Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, О спектральном синтезе на поэлементно компактных абелевых группах, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 8, 127–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:32:37

УДК 517.986.62

С. С. Платонов

О спектральном синтезе на поэлементно компактных абелевых группах

Пусть G – произвольная локально компактная абелева группа, $C(G)$ – пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на группе G . Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ называется инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно сдвигов $\tau_y: f(x) \mapsto f(xy)$, $y \in G$. По определению инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ допускает строгий спектральный синтез, если $\mathcal{H}$ совпадает с замыканием в $C(G)$ линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ характеров группы G . Будем говорить, что на группе G справедлив строгий спектральный синтез в пространстве $C(G)$, если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ допускает строгий спектральный синтез. Элемент x топологической группы G называется компактным, если x содержится в некоторой компактной подгруппе группы G . Группа G называется поэлементно компактной, если все элементы этой группы компактны. Основным результатом статьи является доказательство того, что на локально компактной абелевой группе G справедлив строгий спектральный синтез в пространстве $C(G)$ тогда и только тогда, когда группа G поэлементно компактная.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: спектральный синтез, локально компактные абелевы группы, поэлементно компактные группы, преобразование Фурье на группах, функции Брюа–Шварца.

DOI: 10.4213/sm8419

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть G – локально компактная абелева группа (LCA-группа), $\mathcal{F}$ – топологическое векторное пространство (ТВП), состоящее из комплекснозначных функций на G . Будем называть пространство $\mathcal{F}$ *трансляционно инвариантным*, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y: f(x) \mapsto f(xy), \quad f(x) \in \mathcal{F}, \quad y \in G, \quad (1.1)$$

и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или *обобщенным характером* называется произвольный непрерывный гомоморфизм из группы G в мультипликативную

группу $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел. Частным случаем экспоненциальных функций являются характеры – непрерывные гомоморфизмы группы G в группу $\mathbb{T}$ комплексных чисел, по модулю равных 1. Непрерывные гомоморфизмы из группы G в аддитивную группу комплексных чисел называются *аддитивными функциями*. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ на G называется *полиномиальной*, если P – комплексный полином от m переменных и $a_1, \dots, a_m$ – аддитивные функции. Произведение полиномиальной и экспоненциальной функций называется *экспоненциальным мономом*, а сумма экспоненциальных мономов называется *экспоненциальным полиномом* на группе G .

Пусть $\mathcal{F}$ – трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G , $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ экспоненциальных мономов. В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный синтез, если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.

Приведенное определение спектрального синтеза берет начало с работы Л. Шварца [1], в которой доказана справедливость спектрального синтеза для случая, когда $G = (\mathbb{R}, +)$, а пространство $\mathcal{F}$ может совпадать с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с пространством $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ (если не оговорено противное, то все функции предполагаются комплекснозначными и все классические функциональные пространства рассматриваются с обычными топологиями).

Справедливость или несправедливость спектрального синтеза зависит как от группы G , так и от ТВП $\mathcal{F}$. Так, если взять $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $n \geq 2$, то в пространствах $C(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ спектральный синтез не справедлив (см. [2]), а в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}^n$ спектральный синтез справедлив (см. [3]). Обзор результатов о спектральном синтезе на LCA-группах см. в [4] и [5]. Одним из наиболее естественных функциональных пространств, где можно изучать спектральный синтез, является пространство $C(G)$ всех непрерывных функций на группе G . В общем случае неизвестен критерий, позволяющий определить справедлив или не справедлив спектральный синтез в пространстве $C(G)$. В частном случае, когда группа G дискретная, известно, что спектральный синтез в пространстве $C(G)$ справедлив тогда и только тогда, когда ее ранг без кручения конечен (см. [6]).

Для недискретных LCA-групп большой интерес представляет получение достаточных условий на группу G , при которых в пространстве $C(G)$ справедлив спектральный синтез.

Элемент x топологической группы G называется *компактным элементом*, если x содержится в некоторой компактной подгруппе группы G или, эквивалентно, наименьшая замкнутая подгруппа в G , содержащая x , компактна. Известно, что если G – LCA-группа, то множество B всех компактных элементов в G образует замкнутую подгруппу в G (см. [7; гл. 2, теорема 9.10]). Будем

называть топологическую группу G *поэлементно компактной*, если любой элемент группы G компактен.

Пусть G – поэлементно компактная LCA-группа. Если $\varphi: G \mapsto \mathbb{C}_*$ – обобщенный характер группы G , то для любого элемента $x \in G$ его образ содержится в некоторой компактной подгруппе группы $\mathbb{C}_*$. Но любая компактная подгруппа группы $\mathbb{C}_*$ содержится в подгруппе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, поэтому любой обобщенный характер совпадает с обычным характером. Также легко видеть, что любая аддитивная функция на группе G тождественно равна нулю, поэтому любой экспоненциальный моном на группе G имеет вид $\lambda\chi(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi(x)$ – некоторый характер группы G . В связи с этим справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть $\mathcal{F}$ – трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G , $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$. Если G – поэлементно компактная LCA-группа, то $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ характеров группы G .*

Для любой LCA-группы G пусть $\widehat{G}$ – множество всех характеров группы G . Снабженное компактно-открытой топологией и операцией поточечного умножения характеров, множество $\widehat{G}$ становится LCA-группой (см. [7]–[9]). Если $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство, то спектром $\mathcal{H}$ будем называть множество

$$\sigma_{\mathcal{H}} := \{\chi \in \widehat{G} : \chi \in \mathcal{H}\}.$$

Если G – поэлементно компактная LCA-группа и инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, то $\mathcal{H}$ однозначно восстанавливается по своему спектру.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть G – произвольная поэлементно компактная LCA-группа. Тогда:*

- 1) *спектральный синтез справедлив в пространстве $C(G)$ всех непрерывных функций на группе G ;*
- 2) *для того чтобы подмножество $\sigma \subseteq \widehat{G}$ было спектром некоторого инвариантного подпространства в $C(G)$, необходимо и достаточно, чтобы σ было замкнутым подмножеством в $\widehat{G}$.*

В частном случае, когда G является нульмерной поэлементно компактной LCA-группой, теорема 1.1 была доказана ранее в [4]. В настоящей работе установлено, что условие нульмерности излишне и тем самым доказана справедливость спектрального синтеза в пространстве $C(G)$ для более широкого класса LCA-групп. Отметим также, что справедливость спектрального синтеза в пространстве $C(G)$ для любой компактной группы G была установлена ранее в [10].

Пусть G – произвольная LCA-группа, $\mathcal{F}$ – трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G , $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$. Будем говорить, что инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает

строгий спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ характеров группы G . В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив *строгий спектральный синтез*, если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает строгий спектральный синтез.

Из теоремы 1.1 и из предложения 1.1 вытекает, что если группа G поэлементно компактная, то в пространстве $C(G)$ справедлив строгий спектральный синтез. Можно доказать, что если ЛСА-группа G не является поэлементно компактной, то строгий спектральный синтез в пространстве $C(G)$ не справедлив (см. § 3, предложение 3.6). Таким образом, условие поэлементной компактности является необходимым и достаточным условием для справедливости строгого спектрального синтеза в пространстве $C(G)$.

Приведем некоторые примеры поэлементно компактных ЛСА-групп, которые не являются нульмерными или компактными. Тривиальными примерами являются группы G , представимые в виде прямого произведения $G = G_1 \times G_2$, где G_1 – нульмерная поэлементно компактная, но некомпактная ЛСА-группа, G_2 – любая компактная, но не нульмерная абелева группа (примеры нульмерных поэлементно компактных групп см., например, в [4] и в цитированной там литературе).

Известно, что ЛСА-группа G является нульмерной тогда и только тогда, когда ее двойственная группа $\widehat{G}$ является поэлементно компактной (см. [7; п. 24.18]). Поэтому поэлементно компактные ЛСА-группы можно охарактеризовать как двойственные группы к нульмерным ЛСА-группам.

Более конкретные примеры поэлементно компактных ЛСА-групп могут быть построены по следующей схеме.

Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ – непустое семейство компактных абелевых групп, и для каждого $i \in I$ пусть H_i – открытая подгруппа в G_i , причем $H_i \neq G_i$. Будем считать, что операции в группах задаются мультипликативно и e – единичный элемент (единица) в любой группе.

Пусть $\widetilde{G} = \prod_{i \in I} G_i$ – прямое произведение групп G_i . Элементами $\widetilde{G}$ являются обобщенные последовательности $x = \{x_i\}_{i \in I}$, $x_i \in G_i$.

Пусть Λ – произвольное конечное подмножество в I , и для каждого $i \in \Lambda$ пусть U_i – некоторая окрестность единицы в G_i . Зададим топологию на $\widetilde{G}$, приняв за открытую базу единицы в $\widetilde{G}$ совокупность множеств вида

$$U = \prod_{i \in \Lambda} U_i \times \prod_{i \notin \Lambda} H_i. \quad (1.2)$$

Обозначим через G подгруппу группы $\widetilde{G}$, состоящую из всех тех $x = \{x_i\}_{i \in I}$, для которых $x_i \notin H_i$ возможно лишь для конечного числа индексов из I . Рассматриваемая как подпространство группы $\widetilde{G}$ группа G будет топологической абелевой группой, которая называется локальным прямым произведением групп G_i относительно открытых подгрупп H_i . Приведенная конструкция является частным случаем более общего определения локального прямого произведения (см. [7; п. 6.16] или [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если множество I бесконечно, то построенная выше группа G является некомпактной ЛСА-группой, все элементы которой компактны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть Λ – конечное подмножество в I . Проверим, что множество

$$G(\Lambda) := \prod_{i \in \Lambda} G_i \times \prod_{i \notin \Lambda} H_i \quad (1.3)$$

является компактной подгруппой в группе G .

Заметим, что множество $G(\Lambda)$ будет открытой подгруппой в топологической группе $\tilde{G}$ и индуцированная из $\tilde{G}$ топология на $G(\Lambda)$ совпадает с тихоновской топологией произведения топологических пространств. Так как любая открытая подгруппа топологической группы является замкнутой, то открытая подгруппа H_i будет замкнутой подгруппой в компактной группе G_i и, следовательно, H_i является компактной подгруппой в G_i . Тогда подгруппа $G(\Lambda)$ будет компактным топологическим пространством как тихоновское произведение компактных пространств. Так как $G(\Lambda) \subseteq G$, то $G(\Lambda)$ является компактной подгруппой группы G .

Очевидно, что каждый элемент из группы G содержится в некоторой подгруппе $G(\Lambda)$, поэтому группа G поэлементно компактна.

2) Базу окрестностей единицы группы G образуют множества U вида (1.2). Окрестность U содержится в компактной подгруппе $G(\Lambda)$, поэтому ее замыкание компактно. Следовательно, G является локально компактной абелевой группой.

3) Проверим, что группа G некомпактна, если множество I бесконечно.

Так как $H_i \neq G_i$, то для каждого $i \in I$ можно выбрать элемент $g_i \in G_i$ такой, что $g_i \notin H_i$. Для любого $\alpha \in I$ определим обобщенную последовательность $y^{(\alpha)} = \{y_i^{(\alpha)}\}_{i \in I}$, где элемент $y_i^{(\alpha)} \in G_i$ задается формулой

$$y_i^{(\alpha)} = \begin{cases} g_\alpha & \text{при } i = \alpha; \\ e & \text{при } i \neq \alpha. \end{cases}$$

Тогда $y^{(\alpha)} \in G$ и множество точек $\{y^{(\alpha)}, \alpha \in I\}$ является дискретным подмножеством группы G , так как множества

$$V_\alpha := (G \setminus H_\alpha) \times \prod_{i \neq \alpha} H_i$$

являются попарно не пересекающимися окрестностями точек $y^{(\alpha)}$. Таким образом, в G имеется бесконечное дискретное подмножество, поэтому топологическая группа G некомпактна.

Напомним, что топологическое пространство X называется нульмерным, если его открыто-замкнутые подмножества образуют базу топологии. Если X – хаусдорфово локально компактное пространство, то X нульмерно тогда и только тогда, когда X вполне несвязно, т.е. любое подмножество в X , содержащее более одной точки, несвязно (см., например, [7; гл. 1, § 3]).

Пусть G – локальное прямое произведение компактных абелевых групп G_i относительно открытых подгрупп H_i , $i \in I$. Для каждого $\alpha \in I$ пусть

$$\tilde{G}_\alpha = G_\alpha \times \prod_{i \neq \alpha} \{e\}.$$

Тогда $\tilde{G}_\alpha$ является замкнутой подгруппой в группе G изоморфной (как топологическая группа) группе G_α .

Предложение 1.2 позволяет строить примеры поэлементно компактных LCA-групп. При этом, если хотя бы одна из топологических групп G_α , $\alpha \in I$, не является нульмерной, то и вся группа G не будет нульмерной. Это вытекает, например, из того, что любое подпространство нульмерного пространства должно быть нульмерным, а подпространство $\tilde{G}_\alpha$ пространства G не является нульмерным. В качестве групп G_i можно взять, например, топологические прямые произведения $G_i = K_i \times \mathbb{Z}_2$, где K_i – произвольная компактная группа, $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ – мультипликативная циклическая группа из двух элементов, снабженная дискретной топологией. Пусть $H_i = K_i \times \{1\}$, тогда H_i является открытой подгруппой в компактной группе G_i . Если группа K_i не нульмерная, то и группа G_i не будет нульмерной.

Кратко изложим схему доказательства теоремы 1.1. Основным инструментом доказательства теоремы 1.1 являются функции Брюа–Шварца на LCA-группах. Для любой LCA-группы G пусть $\mathcal{S}(G)$ – множество функций Брюа–Шварца на группе G . В § 2 приводятся необходимые сведения о функциях Брюа–Шварца и описывается строение этих функций на поэлементно компактных и нульмерных LCA-группах. Для любой LCA-группы G множество $\mathcal{S}(G)$ является топологической алгеброй относительно поточечного умножения функций. В § 2 описываются замкнутые идеалы в алгебре $\mathcal{S}(G)$ для случая, когда G – нульмерная LCA-группа. Доказано, что любой замкнутый идеал в алгебре $\mathcal{S}(G)$ определяется множеством его нулей (т.е. множеством общих нулей функций из идеала). В § 3 с помощью перехода к двойственному пространству $C'(G)$ и с помощью преобразования Фурье задача о спектральном синтезе в $C(G)$ сводится к задаче об описании замкнутых идеалов в алгебре $\mathcal{S}(\hat{G})$ множествами их нулей. Если группа G поэлементно компактная, то двойственная группа $\hat{G}$ нульмерная и теорема 1.1 выводится из результатов § 2.

§ 2. Функции Брюа–Шварца

Всюду в дальнейшем G – LCA-группа. Элементы группы G будут в дальнейшем обозначаться x , y и так далее, пусть dx (соответственно dy и так далее) – элемент меры Хаара на группе G . Через $\hat{G}$ будем обозначать двойственную группу к группе G . Элементами $\hat{G}$ являются характеры группы G , которые обычно будем обозначать через χ . Пусть $d\chi$ – элемент меры Хаара на группе $\hat{G}$. Если не оговорено противное, то операции в группах задаются мультипликативно, e – единичный элемент группы.

Все топологические пространства (и, в частности, топологические группы) предполагаются хаусдорфовыми. Под окрестностью в топологическом пространстве всегда понимается открытая окрестность. Если A – подмножество топологического пространства, то через $[A]$ обозначается замыкание множества A . Если X – множество с мерой μ , то $L^p(X) = L^p(X, d\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, – лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{L^p(X)} = \|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{x \in X} |f(x)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Функции из лебеговых пространств рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль. Если X – LCA-группа или ее подмножество, то в качестве меры в лебеговых пространствах всегда берется мера Хаара.

Пространство $L^1(G)$ является коммутативной банаховой алгеброй относительно свертки

$$(f_1 * f_2)(x) := \int f_1(xy^{-1})f_2(y) dy, \quad f_1, f_2 \in L^1(G). \quad (2.1)$$

Для любой функции $f \in L^1(G)$ ее *преобразованием Фурье* называется функция $\widehat{f}$ на двойственной группе $\widehat{G}$, которая определяется формулой

$$\widehat{f}(\chi) := \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx, \quad \chi \in \widehat{G}. \quad (2.2)$$

Отображение $\Phi: f \mapsto \widehat{f}$ также будем называть преобразованием Фурье.

Легко проверяются следующие свойства преобразования Фурье:

$$|\widehat{f}(\chi)| \leq \|f\|_1, \quad f \in L^1(G), \quad \chi \in \widehat{G}; \quad (2.3)$$

$$\Phi(f_1 * f_2) = \Phi(f_1)\Phi(f_2), \quad f_1, f_2 \in L^1(G);$$

$$\widehat{\tau_y f}(\chi) = \chi(y)\widehat{f}(\chi), \quad f \in L^1(G), \quad y \in G, \quad \chi \in \widehat{G}, \quad (2.4)$$

где $(\tau_y f)(x) = f(xy)$.

Если S – подмножество в G , то через $\langle S \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная множеством S . В частности, если U – симметричная окрестность единицы (т.е. $U^{-1} = U$), то $\langle U \rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$. В этом случае множество $\langle U \rangle$ будет открыто-замкнутой подгруппой в группе G (см. [7; теорема 5.7]). Группа G называется компактно порожденной, если в G существует окрестность единицы U с компактным замыканием такая, что $G = \langle U \rangle$. Фундаментальным результатом, описывающим строения компактно порожденных LCA-групп, является следующая теорема (см. [7; теорема 9.8]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Любая компактно порожденная LCA-группа G топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$, где a и b – неотрицательные целые числа, K – компактная абелева группа.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Любая компактно порожденная поэлементно компактная ЛСА-группа G является компактной топологической группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 группа G изоморфна группе $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$, где $a, b \in \mathbb{Z}_+$, K – компактная группа. Так как группа G поэлементно компактная, то $a = b = 0$, т.е. G изоморфна компактной группе K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. 1) *Если G – поэлементно компактная ЛСА-группа, то для любого компактного подмножества $P \subseteq G$ существует компактная открытая подгруппа группы G , содержащая множество P .*

2) *Если G – нульмерная ЛСА-группа, то для любого компактного подмножества $P \subseteq G$ существует симметричная компактная открытая окрестность единицы, содержащая множество P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Без ограничения общности можно считать, что $e \in P$. Пусть V – произвольная окрестность точки e с компактным замыканием, тогда множество $U = (VP) \cup (VP)^{-1}$ будет симметричной окрестностью точки e с компактным замыканием и $P \subseteq U$. Подмножество $H := \langle U \rangle$ будет открыто-замкнутой подгруппой в G , содержащей P . Так как H является компактно порожденной поэлементно компактной ЛСА-группой, то по предложению 2.1 H является компактной подгруппой.

2) Так как G – нульмерная ЛСА-группа, то базу топологии в G образуют компактные открытые подмножества. Пусть V – произвольная компактная открытая окрестность единицы в G . Без ограничения общности можно считать, что $e \in P$. Тогда множество $U = (VP) \cup (VP)^{-1}$ будет компактной открытой симметричной окрестностью единицы и $P \subseteq U$.

В [12] Ф. Брюа определил аналоги быстроубывающих функций Шварца для любой ЛСА-группы. Эти функции называются функциями Брюа–Шварца. Другое описание функций Брюа–Шварца было получено М. Осборном в [13]. Мы рассмотрим некоторые свойства функций Брюа–Шварца, которые будут использоваться в дальнейшем. Используемые при этом определения и обозначения близки к определениям и обозначениям из [13].

Через $\mathfrak{V}(G)$ будем обозначать множество всех симметричных окрестностей единицы с компактным замыканием в группе G . Для любого $V \in \mathfrak{V}(G)$ обозначим через $\mathcal{A}_V(G)$ множество всех функций $f \in L^\infty(G)$, удовлетворяющих условию: для любого $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ существует число $M_n > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f|_{G \setminus V^k}\|_\infty \leq M_n k^{-n}. \quad (2.5)$$

Множество $\mathcal{A}_V(G)$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм (даже норм):

$$\nu_{V,n}(f) := \|f\|_\infty + \sup_{k \in \mathbb{N}} k^n \|f|_{G \setminus V^k}\|_\infty, \quad f \in \mathcal{A}_V(G), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.6)$$

Очевидно, что если $V_1 \subseteq V_2$ ($V_1, V_2 \in \mathfrak{V}(G)$), то $\mathcal{A}_{V_1}(G) \subseteq \mathcal{A}_{V_2}(G)$, причем вложение непрерывное, так как $\nu_{V_1,n}(f) \leq \nu_{V_2,n}(f)$ при $f \in \mathcal{A}_{V_1}(G)$.

Пространство

$$\mathcal{A}(G) := \bigcup_{V \in \mathfrak{V}(G)} \mathcal{A}_V(G) \quad (2.7)$$

снабдим топологией индуктивного предела локально выпуклых пространств $\mathcal{A}_V(G)$, т.е. топология в $\mathcal{A}(G)$ совпадает со слабой локально выпуклой топологией, для которой все вложения $\mathcal{A}_V(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$ непрерывны.

Приведем некоторые свойства пространства $\mathcal{A}(G)$ (см. [13]).

- (A1) Если $f \in \mathcal{A}_V(G)$, то $f(x) = 0$ п.в. на множестве $G \setminus \langle V \rangle$.
- (A2) $\mathcal{A}(G)L^\infty(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$, и, в частности, $\mathcal{A}(G)$ является алгеброй относительно поточечного умножения функций.
- (A3) $\mathcal{A}(G) \subseteq L^1(G)$, и если $f \in \mathcal{A}_V(G)$, то для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует число $M'_n > 0$ такое, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f|_{G \setminus V^k}\|_1 \leq M'_n k^{-n}. \quad (2.8)$$

- (A4) $\mathcal{A}(G)$ является коммутативной алгеброй относительно свертки функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (см. [13]). Функция f называется *функцией Брюа–Шварца*, если $f \in \mathcal{A}(G)$ и $\hat{f} \in \mathcal{A}(\hat{G})$, где $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции f .

Через $\mathcal{S}(G)$ обозначим пространство Брюа–Шварца на группе G , т.е. множество всех функций Брюа–Шварца на группе G .

Зададим топологию на пространстве $\mathcal{S}(G)$. Для любых $V \in \mathfrak{V}(G)$ и $W \in \mathfrak{V}(\hat{G})$ обозначим через $\mathcal{S}(V, W)$ множество всех функций f , удовлетворяющих условиям $f \in \mathcal{A}_V(G)$ и $\hat{f} \in \mathcal{A}(\hat{G})$. Множество $\mathcal{S}(V, W)$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм

$$N_{V,W,m,n}(f) := \nu_{V,m}(f) + \nu_{W,n}(\hat{f}), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пространство $\mathcal{S}(G)$ является объединением пространств $\mathcal{S}(V, W)$ по всем $V \in \mathfrak{V}(G)$ и $W \in \mathfrak{V}(\hat{G})$ и снабжается топологией индуктивного предела этих локально выпуклых пространств.

Отметим некоторые свойства функций Брюа–Шварца (см. [13]).

- (S1) $\mathcal{S}(G) \subseteq C(G)$.
- (S2) Преобразование Фурье устанавливает изоморфизм топологических векторных пространств $\mathcal{S}(G)$ и $\mathcal{S}(\hat{G})$.
- (S3) $\mathcal{S}(G)$ является топологической алгеброй относительно поточечного умножения функций и топологической алгеброй относительно свертки функций.

Для любой функции f через $\text{supp}(f)$ будем обозначать носитель функции f .

Пусть $C_c(G)$ – множество непрерывных функций на G с компактным носителем. По определению

$$\mathcal{D}(G) := \mathcal{S}(G) \cap C_c(G). \quad (2.9)$$

Функции из пространства $\mathcal{D}(G)$ называются гладкими функциями с компактным носителем на группе G .

Пусть $L_c^\infty(G)$ – множество всех функций из класса $L^\infty(G)$ с компактным носителем. Определим топологию на пространстве $L_c^\infty(G)$. Для любого $V \in \mathfrak{V}(G)$ обозначим через $L_c^\infty(V)$ множество функций $f \in L_c^\infty(G)$, удовлетворяющих условию $\text{supp}(f) \subseteq [V]$, где $[V]$ – замыкание множества V . Снабженное нормой $\|\cdot\|_\infty$ множество $L_c^\infty(G)$ является банаховым пространством. Пространство

$$L_c^\infty(G) = \bigcup_{V \in \mathfrak{V}(G)} L_c^\infty(V)$$

снабжается топологией индуктивного предела нормированных пространств $L_c^\infty(V)$ и становится локально выпуклым пространством. Пространство $C_c(G)$ является замкнутым линейным подпространством ТВП $L_c^\infty(G)$ и $C_c(G)$ является локально выпуклым пространством с топологией, индуцированной топологией пространства $L_c^\infty(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. 1) Для любой LCA-группы G

$$L_c^\infty(G) \subseteq \mathcal{A}(G), \quad (2.10)$$

причем вложение непрерывно.

2) Если G – поэлементно компактная LCA-группа, то

$$\mathcal{A}(G) = L_c^\infty(G) \quad (2.11)$$

как топологические векторные пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in L_c^\infty(W)$, $W \in \mathfrak{V}(G)$, U – произвольная симметричная окрестность единицы с компактным замыканием. Возьмем $V := U[W]$, тогда $V \in \mathfrak{V}(G)$ и $\text{supp}(f) \subseteq V$. Так как $V \subseteq V^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то $\|f|_{G \setminus V^k}\|_\infty = 0$, следовательно, $f \in \mathcal{A}_V(G)$ и из определения полунормы $\nu_{V,n}$ (см. (2.6)) вытекает, что

$$\nu_{V,n}(f) = \|f\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Таким образом, доказано, что для любой окрестности $W \in \mathfrak{V}(G)$ существует окрестность $V \in \mathfrak{V}(G)$ такая, что

$$L_c^\infty(W) \subseteq \mathcal{A}_V(G), \quad (2.13)$$

причем вложение непрерывно. Из (2.13) вытекает (2.10), а из определения топологии индуктивного предела следует, что вложение (2.10) непрерывно.

2) Обозначим через Λ множество всех компактных открытых подгрупп группы G . Если $V \in \Lambda$ и $f \in \mathcal{A}_V(G)$, то по свойству ($\mathcal{A}1$) $\text{supp}(f) \subseteq \langle V \rangle = V$, следовательно, $f \in L_c^\infty(G)$. Рассуждая как в части 1) доказательства, получим, что справедливо равенство (2.12). Таким образом, при $V \in \Lambda$ имеется вложение

$$\mathcal{A}_V(G) \subseteq L_c^\infty(V), \quad (2.14)$$

причем это вложение непрерывно.

Если группа G поэлементно компактна, то по предложению 2.2 для любой окрестности $U \in \mathfrak{V}(G)$ найдется содержащая ее компактная открытая подгруппа V , поэтому

$$\mathcal{A}(G) = \bigcup_{V \in \Lambda} \mathcal{A}_V(G) \subseteq \bigcup_{V \in \Lambda} L_c^\infty(V) = L_c^\infty(G),$$

т.е.

$$\mathcal{A}(G) \subseteq L_c^\infty(G), \quad (2.15)$$

причем это вложение непрерывно. Из (2.10) и (2.15) вытекает равенство (2.11).

С учетом свойства $(\mathcal{S}1)$, из предложения 2.3 вытекает следующее.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если G – поэлементно компактная LCA-группа, то $\mathcal{S}(G) = \mathcal{D}(G)$.*

Пусть G – произвольная LCA-группа. Если H – замкнутая подгруппа группы G , то *аннулятором* H в двойственной группе $\widehat{G}$ называется множество

$$A(\widehat{G}, H) := \{\chi \in \widehat{G} : \chi(x) = 1 \ \forall x \in H\}.$$

Множество $A(\widehat{G}, H)$ является замкнутой подгруппой группы $\widehat{G}$. Аналогично для любой замкнутой подгруппы Γ группы G определяется ее *аннулятор* в группе G :

$$A(G, \Gamma) := \{x \in G : \chi(x) = 1 \ \forall \chi \in \Gamma\}.$$

Приведем некоторые свойства двойственных групп и аннуляторов подгрупп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. 1) *Если H – замкнутая подгруппа группы G , то*

$$A(G, A(\widehat{G}, H)) = H.$$

2) *Подгруппа H является компактной открытой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда подгруппа $A(\widehat{G}, H)$ является компактной открытой подгруппой группы $\widehat{G}$.*

3) *Группа G поэлементно компактна тогда и только тогда, когда ее двойственная группа $\widehat{G}$ нульмерная.*

Доказательство п. 1) см. в [7; п. 24.10], п. 2) – в. [7; п. 23.29], п. 3) – в [7; п. 24.18].

Пусть X – топологическое пространство. Функция f на X называется *локально постоянной*, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $U = U(x)$ этой точки, в которой функция f постоянная. Если G – топологическая группа, то функцию f на G будем называть *равномерно локально постоянной*, если в G существует такая окрестность единицы U , что $f(xy) = f(x)$ для всех $x \in G$, $y \in U$. Будем обозначать множество всех равномерно локально постоянных функций на G через $\mathcal{C}(G)$.

Как и ранее, всюду G – LCA-группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если группа G нульмерная, то справедливо равенство*

$$\mathcal{S}(G) = \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{A}(G),$$

т.е. функция f является функцией Брюа–Шварца тогда и только тогда, когда функция f равномерно локально постоянная и принадлежит классу $\mathcal{A}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in \mathcal{S}(G)$, тогда по определению $f \in \mathcal{A}(G)$ и $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\widehat{G})$. Так как группа G нульмерная, то двойственная группа $\widehat{G}$ будет поэлементно компактной (см. предложение 2.4, 3)). По предложению 2.3 $\mathcal{A}(\widehat{G}) = L_c^\infty(\widehat{G})$, поэтому найдется компактное подмножество $P \subseteq \widehat{G}$, для которого $\text{supp}(\widehat{f}) \subseteq P$. По предложению 2.2 существует компактная открытая подгруппа H группы $\widehat{G}$, содержащая множество P .

Пусть $U = A(G, H)$ – аннулятор подгруппы H в группе G . Тогда U является компактной открытой подгруппой группы G (см. предложение 2.4, 2)). Проверим, что

$$f(xy) = f(x) \quad \forall x \in G, y \in U. \quad (2.16)$$

Пусть $(\tau_y f)(x) = f(xy)$, тогда по свойству (2.4)

$$\widehat{\tau_y f}(\chi) = \chi(y) \widehat{f}(\chi) \quad \forall \chi \in \widehat{G}. \quad (2.17)$$

Так как $\text{supp}(\widehat{f}) \subseteq H$, то при $\chi \notin H$ будет $\widehat{f}(\chi) = 0$, следовательно, $\chi(y) \widehat{f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$. Если $\chi \in H$, то из того, что $y \in U = A(G, H)$, вытекает, что $\chi(y) = 1$, поэтому $\chi(y) \widehat{f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$. В результате $\widehat{\tau_y f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$ для любого $\chi \in \widehat{G}$, откуда следует (2.16). Следовательно, $f \in \mathcal{C}(G)$ и тем самым доказано включение

$$\mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{A}(G).$$

2) Обратно, пусть $f \in \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{A}(G)$. Так как $f \in \mathcal{C}(G)$, то существует окрестность единицы $U \subseteq G$ такая, что выполняется условие (2.16). Так как на нульмерной ЛСА-группе базу окрестностей единицы образуют компактные открытые подгруппы (см. [8; гл. 3, § 22]), то без ограничения общности можно считать, что U – компактная открытая подгруппа группы G . Пусть $H = A(\widehat{G}, U)$. Тогда H будет компактной открытой подгруппой группы $\widehat{G}$.

Проверим, что $\text{supp}(\widehat{f}) \subseteq H$. Если $\chi \notin H$, то найдется элемент $y \in U$, для которого $\chi(y) \neq 1$. Из равенства $\tau_y f = f$ следует, что $\widehat{\tau_y f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$, т.е. $\chi(y) \widehat{f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$, откуда вытекает, что $\widehat{f}(\chi) = 0$.

Так как $\widehat{f} \in L_c^\infty(\widehat{G})$ и $\text{supp}(\widehat{f}) \subseteq H$, то $\widehat{f} \in L_c^\infty(\widehat{G}) = \mathcal{A}(\widehat{G})$. Окончательно, $f \in \mathcal{A}(G)$ и $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\widehat{G})$, т.е. $f \in \mathcal{S}(G)$, и тем самым доказано включение

$$\mathcal{C}(G) \cap \mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{S}(G).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Если группа G нульмерная, то любая локально постоянная функция на G с компактным носителем принадлежит классу $\mathcal{S}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – локально постоянная функция с компактным носителем на нульмерной группе G . Так как $f \in L_c^\infty(G)$, то $f \in \mathcal{A}(G)$ по предложению 2.3. По предложению 2.5, чтобы доказать, что $f \in \mathcal{S}(G)$, достаточно показать, что функция f является равномерно локально постоянной.

Пусть $P = \text{supp}(f)$. Так как функция f локально постоянная, то P является компактным открытым подмножеством в G . Пусть Λ – множество компактных открытых подгрупп группы G . Так как G – нульмерная LCA-группа, то множество Λ образует базу окрестностей единицы группы G . Для любой точки $a \in G$ базу окрестностей точки a образуют множества вида aV , где $V \in \Lambda$.

Так как множество P открыто, а функция f локально постоянная, то для каждой точки $a \in P$ существует окрестность единицы $V_a \in \Lambda$ такая, что $aV_a \subseteq P$ и функция f постоянна на множестве aV_a . Семейство $\{aV_a, a \in P\}$ является открытым покрытием множества P , а так как множество P компактное, то из него можно выделить конечное подпокрытие, т.е. найдутся точки $a_1, \dots, a_m \in P$ такие, что

$$P = \bigcup_{j=1}^m a_j V_{a_j}.$$

Пусть

$$U = \bigcap_{j=1}^m V_{a_j},$$

тогда $U \in \Lambda$. Проверим, что для функции f выполняется соотношение (2.16). Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x \notin P$, тогда $f(x) = 0$. Если $y \in U$ и $xy \in P$, то $xy \in a_j V_{a_j}$ для некоторого j . Так как V_{a_j} – подгруппа группы G и $y \in U \subseteq V_{a_j}$, то $x \in a_j y^{-1} V_{a_j} = a_j V_{a_j}$, поэтому $x \in P$, что невозможно. Следовательно, $xy \notin P$ и $f(xy) = 0$.

2) Пусть $x \in P$, тогда $x \in a_j V_{a_j}$ для некоторого j . Так как $y \in U \subseteq V_{a_j}$, то $xy \in a_j y V_{a_j} = a_j V_{a_j}$. Обе точки x и xy принадлежат множеству $a_j V_{a_j}$, на котором функция f постоянная, следовательно, $f(xy) = f(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если U – компактное открытое подмножество нульмерной группы G , то характеристическая функция I_U принадлежит множеству $\mathcal{S}(G)$, где

$$I_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in U; \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Для любой LCA-группы G пространство $\mathcal{S}(G)$ является топологической алгеброй относительно поточечного умножения функций и топологической алгеброй относительно свертки функций. Чтобы различать эти топологические алгебры, будем использовать обозначения $\mathcal{S}_{\text{mult}}(G)$, когда $\mathcal{S}(G)$ рассматривается как топологическая алгебра относительно поточечного умножения, и $\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)$, когда $\mathcal{S}(G)$ рассматривается как топологическая алгебра относительно свертки.

Пусть X – произвольное топологическое пространство, $\mathcal{F}$ – некоторое множество, состоящее из непрерывных функций на X , $\mathcal{W}$ – подмножество в $\mathcal{F}$. Обозначим через $N(\mathcal{W}; X)$ множество общих нулей всех функций из $\mathcal{W}$, т.е.

$$N(\mathcal{W}; X) := \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in \mathcal{W}\}.$$

Так как все функции из $\mathcal{F}$ непрерывны, то множество $N(\mathcal{W}; X)$ является замкнутым подмножеством пространства X . Будем называть $N(\mathcal{W}; X)$ нулевым множеством подмножества $\mathcal{W}$.

Для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ обозначим через $\mathcal{V}(A; \mathcal{F})$ множество всех функций $f \in \mathcal{F}$ таких, что $f(x) = 0$ для любой точки $x \in A$.

В частности, возможен случай, когда $X = G$ – произвольная ЛСА-группа и $\mathcal{F} = \mathcal{S}(G)$ – множество функций Брюа–Шварца. Если A – замкнутое подмножество в G , то пусть $\mathcal{V}(A) := \mathcal{V}(A; \mathcal{S}(G))$. Очевидно, что $\mathcal{V}(A)$ является замкнутым идеалом в топологической алгебре $\mathcal{S}_{\text{mult}}(G)$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть G – нульмерная ЛСА-группа. Если A и B – различные замкнутые подмножества в G , то $\mathcal{V}(A) \neq \mathcal{V}(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \neq B$, то $A \setminus B \neq \emptyset$ или $B \setminus A \neq \emptyset$. Для определенности пусть $A \setminus B \neq \emptyset$, тогда существует точка $x_0 \in A$ и $x_0 \notin B$. Так как пространство G локально компактное и нульмерное, то найдется открытое компактное подмножество U такое, что $x_0 \in U$ и $U \cap B = \emptyset$. По следствию 2.2 характеристическая функция I_U принадлежит классу $\mathcal{S}(G)$. Тогда $I_U \in \mathcal{V}(B)$ и $I_U \notin \mathcal{V}(A)$, следовательно, $\mathcal{V}(A) \neq \mathcal{V}(B)$.

Из следующей теоремы вытекает, что идеалами вида $\mathcal{V}(A)$, A – замкнутое подмножество в G , исчерпываются все замкнутые идеалы в топологической алгебре $\mathcal{S}_{\text{mult}}(G)$, если G – нульмерная группа.

ТЕОРЕМА 2.2. *Если G – нульмерная ЛСА-группа, то для любого замкнутого идеала $\mathcal{I}$ топологической алгебры $\mathcal{S}_{\text{mult}}(G)$ справедливо равенство*

$$\mathcal{I} = \mathcal{V}(N; \mathcal{S}(G)),$$

где $N = N(\mathcal{I}; G)$ – нулевое множество идеала $\mathcal{I}$.

Предварительно приведем вспомогательный результат, необходимый для доказательства теоремы 2.2. Пусть X – произвольное топологическое пространство, $\mathcal{L}(X)$ – множество всех локально постоянных функций на X . Векторное пространство $\mathcal{L}(X)$ является алгеброй относительно поточечного умножения функций.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть X – нульмерное компактное топологическое пространство; тогда для любого идеала $\mathcal{W}$ алгебры $\mathcal{L}(X)$ справедливо равенство*

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}(N; \mathcal{L}(X)),$$

где $N = N(\mathcal{W}; X)$ – нулевое множество идеала $\mathcal{W}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является частным случаем теоремы 2.1 в [4], где рассматривался более общий случай, когда X – произвольное нульмерное локально компактное пространство, а вместо алгебры $\mathcal{L}(X)$ рассматривалась алгебра локально постоянных функций на X с компактным носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. 1) Пусть G – нульмерная LCA-группа, $\mathcal{I}$ – замкнутый идеал в алгебре $\mathcal{S}_{\text{mult}}(G)$, $N = N(\mathcal{I}; G)$ – нулевое множество идеала $\mathcal{I}$. Очевидно, что $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{V}(N; \mathcal{S}(G)) = \mathcal{V}(N)$. Нужно доказать обратное включение.

Пусть $f \in \mathcal{V}(N)$. Так как $f \in \mathcal{S}(G)$, то существует подмножество $V \in \mathfrak{B}(G)$ такое, что $f \in \mathcal{A}_V(G)$. С учетом п. 2) предложения 2.2 можно считать, что V – компактная открытая окрестность единицы в G . Из предложения 2.5 следует, что функция f равномерно локально постоянная, т.е. существует компактная открытая подгруппа U группы G такая, что

$$f(xy) = f(x) \quad \forall x \in G, y \in U. \quad (2.18)$$

Заменив V на VU , можно считать, что $U \subseteq V$ и $VU = V$.

Пусть $X_r := V^r$, $r \in \mathbb{N}$. Множества X_r образуют возрастающее семейство компактных открытых подмножеств пространства G , причем

$$X_r U = X_r \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$$

$$\text{supp}(f) \subseteq \langle V \rangle = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r. \quad (2.20)$$

Пусть $I_r := I_{X_r}$ – характеристическая функция множества X_r и $f_r := fI_r$. По следствию 2.2 $I_r \in \mathcal{S}(G)$ и, следовательно, $f_r \in \mathcal{S}(G)$. Далее, в п. 2) доказательства, будет показано, что $f_r \in \mathcal{I}$ для любого $r \in \mathbb{N}$, а в п. 3) будет показано, что $f_r \rightarrow f$ при $r \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathcal{S}(G)$. Так как $\mathcal{I}$ является замкнутым подмножеством в $\mathcal{S}(G)$, то из этого будет следовать, что $f \in \mathcal{I}$ и, тем самым, будет доказано включение $\mathcal{V}(N) \subseteq \mathcal{I}$.

2) Каждое множество X_r , $r \in \mathbb{N}$, является нульмерным компактным пространством с индуцированной из G топологией. Если g – локально постоянная функция на X_r , то будем считать, что g продолжена нулем на $G \setminus X_r$. Продолженную функцию будем также обозначать через g ; тогда по предложению 2.6 $g \in \mathcal{S}(G)$. Таким образом, можно считать, что $\mathcal{L}(X_r) \subseteq \mathcal{S}(G)$.

Пусть $\mathcal{I}_r := \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(X_r)$ (т.е. $\mathcal{I}_r$ состоит из всех функций из $\mathcal{I}$ с носителем, содержащимся в X_r), $N_r := N \cap X_r$. Очевидно, что множество $\mathcal{I}_r$ является идеалом в алгебре $\mathcal{L}(X_r)$. Проверим, что $N(\mathcal{I}_r; X_r) = N_r$. Включение $N_r \subseteq N(\mathcal{I}_r; X_r)$ очевидно. Если $x \in X_r$ и $x \notin N_r$, то существует функция $g \in \mathcal{I}$ такая, что $g(x) \neq 0$. Тогда функция $\tilde{g} = gI_r$ принадлежит идеалу $\mathcal{I}_r$ и $\tilde{g}(x) = g(x) \neq 0$, следовательно, $x \notin N(\mathcal{I}_r; X_r)$. Таким образом, $N_r = N(\mathcal{I}_r; X_r)$.

По теореме 2.3 справедливо равенство $\mathcal{I}_r = \mathcal{V}(N_r; \mathcal{L}(X_r))$. Как и раньше, пусть $f \in \mathcal{V}(N)$, $f_r = fI_r$; тогда $f_r \in \mathcal{V}(N_r; \mathcal{L}(X_r))$, откуда вытекает, что $f_r \in \mathcal{I}_r$, а так как $\mathcal{I}_r \subseteq \mathcal{I}$, то $f_r \in \mathcal{I}$.

3) Чтобы доказать, что $f_r \rightarrow f$ при $r \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathcal{S}(G)$, достаточно доказать, что $f_r \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{A}(G)$ и $\hat{f}_r \rightarrow \hat{f}$ в пространстве $\mathcal{A}(\hat{G})$. Так как $f \in \mathcal{A}$, то для f выполняется условие (2.5). Выпишем это условие, заменив n на $(n+1)$: для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует число $M_{n+1} > 0$ такое, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f|_{G \setminus V^k}\|_{\infty} \leq M_{n+1} k^{-n-1}. \quad (2.21)$$

Пусть $g_r = f - f_r$, тогда

$$g_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in V^r; \\ f(x) & \text{при } x \in G \setminus V^r. \end{cases} \quad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) следует, что

$$\|g_r\|_\infty \leq M_{n+1} r^{-n-1}. \quad (2.23)$$

Так как $|g_r(x)| \leq |f(x)|$, то из (2.21) вытекает, что для любых $k, r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|g_r|_{G \setminus V^k}\|_\infty \leq M_{n+1} k^{-n-1}. \quad (2.24)$$

По определению полунормы $\nu_{V,n}$ (см. (2.6)):

$$\nu_{V,n}(g_r) = \|g_r\|_\infty + \sup_{k \in \mathbb{N}} k^n \|g_r|_{G \setminus V^k}\|_\infty. \quad (2.25)$$

При $1 \leq k \leq r$, пользуясь неравенством (2.23) и очевидным неравенством $\|g_r|_{G \setminus V^k}\|_\infty \leq \|g_r\|_\infty$, получаем оценку

$$k^n \|g_r|_{G \setminus V^k}\|_\infty \leq r^n \|g_r\|_\infty \leq M_{n+1} r^{-1}, \quad 1 \leq k \leq r. \quad (2.26)$$

При $k > r$, используя неравенство (2.24), получаем оценку

$$k^n \|g_r|_{G \setminus V^k}\|_\infty \leq M_{n+1} k^{-1} \leq M_{n+1} r^{-1}, \quad k > r. \quad (2.27)$$

Из (2.26) и (2.27) вытекает, что неравенство

$$k^n \|g_r|_{G \setminus V^k}\|_\infty \leq M_{n+1} r^{-1} \quad (2.28)$$

справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$, поэтому из (2.25) и (2.23) следует, что

$$\nu_{V,n}(g_r) \leq 2M_{n+1} r^{-1}. \quad (2.29)$$

Из (2.29) вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\nu_{V,n}(g_r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, откуда следует, что $f_r \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{A}(G)$.

Из свойств (2.18) и (2.19) вытекает, что функция $g_r = f(1 - I_r)$ удовлетворяет условию

$$g_r(xy) = g_r(x) \quad \forall x \in G, y \in U, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Пусть $H = A(\widehat{G}, U)$. Тогда H является компактной открытой подгруппой группы $\widehat{G}$ и, рассуждая как в п. 2) доказательства предложения 2.5, можно доказать, что $\text{supp}(\widehat{g}_r) \subseteq H$.

Из определения функции g_r и из свойства ($\mathcal{A}3$) вытекает, что существует число $M > 0$ такое, что для любого $r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|g_r\|_1 \leq M r^{-1}. \quad (2.31)$$

Из свойства (2.3) преобразования Фурье и из неравенства (2.31) следует, что

$$\|\widehat{g}_r\|_\infty \leq \|g_r\|_1 \leq M r^{-1},$$

откуда вытекает, что $\widehat{g}_r \rightarrow 0$ в пространстве $L_c^\infty(\widehat{G})$. Так как группа $\widehat{G}$ поэлементно компактная, то по предложению 2.3 топологические векторные пространства $\mathcal{A}(\widehat{G})$ и $L_c^\infty(\widehat{G})$ совпадают, следовательно, $\widehat{g}_r \rightarrow 0$ и $\widehat{f}_r \rightarrow \widehat{f}$ в пространстве $\mathcal{A}(\widehat{G})$. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть G – произвольная LCA-группа, $C(G)$ – множество непрерывных функций на G , $C_c(G)$ – множество непрерывных функций на G с компактным носителем. Множество $C(G)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в G .

Через $\mathcal{M}_c(G)$ обозначим множество всех комплексных мер Радона с компактным носителем на локально компактном пространстве G . Через $\text{supp}(\mu)$ будем обозначать носитель меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$. Множество $\mathcal{M}_c(G)$ является комплексным линейным пространством. Пространство $\mathcal{M}_c(G)$ можно отождествить с двойственным пространством к пространству $C(G)$, если определить двойственность по формуле

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_G \varphi(x) d\mu(x), \quad (3.1)$$

где $\varphi \in C(G)$, $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$. Снабженное слабой топологией $\sigma(\mathcal{M}_c(G), C(G))$ пространство $\mathcal{M}_c(G)$ является локально выпуклым пространством. Опишем топологию пространства $\mathcal{M}_c(G)$ в более явном виде.

Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ пусть $|\mu|$ – полная вариация меры μ . Через $\tau_0(G)$ будем обозначать совокупность всех непустых открытых подмножеств группы G с компактным замыканием. Если $U \in \tau_0(G)$, то через $\mathcal{M}_c(U)$ обозначим множество всех мер, носители которых содержатся в множестве $[U]$ ($[U]$ – замыкание множества U). Множество $\mathcal{M}_c(U)$ является банаховым пространством с нормой $\|\mu\| := |\mu|([U])$, $\mu \in \mathcal{M}_c(U)$. Если $U, V \in \tau_0(G)$ и $V \subseteq U$, то $\mathcal{M}_c(V) \subseteq \mathcal{M}_c(U)$, причем вложение непрерывное. Топология в пространстве

$$\mathcal{M}_c(G) = \bigcup_{U \in \tau_0(G)} \mathcal{M}_c(U)$$

совпадает с топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathcal{M}_c(U)$. Отметим, что если группа G поэлементно компактна, то в силу предложения 2.2 можно считать, что U пробегает множество всех компактных открытых подгрупп группы G .

Пространство $C_c(G)$ вкладывается в пространство $\mathcal{M}_c(U)$, если отождествить функцию $f \in C_c(G)$ с мерой $f(x) dx$, где dx – элемент меры Хаара на группе G .

Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G)$. Свертка мер $\mu_1 * \mu_2$ определяется формулой

$$\langle \mu_1 * \mu_2, \varphi \rangle := \int_G \int_G \varphi(xy) d\mu_1(x) d\mu_2(y), \quad (3.2)$$

где $\varphi \in C(G)$ (см., например, [7] или [14]). Отметим, что $\text{supp}(\mu_1 * \mu_2) \subseteq \text{supp}(\mu_1) \text{supp}(\mu_2)$. В частности, определена свертка $f * \mu$ для любой функции $f \in C_c(G)$ и любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$. При этом $f * \mu \in C_c(G)$ и свертка задается формулой

$$(f * \mu)(x) = \int_G f(xy^{-1}) d\mu(y). \quad (3.3)$$

Множество $\mathcal{M}_c(G)$ является коммутативной топологической алгеброй относительно свертки. Легко видеть, что если $\mu_1 \in \mathcal{M}_c(U_1)$ и $\mu_2 \in \mathcal{M}_c(U_2)$ ($U_1, U_2 \in \tau_0(G)$), то $\mu_1 * \mu_2 \in \mathcal{M}_c(U_1 U_2)$ и $\|\mu_1 * \mu_2\| \leq \|\mu_1\| \|\mu_2\|$.

Для любого замкнутого линейного подпространства $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ пусть $\mathcal{H}^\perp$ — его ортогональное дополнение (= аннулятор) в $\mathcal{M}_c(G)$, т.е.

$$\mathcal{H}^\perp := \{\mu \in \mathcal{M}_c(G) : \langle \mu, f \rangle = 0 \ \forall f \in \mathcal{H}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Отображение $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех инвариантных подпространств в $C(G)$ и множеством всех замкнутых идеалов в топологической алгебре $\mathcal{M}_c(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $f \in C(G)$ и $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ определим свертку $f * \mu$ по формуле (3.3). Тогда $f * \mu \in C(G)$ и если $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство в $C(G)$ и $f \in \mathcal{H}$, то $f * \mu \in \mathcal{H}$.

Пусть ε_a — мера с носителем в точке $a \in G$, определяемая условием

$$\int_G f(x) d\varepsilon_a(x) = f(a) \quad \forall f \in C(G),$$

тогда

$$(f * \varepsilon_a)(x) = f(xa^{-1}) \quad \forall f \in C(G). \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) получаем, что замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ является инвариантным подпространством тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ инвариантно относительно свертки с мерами из $\mathcal{M}_c(G)$, т.е. если $f \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$, то $f * \mu \in \mathcal{H}$.

Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ обозначим через $\tilde{\mu}$ меру из $\mathcal{M}_c(G)$, определяемую формулой

$$\langle \tilde{\mu}, \varphi \rangle := \int_G \varphi(x^{-1}) d\mu(x), \quad \varphi \in C(G).$$

Легко видеть, что для любых $f \in C(G)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G)$ справедливо равенство

$$\langle \mu_1 * \mu_2, f \rangle = \langle \mu_1, f * \tilde{\mu}_2 \rangle. \quad (3.5)$$

Из теоремы Хана–Банаха следует, что отображение $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp$ задает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми линейными подпространствами пространств $C(G)$ и $\mathcal{M}_c(G)$. Из (3.5) вытекает, что $\mathcal{H}$ инвариантно относительно свертки с мерами из $\mathcal{M}_c(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^\perp$ инвариантно относительно свертки с мерами из $\mathcal{M}_c(G)$, т.е. $\mathcal{H}$ является инвариантным подпространством в $C(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^\perp$ является замкнутым идеалом в $\mathcal{M}_c(G)$.

Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ ее преобразованием Фурье называется функция $\hat{\mu}$ на группе $\hat{G}$, определяемая по формуле

$$\hat{\mu}(\chi) := \int_G \overline{\chi(x)} d\mu(x), \quad \chi \in \hat{G}. \quad (3.6)$$

Так как $|\widehat{\mu}(\chi)| \leq |\mu|(\text{supp } \mu) = \|\mu\|$, то $\widehat{\mu} \in L^\infty(\widehat{G})$. Легко видеть, что преобразование Фурье переводит свертку мер в произведение, т.е.

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2} = \widehat{\mu_1} \widehat{\mu_2}, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G). \quad (3.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если группа G поэлементно компактная, то для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ функция $\widehat{\mu}$ будет равномерно локально постоянной функцией на группе $\widehat{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа G поэлементно компактная, то по предложению 2.2 существует компактная открытая подгруппа H группы G такая, что $\text{supp}(\mu) \subseteq H$. Пусть $U = A(\widehat{G}; H)$, тогда U является компактной открытой подгруппой группы $\widehat{G}$. Покажем, что выполняется равенство

$$\widehat{\mu}(\chi\xi) = \widehat{\mu}(\chi) \quad \forall \chi \in \widehat{G}, \xi \in U. \quad (3.8)$$

Действительно, так как $\text{supp}(\mu) \subseteq H$ и $\xi(x) = 1$ при $x \in H$, то

$$\widehat{\mu}(\chi\xi) = \int_G \overline{\chi(x)\xi(x)} d\mu(x) = \int_H \overline{\chi(x)\xi(x)} d\mu(x) = \int_H \overline{\chi(x)} d\mu(x) = \widehat{\mu}(\chi).$$

Из равенства (3.8) вытекает, что функция $\widehat{\mu}$ равномерно локально постоянная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть G – поэлементно компактная LCA-группа, $\varphi \in \mathcal{S}(G)$. Тогда:*

- 1) для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ функция $\varphi * \mu$ принадлежит классу $\mathcal{S}(G)$;
- 2) отображение $\mu \mapsto \varphi * \mu$ является непрерывным отображением из ТВП $\mathcal{M}_c(G)$ в ТВП $\mathcal{S}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Чтобы доказать, что $\varphi * \mu \in \mathcal{S}(G)$, нужно показать, что $\varphi * \mu \in \mathcal{A}(G)$ и $\widehat{\varphi * \mu} \in \mathcal{A}(\widehat{G})$.

Так как группа G поэлементно компактная, то по следствию 2.1 φ является функцией с компактным носителем, т.е. $\varphi \in C_c(G)$. Тогда $\varphi * \mu \in C_c(G) \subseteq L_c^\infty(G)$, а так как $L_c^\infty(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$ (см. предложение 3.3), то $\varphi * \mu \in \mathcal{A}(G)$.

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(G)$, то функция $\widehat{\varphi}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(\widehat{G})$. Поскольку функция $\widehat{\mu}$ принадлежит классу $L^\infty(\widehat{G})$, то по свойству (A3) произведение $\widehat{\varphi}\widehat{\mu}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(\widehat{G})$. Так как $\widehat{\varphi * \mu} = \widehat{\varphi}\widehat{\mu}$, то $\widehat{\varphi * \mu} \in \mathcal{A}(\widehat{G})$.

2) Чтобы доказать, что отображение $\mu \mapsto \varphi * \mu$ является непрерывным отображением из ТВП $\mathcal{M}_c(G)$ в ТВП $\mathcal{S}(G)$, достаточно показать, что это отображение непрерывно как отображение из пространства $\mathcal{M}_c(G)$ в пространство $\mathcal{A}(G)$ и отображение $\mu \mapsto \widehat{\varphi * \mu}$ непрерывно как отображение из пространства $\mathcal{M}_c(G)$ в пространство $\mathcal{A}(\widehat{G})$.

Пусть H – компактная открытая подгруппа группы G , $\mu \in \mathcal{M}_c(H)$ (т.е. $\text{supp}(\mu) \subseteq H$), U – компактная открытая подгруппа группы G такая, что $\text{supp}(\varphi) \subseteq U$. Пусть $W = UH$, тогда W также является компактной открытой подгруппой группы G и $\text{supp}(\varphi * \mu) \subseteq W$.

Заметим, что для любого $x \in G$ справедлива оценка

$$|(\varphi * \mu)(x)| \leq \int_G |\varphi(xy^{-1})| d|\mu|(y) \leq \|\varphi\|_\infty \int_H d|\mu|(y) = \|\varphi\|_\infty |\mu|(H) = \|\varphi\|_\infty \|\mu\|,$$

откуда следует, что

$$\|\varphi * \mu\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|\mu\|. \quad (3.9)$$

Тем самым доказано, что для любой компактной открытой подгруппы $H \subseteq G$ существует компактная открытая подгруппа $W \subseteq G$ такая, что отображение $\mu \mapsto \varphi * \mu$ является линейным непрерывным отображением из банахова пространства $\mathcal{M}_c(H)$ в банахово пространство $L_c^\infty(W)$. Так как пространство $\mathcal{M}_c(G)$ снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathcal{M}_c(H)$, $H \in \Lambda(G)$, а пространство $L_c^\infty(G)$ снабжается топологией индуктивного предела банаховых пространств $L_c^\infty(W)$, $W \in \Lambda(G)$, то отображение $\mu \mapsto \varphi * \mu$ является непрерывным отображением из ТВП $\mathcal{M}_c(G)$ в ТВП $L_c^\infty(G) = \mathcal{A}(G)$.

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(G)$, то $\widehat{\varphi} \in \mathcal{A}(\widehat{G})$ и, следовательно, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{A}_V(\widehat{G})$ для некоторой симметричной компактной открытой окрестности единицы V в группе $\widehat{G}$. По определению пространство $\mathcal{A}_V(\widehat{G})$ состоит из всех функций $f \in L^\infty(\widehat{G})$, удовлетворяющих условию (2.5), в котором G нужно заменить на $\widehat{G}$. Топология в локально выпуклом пространстве $\mathcal{A}_V(\widehat{G})$ задается системой полунорм

$$\nu_{V,n}(f) := \|f\|_\infty + \sup_{k \in \mathbb{N}} k^n \|f|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty, \quad f \in \mathcal{A}_V(\widehat{G}), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.10)$$

Так как $|\widehat{\mu}(\chi)| \leq \|\mu\|$ при $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$, $\chi \in \widehat{G}$, то из (3.10), с учетом того, что $\widehat{\varphi * \mu} = \widehat{\varphi} \widehat{\mu}$, вытекает неравенство

$$\nu_{V,n}(\widehat{\varphi * \mu}) = \nu_{V,n}(\widehat{\varphi} \widehat{\mu}) \leq \nu_{V,n}(\widehat{\varphi}) \|\mu\|. \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что линейное отображение $\mu \mapsto \widehat{\varphi * \mu}$ является непрерывным отображением из ТВП $\mathcal{M}_c(G)$ в ТВП $\mathcal{A}_V(\widehat{G})$, а следовательно, и непрерывным отображением из ТВП $\mathcal{M}_c(G)$ в ТВП $\mathcal{A}(\widehat{G})$.

ЛЕММА 3.1. *Для любого компактного подмножества $P \subseteq \widehat{G}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U единицы в группе G такая, что при всех $\chi \in P$, $x \in U$ справедливо неравенство $|\chi(x) - 1| < \varepsilon$.*

Доказательство см. в [7; п. 24.2].

Известно, что для любой окрестности U единицы в LCA-группе G существует функция $\varphi_U \in \mathcal{S}(G)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\varphi(x) \geq 0$ для всех $x \in G$;
- 2) $\text{supp}(\varphi_U) \subseteq U$;
- 3) $\int_G \varphi_U(x) dx = 1$ (см. [12; предложение 2]).

Всюду далее G – поэлементно компактная LCA-группа. Как и раньше, через $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(G)$ обозначим множество всех симметричных окрестностей единицы с компактным замыканием группы G . Если $U_1, U_2 \in \mathfrak{V}$, то множество $U_3 = U_1 \cap U_2$ также принадлежит $\mathfrak{V}$; поэтому $\mathfrak{V}$ является направленным множеством относительно включения. Для каждого множества $U \in \mathfrak{V}(G)$ зафиксируем функцию $\varphi_U \in \mathcal{S}(G)$, удовлетворяющую приведенным выше условиям 1)–3). Направленность φ_U , $U \in \mathfrak{V}$, образует аппроксимативную единицу для сверточных алгебр $\mathcal{S}(G)$ и $\mathcal{M}_c(G)$ в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. 1) Если $f \in \mathcal{S}(G)$, то $\varphi_U * f \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} f$ в пространстве $\mathcal{S}(G)$.

2) Если $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$, то $\varphi_U * \mu \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} \mu$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать, что $\varphi_U * f \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} f$ в пространстве $\mathcal{S}(G)$, достаточно доказать, что $\varphi_U * f \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} f$ в пространстве $\mathcal{A}(G)$ и $\widehat{\varphi_U * f} \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} \widehat{f}$ в пространстве $\mathcal{A}(\widehat{G})$.

Так как группа G поэлементно компактная и $f \in \mathcal{S}(G)$, то из свойства ($\mathcal{S}1$) и из предложения 2.3 следует, что $f \in C_c(G)$. Из того, что $f \in C_c(G)$, легко получить, что $\varphi_U * f \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} f$ в пространстве $C_c(G)$ и, в частности, в пространстве $L_c^\infty(G) = \mathcal{A}(G)$.

Так как $f \in \mathcal{S}(G)$, то $\widehat{f} \in \mathcal{A}(\widehat{G})$ и, следовательно, $f \in \mathcal{A}_V(\widehat{G})$ для некоторого подмножества $V \in \mathfrak{V}(\widehat{G})$. Поскольку группа $\widehat{G}$ нульмерная, то по предложению 2.2 можно считать, что V – компактное открытое подмножество в $\widehat{G}$.

Чтобы доказать, что $\widehat{\varphi_U * f} = \widehat{\varphi_U} \widehat{f} \xrightarrow[\mathfrak{V}]{} \widehat{f}$ в локально выпуклом пространстве $\mathcal{A}_V(\widehat{G})$, нужно доказать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ найдется окрестность $U_0 \in \mathfrak{V}(G)$ такая, что для всякого $U \in \mathfrak{V}(G)$ из $U \subseteq U_0$ следует, что

$$\nu_{V,n}(\widehat{\varphi_U} \widehat{f} - \widehat{f}) \leq \varepsilon, \quad (3.12)$$

где $\nu_{V,n}$ – полунорма в $\mathcal{A}_V(\widehat{G})$, определенная в (3.10).

Так как $\widehat{f} \in \mathcal{A}_V(\widehat{G})$, то существует число M_{n+1} такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{f}|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty \leq M_{n+1} k^{-n-1}. \quad (3.13)$$

Отметим, что функция $\widehat{f}$ непрерывна на $\widehat{G}$ и

$$|\widehat{f}(\chi)| \leq \|f\|_1 \quad \forall \chi \in \widehat{G}, \quad (3.14)$$

где $\|f\|_1$ – норма f в пространстве $L^1(G)$. В частности, из (3.14) и из свойства 3) функции φ_U следует, что

$$|\widehat{\varphi_U}(\chi)| \leq 1 \quad \forall \chi \in \widehat{G}. \quad (3.15)$$

Выберем число $k_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_{n+1} k_0^{-1} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.16)$$

Так как множество V^{k_0} является компактным подмножеством в $\widehat{G}$, то по лемме 3.1 найдется окрестность $U_0 \in \mathfrak{V}(G)$ такая, что

$$|\chi(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2k_0^n \|f\|_1} \quad \forall \chi \in V^{k_0}, \quad x \in U_0. \quad (3.17)$$

Пусть $U \subseteq U_0$. Оценим $\|\widehat{\varphi_U} \widehat{f} - \widehat{f}\|_\infty$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $\chi \in V^{k_0}$. Так как $\text{supp}(\varphi_U) \subseteq U_0$ и $\int_{U_0} \varphi_U(x) dx = 1$, то

$$\widehat{\varphi}_U(\chi) - 1 = \int_{U_0} \varphi_U(x)(\chi(x) - 1) dx. \quad (3.18)$$

Из (3.18), используя (3.17) и (3.14), получаем неравенство

$$|\widehat{\varphi}_U(\chi)\widehat{f}(\chi) - \widehat{f}(\chi)| = |\widehat{\varphi}_U(\chi) - 1| |\widehat{f}(\chi)| \leq \frac{\varepsilon}{2k_0^n \|f\|_1} \|f\|_1 = \frac{\varepsilon}{2k_0^n}. \quad (3.19)$$

б) Пусть $\chi \notin V^{k_0}$, тогда из (3.13), (3.15) и (3.16) следует неравенство

$$|\widehat{\varphi}_U(\chi)\widehat{f}(\chi) - \widehat{f}(\chi)| \leq \|(\widehat{\varphi}_U(\chi) - 1)\widehat{f}\|_{\widehat{G} \setminus V^{k_0}} \leq 2M_{n+1}k_0^{-n-1} \leq \frac{\varepsilon}{2k_0^n}. \quad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) вытекает, что

$$\|\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2k_0^n}. \quad (3.21)$$

Оценим числа $k^n \|(\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f})|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty$, $k \in \mathbb{N}$. При $k \leq k_0$ воспользуемся неравенством (3.21), тогда

$$k^n \|(\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f})|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty \leq k_0^n \|\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.22)$$

При $k > k_0$ воспользуемся неравенствами (3.13), (3.15) и (3.16), тогда

$$k^n \|(\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f})|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty \leq 2k^n \|\widehat{f}\|_{\widehat{G} \setminus V^k} \leq 2M_{n+1}k^{-1} \leq 2M_{n+1}k_0^{-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) вытекает, что

$$k^n \|(\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f})|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.24)$$

откуда, с учетом (3.21), следует неравенство

$$\nu_{V,n}(\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f}) = \|\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f}\|_\infty + \sup_{k \in \mathbb{N}} k^n \|(\widehat{\varphi}_U \widehat{f} - \widehat{f})|_{\widehat{G} \setminus V^k}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что доказывает (3.12) и завершает доказательство пункта 1).

2) Так как топология пространства $\mathcal{M}_c(G)$ совпадает со слабой топологией $\sigma(\mathcal{M}_c(G), C(G))$, то для доказательства того, что $\varphi_U * \mu \xrightarrow{\mathfrak{W}} \mu$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$, достаточно доказать, что $\langle \varphi_U * \mu, g \rangle \xrightarrow{\mathfrak{W}} \langle \mu, g \rangle$ для любой функции $g \in C(G)$.

Заметим, что

$$\langle \varphi_U * \mu, g \rangle = \langle \mu, g * \widetilde{\varphi}_U \rangle, \quad (3.25)$$

где $\widetilde{\varphi}_U(x) := \varphi_U(x^{-1})$. Легко видеть, что $g * \widetilde{\varphi}_U \xrightarrow{\mathfrak{W}} g$ в пространстве $C(G)$, откуда, используя равенство (3.25), получаем, что

$$\langle \varphi_U * \mu, g \rangle = \langle \mu, g * \widetilde{\varphi}_U \rangle \xrightarrow{\mathfrak{W}} \langle \mu, g \rangle.$$

Предложение 3.4 доказано.

Для любой топологической алгебры $\mathcal{A}$ через $s(\mathcal{A})$ будем обозначать множество всех замкнутых идеалов алгебры $\mathcal{A}$. В частности, возникают множества $s(\mathcal{M}_c(G))$ и $s(\mathcal{S}_{\text{conv}}(G))$. Используя отождествление функции $f \in \mathcal{S}(G)$ с мерой $f(x) dx$, будем считать, что $\mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{M}_c(G)$. Определим отображения $\rho: s(\mathcal{M}_c(G)) \mapsto s(\mathcal{S}_{\text{conv}}(G))$ и $\tilde{\rho}: s(\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)) \mapsto s(\mathcal{M}_c(G))$ формулами:

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{H}) &:= \mathcal{H} \cap \mathcal{S}(G), & \mathcal{H} &\in s(\mathcal{M}_c(G)), \\ \tilde{\rho}(\mathcal{H}_0) &:= [\mathcal{H}_0], & \mathcal{H}_0 &\in s(\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)),\end{aligned}$$

где $[\mathcal{H}_0]$ – замыкание множества $\mathcal{H}_0$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Отображение ρ является биекцией множества $s(\mathcal{M}_c(G))$ на множество $s(\mathcal{S}_{\text{conv}}(G))$. При этом обратное отображение ρ^{-1} совпадает с $\tilde{\rho}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – произвольный замкнутый идеал в алгебре $\mathcal{M}_c(G)$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \cap \mathcal{S}(G)$. Если $\mu \in \mathcal{H}$, а φ_U – определенные выше функции, $U \in \mathfrak{V}(G)$, то из предложения 3.3 следует, что $\varphi_U * \mu \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S}(G) = \mathcal{H}_0$. По предложению 3.4 $\varphi_U * \mu \xrightarrow{\mathfrak{V}} \mu$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$, поэтому $\mu \in [\mathcal{H}_0]$. Следовательно, $[\mathcal{H}_0] = \mathcal{H}$, т.е. $\tilde{\rho} \circ \rho = \text{Id}_{s(\mathcal{M}_c(G))}$ (Id_A – тождественное отображение множества A в себя).

Теперь пусть $\mathcal{H}_0$ – произвольный замкнутый идеал в $\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)$, $\mathcal{H} = [\mathcal{H}_0]$. Если $f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{S}(G)$, то найдется направленность $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ (Ω – некоторое направленное множество) такая, что $h_\omega \in \mathcal{H}_0$ и $h_\omega \xrightarrow{\Omega} f$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$. Из предложения 3.3 вытекает, что отображение $\mu \mapsto \varphi_P * \mu$ является непрерывным отображением из $\mathcal{M}_c(G)$ в $\mathcal{S}(G)$, поэтому из того, что $h_\omega \xrightarrow{\Omega} f$ в $\mathcal{M}_c(G)$, следует, что $\varphi_P * h_\omega \xrightarrow{\Omega} \varphi_P * f$ в пространстве $\mathcal{S}(G)$. Так как $\varphi_P * h_\omega \in \mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_0$ замкнуто в $\mathcal{S}(G)$, то $\varphi_P * f \in \mathcal{H}_0$. Так как $f \in \mathcal{S}(G)$, то $\varphi_P * f \xrightarrow{\mathfrak{V}} f$ в пространстве $\mathcal{S}(G)$ (предложение 3.4, 1)), следовательно, $f \in \mathcal{H}_0$. Тем самым получено, что $\mathcal{H} \cap \mathcal{S}(G) = \mathcal{H}_0$, т.е. $\rho \circ \tilde{\rho} = \text{Id}_{s(\mathcal{S}_{\text{conv}}(G))}$.

Пусть $\Phi: f(x) \mapsto \widehat{f}(\chi)$ – преобразование Фурье. Так как Φ является изоморфизмом ТВП $\mathcal{S}(G)$ на ТВП $\mathcal{S}(\widehat{G})$ (свойство ($\mathcal{S}2$)) и Φ переводит свертку функций в произведение, то Φ является изоморфизмом топологических алгебр $\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)$ и $\mathcal{S}_{\text{mult}}(\widehat{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $C(G)$, $\mathcal{H}^\perp$ – его ортогональное дополнение в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$, $\mathcal{I} = \mathcal{H}^\perp \cap \mathcal{S}(G)$, $\widehat{\mathcal{I}} = \Phi(\mathcal{I})$. Тогда $\mathcal{I}$ является замкнутым идеалом в топологической алгебре $\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)$, а $\widehat{\mathcal{I}}$ является замкнутым идеалом в топологической алгебре $\mathcal{S}_{\text{mult}}(\widehat{G})$. Будем говорить, что идеал $\widehat{\mathcal{I}}$ соответствует инвариантному подпространству $\mathcal{H}$.

Пусть $\chi \in \widehat{G}$. Докажем, что $\chi \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда точка χ является общим нулем всех функций из идеала $\widehat{\mathcal{I}}$. Действительно, если $\chi \in \mathcal{H}$, то $\langle \mu, \chi \rangle = 0$ для любого $\mu \in \mathcal{H}^\perp$, откуда вытекает, что $\langle f, \chi \rangle = 0$ для любой

функции $f \in \mathcal{I}$. Так как $\langle f, \chi \rangle = \widehat{f}(\chi)$, то $\widehat{f}(\chi) = 0$ для любой функции $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{I}}$, т.е. χ является общим нулем для всех функций из $\widehat{\mathcal{I}}$.

Обратно, если $\widehat{f}(\chi) = 0$ для всех $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{I}}$, то $\langle \widehat{f}, \chi \rangle = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{I}$. Так как замыкание идеала $\mathcal{I}$ в $\mathcal{M}_c(G)$ совпадает с $\mathcal{H}^\perp$ (см. предложение 3.5), то $\langle \mu, \chi \rangle = 0$ для любой меры $\mu \in \mathcal{H}^\perp$, откуда вытекает, что $\chi \in \mathcal{H}$.

Таким образом, спектр $\sigma(\mathcal{H})$ инвариантного подпространства $\mathcal{H}$ совпадает с нулевым множеством $N(\widehat{\mathcal{I}})$ соответствующего ему идеала $\widehat{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{S}_{\text{mult}}(\widehat{G})$.

Пусть $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $C(G)$. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ подпространство в $C(G)$, которое является замыканием линейной оболочки всех характеров χ , принадлежащих $\mathcal{H}$. Тогда $\mathcal{H}_1$ тоже будет инвариантным подпространством, $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ и $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H}_1)$. Пусть $\mathcal{I}_1 = \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{S}(G)$, $\widehat{\mathcal{I}}_1 = \Phi(\mathcal{I}_1)$. Так как $N(\widehat{\mathcal{I}}) = N(\widehat{\mathcal{I}}_1)$, то из теоремы 2.2 следует, что $\widehat{\mathcal{I}} = \widehat{\mathcal{I}}_1$, а тогда из предложений 3.1 и 3.5 вытекает, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, т.е. $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез.

Заметим, что отображение $\theta: \mathcal{H} \mapsto \widehat{\mathcal{I}}$, которое сопоставляет инвариантному подпространству $\mathcal{H}$ соответствующий ему идеал $\widehat{\mathcal{I}}$, является биекцией множества всех инвариантных подпространств пространства $C(G)$ на множество всех замкнутых идеалов топологической алгебры $\mathcal{S}_{\text{mult}}(\widehat{G})$. Это вытекает из того, что θ является композицией трех биективных отображений: $\theta = \Phi \circ \rho \circ \alpha$, где $\alpha: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp$ – отображение из множества инвариантных подпространств пространства $C(G)$ в множество замкнутых идеалов топологической алгебры $\mathcal{M}_c(G)$ (см. предложение 3.1), $\rho: \mathcal{H}^\perp \mapsto \mathcal{H}^\perp \cap \mathcal{S}(G)$ – отображение из множества замкнутых идеалов алгебры $\mathcal{M}_c(G)$ в множество замкнутых идеалов топологической алгебры $\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)$ (см. предложение 3.5) и $\Phi: \mathcal{I} \mapsto \widehat{\mathcal{I}}$ – отображение из множества замкнутых идеалов алгебры $\mathcal{S}_{\text{conv}}(G)$ в множество замкнутых идеалов топологической алгебры $\mathcal{S}_{\text{mult}}(\widehat{G})$. Поэтому всевозможные спектры инвариантных подпространств пространства $C(G)$ совпадают со всевозможными нулевыми множествами замкнутых идеалов алгебры $\mathcal{S}_{\text{mult}}(\widehat{G})$, т.е. со всевозможными замкнутыми подмножествами $\sigma \subseteq \widehat{G}$ (см. теорему 2.2).

Из теоремы 1.1 вытекает, что если группа G поэлементно компактна, то в пространстве $C(G)$ справедлив строгий спектральный синтез. Оказывается, что условие поэлементной компактности группы G является также и необходимым условием для справедливости строгого спектрального синтеза в $C(G)$. Более точно, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Если LCA-группа G не является поэлементно компактной, то в пространстве $C(G)$ существует двумерное инвариантное подпространство, не допускающее строгий спектральный синтез.*

Для доказательства предложения 3.6 воспользуемся следующим результатом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть G – LCA-группа, B – замкнутая подгруппа ее компактных элементов. Для того чтобы для элементов $x, y \in G$ существовал непрерывный вещественный характер f группы G (т.е. непрерывный гомоморфизм из группы G в аддитивную группу $\mathbb{R}$ вещественных чисел), удовлетворяющий условию $f(x) \neq f(y)$, необходимо и достаточно, чтобы $xy^{-1} \notin B$.

Доказательство см. [7; гл. 6, теорема 24.34].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.6. Пусть группа G не является поэлементно компактной, и пусть x_0 – некомпактный элемент группы G . Воспользовавшись предложением 3.7 для случая, когда $x = x_0$, $y = e$, получим, что существует непрерывная функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $f(xy) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in G$;
- 2) $f(x_0) \neq 0$.

Пусть подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ состоит из всех функций вида $F(x) = \lambda_1 + \lambda_2 f(x)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Тогда $\mathcal{H}$ является 2-мерным инвариантным подпространством в $C(G)$ и легко видеть, что единственной экспоненциальной функцией, содержащейся в $\mathcal{H}$, является характер $\chi_0(x) \equiv 1$. Следовательно, $\mathcal{H}$ не допускает строгий спектральный синтез.

Список литературы

- [1] L. Schwartz, “Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques”, *Ann. of Math.* (2), **48**:4 (1947), 857–929.
- [2] Д. И. Гуревич, “Контрпримеры к проблеме Л. Шварца”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 29–35; англ. пер.: D. I. Gurevich, “Counterexamples to a problem of L. Schwartz”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 116–120.
- [3] L. Schwartz, “Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions”, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 503–512.
- [4] С. С. Платонов, “О спектральном синтезе на нульмерных абелевых группах”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 99–114; англ. пер.: S. S. Platonov, “On spectral synthesis on zero-dimensional Abelian groups”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1332–1346.
- [5] L. Székelyhidi, *Discrete spectral synthesis and its applications*, Springer Monogr. Math., Springer, Dordrecht, 2006, xvi+117 pp.
- [6] M. Laczkovich, L. Székelyhidi, “Spectral synthesis on discrete Abelian groups”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **143**:1 (2007), 103–120.
- [7] Э. Хьюитт, К. А. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, Наука, М., 1975, 654 с.; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, v. I: *Structure of topological groups. Integration theory, group representations*, Grundlehren Math. Wiss., **115**, Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963, viii+519 pp.
- [8] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, 3-е изд., Наука, М., 1973, 519 с.; англ. пер. 1-го изд.: L. S. Pontryagin, *Topological groups*, Princeton Math. Ser., **2**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1939, ix+299 pp.
- [9] С. А. Моррис, *Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп*, Мир, М., 1980, 104 с.; пер. с англ.: S. A. Morris, *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York–Melbourne, 1977, viii+128 pp.

- [10] L. Székelyhidi, “Spectral synthesis problems on locally compact groups”, *Monatsh. Math.*, **161**:2 (2010), 223–232.
- [11] J. Braconnier, “Sur les groupes topologiques localement compacts”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **27** (1948), 1–85.
- [12] F. Bruhat, “Distributions sur un groupe localement compact et applications à l’étude des représentations des groupes p -adiques”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 43–75.
- [13] M. S. Osborne, “On the Schwartz–Bruhat space and Paley–Wiener theorem for locally compact Abelian groups”, *J. Functional Analysis*, **19**:1 (1975), 40–49.
- [14] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969, 1071 с.; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1965, xiii+781 pp.

Сергей Сергеевич Платонов
(Sergey S. Platonov)

Петрозаводский государственный университет

E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступила в редакцию

01.09.2014