Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Жуковский, Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:11:57

УДК 517.929

Е. С. Жуковский

Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах

Предлагаются утверждения о локальной разрешимости, продолжаемости решений, существовании верхнего и нижнего решений уравнений с монотонными обобщенно вольтерровыми операторами в банаховых функциональных пространствах. Эти утверждения аналогичны известным теоремам об интегральном и дифференциальном неравенстве и могут использоваться для оценки решений различных функционально-дифференциальных уравнений.

Библиография: 31 название.

Важнейшим инструментом исследования уравнений, решение которых нельзя записать явно, являются утверждения о неравенствах, позволяющие строить оценки решений. Классические результаты С. А. Чаплыгина [1] положили начало исследованиям дифференциальных и интегральных неравенств, их широкому применению в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим известные работы Н. В. Азбелева, З. Б. Цалюка [2], [3] и книгу [4], содержащую достаточно полную библиографию. Развитие теории функционально-дифференциальных уравнений потребовало изучения операторных неравенств в различных функциональных пространствах [5], [6]. В [7], [8] получены подобные утверждения для пространства суммируемых на $[a, b]$ функций, упорядоченного “естественным” конусом неотрицательных функций. Работа [9] посвящена обобщению этих результатов на случай произвольного конуса, порождающего “вольтеррову полуупорядоченность” в пространстве суммируемых функций. Здесь мы рассмотрим вольтерровы операторные неравенства в произвольных банаховых пространствах. Необходимость в таких результатах отмечается при изучении сингулярных уравнений, импульсных систем, “гибридных” задач и т. д. [5], [6], [10]–[12]. При этом авторы обычно рассматривают конкретные типы уравнений, указывая на сложность проблемы оценки решений абстрактных уравнений и отсутствие работ по этой тематике [6]. В предлагаемых нами утверждениях не требуется непрерывность операторов, что позволяет применять полученные результаты к изучению дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, функционально-дифференциальных уравнений с авторегулированием, функционально-дифференциальных уравнений с максимумами и др. Подобными уравнениями описываются некоторые задачи экономики, биологии, управления, автоматического регулирования [13]–[16]. Неприменимость классических методов, использующих непрерывность операторов, и многочисленные приложения привлекли в последнее десятилетие к таким уравнениям внимание исследователей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00140) и Министерства образования РФ (грант № Е02-1.0-212).

В работе используются следующие пространства функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: пространство $C_{[a,b]}$ непрерывных функций, $\|x\|_{C_{[a,b]}} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$; пространство $L_{[a,b]}$ суммируемых функций, $\|x\|_{L_{[a,b]}} = \int_a^b |x(t)| dt$; пространство $D_{[a,b]}$ абсолютно непрерывных функций, имеющих производную $x' \in L_{[a,b]}$, $\|x\|_{D_{[a,b]}} = \|x'\|_{L_{[a,b]}} + |x(a)|$.

1. Вначале приведем некоторые понятия теории конусов в банаховых пространствах [17], играющие важную роль в нашем исследовании.

Пусть B – банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $\Lambda \subset B$ называют *конусом*, если из $x \in \Lambda$, $x \neq 0$, вытекает, что $\lambda x \in \Lambda$ при $\lambda > 0$ и $\lambda x \notin \Lambda$ при $\lambda < 0$. Для $x, y \in B$ будем писать $x \triangleright y$ или $y \triangleleft x$, если $x - y \in \Lambda$.

Элемент $\bar{z} \in B$ называют точной верхней границей множества $U \subset B$ и пишут $\bar{z} = \sup U$, если для всех $u \in U$ выполнено $\bar{z} \triangleright u$ и для любого $y \in B$ из $y \triangleright u \ \forall u \in U$ следует $y \triangleright \bar{z}$. Аналогично определяется точная нижняя граница. Если у множества из двух элементов есть точная верхняя (нижняя) граница, то существует и нижняя (верхняя), причем выполнено равенство $\sup\{x, y\} + \inf\{x, y\} = x + y$. Конус $\Lambda \subset B$ называют *миниэдральным*, если у каждого множества из двух элементов есть точная нижняя (и, следовательно, верхняя) граница. Каждый элемент $x \in B$ в случае миниэдральности конуса Λ допускает представление $x = x_+ + x_-$, где $x_+ = \sup\{x, 0\} \in \Lambda$, $x_- = \sup\{-x, 0\} \in \Lambda$. Если существует такое число M , что для всякого $x \in B$ выполнены неравенства

$$\|x_+\| \leq M\|x\|, \quad \|x_-\| \leq M\|x\|, \quad (1)$$

то говорят, что конус обладает свойством *несплюсценности*. Конус называют *сильно миниэдральным*, если нижняя (верхняя) граница есть у каждого ограниченного по конусу множества.

Конус Λ называется *вполне правильным*, если сходится каждая ограниченная по норме, невозрастающая (неубывающая) последовательность $x_1 \triangleright x_2 \triangleright \dots \triangleright x_n \dots$. Если из $0 \triangleleft x \triangleleft y$ следует $\|x\| \leq m\|y\|$, где m не зависит от x и y , то конус Λ называют *нормальным*. В этом случае, если $x \triangleleft y \triangleleft z$, то $\|y\| \leq (m+1) \times (\|x\| + \|z\|)$, т.е. из ограниченности по конусу следует ограниченность по норме. Действительно, $0 \triangleleft y - x \triangleleft z - x$. Поэтому $\|y\| - \|x\| \leq m(\|z\| + \|x\|)$.

Покажем, что если конус $\Lambda \subset B$ нормальный миниэдральный и обладает свойством несплюсценности, то существует такое число k , что

$$\|\sup\{x, y\}\| \leq k(\|x\| + \|y\|), \quad \|\inf\{x, y\}\| \leq k(\|x\| + \|y\|). \quad (2)$$

Воспользуемся неравенствами $-x_- \triangleleft x \triangleleft \sup\{x, y\} \triangleleft x_+ + y_+$. Получим $0 \triangleleft \sup\{x, y\} + x_- \triangleleft x_+ + x_- + y_+$. Отсюда $\|\sup\{x, y\}\| - \|x_-\| \leq m(\|x_+\| + \|x_-\| + \|y_+\|)$ и $\|\sup\{x, y\}\| \leq m\|x_+\| + (m+1)\|x_-\| + m\|y_+\| \leq M(2m+1)\|x\| + Mm\|y\| \leq M(2m+1)(\|x\| + \|y\|)$. Второе неравенство доказывается аналогично.

Оператор $K: B \rightarrow B$ называют *монотонным*, если из $x \triangleright y$ следует $Kx \triangleright Ky$. Оператор $K: B \rightarrow B$ называется *предельно монотонно компактным на ограниченном множестве* $U \subset B$ [17; гл. 5, §38, пп. 38.1, 38.2], если сходится каждая последовательность

$$x_0 \triangleright Kx_1 \triangleright K^2x_2 \triangleright \dots \triangleright K^n x_n \dots, \quad (3)$$

где $x_n, K^n x_n \in U, n = 0, 1, 2, \dots$. Назовем оператор *предельно монотонно компактным*, если он обладает таким свойством на каждом ограниченном множестве из B . Понятие предельной монотонной компактности охватывает широкие классы нелинейных операторов. К ним относятся операторы, некоторая степень которых компактна, различные типы уплотняющих операторов. Любой оператор является предельно монотонно компактным, если конус вполне правильный [17].

Мы будем использовать следующее утверждение о неподвижных точках монотонных операторов, полученное М. А. Красносельским и А. В. Соболевым.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть монотонный оператор $K: B \rightarrow B$ преобразует в себя ограниченное замкнутое множество $U \subset B$, на котором он является предельно монотонно компактным. Пусть, далее, $u \triangleright Ku$ для некоторого $u \in U$. Тогда оператор K имеет на U по крайней мере одну неподвижную точку x , удовлетворяющую условию $x \triangleleft u$.*

Доказательство приведено в [17; гл. 5, п. 38.2]. Рассмотрим некоторые конструкции, используемые в этом доказательстве, необходимые нам в дальнейшем. Положим $U_0 = \{x \in U \mid x \triangleright Kx\}$. Это множество непусто, так как $u \triangleright Ku$. Определим на U_0 при каждом натуральном j функционал φ_j равенством

$$\varphi_j x = \sup \|K^j w - K^j y\|,$$

где верхняя грань взята по всем таким $w, y \in U_0$, что $x \triangleright K^j w \triangleright K^j y$. Последовательность $\varphi_j x$ не возрастает, и поэтому φ_j точечно сходится на U_0 к некоторому функционалу φ . Для этого предельного функционала выполнено $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$ при $x_1 \triangleright x_2$.

Далее строится такая последовательность (3), что $x_0 = u$ и $x_n \in U_0, \varphi(K^n x_n) < 1/n$ при любом натуральном n . Эта последовательность сходится к некоторому элементу $z \in U$, являющемуся неподвижной точкой оператора K .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, конус $\Lambda \subset B$ является минимизаторным и $\inf\{w, \vartheta\} \in U$ для любых двух неподвижных точек $w, \vartheta \in U$ оператора K . Тогда в множестве неподвижных точек оператора K существует наименьший элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что неподвижная точка z оператора K , построенная при доказательстве предыдущего утверждения, является наименьшей. Напомним, что $u \triangleright K^n x_n \triangleright z$, где $\varphi(K^n x_n) < 1/n$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что существует другая неподвижная точка $\bar{z}$ оператора K . Определим $\zeta = \inf\{z, \bar{z}\}$. Тогда $z \triangleright \zeta$, откуда $z = Kz \triangleright K\zeta$. Аналогично, $\bar{z} \triangleright \zeta$ и $\bar{z} = K\bar{z} \triangleright K\zeta$. Следовательно, $\zeta \triangleright K\zeta, \zeta \in U_0$. Очевидно, при каждом n, j выполнены неравенства

$$K^n x_n \triangleright K^{n+j} x_{n+j} \triangleright z \triangleright \zeta \triangleright K\zeta \triangleright \dots \triangleright K^{n+j} \zeta.$$

Существует такой номер $j(n)$, что $\varphi_{j(n)}(K^n x_n) < 1/n$. Из определения функционала $\varphi_{j(n)}$ следует $\|K^{n+j(n)} x_{n+j(n)} - K^{n+j(n)} \zeta\| < 1/n$. Переходя к пределу, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K^{n+j(n)} x_{n+j(n)} - K^{n+j(n)} \zeta\| = 0$. Отсюда и из неравенства $z - \zeta \triangleleft K^{n+j(n)} x_{n+j(n)} - K^{n+j(n)} \zeta$ имеем оценку $z \triangleleft \zeta$. Следовательно, $z = \zeta$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, далее, конус $\Lambda \subset B$ является миниэдральным и для любых двух элементов $x, y \in U$ существуют такие натуральные числа n, j , что $\inf\{K^n x, K^j y\} \in U$. Тогда в множестве неподвижных точек оператора K существует наименьший элемент.

Действительно, для неподвижных точек $w, \vartheta \in U$ оператора K выполнены равенства $K^n w = w, K^j \vartheta = \vartheta$. Следовательно, $\inf\{w, \vartheta\} \in U$ и на основании теоремы 2 в множестве неподвижных точек оператора K существует наименьший элемент.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2 в множестве неподвижных точек оператора K существует наибольший элемент.

Для доказательства этого факта заметим, что так как $z = Kz$, то $z \triangleleft Kz$. Теперь осталось взять в качестве конуса в пространстве B множество $-\Lambda$.

2. Приведенные выше определения и утверждения нам придется несколько изменить, чтобы их “приспособить” к исследованию вольтеровых операторных неравенств.

Поставим в соответствие каждому $\gamma \in [0, b - a]$ некоторое измеримое множество e_γ с мерой $\mu(e_\gamma) = \gamma$ таким образом, что

$$\forall \gamma, \eta \in [0, b - a] \quad \gamma < \eta \Rightarrow e_\gamma \subset e_\eta. \quad (4)$$

Обозначим совокупность этих множеств через v . Рассмотрим банахово пространство B функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Будем говорить, что в пространстве B выполнено V -условие, если для любого множества $e_\gamma \in v$ и для любой сходящейся последовательности $\{y_i\} \subset B$, $\|y_i - y\|_B \rightarrow 0$, из равенства $y_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots$, при всех $t \in e_\gamma$ следует, что и предельная функция $y(t) = 0$ при $t \in e_\gamma$.

Обозначим через $B(e_\gamma)$ пространство сужений функций из B на множество e_γ . Норму в пространстве $B(e_\gamma)$ зададим формулой $\|y_\gamma\|_{B(e_\gamma)} = \inf \|y\|_B$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y \in B$ функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$. Если выполнено V -условие, то [18; гл. IV, § 1, шп. 1.8, 1.9] при таком определении нормы пространство $B(e_\gamma)$ является банаховым. Определим оператор $\Pi_\gamma: B \rightarrow B(e_\gamma)$ равенством $(\Pi_\gamma y)(t) = y(t)$ при всех $t \in e_\gamma$. Пусть оператор $P_\gamma: B(e_\gamma) \rightarrow B$ некоторым образом продолжает каждую функцию y_γ на весь $[a, b]$. Зададим отображение $Z: (0, b - a] \times B \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $Z(\gamma, y) = \|\Pi_\gamma y\|_{B(e_\gamma)}$. При каждом фиксированном $y \in B$ функция $Z(\cdot, y)$ не убывает и поэтому существует $\lim_{\gamma \rightarrow 0+0} Z(\gamma, y) = z_0(y)$. Доопределим отображение Z значением $Z(0, y) = z_0(y)$.

Если Λ – некоторый конус пространства B , то множество $\Lambda_\gamma = \Pi_\gamma \Lambda$, состоящее из сужений на e_γ функций, принадлежащих Λ , может и не являться конусом. Так, например, образуем в пространстве $L_{[0,3]}$ конус из функций $y: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} y(t) &\geq 0 && \text{при почти всех } t \in [0, 1], \\ y(t) &\leq 0 && \text{при почти всех } t \in (1, 2], \\ y(t) &= \int_0^2 y(s) ds && \text{при почти всех } t \in (2, 3]. \end{aligned}$$

Сужениями этих функций на $[2, 3]$ будут всевозможные константы, множество которых не является конусом.

Будем говорить, что конус Λ в пространстве B является вольтерровым на v , если при любом $\gamma \in (0, b - a)$ множество $\Lambda_\gamma = \Pi_\gamma \Lambda$ будет конусом в пространстве $B(e_\gamma)$. Для элементов $x_\gamma, y_\gamma \in B(e_\gamma)$ таких, что $x_\gamma - y_\gamma \in \Lambda_\gamma$, сохраним обозначения $x_\gamma \triangleright y_\gamma, y_\gamma \triangleleft x_\gamma$. Важно заметить, что конус Λ_γ не обязательно наследует свойства конуса Λ , о чем свидетельствуют следующие примеры.

ПРИМЕР 1. В пространстве $L_{[0,2]}$ введем конус Λ таких функций $x: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, что $x(t) \geq 0$ при почти всех $t \in [0, 1]$ и $x(t) \geq \int_0^1 x(s) ds$ при почти всех $t \in (1, 2]$. Точной верхней границей любых двух функций $x, y \in L_{[0,2]}$ является функция $u \in L_{[0,2]}$, определяемая формулой $u(t) = \sup\{x(t), y(t)\}$, если $t \in [0, 1]$, и

$$u(t) = \sup \left\{ x(t) + \int_0^1 (u(s) - x(s)) ds, y(t) + \int_0^1 (u(s) - y(s)) ds \right\},$$

если $t \in (1, 2]$. Итак, конус Λ миниедральный. Сужения принадлежащих Λ функций на отрезок $[1, 2]$ образуют множество Λ_1 неотрицательных функций, являющееся миниедральным конусом в $L_{[1,2]}$. Однако для двух функций $x, y \in L_{[0,2]}$ и их сужений $x_1, y_1 \in L_{[1,2]}$ будет $\sup\{x, y\}(t) \neq \sup\{x_1, y_1\}(t)$, $t \in (1, 2]$, если только $x(t) \neq 0$ или $y(t) \neq 0$ на некотором подмножестве положительной меры отрезка $[0, 1]$.

ПРИМЕР 2. В пространстве $C_{[0,2]}$ рассмотрим конус Λ функций $x: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $x(t) \geq 0$ при $t \in [0, 1]$; $x(0) = x(1) = 0$; $x(t) = \varkappa \cdot (t - 1)$ при $t \in (1, 2]$, где $\varkappa \geq \max_{s \in [0,1]} x(s)$. Возьмем ограниченную возрастающую последовательность $\{x_n\} \subset C_{[0,2]}$. Тогда числовая последовательность $\{x_n(2)\}$ монотонно ограничена и, следовательно, сходится:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \quad \forall i, j > J \quad |x_i(2) - x_j(2)| < \varepsilon.$$

Отсюда $\max_{s \in [0,1]} |x_i(s) - x_j(s)| < \varepsilon$. Кроме того, при всех $t \in [1, 2]$ имеем

$$|x_i(t) - x_j(t)| < |x_i(2) - x_j(2)| < \varepsilon.$$

Итак, $\|x_i - x_j\|_C < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n\} \subset C_{[0,2]}$ фундаментальная. Тем самым доказано, что конус Λ вполне правильный.

Множество Λ_1 , образованное сужениями функций из Λ на $[0, 1]$, состоит из всех неотрицательных функций, равных нулю на концах отрезка. Это множество – конус в пространстве $C_{[0,1]}$, не являющийся вполне правильным. Например, последовательность функций $x_n(t) = (t - t^2)^{1/n}$ ограничена монотонна, но не является сходящейся в $C_{[0,1]}$.

ПРИМЕР 3. В пространстве $C_{[-2,2]}$ определим конус Λ функций $x: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} x(-1) &= x(1) = 0; \\ x(t) &= \underline{x} \cdot (t + 1) \quad \text{при } t \in [-2, -1], \quad \text{где } \underline{x} \leq \min_{s \in [-1, 0]} x(s); \\ x(t) &= \overline{x} \cdot (t - 1) \quad \text{при } t \in (1, 2], \quad \text{где } \overline{x} \geq \max_{s \in [0, 1]} x(s). \end{aligned}$$

Пусть $y \triangleright x \triangleright 0$. Тогда

$$\max_{s \in [0,2]} y(s) = y(2) = \overline{y} \geq \max_{s \in [0,2]} x(s) = x(2) = \overline{x} \geq 0. \quad (5)$$

Обозначим $z = y - x$. Имеем $z \triangleright 0$, $\overline{x}_z = \overline{x}_y - \overline{x}_x$. Далее,

$$\begin{aligned} \overline{x}_z &\geq \max_{s \in [0,1]} (y(s) - x(s)) \geq \min_{s \in [0,1]} y(s) + \max_{s \in [0,1]} (-x(s)) \\ &= \left| \min_{s \in [0,1]} x(s) \right| - \left| \min_{s \in [0,1]} y(s) \right| = \left| \min_{s \in [0,2]} x(s) \right| - \left| \min_{s \in [0,2]} y(s) \right|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \min_{s \in [0,2]} x(s) \right| \leq \overline{x}_y + \left| \min_{s \in [0,2]} y(s) \right| \leq 2 \max_{s \in [0,2]} |y(s)|.$$

Отсюда и из (5) получаем $\max_{s \in [0,2]} |x(s)| \leq 2 \max_{s \in [0,2]} |y(s)|$. Аналогично доказывается, что $\max_{s \in [-2,0]} |x(s)| \leq 2 \max_{s \in [-2,0]} |y(s)|$. Таким образом, $\|x\|_C \leq 2\|y\|_C$, т.е. конус Λ нормальный.

Образует множество Λ_1 сужений принадлежащих Λ функций на $[-1, 2]$, являющееся конусом в пространстве $C_{[-1,2]}$. Для функций $y, x_n \in C_{[-1,2]}$,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [-1, 1], \\ 2(t-1), & \text{если } t \in (1, 2], \end{cases} \quad x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{если } t \in [-1, 0], \\ 0, & \text{если } t \in [0, 1], \\ t-1, & \text{если } t \in (1, 2], \end{cases}$$

имеем $y \triangleright x_n \triangleright 0$ и $\|y\| = 2, \|x_n\| = n$. Так как можно выбирать значения n сколь угодно большими, то конус Λ_1 не является нормальным.

Вольтерров конус $\Lambda \subset B$ назовем *вольтеррово миниэдральным*, если при любом $\gamma \in (0, b-a]$ конус $\Lambda_\gamma = \Pi_\gamma \Lambda$ в пространстве $B(e_\gamma)$ является миниэдральным, причем для любых двух элементов $x, y \in B$ выполнено $\inf \{\Pi_\gamma x, \Pi_\gamma y\} = \Pi_\gamma \inf \{x, y\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть вольтерров конус $\Lambda \subset B$ является несплюснутым и вольтеррово миниэдральным. Тогда при любом $\gamma \in (0, b-a]$ конус $\Lambda_\gamma \subset B(e_\gamma)$ является также несплюснутым, причем если число M удовлетворяет неравенствам (1), то при любом $\gamma \in (0, b-a]$ и всех $x_\gamma \in B(e_\gamma)$ выполнены неравенства

$$\|x_{\gamma+}\| \leq M \|x_\gamma\|, \quad \|x_{\gamma-}\| \leq M \|x_\gamma\|,$$

где $x_{\gamma+} = \sup \{x_\gamma, 0\}$, $x_{\gamma-} = \sup \{-x_\gamma, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое положительное число ε . Продолжим функцию $x_\gamma \in B(e_\gamma)$, $x_\gamma \neq 0$, до функции $x \in B$ так, чтобы $\|x_\gamma\| \geq \|x\| - \varepsilon$. Найдем $x_+ = \sup \{x, 0\}$. В силу вольтерровой миниэдральности конуса Λ функция x_+ является продолжением функции $x_{\gamma+}$. Поэтому $\|x_{\gamma+}\| \leq \|x_+\| \leq M \|x\| \leq M(\|x_\gamma\| + \varepsilon)$. Отсюда вследствие произвольности ε получаем утверждение теоремы.

Вольтерров конус $\Lambda \subset B$ назовем *вольтеррово сильно миниэдральным*, если для любого ограниченного по конусу множества Ω и для любого $\gamma \in (0, b-a]$ существует точная нижняя (верхняя) граница множества $\Omega_\gamma = \Pi_\gamma \Omega$, причем $\inf \Omega_\gamma = \Pi_\gamma \inf \Omega$. Вольтерров конус $\Lambda \subset B$ назовем *вольтеррово вполне правильным*, если при любом $\gamma \in (0, b-a]$ в пространстве $B(e_\gamma)$ сходится каждая ограниченная по норме невозрастающая (неубывающая) последовательность $x_{1\gamma} \triangleright x_{2\gamma} \triangleright \dots \triangleright x_{n\gamma} \dots$. Если существует такая константа m , что при любом $\gamma \in (0, b-a]$ и всех $x_\gamma, y_\gamma \in B(e_\gamma)$ из $0 \triangleleft x_\gamma \triangleleft y_\gamma$ следует $\|x_\gamma\| \leq m \|y_\gamma\|$, то конус Λ назовем *вольтеррово нормальным*.

Если конус Λ вольтерров на совокупности $v = \{e_\gamma\}$ и вольтеррово сильно миниэдральный, то можно определить точные верхнюю и нижнюю границы функций, заданных на разных множествах. Пусть $x_\tau \in B(e_\tau)$, $y_\gamma \in B(e_\gamma)$, $0 < \tau < \gamma \leq b - a$. Обозначим через x_γ некоторое продолжение функции x_τ , принадлежащее пространству $B(e_\gamma)$. Верхней гранью функций x_τ, y_γ назовем элемент

$$\sup\{x_\tau, y_\gamma\} = \inf_{x_\gamma \in B(e_\gamma)} \sup\{x_\gamma, y_\gamma\} \in B(e_\gamma). \quad (6)$$

Здесь infimum вычисляется по всевозможным продолжениям $x_\gamma \in B(e_\gamma)$ функции x_τ . Так как для любого x_γ имеет место $\sup\{x_\gamma, y_\gamma\} \supset y_\gamma$, то вследствие сильной миниэдральности конуса Λ_γ заданная равенством (6) верхняя граница существует. Аналогично определим

$$\inf\{x_\tau, y_\gamma\} = \sup_{x_\gamma \in B(e_\gamma)} \inf\{x_\gamma, y_\gamma\} \in B(e_\gamma). \quad (7)$$

Заданные таким образом верхняя, нижняя грани обладают “привычными” свойствами:

1. $\sup\{x_\tau, y_\gamma\} \supset y_\gamma$, $\Pi_\tau P_\gamma \sup\{x_\tau, y_\gamma\} \supset x_\tau$;
2. $\forall w_\gamma \in B(e_\gamma) \quad w_\gamma \supset y_\gamma, \Pi_\tau P_\gamma w_\gamma \supset x_\tau \implies w_\gamma \supset \sup\{x_\tau, y_\gamma\}$;
3. $x_\tau \supset \Pi_\tau P_\gamma y_\gamma \implies \Pi_\tau P_\gamma \sup\{x_\tau, y_\gamma\} = x_\tau$.

Покажем, что если вольтерров на v конус Λ вольтеррово нормальный, вольтеррово сильно миниэдральный и несплюснутый, то существует такое число $\tilde{k}$, что при любых τ, γ , $0 < \tau < \gamma \leq b - a$, $x_\tau \in B(e_\tau)$, $y_\gamma \in B(e_\gamma)$, выполнено

$$\|\sup\{x_\tau, y_\gamma\}\| \leq \tilde{k}(\|x_\tau\| + \|y_\gamma\|), \quad \inf\{x_\tau, y_\gamma\} \leq \tilde{k}(\|x_\tau\| + \|y_\gamma\|). \quad (8)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $\tilde{x}_\gamma$ – такое продолжение функции x_τ на e_γ , что $\|\tilde{x}_\gamma\| \leq \|x_\tau\| + \varepsilon$. Имеем неравенства

$$y_\gamma \triangleleft \sup\{x_\tau, y_\gamma\} = \inf_{x_\gamma \in B(e_\gamma)} \sup\{x_\gamma, y_\gamma\} \triangleleft \sup\{\tilde{x}_\gamma, y_\gamma\}.$$

Теорема 3 позволяет воспользоваться формулой (2) для элементов пространства $B(e_\gamma)$ при любом γ . Таким образом,

$$\|\sup\{x_\tau, y_\gamma\}\| - \|y_\gamma\| \leq k(\|\tilde{x}_\gamma\| + \|y_\gamma\|) + \|y_\gamma\|.$$

Отсюда $\|\sup\{x_\tau, y_\gamma\}\| \leq (k + 2)(\|x_\tau\| + \varepsilon + \|y_\gamma\|)$. Из произвольности ε следует справедливость формулы (8) с коэффициентом $\tilde{k} = k + 2$.

Необходимо отметить, что наименьшее из чисел $\tilde{k}$, отвечающих условию (8), удовлетворяет неравенству $\tilde{k} \geq 1$. Для доказательства этой оценки достаточно воспользоваться формулой (8) для элементов $x_\tau \supset 0$, $y_\gamma = 0$.

3. Здесь будет получено утверждение об операторном неравенстве – основной результат этой работы.

Сформулируем определение, несколько расширяющее классическое определение вольтерровости, данное А. Н. Тихоновым [19]. Отображение $K: B \rightarrow B$ будем называть *вольтерровым на системе v* , если для каждого множества $e_\gamma \in v$ и любых функций $y, z \in B$ из $y(s) = z(s)$ на e_γ следует $(Ky)(s) = (Kz)(s)$ на e_γ .

Отметим, что обобщения понятия вольтерровости возникают в ряде теоретических и прикладных задач и привлекают многочисленных исследователей [20]–[29]. Приведенное нами определение не претендует на максимальную общность, но оказывается востребованным в теории функционально-дифференциальных уравнений [24]–[26].

Рассмотрим уравнение

$$x(t) - (Kx)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \quad (9)$$

с вольтерровым оператором $K: B \rightarrow B$. Если существует число $\gamma \in (0, b - a)$ и элемент $z_\gamma \in B(e_\gamma)$, удовлетворяющий равенству

$$z_\gamma = \Pi_\gamma K P_\gamma z_\gamma,$$

то уравнение (9) будем называть *локально разрешимым*, а функцию z_γ – *локальным решением, определенным на e_γ* . Элемент $z_{b-a} \in B$, удовлетворяющий уравнению (9), назовем *глобальным решением*. Будем говорить, что функция $z_\eta: \bigcup_{\gamma < \eta} e_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\eta \in (0, b - a]$, является *предельно продолженным решением* уравнения (9), если при любом $\gamma \in (0, \eta)$ сужение z_γ функции z_η на множество e_γ является локальным решением и $\lim_{\gamma \rightarrow \eta} \|z_\gamma\| = \infty$. Вследствие вольтерровости оператора K сужение z_γ решения z_ζ (локального, глобального или предельно продолженного) на произвольное множество e_γ , $\gamma \in (0, \zeta)$, будет локальным решением уравнения (9). Будем называть решение z_γ *частью решения z_ζ* , а решение z_ζ – *продолжением решения z_γ* .

Пусть пространство B полуупорядочено вольтерровым конусом Λ , вольтерров оператор $K: B \rightarrow B$ является монотонным. Прежде всего заметим, что при любом $\gamma \in (0, b - a]$ оператор $K_\gamma = \Pi_\gamma K P_\gamma: B(e_\gamma) \rightarrow B(e_\gamma)$ также будет монотонным. Далее, отметим, что из предельной монотонной компактности оператора K не следует наличие этого свойства у оператора K_γ . Действительно, упорядочим пространство $C_{[0,2]}$ конусом Λ , рассмотренным в примере 2. Так как этот конус вполне правильный, то тождественный оператор $I: C_{[0,2]} \rightarrow C_{[0,2]}$ является предельно монотонно компактным. Однако тождественный оператор $I_1 = \Pi_1 I P_1: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}$ уже не является предельно монотонно компактным, так как конус $\Lambda_1 = \Pi_1 \Lambda$ не будет вполне правильным. Назовем вольтерров оператор $K: B \rightarrow B$ *вольтеррово предельно монотонно компактным*, если для любого $\gamma \in (0, b - a]$ сходится каждая последовательность $x_{0\gamma} \triangleright K_\gamma x_{1\gamma} \triangleright K_\gamma^2 x_{2\gamma} \triangleright \dots \triangleright K_\gamma^n x_{n\gamma} \dots$, где $x_{n\gamma} \in B(e_\gamma)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в банаховом пространстве B , удовлетворяющем V -условию, введено отношение порядка, порожденное вольтерровым на системе v конусом. Пусть оператор $K: B \rightarrow B$ является вольтерровым на v , монотонным, вольтеррово предельно монотонно компактным и удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in B, \quad \exists r_1, \quad \exists r_2, \quad r_1 > r_2 > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B \\ \|x - x_0\| \leq r_1 \implies Z(\delta, Kx - x_0) \leq r_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть, кроме того, для некоторого элемента $u \in B$, $\|u - x_0\| \leq r_1$, выполнено неравенство $u \triangleright Ku$. Тогда существует определенное на e_δ локальное решение z_δ уравнения (9), для которого имеет место оценка $z_\delta \triangleleft \Pi_\delta u$.

Для доказательства достаточно проверить условия теоремы 1, взяв в пространстве $B(e_\delta)$ в качестве множества U шар радиуса r_2 с центром в элементе $x_{0\delta} = \Pi_\delta x_0$.

Чтобы сформулировать утверждение о продолжаемости решений уравнения (9), нам потребуется следующее определение. Оператор $K: B \rightarrow B$ назовем *улучшающим на системе v* , если

$$\exists \mu \quad \forall x \in B \quad Z(0, Kx) \leq \mu, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \forall r > 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B, \quad \forall \tau, \gamma \in [0, b-a] \\ |\tau - \gamma| < \delta, \quad \|x\| \leq r \implies |Z(\gamma, Kx) - Z(\tau, Kx)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что даже после замены условия (10) более жестким требованием улучшения оператора $K: B \rightarrow B$ уравнение (9) может иметь непродолжаемые решения. В качестве примера такой ситуации рассмотрим уравнение, в котором оператор $K: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}$ определен следующим образом. Возьмем любую непрерывную функцию $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и рассмотрим уравнение

$$\int_0^\xi \left(\arctg x(s) - \frac{\pi}{2} \right) ds = -1 \quad (13)$$

относительно неизвестного $\xi \in [0, 1]$. Функция $\Theta(\cdot) = \int_0^{(\cdot)} \left(\arctg x(s) - \frac{\pi}{2} \right) ds$ убывает и $\Theta(0) = 0$; поэтому если решение уравнения (13) существует, то оно единственно. В случае несовместности уравнения (13) полагаем

$$(Kx)(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^t \sqrt{|x(s) - x(0)| + x(s) - x(0)} ds \quad \text{при всех } t \in [0, 1].$$

Если уравнение (13) разрешимо, то

$$\begin{aligned} (Kx)(t) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^t \sqrt{|x(s) - x(0)| + x(s) - x(0)} ds \quad \text{при } t \in [0, \xi], \\ (Kx)(t) &= (Kx)(\xi) - \int_\xi^t (0.5 + \text{sign}(x(s) - x(0))) ds \quad \text{при } t \in (\xi, b]. \end{aligned}$$

Определенный таким образом оператор K действует в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций, является вольтеровым по А. Н. Тихонову и улучшающим. Упорядочим пространство $C_{[0,1]}$ конусом Λ , содержащим неотрицательные функции-константы. Этот конус вольтеров на системе $\{[0, \gamma]\}$ и вольтерово вполне правильный. Если $x_1(t) - x_2(t) = \text{const} = c \geq 0$, то при всех t выполнено $x_1(t) - x_1(0) = x_2(t) - x_2(0)$ и поэтому $(Kx_1)(t) - (Kx_2)(t) \equiv 0$. Следовательно, оператор K монотонен. Так как конус Λ вольтерово вполне правильный, то оператор K вольтерово монотонно компактный. В завершение проверки условий теоремы 4 заметим, что функция

$$u(t) = \begin{cases} 1 + t^2, & \text{если } t \in [0; 0.72], \\ 1.52 - 1.5(t - 0.72), & \text{если } t \in (0.72; 1], \end{cases}$$

удовлетворяет равенству $(Ku)(t) = u(t) - 1$, т.е. $u \triangleright Ku$.

Рис. 1. Множество решений

Множество решений рассматриваемого уравнения представлено на рис. 1.

Уравнение имеет непродолжаемые решения. Например, решение $x(t) \equiv 0$, $t \in [0; 0.64]$, “умирает” в точке $t = 0.64$. Отметим также, что если рассмотреть сужения всех решений на любой отрезок $[0, \delta]$, $\delta \leq 0.64$, где все они определены, то окажется, что любые два решения x_1, x_2 не упорядочены, т.е. $x_1 \not\geq x_2$ и $x_1 \not\leq x_2$. Как показывают приводимые ниже утверждения, продолжаемость решений уравнения (9) и существование в множестве решений наименьшего элемента гарантируются геометрическими свойствами конуса Λ .

ТЕОРЕМА 5. Пусть в банаховом пространстве B , удовлетворяющем V -условию, введено отношение порядка, порожденное несплюснутым, вольтерровым на системе v , вольтеррово сильно миниздральным и вольтеррово нормальным конусом Λ . Пусть оператор $K: B \rightarrow B$ является улучшающим, вольтерровым на v , монотонным и вольтеррово предельно монотонно компактным. Пусть, кроме того, для некоторого элемента $u \in B$ выполнено неравенство $u \triangleright Ku$. Тогда любое локальное решение z_γ уравнения (9), для которого имеет место оценка $z_\gamma \triangleleft P_\gamma u$, продолжаемо либо до глобального z_{b-a} , удовлетворяющего неравенству $z_{b-a} \triangleleft u$, либо до предельно продолженного решения z_η такого, что при всех $\delta < \eta$ выполнено $z_\delta \triangleleft P_\delta u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое локальное решение z_γ , определенное на e_γ и удовлетворяющее неравенству $z_\gamma \triangleleft P_\gamma u$. Найдем $\varphi_1 = \inf\{z_\gamma, u\}$. Так как $u \triangleright Ku$, то $u \triangleright K\varphi_1$; и так как $z_\gamma = K_\gamma z_\gamma$, то $z_\gamma \triangleright P_\gamma K\varphi_1$. Следовательно, $\varphi_1 \triangleright K\varphi_1$. Кроме того, $\varphi_1(t) = z_\gamma(t)$ при $t \in e_\gamma$.

Выберем $r = \|\varphi_1\| + 1$, $\varepsilon = 1/2$ и найдем δ_1 , являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ , удовлетворяющих требованию (12) в условии улучшения оператора K . Обозначим $\gamma_1 = \gamma + \delta_1/2$. Для любого такого $x \in B$, что $\|x\| < \|z_{\gamma_1}\| + 1$, $x(t) = z_\gamma(t)$ при $t \in e_\gamma$, выполнено

$$Z(\gamma_1, Kx) = (Z(\gamma_1, Kx) - Z(\gamma, Kx)) + Z(\gamma, Kx) < \frac{1}{2} + \|\varphi_1\|. \quad (14)$$

В пространстве $B(e_{\gamma_1})$ выделим замкнутый шар радиуса $\|\varphi_1\| + 1$, а в нем — множество U_1 функций, совпадающих при $t \in e_\gamma$ с $z_\gamma(t)$ (или $\varphi_1(t)$, что одно и то же).

Множество U_1 замкнуто. Продолжим оператором P_{γ_1} каждую функцию из U_1 так, чтобы ее норма увеличилась менее чем на $1/2$. Для таких продолжений можем воспользоваться неравенством (14), из которого будет следовать включение $\Pi_{\gamma_1} K P_{\gamma_1} U_1 \subset U_1$. Так как оператор $K_{\gamma_1} = \Pi_{\gamma_1} K P_{\gamma_1} : B(e_{\gamma_1}) \rightarrow B(e_{\gamma_1})$ монотонный и предельно монотонно компактный, а элемент $\varphi_{\gamma_1} = \Pi_{\gamma_1} \varphi_1 \in U_1$ удовлетворяет неравенству $\varphi_{\gamma_1} \triangleright K_{\gamma_1} \varphi_{\gamma_1}$, то согласно теореме 1 оператор K_{γ_1} имеет неподвижную точку z_{γ_1} . Это локальное решение уравнения (9), определенное на e_{γ_1} , являющееся продолжением решения z_γ и удовлетворяющее неравенству $z_{\gamma_1} \triangleleft P_{\gamma_1} u$.

Найдем $\varphi_2 = \inf\{z_{\gamma_1}, u\}$. Имеем $\varphi_2 \triangleright K\varphi_2$; $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ при $t \in e_{\gamma_1}$; $\varphi_2(t) = z_\gamma(t)$ при $t \in e_\gamma$. Выберем $r = \|\varphi_2\| + 1$, $\varepsilon = 1/2$ и найдем δ_2 , являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ , удовлетворяющих условию (12). Обозначим $\gamma_2 = \gamma_1 + \delta_2/2$. Замкнутое множество $U_2 = \{x_{\gamma_2} \in B(e_{\gamma_2}) \mid \|x_{\gamma_2}\| \leq \|\varphi_2\| + 1 \wedge x_{\gamma_2}(t) = \varphi_2(t), t \in e_{\gamma_1}\}$ инвариантно относительно монотонного и предельно монотонно компактного оператора $K_{\gamma_2} = \Pi_{\gamma_2} K P_{\gamma_2} : B(e_{\gamma_2}) \rightarrow B(e_{\gamma_2})$. Элемент $\varphi_{\gamma_2} = \Pi_{\gamma_2} \varphi_2 \in U_2$ удовлетворяет неравенству $\varphi_{\gamma_2} \triangleright K_{\gamma_2} \varphi_{\gamma_2}$. Таким образом, существует локальное решение z_{γ_2} уравнения (9), определенное на e_{γ_2} , являющееся продолжением решения z_{γ_1} и удовлетворяющее неравенству $z_{\gamma_2} \triangleleft P_{\gamma_2} u$.

Докажем, что, продолжая описанные построения, мы получим глобальное или предельно продолженное решение. Вычислим $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \eta$ и рассмотрим функцию z_η , определенную на $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_{\gamma_i}$, сужением которой на e_{γ_i} будет z_{γ_i} , $i = 1, 2, \dots$. Если функция z_η не является предельно продолженным решением, то найдется такое число N , что при всех натуральных i имеет место $\|z_{\gamma_i}\| \leq N$. Согласно формуле (8) получаем $\|\varphi_i\| \leq \tilde{k}(N + \|u\|)$. Возьмем $r = \tilde{k}(N + \|u\|) + 1$, $\varepsilon = 1/2$ и найдем $\bar{\delta}$, являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ , удовлетворяющих условию (12). Таким образом, при любом i выполнено $\delta_i \geq \bar{\delta}$. Это означает, что за конечное число шагов будет построено глобальное решение уравнения (9).

Теорема доказана.

Глобальное решение z_{b-a} уравнения (9) с вольтерровым на v оператором $K : B \rightarrow B$ назовем *нижним (верхним)*, если для любого локального решения $y_\gamma \in B(e_\gamma)$ выполнено $y_\gamma \triangleright z_\gamma = \Pi_\gamma z_{b-a}$ ($y_\gamma \triangleleft z_\gamma = \Pi_\gamma z_{b-a}$) и для всякого глобального решения y_{b-a} также выполнено $y_{b-a} \triangleright z_{b-a}$ ($y_{b-a} \triangleleft z_{b-a}$). Предельно продолженное решение z_η назовем *нижним (верхним)*, если для каждого локального решения y_γ , $\gamma < \eta$, имеет место неравенство $y_\gamma \triangleright z_\gamma$ ($y_\gamma \triangleleft z_\gamma$), где z_γ — сужение на e_γ функции z_η .

ТЕОРЕМА 6. *При выполнении условий теоремы 5 существует либо нижнее глобальное решение z_{b-a} уравнения (9) такое, что $z_{b-a} \triangleleft u$, либо нижнее предельно продолженное решение z_η , сужение которого z_γ на любое e_γ , $\gamma < \eta$, удовлетворяет неравенству $z_\gamma \triangleleft \Pi_\gamma u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ — константа, существование которой гарантируется свойством (11). Возьмем $\varepsilon = 1$, $r = \tilde{k}(\|u\| + 2\mu + 3) + 1$, где $\tilde{k} \geq 1$ удовлетворяет неравенству (8). Найдем точную верхнюю границу δ_1 всевозможных чисел δ , отвечающих условию (12). Обозначим $\gamma_1 = \delta_1/2$. Для любого $x \in B$,

$\|x\| < \tilde{k}(\|u\| + 2\mu + 3) + 1$, выполнено

$$Z(\gamma_1, Kx) = (Z(\gamma_1, Kx) - Z(0, Kx)) + Z(0, Kx) < 1 + \mu. \quad (15)$$

В пространстве $B(e_{\gamma_1})$ выделим замкнутый шар U_1 радиуса $\tilde{k}(\|u\| + 2\mu + 3)$. Оператором P_{γ_1} продолжим каждую функцию из $B(e_{\gamma_1})$ на весь отрезок $[a, b]$ так, чтобы ее норма увеличилась менее чем на 1. Для полученных таким образом функций можем воспользоваться неравенством (15), из которого получаем включение $\Pi_{\gamma_1} K P_{\gamma_1} U_1 \subset U_1$. Так как оператор $K_{\gamma_1} = \Pi_{\gamma_1} K P_{\gamma_1} : B(e_{\gamma_1}) \rightarrow B(e_{\gamma_1})$ монотонный и предельно монотонно компактный, а элемент $u_{\gamma_1} = \Pi_{\gamma_1} u \in U_1$ удовлетворяет неравенству $u_{\gamma_1} \triangleright K_{\gamma_1} u_{\gamma_1}$, то согласно теореме 2 среди локальных решений, принадлежащих множеству U_1 , есть наименьшее решение z_{γ_1} . Это решение удовлетворяет неравенству $z_{\gamma_1} \triangleleft P_{\gamma_1} u$.

Найдем $\varphi_1 = \inf\{z_{\gamma_1}, u\}$. Имеем $\varphi_1 \triangleright K\varphi_1$; $\varphi_1(t) = z_{\gamma_1}(t)$ при $t \in e_{\gamma_1}$. Выберем $r = \tilde{k}(\|\varphi_1\| + 2\|z_{\gamma_1}\| + 3) + 1$, $\varepsilon = 1$ и найдем δ_2 , являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ , удовлетворяющих условию (12). Обозначим $\gamma_2 = \gamma_1 + \delta_2/2$. Для любого $x \in B$ такого, что $\|x\| \leq \tilde{k}(\|\varphi_1\| + 2\|z_{\gamma_1}\| + 3) + 1$ и $x(t) = z_{\gamma_1}(t)$ при $t \in e_{\gamma_1}$, выполнено

$$Z(\gamma_2, Kx) = (Z(\gamma_2, Kx) - Z(\gamma_1, Kx)) + Z(\gamma_1, Kx) < \|z_{\gamma_1}\| + 1.$$

Из этого неравенства следует инвариантность замкнутого множества

$$U_2 = \{x_{\gamma_2} \in B(e_{\gamma_2}) \mid \|x_{\gamma_2}\| \leq \tilde{k}(\|\varphi_1\| + 2\|z_{\gamma_1}\| + 3) \wedge x_{\gamma_2}(t) = \varphi_1(t), t \in e_{\gamma_1}\}$$

относительно монотонного и предельно монотонно компактного оператора $K_{\gamma_2} = \Pi_{\gamma_2} K P_{\gamma_2} : B(e_{\gamma_2}) \rightarrow B(e_{\gamma_2})$. Элемент $\varphi_{\gamma_2} = \Pi_{\gamma_2} \varphi_1 \in U_2$ удовлетворяет неравенству $\varphi_{\gamma_2} \triangleright K_{\gamma_2} \varphi_{\gamma_2}$. Таким образом, существует локальное решение z_{γ_2} уравнения (9), определенное на e_{γ_2} , являющееся наименьшим из решений, принадлежащих множеству U_2 . Это решение продолжает решение z_{γ_1} и удовлетворяет неравенству $z_{\gamma_2} \triangleleft P_{\gamma_2} u$.

Далее повторяем предыдущие построения для продолжения решения z_{γ_2} , затем z_{γ_3} и т.д. На n -м шаге вычисляем $\varphi_{n-1} = \inf\{z_{\gamma_{n-1}}, u\}$. Выбираем $r = \tilde{k}(\|\varphi_{n-1}\| + 2\|z_{\gamma_{n-1}}\| + 3) + 1$, $\varepsilon = 1$ и находим δ_n , являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ , удовлетворяющих условию (12). Пусть $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \delta_n/2$. Замкнутое множество

$$U_n = \{x_{\gamma_n} \in B(e_{\gamma_n}) \mid \|x_{\gamma_n}\| \leq \tilde{k}(\|\varphi_{n-1}\| + 2\|z_{\gamma_{n-1}}\| + 3) \wedge x_{\gamma_n}(t) = \varphi_{n-1}(t), t \in e_{\gamma_{n-1}}\}$$

инвариантно относительно монотонного и предельно монотонно компактного оператора $K_{\gamma_n} = \Pi_{\gamma_n} K P_{\gamma_n} : B(e_{\gamma_n}) \rightarrow B(e_{\gamma_n})$. Элемент $\varphi_{\gamma_n} = \Pi_{\gamma_n} \varphi_{n-1} \in U_n$ удовлетворяет неравенству $\varphi_{\gamma_n} \triangleright K_{\gamma_n} \varphi_{\gamma_n}$. Таким образом, существует локальное решение z_{γ_n} уравнения (9), определенное на e_{γ_n} , являющееся наименьшим из решений, принадлежащих множеству U_n . Это решение продолжает решение $z_{\gamma_{n-1}}$ и удовлетворяет неравенству $z_{\gamma_n} \triangleleft P_{\gamma_n} u$.

Докажем, что, продолжая описанные построения, мы получаем глобальное или предельно продолженное решение. Вычислим $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \eta$ и рассмотрим функцию z_η , определенную на $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_{\gamma_i}$, сужением которой на e_{γ_i} будет z_{γ_i} , $i = 1, 2, \dots$.

Если функция z_η не является предельно продолженным решением, то найдется такое число N , что при всех натуральных i имеет место $\|z_{\gamma_i}\| \leq N$. Согласно формуле (8) получаем $\|\varphi_i\| \leq \tilde{k}(N + \|u\|)$. Возьмем $r = \tilde{k}(\tilde{k}(N + \|u\|) + 2N + 3) + 1$, $\varepsilon = 1$ и найдем $\bar{\delta}$, являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ , удовлетворяющих условию (12). Таким образом, при любом i выполнено $\delta_i \geq \bar{\delta}$. Это означает, что за конечное число шагов будет построено глобальное решение уравнения (9).

Пусть полученное здесь решение z_η , $\eta \leq b-a$, не является нижним. Тогда существует такое локальное или глобальное решение ω_γ , что для сужения функции z_η на e_γ имеет место $z_\gamma \not\leq \omega_\gamma$. (Здесь $\gamma < \eta$, если решение z_η предельно продолженное, и $\gamma \leq \eta$, если решение z_η глобальное.) Вычислим $\Xi = \sup\{\xi \mid z_\xi \leq \omega_\xi\}$, где z_ξ, ω_ξ — сужения соответствующих функций на e_ξ . Считаем, что $\Xi = 0$, когда множество $\{\xi \mid z_\xi \leq \omega_\xi\}$ пусто. Возможны два варианта: 1) $z_\Xi \leq \omega_\Xi$; 2) $z_\Xi \not\leq \omega_\Xi$. Рассмотрим вначале первый их них.

Найдем такое натуральное n , при котором $\Xi \in [\gamma_{n-1}, \gamma_n)$. Обозначим $\varpi_\gamma = \inf\{z_\gamma, \omega_\gamma\}$. Имеем $\varpi_\Xi = z_\Xi$. При любом $\xi \in (\Xi, \gamma_n)$ выполнено $\varpi_\xi \leq z_\xi$ и $\varpi_\xi \neq z_\xi$. Далее, $K_\xi \varpi_\xi \leq K_\xi z_\xi = z_\xi$, $K_\xi \varpi_\xi \leq K_\xi \omega_\xi = \omega_\xi$ и поэтому $K_\xi \varpi_\xi \leq \varpi_\xi$, $K_\xi^2 \varpi_\xi \leq K_\xi \varpi_\xi$. Для любого положительного ε вследствие улучшения оператора K можно так выбрать $\hat{\xi} \in (\Xi, \gamma_n)$, что $\|K_{\hat{\xi}} \varpi_{\hat{\xi}}\| - \|K_\Xi \varpi_\Xi\| \leq \varepsilon$, т.е. $\|K_{\hat{\xi}} \varpi_{\hat{\xi}}\| \leq \|z_\Xi\| + \varepsilon$. Вычислим $f_{\gamma_n} = \inf\{z_{\gamma_n}, K_{\hat{\xi}} \varpi_{\hat{\xi}}\}$. Из формулы (8) получаем

$$\|f_{\gamma_n}\| \leq \tilde{k}(\|z_{\gamma_n}\| + \|K_{\hat{\xi}} \varpi_{\hat{\xi}}\|) \leq \tilde{k}(2\|z_{\gamma_n}\| + \varepsilon) \leq \tilde{k}(2\|z_{\gamma_{n-1}}\| + 2 + \varepsilon).$$

Таким образом, если взять $\varepsilon \leq 1$, то $f_{\gamma_n} \in U_n$. Кроме того, так как $K_{\gamma_n} f_{\gamma_n} \leq K_{\gamma_n} z_{\gamma_n} = z_{\gamma_n}$ и $K_{\hat{\xi}} f_{\hat{\xi}} \leq K_{\hat{\xi}}^2 \varpi_{\hat{\xi}} \leq K_{\hat{\xi}} \varpi_{\hat{\xi}}$, то $K_{\gamma_n} f_{\gamma_n} \leq f_{\gamma_n}$. Согласно теореме 1 в множестве U_n существует неподвижная точка g_{γ_n} , для которой $g_{\gamma_n} \leq f_{\gamma_n} \leq z_{\gamma_n}$, причем согласно построениям $g_{\gamma_n} \neq z_{\gamma_n}$. Это противоречит тому, что z_{γ_n} является наименьшим из решений, принадлежащих множеству U_n .

Рассмотрим теперь вторую ситуацию: $z_\Xi \not\leq \omega_\Xi$. Найдем натуральное n , при котором $\Xi \in (\gamma_{n-1}, \gamma_n]$. Обозначим $\varpi_\gamma = \inf\{z_\gamma, \omega_\gamma\}$. Имеем $\varpi_\Xi \leq z_\Xi$, $\varpi_\Xi \neq z_\Xi$. При любом $\xi \in (\gamma_{n-1}, \Xi)$ выполнено $\varpi_\xi = z_\xi$. Далее, $K_\Xi \varpi_\Xi \leq K_\Xi z_\Xi = z_\Xi$, $K_\Xi \varpi_\Xi \leq K_\Xi \omega_\Xi = \omega_\Xi$ и поэтому $K_\Xi \varpi_\Xi \leq \varpi_\Xi$, $K_\Xi^2 \varpi_\Xi \leq K_\Xi \varpi_\Xi$. Для любого положительного ε вследствие улучшения оператора K можно так выбрать $\hat{\xi} \in (\gamma_{n-1}, \Xi)$, что $\|K_\Xi \varpi_\Xi\| - \|K_{\hat{\xi}} \varpi_{\hat{\xi}}\| \leq \varepsilon$, т.е. $\|K_\Xi \varpi_\Xi\| \leq \|z_{\hat{\xi}}\| + \varepsilon \leq \|z_{\gamma_n}\| + \varepsilon$. Вычислим $f_{\gamma_n} = \inf\{z_{\gamma_n}, K_\Xi \varpi_\Xi\}$. Из формулы (8) получаем $\|f_{\gamma_n}\| \leq \tilde{k}(\|z_{\gamma_n}\| + \|K_\Xi \varpi_\Xi\|) \leq \tilde{k}(2\|z_{\gamma_n}\| + \varepsilon)$. Таким образом, $f_{\gamma_n} \in U_n$. Кроме того, так как $K_{\gamma_n} f_{\gamma_n} \leq K_{\gamma_n} z_{\gamma_n} = z_{\gamma_n}$ и $K_\Xi f_\Xi \leq K_\Xi^2 \varpi_\Xi \leq K_\Xi \varpi_\Xi$, то $K_{\gamma_n} f_{\gamma_n} \leq f_{\gamma_n}$. Согласно теореме 1 в множестве U_n существует неподвижная точка g_{γ_n} , для которой $g_{\gamma_n} \leq f_{\gamma_n} \leq z_{\gamma_n}$, причем согласно построениям $g_{\gamma_n} \neq z_{\gamma_n}$. Это противоречит тому, что z_{γ_n} является наименьшим из решений, принадлежащих множеству U_n .

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в банаховом пространстве B , удовлетворяющем V -условию, введено отношение порядка, порожденное несплюснутым, вольтерровым на системе v , вольтеррово сильно миниздральным и вольтеррово вполне правильным конусом Λ . Пусть оператор $K: B \rightarrow B$ является улуч-

шающим, вольтерровым на v , монотонным. Пусть, кроме того, для некоторого элемента $u \in B$ выполнено неравенство $u \triangleright Ku$. Тогда:

- существует такое $\delta > 0$ и существует определенное на e_δ локальное решение z_δ уравнения (9), для которого имеет место оценка $z_\delta \triangleleft \Pi_\delta u$;
- любое локальное решение z_γ уравнения (9), для которого имеет место оценка $z_\gamma \triangleleft \Pi_\gamma u$, продолжаемо либо до глобального z_{b-a} , удовлетворяющего неравенству $z_{b-a} \triangleleft u$, либо до предельно продолженного решения z_η такого, что при всех $\delta < \eta$ выполнено $z_\delta \triangleleft \Pi_\delta u$;
- существует либо нижнее глобальное решение z_{b-a} уравнения (9) такое, что $z_{b-a} \triangleleft u$, либо нижнее предельно продолженное решение z_η , сужение которого z_γ на любое e_γ , $\gamma < \eta$, удовлетворяет неравенству $z_\gamma \triangleleft \Pi_\gamma u$.

Действительно, здесь можно воспользоваться теоремами 4–6, так как из полной правильности конуса Λ следует [17; гл. 4, § 33, п. 33.1, гл. 5, п. 38.2] его нормальности и предельная монотонная компактность монотонного оператора $K: B \rightarrow B$.

Мы уже обращали внимание на то, что во всех рассмотренных утверждениях не предполагается непрерывность оператора $K: B \rightarrow B$. Это позволяет применять полученные здесь результаты, например, к изучению скалярного дифференциального уравнения

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (16)$$

в котором функция $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не удовлетворяет условиям Каратеодори. К таким уравнениям приводят некоторые задачи управления, автоматического регулирования [15], [16]. Классические схемы исследования, использующие непрерывность операторов, к уравнению (16) не применимы. Наиболее “продуктивным” и общепризнанным является предложенный А. Ф. Филипповым [30] метод, основанный на построении соответствующего дифференциального включения. В тех случаях, когда уравнение (16) приводится к уравнению с монотонным вольтерровым оператором в некотором банаховом пространстве, можно воспользоваться предложенными выше утверждениями и исследовать само уравнение, не прибегая к замене его включением.

Будем предполагать, что функция f суммируема по первому аргументу, непрерывна справа по второму аргументу и существует такое $c \in (a, b)$, что при почти всех $t \in [c, b]$ функция $f(t, \cdot)$ не убывает, а при почти всех $t \in [a, c]$ функция $f(t, \cdot)$ не возрастает. Как доказано И. В. Шрагиным в [31], эти условия обеспечивают измеримость суперпозиции $f(\cdot, x(\cdot))$ для каждой непрерывной функции x .

Рассмотрим для уравнения (16) краевую задачу с условием

$$x(c) = \alpha. \quad (17)$$

Запишем ее в виде $x'(t) = f\left(t, \alpha + \int_c^t x'(s) ds\right)$. Оператор

$$K: L_{[a,b]} \rightarrow L_{[a,b]}, \quad (Ky)(t) = f\left(t, \alpha + \int_c^t y(s) ds\right),$$

является улучшающим, вольтерровым на совокупности v множеств $e_\gamma = [c - \sigma(\gamma), c + \beta(\gamma)]$, где $\sigma(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ – любые неубывающие функции, для которых $\beta(\gamma) - \sigma(\gamma) = \gamma$. Упорядочим пространство $L_{[a,b]}$ конусом неотрицательных функций.

Этот конус вольтерров на v , вольтеррово сильно миниэдральный, вольтеррово вполне правильный и несплюснутый. Кроме того, с такой упорядоченностью пространства суммируемых функций оператор K будет монотонным. Все перечисленное позволяет воспользоваться следствием к теореме 6 и утверждать, что *если для некоторого $u \in D_{[a,b]}$ выполнено неравенство $u'(t) \geq f(t, u(t))$, $t \in [a, b]$, $u(c) \geq \alpha$, то:*

- *существует такое $\delta > 0$ и существует определенное на $e_\delta = [c - \eta(\delta), c + \beta(\delta)]$ локальное решение x_δ задачи (16), (17), для которого имеет место оценка $x'_\delta(t) \leq u'(t)$, $t \in e_\delta$;*
- *любое локальное решение x_γ задачи (16), (17), для которого имеет место оценка $x'_\gamma(t) \leq u'(t)$, $t \in e_\gamma$, продолжаемо до решения x_ξ , определенного на таком интервале (ξ_1, ξ_2) , что*

$$\xi_1 = a \vee \int_{\xi_1}^c |x'_\xi(s)| ds = \infty, \quad \xi_2 = b \vee \int_c^{\xi_2} |x'_\xi(s)| ds = \infty,$$

и удовлетворяющего неравенству $x'_\xi(t) \leq u'(t)$, $t \in (\xi_1, \xi_2)$;

- *существует нижнее решение $\underline{x}_\xi$ задачи (16), (17), определенное на таком интервале (ξ_1, ξ_2) , что*

$$\xi_1 = a \vee \int_{\xi_1}^c |\underline{x}'_\xi(s)| ds = \infty, \quad \xi_2 = b \vee \int_c^{\xi_2} |\underline{x}'_\xi(s)| ds = \infty,$$

удовлетворяющее неравенству $\underline{x}'_\xi(t) \leq u'(t)$, $t \in (\xi_1, \xi_2)$; кроме того, для любого локального решения x_γ задачи (16), (17), определенного на $e_\gamma \subset (\xi_1, \xi_2)$, выполнено $\underline{x}'_\xi(t) \leq x'_\gamma(t)$, $t \in e_\gamma$.

Это утверждение применимо также, если при почти всех $t \in [a, b]$ функция $f(t, \cdot)$ не убывает. В этом случае следует взять $c = a$. Если при почти всех $t \in [a, b]$ функция $f(t, \cdot)$ не возрастает, то утверждение также верно при $c = b$.

Автор благодарит А. И. Булгакова за критику и полезные советы и всех участников Тамбовского семинара за обсуждение результатов этой работы.

Список литературы

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Азбелев Н. В. О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Матем. сб. 1956. Т. 39 (81). С. 161–178.
3. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных неравенствах // Матем. сб. 1962. Т. 56 (98). С. 325–342.
4. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. Киев: Наукова думка, 1980.
5. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Разматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
6. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Разматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
7. Азбелев Н. В., Разматуллина Л. Ф. К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь: Изд-во Пермского политех. ин-та, 1986. С. 3–9.

8. Жуковский Е. С. Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 580–584.
9. Жуковская Т. В., Жуковский Е. С. Монотонные операторы и разрешимость функционально-дифференциальных уравнений // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. естеств. и техн. науки. Т. 3. № 2. Тамбов: Изд-во ТГУ, 1998. С. 171–176.
10. Шиндяпин А. И. О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 450–455.
11. Анохин А. В. О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 28. № 5. С. 1037–1040.
12. Румянцев А. Н. Исследование разрешимости краевых задач с применением векторных априорных неравенств при наличии импульсных возмущений // Изв. вузов. Сер. матем. 1996. № 6. С. 75–82.
13. Гусаренко С. А., Жуковский Е. С., Максимов В. П. К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 268–272.
14. Драйвер Р. Д. Топологии для уравнений нейтрального типа и классическая электродинамика // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977. С. 113–127.
15. Берщанский Я. М. Траектории линейных систем с нелинейностью типа реле // Автоматика и телемеханика. 1982. № 7. С. 19–27.
16. Фуллер А. Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем. Труды I конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 584–605.
17. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
18. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
19. Гихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
20. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969.
21. Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.
22. Голдберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
23. Гусаренко С. А. Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 5. С. 1046–1049.
24. Жуковский Е. С. К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1599–1605.
25. Жуковский Е. С. Вольтерровость и спектральные свойства оператора внутренней суперпозиции // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 147–149.
26. Жуковский Е. С. Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2003.
27. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990.
28. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Матем. сб. 1954. Т. 34 (76). С. 145–198.
29. Сумин В. И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
30. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. Т. 51 (93). С. 99–128.
31. Шрагин И. В. Измеряемость суперпозиций разрывных функций // Труды Тамб. ин-та хим. машиностроения. 1969. С. 6–8.