдется значение $s^* \in (s_0, a_1)$ такое, что функция $\mathcal{G}_{s^*}(x)$ будет иметь внутри Γ единственный нуль, который принадлежит некоторому граничному ребру графа (если $\zeta = \inf \{s \in [s_0, a_1] : \mathcal{G}_s(x) > 0 \text{ на } \Gamma\}$, то в качестве s^* можно взять, например, значение $s_0 < s^* < \zeta$ достаточно близкое к ζ). Тогда из свойств 2) и 5) будет следовать, что срезка $g_{s^*}(x)$ обладает нужным нам свойством и лемму можно считать доказанной. Если же функция $\mathcal{G}_{a_1}(x)$ меняет знак на Γ , то из свойства 2) следует, что $\mathcal{G}_{a_1}(x)$ меняет знак на $\Gamma \setminus \Gamma_a(a_1)$ и, значит, меняет знак на некоторой ветви подграфа $\Gamma \setminus \Gamma_a(a_1)$, выходящей из вершины $a_1 \in J(\Gamma)$. Обозначим через $\gamma_2 = (a_1, a_2)$ ребро этой ветви,

примыкающее к вершине a_1 . Если $a_2 \in \partial\Gamma$, то ребро γ_2 граничное, и из свойств 2) и 5) мы получаем, что срезка $g_{s_1}(x)$ обладает нужным нам свойством. В этом случае лемму можно считать доказанной. Если же $a_2 \in J(\Gamma)$, то, как и выше, определим на графе Γ семейство функций $\{\mathcal{G}_s(x), s \in [a_1, a_2]\}$. Это семейство обладает свойствами 1)–5) с заменой в них s_0 и a_1 соответственно на a_1 и a_2 . Поэтому мы можем повторить рассуждения, проведенные выше.

В наших повторяющихся рассуждениях каждая последующая ветвь графа Γ , на которой функция $\mathcal{G}_{a_j}(x)$ меняет знак, вложена в предыдущую (на которой меняет знак функция $\mathcal{G}_{a_{j-1}}(x)$) и содержит по крайней мере на одно ребро меньше. А поскольку граф Γ содержит конечное число ребер, то через конечное число шагов мы либо получим семейство $\{\mathcal{G}_s(x), s \in [a_{j-1}, a_j], a_{j-1}, a_j \in J(\Gamma)\}$ такое, что $\mathcal{G}_{a_{j-1}}(x)$ меняет знак, а $\mathcal{G}_{a_j}(x) > 0$ на Γ , либо получим, что $\mathcal{G}_{a_j}(x)$ меняет знак на ветви, состоящей из одного граничного ребра. В первом случае, как и выше, найдется значение $s^* \in (a_{j-1}, a_j)$ такое, что функция $\mathcal{G}_{s^*}(x)$ будет иметь внутри Γ единственный нуль, который принадлежит некоторому граничному ребру графа, а во втором случае функция $\mathcal{G}_{a_j}(x)$ единственный раз меняет знак внутри граничного ребра графа Γ и отрицательна вблизи соответствующей граничной вершины. Лемма 18 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$. Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ , то и все функции $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы не верно и для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ функция $y_a(x)$ принимает неположительное значение на Γ . Тогда ввиду леммы 18 найдется точка $s_0 \in \Gamma$ такая, что срезка $g_{s_0}(x) = G(\cdot, s_0)$ функции Грина краевой задачи (1), (5) меняет знак на ребре γ_b с началом $b \in \partial\Gamma$ и концом $b_1 \in J(\Gamma)$, причем $\sigma g_{s_0}(b+0) < 0$ и $\sigma g_{s_0}(b_1-0) > 0$.

Обозначим через $G_\alpha(x, s)$ функцию Грина краевой задачи, получающейся из (1), (5) заменой в краевом условии значения коэффициента $\alpha(b) = 0$ на $\alpha(b) = \alpha > 0$. Из формулы (12) и симметричности функции $G_\alpha(x, s)$ следует, что $G_\alpha(b, s_0) = G_\alpha(s_0, b) = \alpha w_b(s_0) > 0$ при любом $\alpha > 0$. А поскольку $G_\alpha(x, s_0) \rightarrow G(x, s_0)$ при $\alpha \downarrow 0$ в норме $C(\Gamma)$, то при достаточно малых значениях $\alpha > 0$ срезка $G_\alpha(x, s_0)$ должна принимать отрицательные значения на ребре γ_b и при этом должна оставаться положительной на его концах, что противоречит утверждению леммы 15. Следовательно, предположение о том, что какая-то из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, принимает на Γ неположительные значения невозможно. Теорема доказана.

Следует отметить, что условие положительности всех функций $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, в теореме 5 существенно, о чем свидетельствует следующий пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим граф-пучок $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из четырех ребер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = \overline{1, 4}$, где $a_i \in \partial\Gamma$, а b – внутренняя вершина. Считаем, что все ребра ориентированы к внутренней вершине, а их длины l_i равны: $l_1 = 1$, $l_2 = 15$, $l_3 = 3$ и $l_4 = 20$. На Γ задается однородное дифференциальное уравне-

ние, определяемое системой равенств:

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= 0, & x \in \overset{\circ}{\Gamma}, \\ u_i(b) &= u_1(b), & u'_3(b) = -u'_1(b) - u'_2(b), & u'_4(b) = 3u'_1(b) - u'_2(b), \\ u''_1(b) - u''_3(b) + 3u''_4(b) &= 0, & u''_2(b) - u''_3(b) - u''_4(b) &= 0, & \sum_{i=1}^4 u'''_i(b) &= 0. \end{aligned}$$

Для этого дифференциального уравнения рассмотрим краевые задачи (6) и (7), соответствующие вершине $a_1 \in \partial\Gamma$, в краевых условиях которых положим $\alpha(\cdot) \equiv 0$, $\beta(\cdot) \equiv 0$ на $\partial\Gamma$. Пусть $\mu(x)$ – метрическая функция на графе (см. § 2). Поскольку ребра графа ориентированы к вершине $b \in \partial\Gamma$, то $\mu(a_i) = 0$, $\mu_i(b) = l_i$ и имеют место равенства

$$\begin{aligned} w_{a_1}(x) &= \begin{cases} W_{11} \frac{\mu^3(x)}{6} + W_{12} \frac{\mu^2(x)}{2} + 1, & x \in \gamma_1; \\ W_{i1} \frac{\mu^3(x)}{6} + W_{i2} \frac{\mu^2(x)}{2}, & x \in \gamma_i, \quad i = 2, 3, 4; \end{cases} \\ y_{a_1}(x) &= \begin{cases} Y_{11} \frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{12} \frac{\mu^2(x)}{2} + \mu(x), & x \in \gamma_1; \\ Y_{i1} \frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{i2} \frac{\mu^2(x)}{2}, & x \in \gamma_i, \quad i = 2, 3, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Вычисления показывают, что $w_{a_1}(b) \approx 0.627$ и

$$\begin{aligned} W_{11} &\approx 1.889, & W_{21} &\approx -0.016, & W_{31} &\approx -1.856, & W_{41} &\approx -0.013, \\ W_{12} &\approx -1.376, & W_{22} &\approx 0.085, & W_{32} &\approx 1.873, & W_{42} &\approx 0.088; \\ Y_{11} &\approx 1.376, & Y_{21} &\approx -0.013, & Y_{31} &\approx -1.367, & Y_{41} &\approx 0.004, \\ Y_{12} &\approx -1.734, & Y_{22} &\approx 0.070, & Y_{32} &\approx 1.180, & Y_{42} &\approx -0.026. \end{aligned}$$

Так как

$$w_{a_1}(a_1) > 0, \quad w'_{a_1}(a_1) = 0, \quad w_{a_1}(b) > 0, \quad \left. \frac{dw_{a_1}(x)}{d\mu_1(x)} \right|_{x=b} = \frac{W_{11}}{2} + W_{12} < 0,$$

то согласно результату работы [24] функция $w_{a_1}(x)$ не может иметь на интервале (a_1, b) точек неположительного минимума, а значит, $w_{a_1}(x) > 0$ на $\bar{\gamma}_1 = [a_1, b]$. Кроме того, из леммы 15 следует, что функция $w_{a_1}(x)$ имеет внутри каждого ребра $\gamma_i \subset \Gamma$, $i = 2, 3, 4$, не более одного нуля. Поэтому для положительности функции $w_{a_1}(x)$ на всем графе Γ достаточно, что бы одновременно выполнялись неравенства $\sigma w_{a_1}(a_i + 0) > 0$, $i = 2, 3, 4$. Поскольку

$$w''_{a_1}(a_i) = \left. \frac{d^2 w_{a_1}(x)}{d\mu_i(x)^2} \right|_{x=a_i} = W_{i2} > 0, \quad i = 2, 3, 4,$$

то ввиду граничных условий $w_{a_1}(a_i) = w'_{a_1}(a_i) = 0$ будем иметь $\sigma w_{a_1}(a_i + 0) > 0$ и $w_{a_1}(x) > 0$ на Γ .

Рассмотрим теперь функцию $y_{a_1}(x)$. Поскольку $y_{a_1}(a_4) = y'_{a_1}(a_4) = 0$ и $y''_{a_1}(a_4) = Y_{42} < 0$, то функция $y_{a_1}(x)$ принимает отрицательные значения вблизи вершины $a_4 \in \partial\Gamma$.

Пример 2 показывает, что положительности одной функции $w_a(x)$ может оказаться недостаточно для положительности функции $y_a(x)$. Здесь проявляется свойство, характерное именно для решений уравнения на графе Γ , не гомотомическом интервале: имеется внутренняя вершина, к которой примыкает не менее трех ребер. Если же к каждой внутренней вершине графа примыкает по два ребра, т.е. граф состоит из соединенных в цепь ребер, то положительность функции $w_a(x)$ уже влечет положительность соответствующей функции $y_a(x)$.

ЛЕММА 19. Пусть $|\partial\Gamma| = 2$ и $a \in \partial\Gamma$. Если $w_a(x) > 0$ на графе Γ , то и $y_a(x) > 0$ на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма не верна. Поскольку

$$sy_a(a+0) > 0,$$

то существует точка $x_0 \in \Gamma$ такая, что $y_a(x_0) = 0$ и $y_a(x) > 0$ на маршруте $\Gamma(a, x_0) \subset \Gamma$, соединяющем вершину a с точкой x_0 . Рассмотрим множество чисел $\rho \in \mathbb{R}$ таких, что $\rho y_a(x) \leq w_a(x)$ при всех x , принадлежащих замыканию $\overline{\Gamma(a, x_0)}$. Это множество, очевидно, не пусто (оно содержит $\rho = 0$) и ограничено сверху. Обозначим через ρ^* точную верхнюю границу этого множества. Для функции $z(x) = w_a(x) - \rho^* y_a(x)$ справедливы следующие свойства:

$$z(x) \geq 0 \quad \text{на } \overline{\Gamma(a, x_0)}, \quad z(a) > 0, \quad z(x_0) > 0, \quad \inf_{x \in \Gamma(a, x_0)} z(x) = 0.$$

Поэтому в $\Gamma(a, x_0)$ существует точка $x^* \rightarrow \min_{x \in \Gamma(a, x_0)} z(x)$, причем $z(x^*) = 0$. Но согласно результату работы [18] в случае $|\partial\Gamma| = 2$ всякое нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma \setminus a$ условиям (5) и равное нулю в точке $x^* \in \Gamma$, должно менять знак в любой окрестности точки x^* . Полученное противоречие показывает, что функция $y_a(x)$ не может иметь нулей на графе Γ . Лемма 19 доказана.

Далее мы покажем, что утверждение, обратное теореме 5, не верно, т.е. из положительности всех функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, еще не следует положительность всех функций $w_a(x)$. Это свойство проявляется уже в самом простом случае – когда граф состоит из последовательно соединенных в цепь ребер.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим граф Γ , состоящий из двух ребер $\gamma_1 = (a_1, b)$ и $\gamma_2 = (a_2, b)$. Их общий конец b является внутренней вершиной графа. Длины обоих ребер графа равны единице. На Γ рассмотрим дифференциальное уравнение, определяемое системой равенств:

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= 0, & x \in \gamma_i, \\ u_1(b) &= u_2(b), & u'_1(b) = -u'_2(b) \\ u''_1(b) - u''_2(b) &= 0, & u'''_1(b) + u'''_2(b) + 30u(b) = 0. \end{aligned}$$

Для данного дифференциального уравнения рассмотрим краевые задачи (6) и (7), в краевых условиях которых $\alpha(a_1) = \alpha(a_2) = 0$ и $\vartheta(a_1) = \beta(a_2) = 0$. Тогда, привлекая метрическую функцию $\mu = \mu(x)$, имеем

$$\begin{aligned} y_{a_1}(x) &= Y_{11} \frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{12} \frac{\mu^2(x)}{2}, & x \in \gamma_2, \\ y_{a_2}(x) &= Y_{21} \frac{\mu^3(x)}{6} + Y_{22} \mu(x), & x \in \gamma_1, \\ w_{a_2}(x) &= W_1 \frac{\mu^3(x)}{6} + W_2 \mu(x), & x \in \gamma_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Расчеты с использованием вычислительной техники показывают, что

$$\begin{aligned} Y_{11} &\approx 0.059, & Y_{21} &\approx 0.353, & W_1 &\approx 1.647, \\ Y_{12} &\approx 0.059, & Y_{22} &\approx 0.053, & W_2 &\approx -0.059. \end{aligned}$$

Согласно результатам работы [18] решение любой из этих краевых задач положительно тогда и только тогда, когда оно положительно вблизи границы графа. Поскольку функция $w_{a_2}(x)$ удовлетворяет в вершине $a_1 \in \partial\Gamma$ условиям $w_{a_2}(a_1) = w'_{a_2}(a_1) = 0$ и ввиду (13)

$$w'_{a_2}(a_1) = \left. \frac{dw_{a_2}(x)}{d\mu_1(x)} \right|_{x=a_1} = W_2 < 0,$$

то $\sigma w_{a_2}(a_1 + 0) < 0$, т.е. функция $w_{a_2}(x)$ отрицательна вблизи граничной вершины a_1 .

Покажем теперь, что решения задач (6), соответствующих граничным вершинам a_1 и a_2 , положительны вблизи границы $\partial\Gamma$ (а значит, и на всем Γ). Неравенства $\sigma y_{a_i}(a_i + 0) > 0$ непосредственно следуют из краевых условий в соответствующей вершине a_i . Кроме того, $y_{a_1}(a_2) = y'_{a_1}(a_2) = 0$ и $y_{a_2}(a_1) = y'_{a_2}(a_1) = 0$. Из формул (13) получаем $y''_{a_1}(a_2) = Y_{12} > 0$ и $y'_{a_1}(a_2) = Y_{22} > 0$. Отсюда уже следуют неравенства $\sigma y_{a_1}(a_2 + 0) > 0$, $\sigma y_{a_2}(a_1 + 0) > 0$, означающие, что все решения $y_{a_i}(x)$, $a_i \in \partial\Gamma$, положительны на Γ .

§ 6. Сильная неосцилляция

В § 3 мы показали, что свойство слабой неосцилляции уравнения (1) эквивалентно положительности функции Грина любой задачи Дирихле (1), (5). Однако, как показывают пример 3, слабая неосцилляция не гарантирует положительность решений краевых задач (7), а значит, не гарантирует положительность функции Грина краевой задачи (1), (5) при $\alpha(\cdot) \not\equiv 0$. Это означает, что для положительности функции Грина краевой задачи (1), (5) при $\alpha(\cdot) \not\equiv 0$ от уравнения уже может потребоваться свойство более сильное, чем слабая неосцилляция, которое мы так и называем – свойство сильной неосцилляции.

Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, мы считаем в условиях (5) выполненным тождественное равенство $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и по-прежнему обозначаем через $y_a(x)$ решения краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, а через $w_a(x)$ – решения краевых задач (7).

ЛЕММА 20. *Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ , то каждая из них достигает своего наибольшего значения лишь в соответствующей вершине $a \in \partial\Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторой $b \in \partial\Gamma$ функция $w_b(x)$ достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке $\xi \in \Gamma$ и выполнено неравенство

$$w_b(\xi) = \max_{x \in \Gamma \cup \partial\Gamma} w_b(x) \geq w_b(b) = 1.$$

Тогда функция $u(x) = w_b(\xi) - w_b(x)$ равна нулю в точке $\xi \in \Gamma$ и равна $w_b(\xi)$ на $\partial\Gamma \setminus b$. Так как функции $\{y_a(x), w_a(x)\}_{a \in \partial\Gamma}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а функция $u(x)$ удовлетворяет в каждой вершине

$a \in \partial\Gamma$ однородному условию $\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0$, то она выражается через функции $\{w_a(x)\}_{a \in \partial\Gamma}$ и однозначно определяется своими значениями на границе графа. Следовательно, ее можно представить в виде

$$u(x) = (w_b(\xi) - 1)w_b(x) + w_b(\xi) \sum_{a \in \partial\Gamma \setminus b} w_a(x).$$

Поскольку все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, строго больше нуля на графе Γ , то в любой точке $x \in \Gamma$, в том числе и в точке ξ , должно выполняться неравенство $u(x) > 0$. Но $u(\xi) = 0$, и мы приходим к противоречию, доказывающему невозможность неравенства $w_b(x) \geq 1$ при $x \in \Gamma$. Лемма 20 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 10. Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ , то для каждой из них выполнено неравенство $\sigma w'_a(a + 0) < 0$.

Учитывая краевые условия для первых и вторых производных в (7), из следствия 10 легко получаем

СЛЕДСТВИЕ 11. Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ , то для каждой из них выполнены неравенства $w''_a(a) \leq 0$ и $w''_a(x) \geq 0$ при $x \in \partial\Gamma \setminus a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дифференциальное уравнение (1) назовем *сильно неосциллирующим*, если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи

$$\begin{aligned} Lu &= 0, & x &\in \Gamma, \\ u(a) &= 1, & u''(a) &= 0, & u(b) &= 0, & u'(b) &= 0, & b &\in \partial\Gamma \setminus a, \end{aligned} \quad (14)$$

не имеет нулей внутри графа Γ .

Обратим внимание, что в (10) одно из условий в вершине a содержит первую производную, а в (14) – вторую производную.

Очевидно, что краевая задача (14) является частным случаем задачи (7). Поскольку из положительности всех решений краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, не следует положительность решений задач (7), то не всякое слабо неосциллирующее уравнение четвертого порядка на графе является сильно неосциллирующим. А вот обратное утверждение верно. Как показывает теорема 5, сильно неосциллирующее уравнение (1) всегда является и слабо неосциллирующим.

Если $J(\Gamma) = \emptyset$, то уравнение (1) одновременно является и слабо и сильно неосциллирующим.

Стоит также упомянуть уравнение четвертого порядка на графе, порожденное уравнениями (2) на ребрах и условиями шарнирного (11), (4) сочленения во внутренних вершинах, изучавшееся в монографии [4; гл. 8]. Как мы уже отмечали в § 4, для решений такого уравнения выполняется принцип максимума, из которого следует, что решения краевых задач (14), $a \in \partial\Gamma$, положительны, а значит, уравнение всегда является сильно неосциллирующим. Что же касается уравнения второго порядка (см. [4], [5]), то для него двойственности, имеющей место для уравнений четвертого порядка, не возникает и оба определения слабой и сильной неосцилляции сливаются в одно определение, в котором фигурируют свойства решений краевых задач Дирихле с одним неоднородным условием.

Согласно следствию 6 слабая неосцилляция уравнения (1) влечет положительность решений $y_a(x)$ всех краевых задач (6) вне зависимости от значений

коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ краевых условий. Свойство сильной неосцилляции уравнения дает возможность установить аналогичный результат еще и для решений краевых задач (6).

Рассмотрим две пары неотрицательных функций $\beta(\cdot)$, $\tilde{\beta}(\cdot)$ и $\vartheta(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$, определенных на $\partial\Gamma$ и удовлетворяющих условиям

$$\beta(a) + \vartheta(a) > 0, \quad \tilde{\beta}(a) + \tilde{\vartheta}(a) > 0, \quad a \in \partial\Gamma.$$

Каждая пара $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ и $\tilde{\beta}(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$ определяет свой набор краевых задач (7), решения которых мы обозначим через $w_a(x)$ и $\tilde{w}_a(x)$. (Напомним, что мы полагаем $\alpha(\cdot) \equiv 0$.)

ЛЕММА 21. Пусть уравнение (1) слабо не осциллирует и все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на Γ . Если в некоторой вершине $b \in \partial\Gamma$ выполнено неравенство $\beta(b)/\vartheta(b) \geq \tilde{\beta}(b)/\tilde{\vartheta}(b)$, а при $a \in \partial\Gamma \setminus b$ выполнены неравенства $\beta(a)/\vartheta(a) \leq \tilde{\beta}(a)/\tilde{\vartheta}(a)$ (в случае $\vartheta(a) = 0$ полагаем $\beta(a)/\vartheta(a) = \infty$, аналогично при $\tilde{\vartheta}(a) = 0$), то $w_b(x) \leq \tilde{w}_b(x)$ всюду на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $u(x) = \tilde{w}_b(x) - w_b(x)$. Она является решением однородного уравнения (1) и равна нулю на $\partial\Gamma$. Подставим функцию $u(x)$ в краевые условия задачи (7) с коэффициентами $\tilde{\beta}(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$, содержащие производные. В вершине $b \in \partial\Gamma$ имеем

$$\tilde{\vartheta}(b)u'(b) - \tilde{\beta}(b)u''(b) = -\tilde{\vartheta}(b)w'_b(b) + \tilde{\beta}(b)w''_b(b).$$

Если $\vartheta(b) = 0$, то $w''_b(b) = 0$. Кроме того, согласно следствию 10 выполнено неравенство $w'_b(b) \leq 0$. Поэтому

$$\tilde{\vartheta}(b)u'(b) - \tilde{\beta}(b)u''(b) \geq 0.$$

Если же $\vartheta(b) \neq 0$, то ввиду свойств коэффициентов $\tilde{\vartheta}(b) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}(b)u'(b) - \tilde{\beta}(b)u''(b) &= -\tilde{\vartheta}(b)w'_b(b) + \tilde{\beta}(b)w''_b(b) \\ &= -\tilde{\vartheta}(b) \left[w'_b(b) - \frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} w''_b(b) + \left(\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} - \frac{\tilde{\beta}(b)}{\tilde{\vartheta}(b)} \right) w''_b(b) \right] \\ &= -\tilde{\vartheta}(b) \left(\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} - \frac{\tilde{\beta}(b)}{\tilde{\vartheta}(b)} \right) w''_b(b) \geq 0, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из свойств коэффициентов и следствия 11.

Что касается остальных граничных вершин графа, то рассуждения примерно такие же. Из положительности функции $w_b(x)$ на всем графе и краевых условий в вершине $a \in \partial\Gamma \setminus b$ следуют неравенства $w'_b(a) \geq 0$ и $w''_b(a) \geq 0$. Поэтому при $\tilde{\vartheta}(a) = 0$ будем иметь

$$\tilde{\vartheta}(a)u'(a) - \tilde{\beta}(a)u''(a) = -\tilde{\vartheta}(a)w'_b(a) + \tilde{\beta}(a)w''_b(a) = \tilde{\beta}(a)w''_b(a) \geq 0.$$

Если же $\tilde{\vartheta}(a) \neq 0$, то ввиду свойств коэффициентов $\vartheta(a) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}(a)u'(a) - \tilde{\beta}(a)u''(a) &= -\tilde{\vartheta}(a) \left[w'_b(a) - \frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} w''_b(a) + \left(\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} - \frac{\tilde{\beta}(a)}{\tilde{\vartheta}(a)} \right) w''_b(a) \right] \\ &= -\tilde{\vartheta}(a) \left(\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} - \frac{\tilde{\beta}(a)}{\tilde{\vartheta}(a)} \right) w''_b(a) \geq 0, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из свойств коэффициентов и следствия 11.

Таким образом, всюду на $\partial\Gamma$ выполнены условия

$$u(a) = 0, \quad \tilde{\vartheta}(a)u'(a) - \tilde{\beta}(a)u''(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

из которых следует, что функция $u(x)$ равна линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами решений краевых задач (6), $a \in \partial\Gamma$, с коэффициентами $\tilde{\beta}(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$. Поскольку уравнение (1) слабо не осциллирует, то решения этих краевых задач положительны, а значит, $u(x) \geq 0$ на Γ или $w_a(x) \leq \tilde{w}_a(x)$ на Γ . Лемма 21 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ . Тогда при $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и любых допустимых значениях коэффициентов $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ решения всех краевых задач (6) и (7), $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ .

Для доказательства следствия нужно лишь заметить, что в краевых задачах (14) коэффициенты граничных условий удовлетворяют равенствам

$$\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} = \infty, \quad \frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} = 0, \quad b \in \partial\Gamma \setminus a.$$

СЛЕДСТВИЕ 13. Уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ тогда и только тогда, когда функция Грина краевой задачи (1), (5) положительна на $\Gamma \times \Gamma$, как только функция $\alpha(\cdot)$ равна нулю всюду на $\partial\Gamma$, кроме, быть может, одной граничной вершины.

Доказательство следствия 13 будет проведено в § 7, а здесь мы хотим лишь обратить внимание на следующий момент, вытекающий из леммы 21.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для задач Дирихле условие шарнирного закрепления является самым “хорошим” для положительности функции Грина, а условие жесткого закрепления самым “плохим” (теорема сравнения 2), то при условии упругой опоры в граничной вершине a ($\alpha(a) \neq 0$) ситуация меняется с точностью до наоборот.

Выше уже отмечалось, что для решений однородного уравнения четвертого порядка на графе, порожденного уравнениями (2) и условиями шарнирного сочленения (11), (4) во внутренних вершинах имеет место принцип максимума (см. [4; гл. 8]). Требовать выполнения принципа максимума для уравнения четвертого порядка без дополнительных условий не приходится даже на отрезке, поскольку размерность пространства его решений равна четырем. В монографии [4; гл. 8] принцип максимума установлен в классе решений, удовлетворяющих на границе графа условиям $u'(\cdot)u''(\cdot) \geq 0$. Для рассматриваемого нами уравнения (1) ситуация сложнее. Даже уменьшив вдвое (за счет граничных условий) размерность пространства решений уравнения (1), мы все равно не добьемся выполнения принципа максимума, что подтверждает пример 3. Поэтому на уравнение (1) приходится накладывать дополнительные условия.

ТЕОРЕМА 6 (принцип максимума). Пусть уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ . Тогда любое непостоянное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ краевым условиям

$$u'(a)u''(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad (15)$$

достигает своих наибольшего и наименьшего значений только на границе графа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что достаточно доказать только утверждение теоремы, касающееся наименьшего значения. Пусть $u(x)$ – решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям (15). Пусть также $u(a_0) = \min_{a \in \partial\Gamma} u(a)$, $a_0 \in \partial\Gamma$. Тогда функция $v(x) = u(x) - u(a_0)$ неотрицательна на $\partial\Gamma$, удовлетворяет на $\partial\Gamma$ условиям (15) и равна нулю в точке $a_0 \in \partial\Gamma$. Поставим в соответствие каждому вектору $(-v'(a), v''(a))$, $a \in \partial\Gamma$, точку $(\vartheta(a), \beta(a)) \in O^+$ (см. § 3) такую, что векторы $(-v'(a), v''(a))$ и $(\vartheta(a), \beta(a))$ ортогональны. Рассмотрим набор краевых задач (7), $a \in \partial\Gamma$, в которых $\alpha(\cdot) \equiv 0$, а значения коэффициентов $\vartheta(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ в каждой вершине $a \in \partial\Gamma$ определяются соответствующим вектором $(\vartheta(a), \beta(a)) \in O^+$. Обозначим через $w_a(x)$ решения этих краевых задач. Так как уравнение (1) сильно не осциллирует, то из следствия 12 следует, что все функции $w_a(x)$ положительны на Γ . В силу невырожденности любой краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями вида (5), функция $v(x)$ равна линейной комбинации положительных функций $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, с неотрицательными коэффициентами $v(x) = \sum_{a \in \partial\Gamma} v(a)w_a(x)$, причем если хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля, то $v(x) > 0$ на Γ . Следовательно, $v(x) = u(x) - u(a_0) \geq 0$ для всех $x \in \Gamma$, т.е.

$$u(a_0) = \min_{x \in \Gamma \cup \partial\Gamma} u(x).$$

При этом если $u(x) \neq u(a_0)$, то всюду на Γ выполнено строгое неравенство $u(x) > u(a_0)$. Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сильная неосцилляция является необходимым и достаточным условием для выполнения принципа максимума для решений однородного уравнения (1) на графе, удовлетворяющих на $\partial\Gamma$ краевым условиям (15).

Свойство сильной неосцилляции вместе с принципом максимума позволяет получить некоторые свойства решений дифференциальных неравенств четвертого порядка на графе. Формулируемые далее свойства, перекликаются со свойством решений дифференциального неравенства на отрезке (см. [25]), согласно которому, если некоторый дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ четвертого порядка допускает представление в виде композиции двух дифференциальных операторов второго порядка (с некоторыми оговорками на коэффициенты), то нетривиальное решение неравенства $\mathcal{L}u \geq 0$ на $(a, b) \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющее в граничных точках условиям

$$u(a) \geq 0, \quad u'(a) \geq 0, \quad u(b) \geq 0, \quad u'(b) \leq 0,$$

не может иметь на интервале (a, b) точек неположительного минимума. В частности, этот результат справедлив и для уравнения $(p(x)u'')'' - (q(x)u')'$ на $(a, b) \subset \mathbb{R}$, поскольку оно допускает факторизацию Фробениуса–Пойа (см. доказательство леммы 2).

Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, поясним, что мы понимаем под решением дифференциального неравенства на графе.

Решением дифференциального неравенства на графе $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, мы назовем всякое решение уравнения $Lu = F(x)$, $x \in \Gamma$, правая часть $F(x)$ которого неотрицательна на всем графе Γ , а на $\dot{\Gamma} = \Gamma/J(\Gamma)$ совпадает с некоторой функцией из пространства $C[\Gamma]$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ . Тогда любое нетривиальное решение неравенства $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, удовлетворяющее

на границе графа условиям

$$u(a) \geq 0, \quad u'(a)u''(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

строго положительно внутри Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $u(x) \in C^4(\Gamma)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Так как в любой граничной вершине $a \in \partial\Gamma$ выполнено неравенство $u'(a)u''(a) \geq 0$, то существует пара функций $\vartheta, \beta: \partial\Gamma \rightarrow [0, +\infty)$ таких, что $\vartheta(a) + \beta(a) \neq 0$, $a \in \partial\Gamma$, и функция $u(x)$ удовлетворяет в каждой граничной вершине $a \in \partial\Gamma$ условию $\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0$. Поэтому функция $u(x)$ допускает представление в виде суммы $u(x) = y(x) + w(x)$, где $y(x) \in C^4(\Gamma)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} Ly &\geq 0, & x &\in \Gamma, \\ y(a) &= 0, & \vartheta(a)y'(a) - \beta(a)y''(a) &= 0, & a &\in \partial\Gamma, \end{aligned} \quad (16)$$

а $w(x) \in C^4(\Gamma)$ некоторое решение задачи

$$\begin{aligned} Lw &= 0, & x &\in \Gamma, \\ w(a) &\geq 0, & \vartheta(a)w'(a) - \beta(a)w''(a) &= 0, & a &\in \partial\Gamma. \end{aligned}$$

Так как уравнение (1) сильно не осциллирует, то функция Грина $G(x, s)$ задачи (16) строго положительна (теорема 3). Поэтому (см. [6])

$$y(x) = \int_{\Gamma} G(x, s)Ly(s)ds + \sum_{c \in J(\Gamma)} Ly(c)G(x, c) \geq 0, \quad x \in \Gamma,$$

причем если левая часть неравенства в (16) не равна тождественно нулю, то $y(x) > 0$ на всем графе Γ . Что касается функции $w(x)$, то она неотрицательна на Γ в силу принципа максимума. И здесь тоже, если хотя бы одно из граничных неравенств строгое, то $w(x) > 0$ на всем графе Γ . Поскольку $u(x) \not\equiv 0$ на Γ , то хотя бы одна из функций $y(x)$ или $w(x)$ не равна тождественно нулю, следовательно, $u(x) > 0$ на всем графе Γ . Теорема 7 доказана.

Следующее утверждение является аналогом результата работы [25], упомянутого выше.

ТЕОРЕМА 8. Пусть уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ . Тогда любое нетривиальное решение неравенства $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, удовлетворяющее на границе графа условиям

$$u(a) \geq 0, \quad u'(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

строго положительно внутри Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $u(x) \in C^4(\Gamma)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Несложно видеть, что функция $u(x)$ допускает представление в виде суммы $u(x) = y(x) + w(x) + z(x)$, в которой $y(x) \in C^4(\Gamma)$ – некоторое решение задачи

$$Ly \geq 0, \quad x \in \Gamma, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

$w(x) \in C^4(\Gamma)$ – некоторое решение задачи

$$Lw = 0, \quad x \in \Gamma, \quad w(a) \geq 0, \quad w'(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

а $z(x) \in C^4(\Gamma)$ – некоторое решение задачи

$$Lz = 0, \quad x \in \Gamma, \quad z(a) = 0, \quad z'(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma.$$

Как и в предыдущей теореме, функции $y(x)$ и $w(x)$ неотрицательны на Γ , причем если хотя бы одно из неравенств, входящих в определение этих функций строгое, то и $y(x) + w(x) > 0$ на всем графе Γ . А функция $z(x)$ неотрицательна на Γ ввиду леммы 11, причем если хотя бы одно из граничных неравенств строгое, то $z(x) > 0$ на всем графе Γ . Поскольку $u(x) \not\equiv 0$ на Γ , то хотя бы одна из функций $y(x)$, $w(x)$ или $z(x)$ не равна тождественно нулю, следовательно, $u(x) > 0$ на всем графе Γ . Теорема 8 доказана.

§ 7. О положительности функции Грина краевой задачи (1), (5) в общем случае

Согласно результатам § 6 сильная неосцилляция уравнения (1) на Γ гарантирует положительность функции Грина любой краевой задачи (1), (5), если только функция $\alpha(\cdot)$ строго положительна не более чем в одной граничной вершине графа. Возникает естественный вопрос, а каковы условия положительности функции Грина любой краевой задачи (1), (5)? Изучению этого вопроса посвящен настоящий параграф.

Как показывает следующий ниже пример, одного свойства сильной неосцилляции не достаточно для того, чтобы функция Грина краевой задачи (1), (5) была положительна при любых допустимых значениях коэффициентов краевых условий. Следовательно, для этого требуются дополнительные свойства. Основой наших рассуждений служит замечание 2, согласно которому при $\alpha(b) > 0$ условие шарнирного закрепления в вершине $b \in \partial\Gamma$ является самым “плохим” для положительности функции Грина, а значит, и положительности решений задач (6) и (7), $a \in \partial\Gamma$. Поскольку из краевого условия $u(b) + \alpha(b)D^3u(b) = 0$ следует, что $u(b)D^3u(b) \leq 0$, то необходимым условием положительности решений этих задач в случае $\alpha(b) > 0$ является условие $D^3u(b) \leq 0$. Здесь может показаться, что последнее неравенство, выполненное для решений задач (7) с условиями шарнирного закрепления всюду на $\partial\Gamma \setminus a$, вместе со свойством сильной неосцилляции уравнения будет обеспечивать положительность функции Грина краевой задачи (1), (5) вне зависимости от значений коэффициентов краевых условий. Однако это не так. Дело здесь в том, что, когда мы меняем коэффициенты краевых условий задачи (7) в вершине $b \in \partial\Gamma$, мы, “выправляя” знак третьей квазипроизводной D^3 в вершине b , одновременно “ухудшаем” его в какой-нибудь третьей граничной вершине из $\partial\Gamma \setminus \{a, b\}$ и наоборот.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим плоский граф $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из трех ребер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = 1, 2, 3$, имеющих общий конец b , который является внутренней вершиной графа. Считая ребра γ_i ориентированными от граничных вершин a_i , рассмотрим на Γ однородное уравнение

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= 0, & x \in \gamma_i, \\ u_1(b) &= u_2(b) = u_3(b), & u'_1(b) = -u'_2(b) - u'_3(b), \\ -u''_1(b) + u''_2(b) &= 0, & -u''_1(b) + u''_3(b) = 0, & \sum_{i=1}^3 u'''_i(b) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Положим, что длины всех трех ребер графа равны единице. Для заданного уравнения рассмотрим решения $w_{a_i}(x)$ краевых задач (14), соответствующие вершинам $a_i \in \partial\Gamma$. Привлекая метрическую функцию $\mu = \mu(x)$, ввиду симметричности соотношений (17) относительно $i \in I(b)$ имеем

$$w_{a_i}(x) = \begin{cases} W_{i1} \frac{\mu^3(x)}{6} + W_{i2} \mu(x) + 1, & x \in \gamma_i; \\ W_{j1} \frac{\mu^3(x)}{6} + W_{j2} \frac{\mu^2(x)}{2}, & x \in \gamma_j, \quad j \neq i, \end{cases}$$

где

$$W_{i1} \approx 0.286, \quad W_{i2} \approx -0.856, \quad W_{j1} \approx -0.143, \quad W_{j2} \approx 0.429.$$

Каждая из функций $w_{a_i}(x)$ положительна на Γ , т.е. уравнение сильно не осциллирует. Кроме того,

$$D^3 w_{a_i}(a_j) = \frac{d^3}{d\mu_j(x)^3} \left(W_{j1} \frac{\mu_j^3(x)}{6} + W_{j2} \frac{\mu_j^2(x)}{2} \right) \Big|_{x=a_j} = W_{j1} < 0$$

при $a_j \in \partial\Gamma \setminus a_i$.

Заменим в краевых задачах (14) для $a_i \in \partial\Gamma$ условия жесткого закрепления в граничных вершинах на шарнирное $-u''(\cdot) = 0$. Тогда решением каждой из полученных задач будет функция

$$\hat{w}_{a_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2\mu(x)}{3}, & x \in \gamma_i; \\ \frac{\mu(x)}{3}, & x \in \gamma_j, \quad j \neq i, \end{cases}$$

линейная на каждом ребре графа. Нетрудно видеть, что $\hat{w}_{a_i}(x) > 0$ на Γ и $D^3 \hat{w}_{a_i}(x) = 0$ на $\partial\Gamma$.

Несмотря на то, что все функции $w_{a_i}(x)$ и $\hat{w}_{a_i}(x)$, $i = 1, 2, 3$, положительны на Γ и $D^3 w_{a_i}(x) \leq 0$, $D^3 \hat{w}_{a_i}(x) \leq 0$ на $\partial\Gamma \setminus a_i$, все равно можно подобрать коэффициенты одной из краевых задач (7) так, что ее решение будет иметь положительную третью квазипроизводную в некоторой граничной вершине графа. Для этого заменим в краевой задаче (14), соответствующей вершине a_1 , условие жесткого закрепления в одной из вершин, например в вершине a_2 , на шарнирное. Решением полученной задачи будет функция

$$\tilde{w}_{a_1}(x) = \begin{cases} \frac{\mu^3(x)}{30} - \frac{4\mu(x)}{10} + 1, & x \in \gamma_1; \\ \frac{\mu^3(x)}{30} + \frac{\mu(x)}{5}, & x \in \gamma_2, \\ -\frac{2\mu^3(x)}{30} + \frac{3\mu^2(x)}{5}, & x \in \gamma_3. \end{cases}$$

Легко увидеть, что

$$D^3 \tilde{w}_{a_1}(a_2) = \frac{d^3 \tilde{w}_{a_1}(x)}{d\mu_2(x)^3} \Big|_{x=a_2} = \frac{1}{5} > 0.$$

Из этого неравенства и леммы 6 следует, что решение краевой задачи для однородного уравнения (17) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(a_1) = 1, \quad u''(a_1) = 0, \quad u(a_2) + \alpha(a_2)u'''(a_2) = 0, \\ u''(a_2) = 0, \quad u(a_3) = u'(a_3) = 0 \end{aligned}$$

не может быть положительным на всем Γ при $\alpha(a_2) > 0$.

ЛЕММА 22. Пусть $a, b \in \partial\Gamma$ и $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если решение $y_a(x)$ задачи (6) удовлетворяет неравенству $\sigma y_a(b+0) > 0$ ($\sigma y_a(b+0) < 0$), то решение $w_b(x)$ задачи (7), соответствующей вершине $b \in \partial\Gamma$, неотрицательно (неположительно) вблизи вершины $a \in \partial\Gamma$. Если при этом $y_a(b) > 0$ ($y_a(b) < 0$), то $\sigma w_b(a+0) > 0$ ($\sigma w_b(a+0) < 0$).

2) Если решение $w_b(x)$ задачи (7), соответствующей вершине $b \in \partial\Gamma$, удовлетворяет неравенству $\sigma w_b(a+0) > 0$ ($\sigma w_b(a+0) < 0$), то решение $y_a(x)$ задачи (6), соответствующей вершине $a \in \partial\Gamma$, неотрицательно (неположительно) вблизи вершины $b \in \partial\Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду аналогии рассуждений мы ограничимся доказательством только первого утверждения.

Из неравенства $\sigma y_a(b+0) > 0$ и формулы (12) следует, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при любых $s \in \mathcal{O}_\varepsilon(a)$ и $x \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ функции Грина краевой задачи (1), (5) больше нуля в точке $(x, s) \in \Gamma \times \Gamma$. Так как функция $G(x, s)$ симметрична, то $G(s, x) > 0$ при тех же x и s . Отсюда следует, что $w_b(x)$ неотрицательна вблизи вершины $a \in \partial\Gamma$, так как в противном случае из формулы (12) следовало бы неравенство $G(s, x) < 0$ при некоторых $s \in \mathcal{O}_\varepsilon(a)$ и $x \in \mathcal{O}_\varepsilon(b)$. При этом если $y_a(b) > 0$, то из (12) следует, что $G(b, s) = G(s, b) > 0$ при $s \in \mathcal{O}_\varepsilon(a)$. А поскольку в силу той же формулы (12) $G(s, b) = \alpha(b)w_b(s)$, то $\sigma w_b(a+0) > 0$. Случай $\sigma y_a(b+0) < 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 23. Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и $y_a(x)$ – решение задачи (6), $a \in \partial\Gamma$. Если уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ , то всюду на $\partial\Gamma \setminus a$ выполнены неравенства $D^3 y_a(\cdot) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма не верна и $D^3 y_a(b) > 0$ в некоторой вершине $b \in \partial\Gamma \setminus a$. В силу леммы 6 при $\alpha(b) > 0$ решение краевой задачи

$$\begin{aligned} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 1, \\ u(b) + \alpha(b)D^3 u(b) = 0, \quad \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = 0, \\ u(c) = 0, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}, \end{aligned}$$

строго отрицательно в точке $b \in \partial\Gamma$, а решение задачи

$$\begin{aligned} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(b) + \alpha(b)D^3 u(b) = 1, \quad \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = 0, \\ u(c) = 0, \quad \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus b, \end{aligned}$$

неотрицательно на $\partial\Gamma$ и с учетом леммы 22 отрицательно вблизи точки $a \in \partial\Gamma$, что невозможно ввиду принципа максимума. Следовательно, $D^3y_a(b) \leq 0$ для любой граничной вершины b , отличной от a . Лемма 23 доказана.

Что касается значения третьей квазипроизводной $D^3y_a(a)$, то она положительна. Это легко следует из следующего свойства решений однородного уравнения (1).

ЛЕММА 24. *Для любого решения $u(x)$ однородного уравнения (1) на графе Γ выполнено условие $\sum_{b \in J(\Gamma)} \delta(b)u(b) - \sum_{a \in \partial\Gamma} D^3u(a) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Просуммируем однородные равенства (4) по всем $b \in J(\Gamma)$. Полученная сумма будет содержать по одному слагаемому с третьей квазипроизводной от каждого граничного ребра и по два слагаемых от каждого внутреннего ребра (по одному для каждого конца внутреннего ребра). Ввиду того, что на любом ребре графа третья квазипроизводная D^3u есть величина постоянная, а во всех соотношениях (4) все производные считаются в направлении от внутренней вершины, то все значения третьих квазипроизводных вдоль внутренних ребер попарно сокращаются (знак нечетной производной зависит от ориентации ребра). Что касается значений третьих квазипроизводных вдоль граничных ребер, то их можно заменить на противоположные по знаку и считать их при этом в граничных вершинах $a \in \partial\Gamma$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 14. *Пусть $\alpha(\cdot) \equiv 0$ и $y_a(x)$ – решение задачи (6), $a \in \partial\Gamma$. Если уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ , то $D^3y_a(a) \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как уравнение сильно не осциллирует, то в каждой внутренней вершине $b \in J(\Gamma)$ выполнено неравенство $y_a(b) > 0$, а в силу леммы 23 выполнено неравенство $D^3y_a(c) \leq 0$ при $c \in \partial\Gamma \setminus a$. Поэтому равенство

$$\sum_{b \in J(\Gamma)} \delta(b)u(b) - \sum_{c \in \partial\Gamma} D^3u(c) = 0$$

может быть выполнено только если $D^3y_a(a) \geq 0$.

Теперь мы можем доказать следствие 13, согласно которому функция Грина краевой задачи (1), (5) положительна при условии, что функция $\alpha(\cdot)$ больше нуля не более чем в одной граничной вершине графа и уравнение (1) сильно не осциллирует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 13. Если $\alpha(\cdot) \equiv 0$, то функция Грина положительна ввиду теоремы 3. Рассмотрим случай, когда $\alpha(b) > 0$ в некоторой вершине $b \in \partial\Gamma$ и $\alpha(a) = 0$ для всех $a \in \partial\Gamma \setminus b$. Обозначим через $Y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma \setminus b$, решения краевых задач (6), а через $w_b(x)$ решение краевой задачи (7), соответствующей вершине $b \in \partial\Gamma$. Ввиду теоремы 4 нам достаточно показать, что все функции $Y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma \setminus b$, положительны на Γ .

Пусть $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma \setminus b$, – решения краевых задач, получаемых заменой в (6) значения $\alpha(b) > 0$ на нуль. Из леммы 1 и следствия 2 следует, что

$$Y_a(x) = y_a(x) + \frac{Y_a(b)}{w_b(b)} w_b(x), \quad a \in \partial\Gamma \setminus b,$$

причем ввиду сильной неосцилляции уравнения (1) $y_a(x) > 0$ и $w_b(x) > 0$ на Γ . Поэтому если значение дроби $Y_a(b)/w_b(b)$ неотрицательно, то можно

утверждать, что для каждой вершины $a \in \partial\Gamma \setminus b$ соответствующая функция $Y_a(x)$ положительна на Γ . Поскольку $D^3 y_a(b) \leq 0$ (лемма 23), то из лемм 4 и 7 следует, что $Y_a(b) \geq 0$, а из леммы 9 следует $w_b(b) > 0$. Следовательно, $Y_a(b)/w_b(b) \geq 0$ и следствие 13 полностью доказано.

Далее мы рассмотрим вопрос о положительности функции Грина задачи (1), (5) при произвольной функции $\alpha(\cdot) \geq 0$.

Для каждой упорядоченной пары вершин $a, b \in \partial\Gamma$ введем в рассмотрение краевую задачу

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$u(a) = 1, \quad u''(a) = 0, \quad u(b) = u''(b) = 0, \quad u(c) = u'(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\},$$

решение которой обозначим через $w_{ab}(x)$.

ЛЕММА 25. Пусть $b \in \partial\Gamma$ и $w_b(x)$ – решение краевой задачи (7), соответствующей вершине b при $\alpha(\cdot) \equiv 0$. Если уравнение (1) сильно не осциллирует на графе Γ и $D^3 w_{ab}(b) \leq 0$ для любой вершины $a \in \partial\Gamma \setminus b$, то $D^3 w_b(b) \geq 0$ и $D^3 w_b(a) \leq 0$ при $a \in \partial\Gamma \setminus b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $D^3 w_b(b) \geq 0$ следует из леммы 9, поэтому нам нужно только показать, что $D^3 w_b(a) \leq 0$ при $a \in \partial\Gamma \setminus b$.

Пусть a – произвольная фиксированная вершина из $\partial\Gamma \setminus b$, а $y_a(x)$ – решение задачи (10). Для каждой вершины $c \in \partial\Gamma \setminus a$ введем в рассмотрение краевую задачу

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$u(c) = 0, \quad u'(c) = 1, \quad u(a) = u''(a) = 0, \quad u(\xi) = u'(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Gamma \setminus \{a, c\},$$

решение которой обозначим через $y_{ca}(x)$. Тогда функция $w_b(x)$ может быть представлена в виде

$$w_b(x) = w_{ba}(x) - w'_{ba}(b)y_{ba}(x) + \frac{w''_b(a)}{y''_a(a)}y_a(x) + \sum_{c \in \partial\Gamma \setminus a} w'_b(c)y_{ca}(x).$$

Действительно, используя граничные свойства функций $w_{ba}(x)$, $y_a(x)$ и $y_{ca}(x)$, $c \in \partial\Gamma \setminus a$, не сложно показать, что правая часть последнего равенства удовлетворяет на границе графа условиям

$$u(b) = 1, \quad u(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus b,$$

$$u''(a) = w''_b(a), \quad u'(c) = w'_b(c), \quad c \in \partial\Gamma \setminus a,$$

ввиду леммы 1 совпадает с функцией $w_b(x)$. В силу следствия 10 $w'_{ba}(b) \leq 0$ и $w'_b(b) \leq 0$, а в силу леммы 23 $D^3 y_{ca}(a) \leq 0$ сразу для всех $c \in \partial\Gamma \setminus a$. Кроме того, ввиду следствия 14 $D^3 y_a(a) \geq 0$, а из леммы 8 следует, что $y''_a(a) < 0$. Далее, поскольку уравнение (1) сильно не осциллирует, то функция $w_b(x)$ положительна на Γ и поэтому $w''_b(a) \geq 0$ и $w'_b(c) \geq 0$ для всех $c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}$. Учитывая все эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} D^3 w_b(a) &= D^3 w_{ba}(a) - w'_{ba}(b)D^3 y_{ba}(a) \\ &+ \frac{w''_b(a)}{y''_a(a)}D^3 y_a(a) + \sum_{c \in \partial\Gamma \setminus a} w'_b(c)D^3 y_{ca}(a) \leq D^3 w_{ba}(a). \end{aligned}$$

Теперь нам остается только сослаться на условия леммы, согласно которым правая часть неположительна. Лемма 25 доказана.

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы решения всех краевых задач (6) и (7), $a \in \partial\Gamma$, были положительны на графе Γ при любых допустимых значениях коэффициентов краевых условий, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) сильно не осциллировало на графе Γ и для любой пары $a, b \in \partial\Gamma$ различных вершин соответствующая функция $w_{ab}(x)$ удовлетворяла в вершине b условию $D^3w_{ab}(b) \leq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Сильная неосцилляция уравнения (1) очевидна. Что касается неравенств для D^3w_{ab} , то они следуют из леммы 6: если предположить, что для некоторой пары вершин $a, b \in \partial\Gamma$ выполнено неравенство $D^3w_{ab}(b) > 0$, то любая функция $v(x) \in \mathfrak{W}_{a,b}^1 \setminus w_{ab}$ будет являться решением некоторой задачи вида (7) и, значит, меняет знак на Γ , что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Доказательство будем проводить индукцией по количеству n граничных вершин графа, в которых функция $\alpha(\cdot)$ отлична от нуля. Обозначим через $y_a(x)$, $w_a(x)$ решения краевых задач, получаемых из (6), (7) путем зануления всех коэффициентов $\alpha(\cdot)$. Функции $y_a(x)$, $w_a(x)$ отвечают случаю $n = 0$. Из следствия 12 следует, что для каждой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующие функции $y_a(x)$, $w_a(x)$ положительны на Γ , а из лемм 23 и 24 следуют неравенства $D^3y_a(b) \leq 0$ и $D^3w_a(b) \leq 0$ при всех $b \in \partial\Gamma \setminus a$.

Сделаем индукционное предположение: если функция $\alpha(\cdot)$ отлична от нуля в $n \leq k$ граничных вершинах, то для каждой вершины $a \in \partial\Gamma$ решения соответствующей пары краевых задач (6), (7) положительны на всем графе и третья квазипроизводная D^3 каждого из этих решений неположительна на $\partial\Gamma \setminus a$.

Рассмотрим случай, когда в краевых условиях (5) функция $\alpha(\cdot)$ больше нуля в $n = k+1$ граничных вершинах. Сначала мы докажем положительность решений краевых задач (7). Пусть a – фиксированная граничная вершина и $W_a(x)$ – решение краевой задачи (7). Покажем, что $W_a(x) > 0$ на Γ и $D^3W_a(c) \leq 0$, $c \in \partial\Gamma \setminus a$.

Пусть в некоторой вершине $b \in \partial\Gamma \setminus a$ коэффициент $\alpha(b)$ больше нуля. Заменяем в краевых задачах (7) для вершин a и b значения $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ на нуль и обозначим через $w_a(x)$, $w_b(x)$ решения получаемых при такой замене задач. Из леммы 1 и следствия 2 следует, что функция $W_a(x)$ представляется в виде линейной комбинации

$$W_a(x) = W_a(a)w_a(x) + W_a(b)w_b(x). \quad (18)$$

Согласно предположению индукции обе функции $w_a(x)$ и $w_b(x)$ положительны на Γ и $D^3w_a(c) \leq 0$ при любом $c \in \partial\Gamma \setminus a$. Поэтому на основании лемм 4, 7 и 9 можно утверждать, что $W_a(b) \geq 0$ и $W_a(a) > 0$. Следовательно, $W_a(x) > 0$ на Γ и нам остается показать, что $D^3W_a(c) \leq 0$ при $c \in \partial\Gamma \setminus a$. Неравенство $D^3W_a(b) \leq 0$ следует из $W_a(b) \geq 0$ и краевого условия $W_a(b) + \alpha(b)D^3W_a(b) = 0$, а при $c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}$ соответствующие неравенства следуют из формулы (18) и неравенств $D^3w_a(c) \leq 0$, $D^3w_b(c) \leq 0$, выполняющихся в силу предположения индукции.

Рассмотрим теперь решение $Y_a(x)$ краевой задачи (6). Заменяем на нуль значения коэффициентов $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ в краевых задачах (6) для $a \in \partial\Gamma$ и (7) для $b \in \partial\Gamma$ и обозначим через $y_a(x)$ и $w_b(x)$ решения получаемых при такой замене задач. Из леммы 1 и следствия 2 следует, что функция $Y_a(x)$ представляется в виде

$$Y_a(x) = y_a(x) + Y_a(b)w_b(x).$$

По предположению индукции функции $y_a(x)$ и $w_b(x)$ положительны на Γ и $D^3 y_a(c) \leq 0$ при любом $c \in \partial\Gamma \setminus a$. Из лемм 4 и 7 следует, что $Y_a(b) \geq 0$. Поэтому $Y_a(x) > 0$ на Γ , а неравенства $D^3 Y_a(c) \leq 0$ на $\partial\Gamma \setminus a$ следуют из тех же соображений, что и в рассмотренном выше случае с решением $W_a(x)$ задачи (7). Теорема 9 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 15. Для того чтобы функция Грина краевой задачи (1), (5) была положительна на $\Gamma \times \Gamma$ при любых допустимых значениях коэффициентов краевых условий, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) сильно не осциллировало на графе Γ и для любой пары $a, b \in \partial\Gamma$ различных вершин соответствующая функция $w_{ab}(x)$ удовлетворяла условию $D^3 w_{ab}(b) \leq 0$.

Несмотря на то, что в теореме 9 требуется условие неотрицательности третьей квазипроизводной $D^3 w_{ab}(b)$ для любой пары $a, b \in \partial\Gamma$ различных вершин, на самом деле можно ограничиться проверкой лишь половины из этих условий, рассмотрев их для любой неупорядоченной пары различных вершин. Это следует из следующей леммы.

ЛЕММА 26. Пусть $a, b \in \partial\Gamma$, $a \neq b$. Если $D^3 w_{ab}(b) \leq 0$, то $D^3 w_{ba}(a) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $D^3 w_{ba}(a) > 0$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u(a) + \alpha(a)D^3 u(a) = 1, \quad u''(a) = 0, \\ u(b) + \alpha(b)D^3 u(b) = 0, \quad u''(b) = 0, \\ u(c) = u'(c) = 0, \quad c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}, \quad \alpha(a), \alpha(b) > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

решение которой обозначим через $W_a(x)$. Через $W_b(x)$ обозначим решение краевой задачи, которая получится из задачи (19), если мы перенесем неоднородность краевого условия из вершины a в вершину b . Из леммы 6 следует, что $W_b(a) < 0$, а из лемм 4, 7 и 9, что $W_a(b) \geq 0$. Пусть $G(x, s)$ – функция Грина краевой задачи (19). Тогда из формулы (12) следует

$$0 > \alpha(b)W_b(a) = G(a, b) = G(b, a) = \alpha(a)W_a(b) \geq 0.$$

Полученное противоречие указывает на невозможность неравенства

$$D^3 w_{ba}(a) > 0.$$

Лемма 26 доказана.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим плоский граф $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из трех ребер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = 1, 2, 3$, имеющих общий конец b , который является внутренней вершиной графа. Считая ребра γ_i ориентированными от граничных вершин a_i , рассмотрим на Γ однородное уравнение

$$\begin{aligned} u^{(4)} - u'' = 0, \quad x \in \gamma_i, \\ u_1(b) = u_2(b) = u_3(b), \quad u'_1(b) = -u'_2(b) - u'_3(b), \\ -u''_1(b) + u''_2(b) = 0, \quad -u''_1(b) + u''_3(b) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 D^3 u_i(b) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Положим, что длины всех трех ребер графа равны единице. Рассмотрим решения $w_{a_i}(x)$ краевых задач (14) для заданного уравнения, $a_i \in \partial\Gamma$. Привлекая

метрическую функцию $\mu = \mu(x)$, ввиду симметричности соотношений (20) относительно $i \in I(b)$ будем иметь

$$w_{a_i}(x) = \begin{cases} W_{i1}[\operatorname{sh}(\mu(x)) - \mu(x)] + W_{i2} \operatorname{sh}(\mu(x)) + 1, & x \in \gamma_i, \\ W_{j1}[\operatorname{sh}(\mu(x)) - \mu(x)] + W_{j2}[\operatorname{ch}(\mu(x)) - 1], & x \in \gamma_j, \quad j \neq i, \end{cases}$$

где

$$W_{i1} \approx 1.03, \quad W_{i2} \approx -0.83, \quad W_{j1} \approx -0.51, \quad W_{j2} \approx 0.54.$$

Каждая из функций $w_{a_i}(x)$ положительна на Γ , т.е. уравнение сильно не осциллирует.

Рассмотрим теперь функции $w_{a_i a_j}(x)$, $i \neq j$. И здесь, учитывая симметричность (20) относительно $i \in I(b)$, достаточно рассмотреть функцию $w_{a_1 a_3}(x)$

$$w_{a_1 a_3}(x) = \begin{cases} W_{11}[\operatorname{sh}(\mu(x)) - \mu(x)] + W_{12} \operatorname{sh}(\mu(x)) + 1, & x \in \gamma_1, \\ W_{21}[\operatorname{sh}(\mu(x)) - \mu(x)] + W_{22}[\operatorname{ch}(\mu(x)) - 1], & x \in \gamma_2, \\ W_{31}[\operatorname{sh}(\mu(x)) - \mu(x)] + W_{32} \operatorname{sh}(\mu(x)), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

где $W_{11} \approx 0.91$, $W_{12} \approx -0.77$, и

$$W_{21} \approx -0.81, \quad W_{22} \approx 0.72, \quad W_{31} \approx -0.09, \quad W_{32} \approx 0.26.$$

Несложно посчитать, что $D^3 w_{a_1 a_3}(a_j) = W_{j1} < 0$ при $j = 2, 3$ и согласно теореме 9 функция Грина краевой задачи для уравнения (20) с краевыми условиями (5) положительна при любых допустимых значениях коэффициентов краевых условий.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Изложенная в работе теория оставляет открытым вопрос о справедливости результатов настоящей работы для более общего дифференциального уравнения, порождаемого на ребрах графа совокупностью дифференциальных уравнений вида

$$(p_i(x)u_i'')' - (q_i(x)u_i')' + r_i(x)u = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \overset{\circ}{\Gamma}.$$

Для результатов настоящей работы основополагающей является теорема 4 (см. работу [6]), доказательство которой использует специфику рассматриваемого нами случая и, в частности, теорему 1 из монографии [4; гл. 8], имеющую место лишь в случае $r_i(x) \equiv 0$. В простейшем случае, когда граф состоит из последовательно соединенных в цепь ребер, результаты работы допускают обобщение и на случай $r_i(x) \not\equiv 0$. Однако такое обобщение является нетривиальным даже в этом простейшем случае и требует дополнительного анализа, выходящего за рамки настоящей статьи.

Автор выражает благодарность А. В. Боровских за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. Ю. Левин, "Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ", *УМН*, **24:2**(146) (1969), 43–96; англ. пер.: А. Yu. Levin, "Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ", *Russian Math. Surveys*, **24:2** (1969), 43–99.

- [2] В. Я. Дерр, “Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2009, № 1, 46–89.
- [3] A. Wintner, “On the non-existence of conjugate points”, *Amer. J. Math.*, **73**:2 (1951), 368–380.
- [4] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2005, 272 с.
- [5] Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, *Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах*, Физматлит, М., 2009, 191 с.
- [6] Р. Ч. Кулаев, “Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе”, *Дифференц. уравнения*, **51**:3 (2015), 302–316; англ. пер.: R. Ch. Kulaev, “Necessary and sufficient condition for the positivity of the Green function of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph”, *Differ. Equ.*, **51**:3 (2015), 303–317.
- [7] М. Г. Завгородний, “Вариационные принципы построения моделей стержневых систем”, *Матем. моделир. информ. и технол. систем*, **4**, Воронеж. гос. технол. академия, Воронеж, 2000, 59–62.
- [8] М. Г. Завгородний, С. П. Майорова, “Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе”, *Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию*, Сборник трудов, ВНИЦ РАН, Владикавказ, 2008, 88–102.
- [9] Р. Ч. Кулаев, “О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе”, *Дифференц. уравнения*, **50**:1 (2014), 27–34; англ. пер.: R. Ch. Kulaev, “On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph”, *Differ. Equ.*, **50**:1 (2014), 25–32.
- [10] G. Polya, “On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **24**:4 (1922), 312–324.
- [11] Г. Полиа, Г. Серё, *Задачи и теоремы из анализа*, Ч. 2, 3-е изд., Наука, М., 1978, 431 с.; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. 2: *Funktionentheorie. Nullstellen. Polynome. Determinanten. Zahlentheorie*, 3. bericht. Aufl., Grundlehren Math. Wiss., **20**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964, x+407 pp.
- [12] Р. Ч. Кулаев, “Условия осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Владикавк. матем. журн.*, **17**:1 (2015), 47–59.
- [13] А. В. Боровских, Р. О. Мустафокулов, К. П. Лазарев, Ю. В. Покорный, “Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети”, *Докл. РАН*, **345**:6 (1995), 730–732; англ. пер.: A. V. Borovskikh, R. Mustafokulov, K. P. Lazarev, Yu. V. Pokornyi, “A class of fourth-order differential equations on a spatial net”, *Dokl. Math.*, **52**:3 (1995), 433–435.
- [14] Ю. В. Покорный, Р. О. Мустафокулов, “О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **33**:10 (1997), 1358–1365; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, R. Mustafokulov, “Positive invertibility of some boundary value problems for fourth-order equation”, *Differential Equations*, **33**:10 (1997), 1364–1371.
- [15] Ю. В. Покорный, Р. О. Мустафокулов, “О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 2, 75–82; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, R. Mustafokulov, “On the positivity of the Green function of linear boundary value problems for fourth-order equations on a graph”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **43**:2 (1999), 71–78.
- [16] A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, “Fourth-order differential equations on geometric graphs”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **119**:6 (2004), 719–738.

- [17] Р. Ч. Кулаев, “О функции Грина краевой задачи на графе-пучке”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 2, 56–66; англ. пер.: R. Ch. Kulaev, “The Green function of the boundary-value problem on a star-shaped graph”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **57**:2 (2013), 48–57.
- [18] Р. Ч. Кулаев, “Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **51**:2 (2015), 161–173; англ. пер.: R. Ch. Kulaev, “Criterion for the positiveness of the Green function of a many-point boundary value problem for a fourth-order equation”, *Differ. Equ.*, **51**:2 (2015), 163–176.
- [19] Р. Ч. Кулаев, “О знаке функции Грина краевой задачи на графе для уравнения четвертого порядка”, *Владикавк. матем. журнал*, **15**:4 (2013), 19–29.
- [20] Ф. Р. Гантмахер М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, 2-е изд., Гостехиздат, М.–Л., 1950, 359 с.; нем. пер.: F. R. Gantmacher, M. G. Krein, *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme*, Math. Lehrbücher und Monogr., **V**, Akademie-Verlag, Berlin, 1960, x+359 pp.
- [21] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов, “Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. II”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:4 (1976), 813–830; англ. пер.: A. Yu. Levin, G. D. Stepanov, “One-dimensional boundary-value problems with operators not reducing the number of changes of sign. II”, *Siberian Math. J.*, **17**:4 (1976), 612–625.
- [22] Г. Д. Степанов, “Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функций Грина двухточечных краевых задач”, *Матем. сб.*, **188**:11 (1997), 121–159; англ. пер.: G. D. Stepanov, “Effective criteria for the strong sign-regularity and the oscillation property of the Green’s functions of two-point boundary-value problems”, *Sb. Math.*, **188**:11 (1997), 1687–1728.
- [23] Р. Ч. Кулаев, “Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **51**:4 (2015), 445–458; англ. пер.: R. Ch. Kulaev, “Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourth-order equation”, *Differ. Equ.*, **51**:4 (2015), 449–463.
- [24] D. R. Dunninger, “Maximum principles for fourth order ordinary differential inequalities”, *J. Math. Anal. Appl.*, **82**:2 (1981), 399–405.
- [25] J. Bochenek, “On a maximum principle for fourth order ordinary differential inequalities”, *Univ. Iagel. Acta Math.*, **27** (1988), 163–168.

Руслан Черменович Кулаев
(Ruslan Ch. Kulaev)

Южный математический институт
Владикавказского научного центра
Российской академии наук, г. Владикавказ;
Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова,
г. Владикавказ
E-mail: kulaev@smath.ru

Поступила в редакцию
25.08.2014 и 01.08.2015