Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Галоян, М. Г. Григорян, А. Х. Кобелян, О сходимости рядов Фурье по классическим системам, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 7, 55–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:13:40

УДК 517.51

Л. Н. Галоян, М. Г. Григорян, А. Х. Кобелян

О сходимости рядов Фурье по классическим системам

В работе доказаны следующие результаты:

- существует суммируемая функция такая, что любая подпоследовательность средних Чезаро отрицательного порядка ряда Фурье этой функции расходится почти всюду;
- можно изменить значения произвольной суммируемой функции на множестве (не зависящем от этой функции) сколь угодно малой меры таким образом, чтобы ряд Фурье как по системе Франклина, так и по системе Хаара вновь полученной “исправленной” функции абсолютно сходилась почти всюду на $[0, 1]$;
- существует непрерывная функция, которая обладает неустраимой абсолютной расходимостью.

Библиография: 47 названий.

Ключевые слова: ряд Фурье, классические системы, средние Чезаро, сходимость почти всюду, по норме, абсолютная.

DOI: 10.4213/sm8424

Введение

Настоящая статья посвящена изучению сходимости в $L^1(-\pi, \pi)$ и почти всюду средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье по тригонометрической системе, а также абсолютной сходимости почти всюду рядов Фурье по системам Хаара и Франклина с точки зрения классических теорем об исправлении. Напомним, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину (см. [1]). Им в 1912 г. был получен знаменитый результат, согласно которому любую измеримую почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию. В 1939 г. Д. Е. Меньшов доказал следующую фундаментальную теорему (см. [2]).

ТЕОРЕМА А (усиленное C -свойство). Пусть $f(x)$ – измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E с мерой $\mu E > 2\pi - \varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

В 1991 г. М. Г. Григоряном был получен следующий результат (см. [3]).

Работа выполнена при поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения (проект SCS 13-1A313).

ТЕОРЕМА В (усиленное L^1 -свойство). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $\mu E > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1[0, 2\pi]$.*

Интересные результаты об исправленной функции получены Д. Е. Меньшовым, А. А. Талаляном, Ф. Г. Арутюняном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Капиным, А. М. Олевским, М. Г. Григоряном, К. С. Казаряном, Ш. В. Хеладзе, А. Б. Гулисашвили, Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе, Г. Г. Геворкяном, С. В. Кисляковым, С. А. Епископосьяном, А. Х. Кобеляном, Л. Н. Галояном и другими авторами (см. [4]–[29]).

Как известно, последовательность частичных сумм тригонометрического ряда Фурье от суммируемой функции содержит почти всюду сходящуюся подпоследовательность (см. [30; гл. VIII, § 21, теорема 2]). В связи с этим Д. Е. Меньшов (см. [31]) поставил следующий вопрос: будет ли верным последнее утверждение, если заменить обычную сходимость на методы суммирования Чезаро отрицательного порядка? Иначе говоря, должна ли последовательность средних Чезаро отрицательного порядка ряда Фурье от суммируемой функции содержать почти всюду сходящуюся подпоследовательность? В той же работе им установлен результат, дающий отрицательный ответ на этот вопрос. Точнее, верна

ТЕОРЕМА С. *Если*

$$0 \leq \rho < 1, \quad \varepsilon > 0, \quad -1 < \alpha < -\rho,$$

то всякая подпоследовательность, содержащаяся в последовательности чезаровских средних порядка α любого из рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\rho} \ln^{\varepsilon} n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\rho} \ln^{\varepsilon} n},$$

расходится на множестве положительной меры.

Пример суммируемой функции, дающий отрицательный ответ на поставленный выше вопрос, получится, если взять в этой теореме, например, $\rho = 0$, $\varepsilon = 1$.

Далее Д. Е. Меньшов поставил следующий естественный вопрос: можно ли добиться сходимости средних Чезаро отрицательного порядка ряда Фурье от суммируемой функции, если изменить значения этой функции вне заданного множества положительной меры? В работе [4] им же получен следующий результат.

ТЕОРЕМА D. *Пусть $\alpha < 0$ и $\alpha \neq -1, -2, \dots$. Тогда для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, и для любого положительного числа ε можно определить измеримое множество $E \subset [-\pi, \pi]$ с мерой $\mu E > 2\pi - \varepsilon$, непрерывную на всей оси x функцию $g(x)$ и возрастающую последовательность натуральных чисел n_{ν} , $\nu = 0, 1, \dots$, такие, что $f(x) = g(x)$*

на E и чезаровские средние $\sigma_{m_\nu}^\alpha(x, g)$, $\nu = 0, 1, \dots$, сходятся равномерно к $g(x)$ на всей оси x .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\alpha < -1/2$ в последней теореме невозможно вместо m_ν взять ν . Действительно, согласно известному свойству методов Чезаро (см. [32; гл. 3, § 1, теорема 1.22]), коэффициенты Фурье исправленной функции в этом случае имели бы порядок $o(n^\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, согласно теореме А. М. Олевского (см. [33]) невозможно изменением значений функции на множестве малой меры добиться принадлежности коэффициентов Фурье исправленной функции к пространствам l^q , $q \in [1, 2)$.

В случае $\alpha > -1/2$, как показали Б. С. Капшин и Г. Г. Кошелева, такое усиление возможно. Точнее, имеет место (см. [5])

ТЕОРЕМА Е. Пусть $\alpha \in (-1/2, 0]$. Для любой измеримой функции $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tilde{f}$ такая, что $\mu\{x : f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ и средние Чезаро порядка α ряда Фурье функции $\tilde{f}$ равномерно сходятся.

Вопрос Д. Е. Меньшова (можно ли, изменяя значения любой суммируемой функции f вне заданного множества положительной меры, добиться сходимости п.в. средних Чезаро $\sigma_k^\alpha(x, \tilde{f})$, $k = 1, 2, \dots$, отрицательного порядка исправленной функции $\tilde{f}$?) остается открытым.

В § 1 настоящей работы построена возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{m_\nu\}$ такая, что подпоследовательность средних Чезаро $\sigma_{m_\nu}^\alpha(x, \tilde{f})$ отрицательного порядка исправленной функции $\tilde{f}$ сходится по метрике $L_1[-\pi, \pi]$ и почти всюду. В § 1 также получен результат, который является усилением теоремы С, в частности, в теореме С можно добиться расходимости на множестве полной меры.

В § 2 и § 3 изучается абсолютная сходимость почти всюду рядов Фурье по системам Франклина и Хаара, после исправления функций на множестве сколь угодно малой меры не зависящим от исправляемых функций, а также доказывается существование функции, обладающей неустранимой абсолютной расходимостью (т.е. для любого множества E положительной меры и для каждой его точки плотности x_0 существует непрерывная функция $f \in C[0, 1]$ такая, что для любой ограниченной функции $g(x)$, совпадающей с функцией f на множестве E , ряд Фурье–Франклина функции $g(x)$ абсолютно расходится в точке x_0). Базисы пространства $C[0, 1]$, по которым возможно построение непрерывных функций, обладающих абсолютной расходимостью, будем называть *системами, обладающими свойством $\mathscr{D}$* .

Отметим, что свойство $\mathscr{D}$ не является общим для всех базисов пространства $C[0, 1]$, в частности, система Фабера–Шаудера свойством $\mathscr{D}$ не обладает, более того, в работе [6] для системы Фабера–Шаудера доказана

ТЕОРЕМА F. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in C[0, 1]$ можно найти функцию $g \in C[0, 1]$, совпадающую с f на E , разложение которой

$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(g) \varphi_k(x)$ по системе Фабера–Шаудера абсолютно сходится равномерно на $[0, 1]$ и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(g)| \varphi_n \right\|_C \leq \|g\|_C < 2\|f\|_C.$$

Возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен: существует ли ортогональный базис пространства $C[0, 1]$, для которого верна теорема **F**, или, что то же самое, существует ли ортогональный базис пространства $C[0, 1]$, не обладающий свойством $\mathcal{D}$?

§ 1. О сходимости в метрике $L^1[-\pi, \pi]$ и почти всюду средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье от суммируемых функций

Для формулировки некоторых результатов нам понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительная функция $b(u)$, определенная для $u \in [1, \infty)$, называется *слабо колеблющейся*, если при любом $\delta > 0$ функция $b(u)u^\delta$ при достаточно больших u возрастает, а $b(u)u^{-\delta}$ убывает.

Отметим, что если $b(u)$ – слабо колеблющаяся функция, то (см. [32; гл. V, § 2, формула (2.4)]) для любых фиксированных $\varepsilon, \eta > 0$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} b(u)u^\varepsilon = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{b(\eta u)}{b(u)} = 1. \quad (1.1)$$

Через V будем обозначать класс слабо колеблющихся функций, а через V_0 – класс положительных функций $b(u)$, определенных на $u \in [1, \infty)$, таких, что $b(u)$ при достаточно больших u монотонно убывает, стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$, а при любом $\delta > 0$ функция $b(u)u^\delta$ при достаточно больших u возрастает. Ясно, что $V_0 \subset V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Плотностью $\rho(S)$ подмножества S натуральных чисел называется величина

$$\rho(S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{n},$$

где $s(n)$ – число элементов из S , не превышающих n .

В этом параграфе мы усилим теоремы **C** и **G**. Имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b(u) \in V$, $\beta \in (0, 1)$ и $-1 < \alpha < -\beta$. Тогда всякая подпоследовательность, содержащаяся в последовательности чезаровских средних порядка α любого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^\beta} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^\beta} \sin nx,$$

расходится почти всюду.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $b(u) \in V_0$ и $\alpha \in (-1, 0)$. Тогда всякая подпоследовательность, содержащаяся в последовательности чезаровских средних порядка α любого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n) \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sin nx,$$

расходится почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в теореме 1 (соответственно в косинус-ряде теоремы 2) взять $b(n) = (\ln(n+1))^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$, и $\beta = 1 - 1/p$, где $p > 1$ ($b(n) = (\ln(n+1))^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$), то получим (см. [30; гл. X, § 3]) пример функции из $L^p(0, 2\pi)$, $p > 1$ (из $L^1(0, 2\pi)$; см. [30; гл. I, § 30, теорема 4]), такой, что всякая подпоследовательность средних Чезаро порядка $\alpha \in (-1, -1 + 1/p)$ (порядка $\alpha \in (-1, 0)$) ряда Фурье этой функции расходится почти всюду и, следовательно, по норме L^p , $p > 1$ (по норме L^1).

В работе [7] Д. Е. Меньшов доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА G. Пусть $\alpha \neq -1, -2, \dots$. Тогда для любой функции $f(x)$, суммируемой на $[-\pi, \pi]$, и для любого совершенного нигде не плотного множества $P \subset [-\pi, \pi]$ существуют функция $g(x)$, суммируемая на $[-\pi, \pi]$, и возрастающая последовательность натуральных чисел m_ν , $\nu = 0, 1, \dots$, такие, что $f(x) = g(x)$ на P и

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{m_\nu}^\alpha(x, g) = g(x) \quad \text{н.в. на } [-\pi, \pi],$$

где $\sigma_k^\alpha(x, g)$, $k = 0, 1, \dots$, — средние Чезаро порядка α ряда Фурье функции g .

В настоящем параграфе доказывается

ТЕОРЕМА 3. Для любого совершенного нигде не плотного множества P существует возрастающая последовательность натуральных чисел m_ν , $\nu = 0, 1, \dots$, такая, что для любой функции $f(x)$, суммируемой на $[-\pi, \pi]$, существует функция $g(x)$, суммируемая на $[-\pi, \pi]$, такая, что $f(x) = g(x)$ на P и для любого $\alpha \neq -1, -2, \dots$ подпоследовательность средних Чезаро $\sigma_{m_\nu}^\alpha(x, g)$, $\nu = 0, 1, \dots$, ряда Фурье функции $g(x)$ сходится к этой функции как почти всюду, так и по метрике L^1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 3, в отличие от теоремы G, исправленная функция не зависит от α , а подпоследовательность m_ν , $\nu = 0, 1, \dots$, одна и та же для всех суммируемых функций.

Теорема 3 вытекает из следующей более общей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Для любого совершенного нигде не плотного множества P существует подмножество натуральных чисел S плотности 1 такое, что для любой функции $f(x)$, суммируемой на $[-\pi, \pi]$, существует функция $g(x)$, суммируемая на $[-\pi, \pi]$, такая, что $f(x) = g(x)$ на P и для любого $\alpha \neq -1, -2, \dots$

$$\lim_{m \in S, m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_m^\alpha(t, g) - g(t)| dt = 0,$$

$$\lim_{m \in S, m \rightarrow \infty} \sigma_m^\alpha(x, g) = g(x) \quad \text{н.в. на } [-\pi, \pi].$$

Следует отметить, что в случае $\alpha < -1/2$ теорема 4 окончательна в следующем смысле: невозможно вместо подмножества S взять N , поскольку коэффициенты Фурье исправленной функции принадлежали бы к пространствам l^q , $q \in [1, 2)$, что невозможно в силу свойств чезаровских средних (см. [32; гл. III, § 1, теорема 1.22]) и теоремы А. М. Олевского (см. [33]).

1.1. Доказательства основных лемм. Предварительно мы напомним определение методов суммирования Чезаро и чезаровских средних для произвольных числовых рядов. Пусть дан ряд $\sum u_n$, и пусть $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, $n = 0, 1, \dots$, — частичные суммы этого ряда. Величины

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_k = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha a_k, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \alpha \in R, \quad (1.2)$$

где $\{A_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ определяются, как коэффициенты разложения

$$\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha z^n, \quad |z| < 1,$$

называют (C, α) -средними или чезаровскими средними порядка α ряда $\sum u_n$. Последовательность $\{A_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ называют числами Чезаро. Приведем некоторые свойства этих чисел (см. [32; гл. 3, § 1, формулы (1.11), (1.18)] и [34; гл. 5, § 4]):

$$A_n^\alpha \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \alpha \neq -1, -2, \dots; \quad (1.3)$$

$$A_n^\alpha = \sum_{k=0}^n A_k^{\alpha-1} \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, \quad \alpha \neq -1, -2, \dots; \quad (1.4)$$

$$(-1)^l A_n^\alpha > 0 \quad \text{при } n \geq l, \quad l \in Z^{(+)}, \quad \alpha \in (-l-1, -l); \quad (1.5)$$

$$\{|A_n^\alpha\}_{n=0}^\infty \downarrow \quad \text{при } \alpha < 0, \quad \alpha \neq -1, -2, \dots. \quad (1.6)$$

При доказательстве лемм 2 и 4 мы будем использовать следующую лемму М. И. Дьяченко (см. [35]).

ЛЕММА 1. Для любых $\alpha \in (-1, 0)$, $x \in (0, 2\pi)$ и $n \in N$ справедливо представление

$$\sum_{\nu=0}^n A_\nu^\alpha e^{i(n-\nu)x} = \frac{\exp\left\{i\left(\left(n + \frac{1+\alpha}{2}\right)x - \frac{\pi(1+\alpha)}{2}\right)\right\}}{(2 \sin \frac{x}{2})^{1+\alpha}} + \theta_n(x), \quad (1.7)$$

где $|\theta_n(x)| < M(\alpha)n^\alpha/x$, $M(\alpha)$ зависит лишь от α .

В дальнейшем нам понадобится следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 2. Для любых вещественных $a > 1$, $b > 0$ и $\delta \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mu\{x \in [0, 2\pi]; |\cos(ax - b)| \geq \delta\} &\geq 2\pi - 4 \arcsin \delta - \frac{2\pi + b}{a}, \\ \mu\{x \in [0, 2\pi]; |\sin(ax - b)| \geq \delta\} &\geq 2\pi - 4 \arcsin \delta - \frac{2\pi + b}{a}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая инвариантность меры относительно параллельного переноса и периодичность косинуса, имеем

$$\begin{aligned}
 \mu\{x \in [0, 2\pi] : |\cos(ax - b)| \geq \delta\} &= \mu\left\{x \in \left[-\frac{b}{a}, 2\pi - \frac{b}{a}\right] : |\cos ax| \geq \delta\right\} \\
 &\geq \mu\{x \in [0, 2\pi] : |\cos ax| \geq \delta\} - \mu\left\{x \in \left(2\pi - \frac{b}{a}, 2\pi\right] : |\cos ax| \geq \delta\right\} \\
 &\geq \sum_{j=1}^{[a]} \mu\left\{x \in \left[\frac{2\pi(j-1)}{a}, \frac{2\pi j}{a}\right] : |\cos ax| \geq \delta\right\} - \frac{b}{a} \\
 &= [a] \cdot \mu\left\{x \in \left[0, \frac{2\pi}{a}\right] : |\cos ax| \geq \delta\right\} - \frac{b}{a} = \frac{4[a]}{a} \cdot \arccos \delta - \frac{b}{a} \\
 &\geq 2\pi - 4 \arcsin \delta - \frac{2\pi + b}{a}.
 \end{aligned}$$

Второе утверждение леммы доказывается аналогичным образом. Лемма 2 доказана.

Через $\sigma_{n,1}^{\alpha,\beta}(x)$ и $\sigma_{n,2}^{\alpha,\beta}(x)$ обозначим средние Чезаро порядка α рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-\beta} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-\beta} \sin nx, \quad (1.8)$$

где $b(u) \in V$. Имеем (см. (1.2))

$$\sigma_{n,1}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^\alpha b(\nu) \nu^{-\beta} \cos \nu x, \quad \sigma_{n,2}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^\alpha b(\nu) \nu^{-\beta} \sin \nu x. \quad (1.9)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3. Пусть $b(u) \in V$, $\beta \in (0, 1)$ и $-1 < \alpha < -\beta$. Тогда существуют последовательность функций $\{\psi_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=1}^\infty$, определенных на $(0, 2\pi)$, последовательность чисел $\{\varepsilon_n^{\alpha,\beta}\}_{n=1}^\infty$, стремящаяся к нулю, и натуральное число $n_{\alpha,\beta} > 1$ такие, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^{\alpha,\beta}(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

и средние Чезаро (1.9) порядка α рядов (1.8) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}
 \mu\left\{x \in (0, 2\pi) : |\sigma_{n,i}^{\alpha,\beta}(x)| \geq \frac{b(n)}{n^{\alpha+\beta} \ln n} \cdot \psi_n^{\alpha,\beta}(x)\right\} &\geq 2\pi - \varepsilon_n^{\alpha,\beta}, \\
 n &\geq n_{\alpha,\beta}, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $B_1, B_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от α и β . Зафиксируем число $\gamma \in (-\beta/\alpha, 1)$ и положим $\lambda_k = [k^\gamma]$, $k \in N$ ($[a]$ – целая часть a). Ясно, что при $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k \rightarrow \infty, \quad \frac{k - \lambda_k}{k} \rightarrow 1. \quad (1.10)$$

В силу определения 1 можно выбрать натуральное число k_1 так, что последовательность $b(k)k^{-\beta}$, $k \geq k_1$, монотонно убывает. Поскольку функция $ub(u)$ при достаточно больших значениях аргумента возрастает, то в силу (1.10) можем выбрать натуральное число k_2 таким образом, чтобы при $k \geq k_2$ выполнялись неравенства

$$\lambda_k > 1, \quad k - \lambda_k > k_1, \quad (k - \lambda_k)b(k - \lambda_k) < kb(k). \quad (1.11)$$

Далее, в силу (1.10) можно выбрать натуральное число k_3 таким образом, чтобы при $n \geq k_3$ выполнялись неравенства

$$\left(\frac{n}{n - \lambda_n} \right)^{1+\beta} < 4 \frac{\lambda_n}{n} + 1. \quad (1.12)$$

Пусть $n_{\alpha, \beta} = \max\{k_2, k_3\}$. Обозначим через $S_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ ($S_0(x) = 0$), частичные суммы косинус-ряда (1.8). В силу теоремы Абеля имеем

$$|S_k(x)| \leq \frac{B_1}{x}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad k \geq 1. \quad (1.13)$$

Представим средние Чезаро косинус-ряда (1.8) в следующем виде (см. (1.4)):

$$\begin{aligned} \sigma_{n,1}^{\alpha, \beta}(x) &= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-\lambda_n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} S_\nu(x) + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=n-\lambda_n+1}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} S_\nu(x) \\ &= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-\lambda_n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} S_\nu(x) - \frac{b(n)}{n^\beta A_n^\alpha} \sum_{\nu=\lambda_n}^n A_\nu^\alpha \cos(n-\nu)x + \frac{A_{\lambda_n-1}^\alpha}{A_n^\alpha} S_{n-\lambda_n}(x) \\ &\quad + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\lambda_n-1} A_\nu^\alpha \left[\frac{b(n-\nu)}{(n-\nu)^\beta} - \frac{b(n)}{n^\beta} \right] \cos(n-\nu)x \\ &\quad + \frac{b(n)}{n^\beta A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^n A_\nu^\alpha \cos(n-\nu)x = \sum_{l=1}^5 Q_{n,l}(x). \end{aligned} \quad (1.14)$$

В силу (1.1), (1.3), (1.5), (1.6) и (1.13) имеем

$$|Q_{n,l}(x)| \leq \frac{B_2}{x} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n} \right)^\alpha, \quad x \in (0, 2\pi), \quad n \geq n_{\alpha, \beta}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (1.15)$$

Далее, используя теорему Абеля, с помощью (1.3), (1.6) и (1.10)–(1.12) получим

$$\begin{aligned} |Q_{n,4}(x)| &\leq \frac{B_3}{A_n^\alpha x} \cdot \left[\frac{b(n-\lambda_n)}{(n-\lambda_n)^\beta} - \frac{b(n)}{n^\beta} \right] \\ &= \frac{B_3 b(n)}{A_n^\alpha n^\beta x} \cdot \left[\frac{(n-\lambda_n)b(n-\lambda_n)}{nb(n)} \cdot \left(\frac{n}{n-\lambda_n} \right)^{1+\beta} - 1 \right] \\ &\leq B_4 b(n) \cdot \frac{\lambda_n}{n^{1+\alpha+\beta} x}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad n \geq n_{\alpha, \beta}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Учитывая (1.5), (1.14)–(1.16) и лемму 1, получим

$$\begin{aligned}
 |\sigma_{n,1}^{\alpha,\beta}(x)| &\geq \frac{b(n)}{n^\beta A_n^\alpha} \cdot \left| \sum_{\nu=0}^n A_\nu^\alpha \cos(n-\nu)x \right| - \left| \sum_{l=1}^4 Q_{n,l}(x) \right| \\
 &\geq B_5 \frac{b(n)}{n^{\alpha+\beta}} \cdot \left| \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1+\alpha}{2}\right)x - \frac{\pi(1+\alpha)}{2}\right)}{(2 \sin \frac{x}{2})^{1+\alpha}} \right| - \frac{B_2}{x} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^\alpha \\
 &\quad - B_4 b(n) \cdot \frac{\lambda_n}{n^{1+\alpha+\beta} x}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad n \geq n_{\alpha,\beta}. \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Положим

$$G_n^\alpha = \left\{ x \in (0, 2\pi) : \left| \cos\left(\left(n + \frac{1+\alpha}{2}\right)x - \frac{\pi(1+\alpha)}{2}\right) \right| \geq \ln^{-1} n \right\}, \quad n \geq 2. \quad (1.18)$$

Согласно лемме 2 имеем

$$\mu G_n^\alpha > 2\pi - \varepsilon_n^{\alpha,\beta}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_n^{\alpha,\beta} = 4 \arcsin \ln^{-1} n + \frac{12}{n}, \quad n \geq 2.$$

Положим

$$\psi_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{B_5}{(2 \sin \frac{x}{2})^{\alpha+1}} - \frac{B_2 \lambda_n^\alpha n^\beta \ln n}{x b(n)} - B_4 b(n) \cdot \frac{\lambda_n \ln n}{n x}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Ясно, что (см. (1.1), (1.17) и (1.18))

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^{\alpha,\beta}(x) &> 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{\alpha,\beta} = 0, \\
 |\sigma_{n,1}^{\alpha,\beta}(x)| &\geq \frac{b(n)}{n^{\alpha+\beta} \ln n} \cdot \psi_n^{\alpha,\beta}(x), \quad x \in G_n^\alpha, \quad n \geq n_{\alpha,\beta}. \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно доказать последнее неравенство и для средних $\sigma_{n,2}^{\alpha,\beta}(x)$. Утверждения настоящей леммы сразу следуют из (1.19).

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $b(u) \in V_0$ и $-1 < \alpha < 0$. Тогда существуют последовательность функций $\{\psi_n^\alpha(x)\}_{n=1}^\infty$, определенных на $(0, 2\pi)$, последовательность чисел $\{\varepsilon_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$, стремящаяся к нулю, и натуральное число $n_\alpha > 1$ такие, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^\alpha(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

и средние Чезаро (1.9) порядка α рядов (1.8) при $\beta = 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu \left\{ x \in (0, 2\pi) : |\sigma_{n,i}^{\alpha,0}(x)| \geq \frac{b(n)}{n^\alpha \ln n} \cdot \psi_n^\alpha(x) \right\} \geq 2\pi - \varepsilon_n^\alpha, \quad n \geq n_\alpha, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство леммы 4 осуществляется с помощью рассуждений, применявшихся во время доказательства леммы 3.

1.2. Доказательства теорем 1, 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $b(u) \in M$, $\beta \in (0, 1)$ и $-1 < \alpha < -\beta$, и пусть $\sigma_{n,i}^{\alpha,\beta}(x)$, $i = 1, 2$, – средние Чезаро (1.9) порядка α рядов (1.8). Зафиксируем любую возрастающую последовательность $M = \{m_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow \infty$. Положим

$$G_{\alpha,\beta}^{(i)}(M) = \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{n=q}^{\infty} G_{m_n}^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$G_{m_n}^{(i)} = \left\{ x \in (0, 2\pi) : |\sigma_{n,i}^{\alpha,\beta}(x)| \geq \frac{b(n)}{n^{\alpha+\beta} \ln n} \cdot \psi_n^{\alpha,\beta}(x) \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Согласно лемме 3

$$\mu G_{\alpha,\beta}^{(i)}(M) = \lim_{q \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{n=q}^{\infty} G_{m_n}^{(i)} \right) = 2\pi, \quad i = 1, 2.$$

Покажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\sigma_{n,i}^{\alpha,\beta}(x)| = +\infty, \quad x \in G_{\alpha,\beta}^{(i)}(M), \quad i = 1, 2.$$

Действительно, пусть $x \in G_{\alpha,\beta}^{(i)}(M)$; тогда существует последовательность натуральных чисел $n_k =: n_k(x)$ такая, что $x \in G_{m_{n_k}}^{(i)}$, $k \geq 1$. Следовательно, для достаточно больших значений k

$$|\sigma_{n_k,i}^{\alpha,\beta}(x)| \geq \frac{b(n_k)}{n_k^{\alpha+\beta} \ln n_k} \cdot \psi_{n_k}^{\alpha,\beta}(x),$$

и в силу леммы 3 и (1.1) $\limsup |\sigma_{n,i}^{\alpha,\beta}(x)| = +\infty$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 доказывается так же, как и теорема 1, с единственным различием – вместо леммы 3 используется лемма 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обозначим через

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{1.20}$$

последовательность полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами. Легко проверить, что существуют последовательности функций $\{\bar{g}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\bar{N}_k\}_{k=1}^{\infty}$ и полиномов вида

$$\bar{T}_k(x) = \sum_{j=N_k}^{\bar{N}_k} a_j^{(k)} \cos jx + b_j^{(k)} \sin jx, \tag{1.21}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\bar{g}_k(x) = f_k(x), \quad x \in P, \tag{1.22}$$

$$\|\bar{g}_k(x)\|_{L^1} \leq 3\|f_k(x)\|_{L^1}, \tag{1.23}$$

$$\|\bar{g}_k(x) - \bar{T}_k(x)\|_{L^1} \leq 4^{-3k}, \tag{1.24}$$

$$N_{k+1} = k \cdot 2^k \cdot (\bar{N}_k + 1) \cdot \left[\sum_{i=1}^k l(\bar{T}_i) + 1 \right] + 1, \quad N_1 = 1, \tag{1.25}$$

где

$$l(\overline{T}_i) = \sum_{j=N_i}^{\overline{N}_i} (|a_j^{(i)}| + |b_j^{(i)}|), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

Положим

$$\tilde{N}_{k+1} = k \cdot (\overline{N}_k + 1) \cdot \left[\sum_{i=1}^k l(\overline{T}_i) + 1 \right] + 1, \quad \tilde{N}_1 = 1, \quad (1.27)$$

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\tilde{N}_j, N_j). \quad (1.28)$$

Заметим, что $\rho(S) = 1$. Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (1.20) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{s=1}^N f_{k_s}(x) - f(x) \right\|_{L^1} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^N f_{k_s}(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [-\pi, \pi], \quad (1.29)$$

$$\|f_{k_s}(x)\|_{L^1} \leq 4^{-3s}, \quad s \geq 2. \quad (1.30)$$

Положим $\nu_2 = k_2$, $g_2(x) = \bar{g}_{k_2}(x)$, $T_2(x) = \overline{T}_{k_2}(x)$. Предположим, что уже определены числа $\nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $\{g_s(x)\}_{s=2}^{q-1}$, $\{f_{\nu_s}(x)\}_{s=2}^{q-1}$ и полиномы $\{T_s\}_{s=2}^{q-1}$, удовлетворяющие условиям

$$g_s(x) = f_{k_s}(x), \quad x \in P, \quad s = 2, 3, \dots, q-1, \quad (1.31)$$

$$\|g_s(x)\|_{L^1} < 4^{-s+3}, \quad s = 2, 3, \dots, q-1, \quad (1.32)$$

$$\left\| \sum_{n=2}^s (T_n(x) - g_n(x)) \right\|_{L^1} \leq 4^{-s}, \quad s = 2, 3, \dots, q-1, \quad (1.33)$$

$$\|f_{\nu_s}(x)\|_{L^1} \leq 2 \cdot 4^{-s+1}, \quad s = 2, 3, \dots, q-1. \quad (1.34)$$

Выберем функцию $f_{\nu_q}(x)$ ($q > 2$) из последовательности (1.20) так, чтобы

$$\left\| f_{\nu_q}(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{s=2}^{q-1} (T_s(x) - g_s(x)) \right\} \right\|_{L^1} \leq 4^{-3q}. \quad (1.35)$$

Учитывая (1.30), (1.33) и (1.35), легко проверить, что

$$\|f_{\nu_q}(x)\|_{L^1} \leq 2 \cdot 4^{-q+1}. \quad (1.36)$$

Положим

$$T_q(x) = \overline{T}_{\nu_q}(x) = \sum_{j=N_{\nu_q}}^{\overline{N}_{\nu_q}} a_j^{(\nu_q)} \cos jx + b_j^{(\nu_q)} \sin jx, \quad (1.37)$$

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + \bar{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x). \quad (1.38)$$

В силу (1.22)–(1.24), (1.33) и (1.35)–(1.38) имеем

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in P, \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \|g_q(x)\|_{L^1} &\leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{s=2}^{q-1} (T_s(x) - g_s(x)) \right\} \right\|_{L^1} \\ &\quad + \|\bar{g}_{\nu_q}(x)\|_{L^1} + \left\| \sum_{n=2}^{q-1} (T_s(x) - g_s(x)) \right\|_{L^1} < 4^{-q+3}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{s=2}^q (T_s(x) - g_s(x)) \right\|_{L^1} &\leq \|\bar{g}_{\nu_q}(x) - \bar{T}_{\nu_q}(x)\|_{L^1} \\ &\quad + \left\| f_{\nu_q}(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{s=2}^{q-1} (T_s(x) - g_s(x)) \right\} \right\|_{L^1} < 4^{-q}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ясно, что по индукции можно определить последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q \geq 2}$ и полиномов $\{T_q(x)\}_{q \geq 2}$, удовлетворяющие условиям (1.31)–(1.34) для всех $q > 1$. Положим $g_1(x) = f_{k_1}(x) = T_1(x)$. Определим функцию $g(x)$ и ряд

$$\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

следующим образом:

$$g(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \quad (1.42)$$

$$\sum_{\nu \geq 0} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{j=N_{\nu_q}}^{\bar{N}_{\nu_q}} a_j^{(\nu_q)} \cos jx + b_j^{(\nu_q)} \sin jx + f_{k_1}(x). \quad (1.43)$$

Согласно (1.29), (1.31) и (1.32) имеем $g(x) \in L[-\pi, \pi]$ и $g(x) = f(x)$ при $x \in P$ (множество, где это равенство нарушается, согласно (1.29) имеет меру нуль, и мы полагаем на этом множестве $g(x) = f(x)$). Далее, согласно (1.33) имеем

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\nu=0}^{\bar{N}_{\nu_q}} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) - g(x) \right\|_{L^1} = 0,$$

следовательно, (1.43) является рядом Фурье функции $g(x)$.

Заметим, что частичные суммы $S_p(x, g)$ ряда (1.43), где $N_{\nu_j} \leq p < N_{\nu_{j+1}}$, при достаточно больших $j \in N$ имеют вид

$$\begin{aligned} S_p(x, g) &= \sum_{q=2}^{j-1} \sum_{s=N_{\nu_q}}^{\bar{N}_{\nu_q}} a_s^{(\nu_q)} \cos sx + b_s^{(\nu_q)} \sin sx \\ &\quad + \sum_{s=N_{\nu_j}}^{\min\{\bar{N}_{\nu_j}, p\}} a_s^{(\nu_j)} \cos sx + b_s^{(\nu_j)} \sin sx + f_{k_1}(x). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Зафиксируем любое $\alpha \neq -1, -2, \dots$ и через $\sigma_n^1(x, g)$, $n = 1, 2, \dots$, обозначим арифметические средние (или, что то же самое, $(C, 1)$ -средние) ряда (1.43), т.е. положим

$$\sigma_n^1(x, g) = \frac{1}{n+1} (S_0(x, g) + S_1(x, g) + \dots + S_n(x, g)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.45)$$

Пусть $m \in S$ – любое натуральное число, лежащее правее спектра полинома $f_{k_1}(x)$; тогда при некотором $k \in N$ (см. (1.28)) $m \in [\tilde{N}_k, N_k]$. Учтывая (1.4), (1.44) и (1.45), можем записать

$$\begin{aligned} \sigma_m^\alpha(x, g) - g(x) &= \sigma_m^\alpha(x, g) - S_{\bar{N}_{k-1}}(x, g) + S_{\bar{N}_{k-1}}(x, g) - g(x) \\ &= (\sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(x, g) - g(x)) + \frac{m+1}{m - \bar{N}_{k-1}} \cdot (\sigma_m^1(x, g) - \sigma_{\bar{N}_{k-1}}^1(x, g)) \\ &\quad + \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\bar{N}_{k-1}} A_{m-\nu}^{\alpha-1} (S_\nu(x, g) - S_{\bar{N}_{k-1}}(x, g)) \\ &= I_{m,1}(x) + I_{m,2}(x) + I_{m,3}(x). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Известно, что арифметические средние ряда Фурье от любой суммируемой функции сходятся к этой функции почти всюду и по L_1 -норме. Пусть m стремится к бесконечности, оставаясь на множестве S . Ясно, что тогда $k \rightarrow \infty$, следовательно, $I_{m,1}(x) \rightarrow 0$ почти всюду и по L_1 -норме. Поскольку

$$\frac{m+1}{m - \bar{N}_{k-1}} \leq \frac{\tilde{N}_k + 1}{\tilde{N}_k - \bar{N}_{k-1}},$$

то в силу (1.27) $I_{m,2}(x) \rightarrow 0$ почти всюду и по L_1 -норме. Далее, в силу (1.5) числа A_ν^α , $\nu = 0, 1, \dots$, начиная с некоторого номера сохраняют постоянный знак, следовательно, для достаточно больших значений m имеем

$$|I_{m,3}(x)| \leq \frac{|A_{m-\bar{N}_{k-1}-1}^\alpha - A_m^\alpha|}{|A_m^\alpha|} \cdot \sum_{i=1}^k l(\bar{T}_i).$$

Используя оценку

$$|(A_{m-\bar{N}_{k-1}}^\alpha - A_m^\alpha) \cdot (A_m^\alpha)^{-1}| < \frac{B(\alpha)\bar{N}_{k-1}}{m} \leq \frac{B(\alpha)\bar{N}_{k-1}}{\tilde{N}_k},$$

где $B(\alpha)$ – положительное постоянное, зависящее от α , и условия леммы, заключаем (см. (1.27)), что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{m \in S, m \rightarrow \infty} \|\sigma_m^\alpha(x, g) - g(x)\|_{L^1} &= 0, \\ \lim_{m \in S, m \rightarrow \infty} |\sigma_m^\alpha(x, g) - g(x)| &= 0 \quad \text{п.в. на } [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

§ 2. Абсолютная сходимость рядов Фурье–Франклина

Напомним определение системы Франклина. Пусть $\pi_1 = \{0, 1\}$ и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$

$$\pi_n = \{t_s\}_{s=0}^n, \quad \text{где} \quad t_s = t_s(n) = \begin{cases} \frac{s}{2^{k+1}}, & \text{если } s = 0, 1, \dots, 2i, \\ \frac{s-i}{2^k}, & \text{если } s = 2i+1, \dots, n. \end{cases}$$

Через S_{π_n} обозначим пространство функций, непрерывных на $[0, 1]$ и кусочно линейных с узлами из π_n . Отметим, что π_n получается добавлением в π_{n-1} точки $z_n = t_{2i-1}(n) = (2i-1)/2^{k+1}$.

Система функций Франклина $F = \{f_n(x)\}$ определяется на $[0, 1]$ следующим образом:

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1) \quad \text{для } x \in [0, 1]$$

и при $n \geq 2$

$$f_n(x) \in S_{\pi_n}, \quad f_n \perp S_{\pi_{n-1}}, \quad \|f_n\|_{L^2} = 1, \quad f_n(t_{2i-1}(n)) > 0.$$

В дальнейшем через $A_1, A_2, \dots$ будем обозначать положительные абсолютные постоянные.

В работах [36]–[38] (см. также [39]) З. Чисельским были установлены следующие свойства функций системы Франклина:

$$\|f_n\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \begin{cases} -f_n(0), & \text{если } n = 2^s + 1, \\ f_n(z_n), & \text{если } 2^s < i < 2^{s+1}, \\ -f_n(1), & \text{если } i = 2^s, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$|f_n(t)| < A_1 \sqrt{n} q^{n|t-z_n|} \quad \forall t \in [0, 1], \quad (2.2)$$

$$A_2 \sqrt{n} < \|f_n\|_{L^\infty} = \max_{x \in \{t_{2i-2}, t_{2i-1}, t_{2i}\}} |f_n(x)| < A_3 \sqrt{n}, \quad (2.3)$$

$$A_4 n^{-1/2} < \|f_n(t)\|_{L^1} < A_5 n^{-1/2}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}} |f_n(t)| < A_6 2^{k/2}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.5)$$

где $q \in (0, 1)$ – постоянное число.

Известно, что система Франклина является базисом во всех пространствах $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, и $C[0, 1]$ и безусловным базисом в пространствах $L^p[0, 1]$, $p > 1$. В работе [40] С. Карлин показал, что в пространстве $C[0, 1]$ не существует безусловного базиса. В частности, система Франклина не является безусловным базисом пространства $C[0, 1]$, следовательно, существуют функции $f_0(x) \in C[0, 1]$ и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$ неотрицательных целых чисел такие, что переставленный ряд Фурье–Франклина $\sum_{k=0}^\infty c_{\sigma(k)}(f_0) f_{\sigma(k)}(x)$ функции $f_0(x)$ не сходится по норме $C[0, 1]$.

В этом параграфе доказывается существование функции $f_0(x) \in C[0, 1]$, обладающей неустранимой абсолютной расходимостью. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 5. Система Франклина обладает свойством $\mathcal{D}$, т.е. для любого множества E положительной меры и для каждой его точки плотности x_0 существует непрерывная функция $f \in C[0, 1]$ такая, что для любой ограниченной функции $g(x)$, совпадающей с функцией f на множестве E , ряд Фурье–Франклина функции $g(x)$ абсолютно расходится в точке x_0 .

Из этой теоремы вытекает, что невозможно изменением значений непрерывной функции $f(x) \in C[0, 1]$ на наперед заданном множестве получить функцию $g(x) \in C[0, 1]$, ряд Фурье–Франклина которой абсолютно сходится по норме $C[0, 1]$, а если исключительное множество, на котором происходит изменение, выбрать зависящим от функции, то имеет место следующий результат, принадлежащий Г. Геворкяну (см. [8]).

ТЕОРЕМА Н. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ и для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти непрерывную функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$ и измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu E > 1 - \varepsilon$ такие, что $f = \tilde{f}$ на E и ряд Фурье–Франклина функции $\tilde{f}$ абсолютно сходится к ней равномерно на $[0, 1]$.

Отметим также, что если потребовать, чтобы после исправления функции $f(x) \in L^1[0, 1]$ на наперед заданном множестве получилась функция $g(x)$, ряд Фурье–Франклина которой абсолютно сходится почти всюду на $[0, 1]$, а сама функция была только суммируемой, то такая задача имеет положительное решение. Точнее, верно

ТЕОРЕМА 6. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu E > \frac{1}{2} - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье–Франклина абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$ и последовательность коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ лежит во всех l^r , $r > 2$.

2.1. Доказательства основных лемм.

ЛЕММА 5. Пусть заданы числа $\varepsilon, \lambda, \theta > 0$, $N \in \mathbb{N}$, сегмент $[a, b] \subset [0, 1]$ с двоично-рациональными концами ($a = m_1/k_1$, $b = m_2/k_2$) и линейная на $[a, b]$ функция $g(x)$ с $g(x) \leq 1$ для любых $x \in [a, b]$.

Тогда существуют полином по системе Франклина вида

$$Q(x) = \sum_{n=N}^M a_n f_n(x)$$

и множество $E \subset [a, b]$, $\mu E > (1 - \varepsilon)(b - a)$ такие, что:

- 1) $Q(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$;
- 2) $Q(x) + g(x) = 1$ при $x \in E$;
- 3) $Q(x) + g(x) \leq 1$ при $x \in [0, 1]$;
- 4) $\sum_{n=N}^M |a_n f_n(t)| < \theta$ при $t \notin (a - \lambda, b + \lambda)$;
- 5) $|Q(x)| < \frac{55}{\varepsilon} \max_{t \in [a, b]} (g(t) + 1)$ при $x \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем натуральные числа $\alpha > 3$ и k таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$2^{3-\alpha} \leq \varepsilon < 2^{4-\alpha}, \quad (2.6)$$

$$k > \max(k_1, k_2, \log_2 N + 1),$$

$$A_7(\|g\|_{L^1} + 1) \sum_{n=2^k+1}^{\infty} nq^{n\lambda} < \theta, \quad (2.7)$$

где $A_7 = 3A_1^2$ (см. (2.2)).

Пусть $\Delta_i = [a + (i-1)/2^k, a + i/2^k]$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, где $i_0 = 2^k(b-a)$. На каждом отрезке Δ_i определим непрерывную функцию $\varphi_i(x)$ следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \Delta_i, \\ 1 - g(x) & \text{при } x \in \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{3}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{3}{2^{k+\alpha}} \right], \\ -\gamma_i^{(1)} & \text{при } x = a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+\alpha}}, \\ -\gamma_i^{(2)} & \text{при } x = a + \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{k+\alpha}}, \\ 0 & \text{при } x \in \left\{ a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{2}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{2}{2^{k+\alpha}} \right\}, \\ \text{линейная на остальных отрезках,} \end{cases} \quad (2.8)$$

где постоянные $\gamma_i^{(1)}$ и $\gamma_i^{(2)}$ выбираются так, чтобы для всех $i, j = 1, 2, \dots, i_0$ выполнялись равенства

$$\int_{\Delta_j} \varphi_i(x) dx = 0, \quad \int_{\Delta_j} x \varphi_i(x) dx = 0. \quad (2.9)$$

С помощью простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(1)} = & (1 - g(a + (i-1)2^{-k} + 3 \cdot 2^{-(k+\alpha)})) \frac{2 \cdot 2^\alpha - 15 + 25 \cdot 2^{-\alpha}}{6 - 12 \cdot 2^{-\alpha}} \\ & + (1 - g(a + i \cdot 2^{-k} - 3 \cdot 2^{-(k+\alpha)})) \frac{2^\alpha - 6 + 5 \cdot 2^{-\alpha}}{6 - 12 \cdot 2^{-\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(2)} = & (1 - g(a + (i-1)2^{-k} + 3 \cdot 2^{-(k+\alpha)})) \frac{2^\alpha - 6 + 5 \cdot 2^{-\alpha}}{6 - 12 \cdot 2^{-\alpha}} \\ & + (1 - g(a + i \cdot 2^{-k} - 3 \cdot 2^{-(k+\alpha)})) \frac{2 \cdot 2^\alpha - 15 + 25 \cdot 2^{-\alpha}}{6 - 12 \cdot 2^{-\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Учитывая условия леммы, с помощью (2.10) и (2.11) будем иметь

$$0 < \gamma_i^{(1)} < 4 \cdot 2^\alpha \max_{x \in [a, b]} (g(x) + 1), \quad 0 < \gamma_i^{(2)} < 4 \cdot 2^\alpha \max_{x \in [a, b]} (g(x) + 1). \quad (2.12)$$

Положим

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i(x).$$

Согласно определению функции системы Франклина $f_n(x)$ с номерами $n \leq 2^k$ линейны на отрезках Δ_i , следовательно, (см. (2.8), (2.9))

$$\int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k. \quad (2.13)$$

Поскольку (см. (2.8)) $\varphi(x)$ – кусочно линейная функция с узлами $\pi_{2^k+\alpha+1}$ (т.е. $\varphi \in S_{\pi_{2^k+\alpha+1}}$), из (2.13) следует, что

$$\varphi(x) = Q(x) = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+\alpha+1}} a_n f_n(x). \quad (2.14)$$

Из (2.6), (2.8) и (2.12) получаем

$$\max_{x \in [a, b]} |Q(x)| < \frac{55}{\varepsilon} \max_{t \in [a, b]} (g(t) + 1).$$

Учитывая, что функция $Q(x) + g(x)$ кусочно линейна и в узлах принимает значения, не превышающие 1 (см. (2.8), (2.14)), сразу получаем

$$\begin{aligned} Q(x) + g(x) &\leq 1 \quad \forall x \in [0, 1], \\ \|Q\|_{L^1} &< 2(\|g\|_{L^1} + 1). \end{aligned}$$

Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{i_0} \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{3}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{3}{2^{k+\alpha}} \right].$$

Имеем $\mu E > (1 - \varepsilon)(b - a)$. Из (2.8) получаем

$$\begin{aligned} Q(x) + g(x) &= 1 \quad \forall x \in E, \\ Q(x) &= 0 \quad \forall x \notin [a, b]. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждения 1)–3) и 5) настоящей леммы доказаны. Приступим к доказательству утверждения 4). Пусть $t \notin (a - \lambda, b + \lambda)$. В силу (2.2) и того, что a_n есть коэффициенты Фурье–Франклина функции φ , имеем

$$\begin{aligned} |a_n f_n(t)| &\leq A_1 |a_n| n^{1/2} q^{n|t-z_n|} = A_1 n^{1/2} q^{n|t-z_n|} \left| \int_a^b \varphi(x) f_n(x) dx \right| \\ &\leq A_1^2 n^{1/2} q^{n|t-z_n|} \|\varphi\|_{L^1} \|f_n\|_{L^\infty} \leq A_1^2 n^{1/2} q^{n|t-z_n|} \|\varphi\|_{L^1} n^{1/2} q^{n\rho(z_n, (a, b))} \\ &\leq 3A_1^2 (\|g\|_{L^1} + 1) n q^{n(|t-z_n| + \rho(z_n, (a, b)))} = A_7 (\|g\|_{L^1} + 1) n q^{n(|t-z_n| + \rho(z_n, (a, b)))}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Учитывая, что $|t - z_n| + \rho(z_n, (a, b)) \geq \lambda$, где $\rho(z_n, (a, b))$ – расстояние от точки z_n до интервала (a, b) , из (2.7) и (2.15) получим

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+\alpha+1}} |a_n f_n(t)| < A_7 (\|g\|_{L^1} + 1) \sum_{n=2^k+1}^{\infty} n q^{n\lambda} < \theta.$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть заданы натуральное число N , положительные вещественные числа $\lambda, \theta, \tau, \sigma, \varepsilon, \delta$ ($\varepsilon < \delta$) и сегмент $[a, b]$ с двоично-рациональными концами ($a = m_1/k_1, b = m_2/k_2$).

Тогда существуют полином по системе Франклина вида

$$Q(x) = \sum_{n=N}^M b_n f_n(x)$$

и множества $G \subset E \subset [a, b]$ такие, что:

- 1) $\mu E > (1 - \varepsilon)(b - a)$, $\mu G > (1 - \delta)(b - a)$;
- 2) $Q(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$;
- 3) $Q(x) = 1$ при $x \in E$;
- 4) $\|Q\|_{L^1} < 2(b - a)$;
- 5) $\sum_{n=N}^M |b_n f_n(t)| < \frac{B}{\delta \ln \delta^{-1}}$ при $t \in G$, где B – абсолютная постоянная;
- 6) $\sum_{n=N}^M |b_n f_n(t)| < \theta$ при $t \notin (a - \lambda, b + \lambda)$;
- 7) $\sum_{n=N}^M |b_n|^{2+\sigma} < \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем натуральные числа $\alpha > 3$ и k таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$2^{3-\alpha} \leq \delta < 2^{4-\alpha}, \quad k > \max(k_1, k_2, \log_2 N + 1), \quad (2.16)$$

$$A_8 \sum_{n=2^k+1}^{\infty} n q^{n\lambda} < \frac{\theta}{2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{A_{12}}{\varepsilon \delta} \sum_{n=2^k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma/2}} < \tau, \quad (2.18)$$

где $A_8 = 2A_1^2$, $A_{12} = 500A_5$ (см. (2.2) и (2.4)).

Пусть $\Delta_i = [a + (i - 1)/2^k, a + i/2^k]$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, где $i_0 = 2^k(b - a)$. На каждом интервале Δ_i определим непрерывную функцию $\varphi_i(x)$ следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \Delta_i, \\ 1 & \text{при } x \in \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{3}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{3}{2^{k+\alpha}} \right], \\ -2^{\alpha-1} + 2.5 & \text{при } x \in \left\{ a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{k+\alpha}} \right\}, \\ 0 & \text{при } x \in \left\{ a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{2}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{2}{2^{k+\alpha}} \right\}, \\ \text{линейная на остальных отрезках.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Легко проверить, что при всех $i, j = 1, 2, \dots, i_0$

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_i(x)| = 2^{\alpha-1} - 2.5, \quad \varphi_i(x) \leq 1, \quad (2.20)$$

$$\int_{\Delta_j} \varphi_i(x) dx = 0, \quad \int_{\Delta_j} x \varphi_i(x) dx = 0. \quad (2.21)$$

Положим

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i(x). \quad (2.22)$$

Функции системы Франклина $f_n(x)$ с номерами $n \leq 2^k$ линейны на отрезках Δ_i , следовательно (см. (2.19) и (2.21)),

$$\int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k.$$

Поскольку (см. (2.19)) $\varphi(x)$ – кусочно линейная функция с узлами $\pi_{2^{k+\alpha+1}}$ (т.е. $\varphi \in S_{\pi_{2^{k+\alpha+1}}}$), то

$$\varphi(x) = \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+\alpha+1}} a_n f_n(x). \quad (2.23)$$

Пусть

$$G = \bigcup_{i=1}^{i_0} \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{3}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{3}{2^{k+\alpha}} \right].$$

Из (2.16) и (2.19) вытекает, что

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{при } x \in G, \quad \mu G > (1 - \delta)(b - a). \quad (2.24)$$

Для коэффициентов a_n имеем (см. (2.4), (2.20) и (2.23))

$$|a_n| = \left| \int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|f_n\|_{L^1} < A_5 2^\alpha \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (2.25)$$

Используя (2.5), (2.16) и (2.25), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+\alpha+1}} |a_n f_n(x)| &= \sum_{\nu=k}^{k+\alpha} \sum_{n=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |a_n f_n(x)| < A_6 \sum_{\nu=k}^{k+\alpha} 2^{\nu/2} \sup_{2^\nu+1 \leq n \leq 2^{\nu+1}} |a_n| \\ &< A_5 \cdot A_6 \sum_{\nu=k}^{k+\alpha} 2^{\nu/2} 2^\alpha \frac{1}{\sqrt{2^\nu}} < A_5 \cdot A_6 \alpha 2^\alpha < \frac{A_{10}}{\delta \ln \delta^{-1}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Пусть $t \notin (a - \lambda, b + \lambda)$. Имеем (см. (2.2))

$$\begin{aligned} |a_n f_n(t)| &\leq A_1 |a_n| n^{1/2} q^{n|t-z_n|} = A_1 n^{1/2} q^{n|t-z_n|} \left| \int_a^b \varphi(x) f_n(x) dx \right| \\ &\leq A_1^2 n^{1/2} q^{n|t-z_n|} \|\varphi\|_{L^1} n^{1/2} q^{n\rho(z_n, (a, b))} \leq 2A_1^2 n q^{n(|t-z_n| + \rho(z_n, (a, b)))} \\ &= A_8 n q^{n(|t-z_n| + \rho(z_n, (a, b)))}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Учитывая, что $|t - z_n| + \rho(z_n, (a, b)) \geq \lambda$, с помощью (2.17) и (2.27) получим

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+\alpha+1}} |a_n f_n(t)| < A_8 \sum_{n=2^{k+1}}^{\infty} n q^{n\lambda} < \frac{\theta}{2}. \quad (2.28)$$

Положим

$$\alpha_0 = \left\lceil \log_{1/2} \left(\min \left\{ 2^{-\alpha}, \lambda, \varepsilon \frac{\mu G}{2 i_0} \right\} \right) \right\rceil + 1, \quad \lambda_0 = 2^{-\alpha_0}, \quad (2.29)$$

$$\theta_0 = \min \left\{ \frac{\theta}{12 i_0}, \frac{A_{10}}{12 i_0 \delta \ln \delta^{-1}} \right\}. \quad (2.30)$$

Рассмотрим следующие отрезки:

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(1)} &= \left[a + \frac{i-1}{2^k}, a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+\alpha}} \right], \\ \Delta_i^{(2)} &= \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{2}{2^{k+\alpha}} \right], \\ \Delta_i^{(3)} &= \left[a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{2}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i-1}{2^k} + \frac{3}{2^{k+\alpha}} - \lambda_0 \right], \\ \Delta_i^{(4)} &= \left[a + \frac{i}{2^k} - \frac{3}{2^{k+\alpha}} + \lambda_0, a + \frac{i}{2^k} - \frac{2}{2^{k+\alpha}} \right], \\ \Delta_i^{(5)} &= \left[a + \frac{i}{2^k} - \frac{2}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{k+\alpha}} \right], \\ \Delta_i^{(6)} &= \left[a + \frac{i}{2^k} - \frac{1}{2^{k+\alpha}}, a + \frac{i}{2^k} \right], \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, i_0$. Пусть

$$I_n = \Delta_i^{(j)}, \quad n = 6(i-1) + j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

Заметим, что функция $\varphi(x)$ линейна на отрезках I_n , $n = 1, 2, \dots, 6i_0$, и принимает значения, меньшие чем 1 (см. (2.19), (2.22)). Для каждого отрезка I_n , $n = 1, 2, \dots, 6i_0$, последовательным применением леммы 5 можем получить, что существуют полиномы $Q_n(x) = \sum_{m=N_{n-1}}^{N_n-1} b_m^{(n)} f_m(x)$, $N_0 = 2^{k+\alpha+1} + 1$, $n = 1, 2, \dots, 6i_0$, и множества $E_n \subset I_n$, $\mu E_n > (1 - \varepsilon) \mu I_n$, $n = 1, 2, \dots, 6i_0$, такие, что

$$Q_n(x) = 0 \quad \text{при } x \notin I_n, \quad (2.31)$$

$$Q_n(x) + \varphi(x) = 1 \quad \text{при } x \in E_n, \quad (2.32)$$

$$Q_n(x) + \varphi(x) \leq 1 \quad \text{при } x \in I_n, \quad (2.33)$$

$$\sum_{m=N_{n-1}}^{N_n-1} |b_m^{(n)} f_m(t)| < \theta_0 \quad \text{при } \rho(t, I_n) > \lambda_0, \quad (2.34)$$

$$|Q_n(x)| < \frac{50}{\varepsilon} \max_{t \in I_n} (\varphi(t) + 1) \quad \text{при } x \in I_n. \quad (2.35)$$

Положим

$$E = G \cup \bigcup_{n=1}^{6i_0} E_n.$$

Используя (2.24) и (2.29), получим

$$\mu([a, b] \setminus E) < \varepsilon \sum_{n=1}^{6i_0} \mu I_n + 2i_0 \lambda_0 \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{6i_0} \mu I_n + 2\varepsilon \mu G < \varepsilon(b - a),$$

откуда $\mu E > (1 - \varepsilon)(b - a)$. Положим

$$\begin{aligned} Q(x) &= \varphi(x) + \sum_{n=1}^{6i_0} Q_n(x) = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+\alpha+1}} a_n f_n(x) + \sum_{n=1}^{6i_0} \sum_{m=N_{n-1}}^{N_n-1} b_m^{(n)} f_m(x) \\ &= \sum_{n=2^k+1}^M b_n f_n(x), \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$M = N_{6i_0-1}, \quad b_m = \begin{cases} 0, & m \in [N, 2^k), \\ a_m, & m \in [2^k, 2^{k+\alpha+1}], \\ b_m^{(n)}, & m \in [N^{n-1}, N^n), \quad n = 1, 2, \dots, 6i_0. \end{cases}$$

Из (2.24) и (2.32) следует, что

$$Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b). \end{cases}$$

Так как расстояние от любой точки $t \in G$ до любого отрезка I_n больше λ_0 , то имеем (см. (2.26), (2.30), (2.34))

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^k+1}^M |b_n f_n(t)| &= \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+\alpha+1}} |a_n f_n(t)| + \sum_{n=1}^{6i_0} \sum_{m=N_{n-1}}^{N_n-1} |b_m^{(n)} f_m(t)| \\ &\leq \frac{A_{10}}{\delta \ln \delta^{-1}} + 6i_0 \theta_0 < \frac{A_{11}}{\delta \ln \delta^{-1}}. \end{aligned}$$

Если $t \notin (a - \lambda, b + \lambda)$, то $\rho(t, I_n) > \Lambda > \lambda_0$; следовательно (см. (2.28), (2.30), (2.34)),

$$\sum_{n=2^k+1}^M |b_n f_n(t)| = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+\alpha+1}} |a_n f_n(t)| + \sum_{n=1}^{6i_0} \sum_{m=N_{n-1}}^{N_n-1} |b_m^{(n)} f_m(t)| \leq \frac{\theta}{2} + 6i_0 \theta_0 < \theta.$$

Заметим (см. (2.33)), что $Q(x) \leq 1$. Далее, из $\int_0^1 Q(t) dt = 0$, следует, что $\int_+ |Q(t)| dt = \int_- |Q(t)| dt$, где $\int_{\pm} |Q(t)| dt$ — интегралы, распространенные на

множествах, где $Q(x)$ соответственно положителен и отрицателен. Отсюда получим (см. (2.21), (2.28)) $\int_+ |Q(t)| dt < (b-a)$ и

$$\|Q\|_{L^1} < 2(b-a),$$

т.е. утверждения 1)–6) леммы 6 доказаны. Докажем утверждение 7). Из (2.16), (2.20), (2.31), (2.35) и (2.36) следует, что

$$\|Q(x)\|_{L^\infty} < \frac{55}{\varepsilon} \max_{t \in I_n} (\varphi(t) + 1) < \frac{55 \cdot 2^{\alpha-1}}{\varepsilon} < \frac{400}{\varepsilon \delta}.$$

Далее, имеем

$$|b_n| = \left| \int_0^1 Q(x) f_n(x) dx \right| \leq \|Q\|_{L^\infty} \|f_n\|_{L^1} < A_5 \frac{400}{\varepsilon \delta} \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{A_{12}}{\varepsilon \delta} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда (см. (2.18)) получим

$$\sum_{n=2^k+1}^M |b_n|^{2+\tau} < \frac{A_{12}}{\varepsilon \delta} \sum_{n=2^k+1}^M \frac{1}{n^{1+\sigma/2}} < \tau.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $F = \{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – система Франклина.

Тогда для любой ступенчатой функции $f(x)$ $\left(\int_0^1 |f(x)| dx < 1 \right)$ вида

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu(x)}, \quad (2.37)$$

где $\Delta_\nu \equiv \Delta_{\nu_0}^\nu = ((\nu-1)/2^{\nu_0}, \nu/2^{\nu_0}) \equiv (\beta_\nu, \beta_{\nu+1})$, $\nu = 1, \dots, 2^{\nu_0}$, $\gamma_\nu \neq 0$, и для любых чисел $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ существуют множества $G \subset E \subset \Delta$ и полином $Q(x)$ по системе Франклина вида

$$Q(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k f_k(x)$$

такие, что:

- 1) $\mu E > 1 - \varepsilon$;
- 2) $\mu G > 1 - \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}$;
- 3) $Q(x) = f(x)$ на E ;
- 4) $\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} |a_n|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$;
- 5) $\int_0^1 |Q(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx$;

$$6) \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} |a_k f_k(x)| < \frac{B|f(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx} \ln \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}^{-1}} + \varepsilon \quad \forall x \in G, \text{ где } B - \text{абсолютная постоянная.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\delta = \frac{1}{4} \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{2^{\nu_0} + 2}. \quad (2.38)$$

Последовательным применением леммы 6 можно определить множества $\{E_\nu\}_{\nu=1}^{2^{\nu_0}}$, $\{G_\nu\}_{\nu=1}^{2^{\nu_0}}$ и полиномы $\{Q_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\mu_0}$ по системе Франклина вида

$$Q_\nu = \sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} a_k^{(\nu)} f_k(x), \quad \nu = 1, 2, \dots, 2^{\nu_0}, \quad m_0 = k_0 + 1, \quad (2.39)$$

которые для всех $\nu \in [1, 2^{\nu_0}]$ удовлетворяют условиям

$$Q_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, & x \in E_\nu, \\ 0, & x \notin \Delta_\nu, \end{cases} \quad (2.40)$$

$$G_\nu \subset E_\nu \subset \Delta_\nu, \quad (2.41)$$

$$\mu E_\nu = (1 - \varepsilon) \mu \Delta_\nu, \quad (2.42)$$

$$\mu G_\nu = (1 - \delta) \mu \Delta_\nu, \quad (2.43)$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x)| dx < 2|\gamma_\nu| \mu \Delta_\nu, \quad (2.44)$$

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2^{\nu_0}}, \quad (2.45)$$

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} |a_k^{(\nu)} f_k(x)| < \frac{A_{13}|\gamma_\nu|}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx} \ln \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}^{-1}}, \quad x \in G_\nu, \quad (2.46)$$

$$\sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} |a_k^{(\nu)} f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2^{\nu_0}}, \quad x \notin (\beta_\nu - \alpha, \beta_{\nu+1} + \alpha). \quad (2.47)$$

Положим

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} Q_\nu(x), \quad (2.48)$$

$$a_k = a_k^{(\nu)}, \quad k \in [m_{\nu-1}, m_\nu - 1], \quad 1 \leq \nu \leq 2^{\nu_0}, \quad (2.49)$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} E_\nu, \quad G = \left(\bigcup_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} G_\nu \right) \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} [\beta_\nu + \alpha, \beta_{\nu+1} - \alpha] \right). \quad (2.50)$$

Из (2.37)–(2.40), (2.42)–(2.44), (2.48), (2.50) следует, что

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} Q_\nu(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k f_k(x), \quad (2.51)$$

$$Q(x) = f(x), \quad x \in E, \quad \int_0^1 |Q(x)| dx \leq 2 \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\gamma_\nu| \mu \Delta_\nu = 2 \int_0^1 |f(x)| dx,$$

$$\mu E > 1 - \varepsilon, \quad \mu G > 1 - \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}.$$

Далее, используя (2.37), (2.38), (2.46), (2.47), (2.51), для всех $x \in G$ получим

$$\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} |a_k f_k(x)| = \sum_{\nu=1}^{2^{\nu_0}} \sum_{k=m_{\nu-1}}^{m_\nu-1} |a_k^{(\nu)} f_k(x)| \leq \frac{B|f(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx} \ln \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}^{-1}} + \varepsilon,$$

$$\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} |a_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon.$$

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Существует положительное число A_0 такое, что для любых не двоично-рациональной точки $x_0 \in [0, 1]$ и натурального числа $s \geq 3$, удовлетворяющего двойному неравенству $2^{1-s} < x_0 < 1 - 2^{1-s}$, существует натуральное число $n = 2^s + i$ такое, что (см. (2.1))*

$$|f_n(x_0)| > A_0 \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = A_0 |f_n(z_n)|, \quad |z_n - x_0| < \frac{3}{2^{s+2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \alpha_{s+1} \dots$ — двоичное разложение числа $x_0 \in [0, 1]$, и пусть

$$x_0 \in \left(\frac{\ell-1}{2^{s+1}}, \frac{\ell}{2^{s+1}} \right), \quad 4 \leq \ell \leq 2^{s+1} - 4.$$

Обозначим

$$n = 2^s + l_0 = \begin{cases} 2^s + \frac{l}{2}, & \text{если } l \text{ четное и } \alpha_{s+2} = 0, \\ 2^s + \frac{l}{2} + 1, & \text{если } l \text{ четное и } \alpha_{s+2} = 1, \\ 2^s + \frac{l-1}{2}, & \text{если } l \text{ нечетное и } \alpha_{s+2} = 0, \\ 2^s + \frac{l+1}{2}, & \text{если } l \text{ нечетное и } \alpha_{s+2} = 1. \end{cases}$$

Отсюда и из (2.1) следует, что

$$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = f_n(z_n), \quad z_n = \frac{2l_0 - 1}{2^{s+1}}.$$

Учитывая определение числа n , нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} x_0 &\in \left(\frac{l-1}{2^{s+1}}, \frac{2^l-1}{2^{s+2}} \right), & \text{если } l \text{ четное, } \alpha_{s+2} = 0, \\ x_0 &\in \left(\frac{l}{2^{s+1}}, \frac{2^l+1}{2^{s+2}} \right), & \text{если } l \text{ четное, } \alpha_{s+2} = 1, \\ x_0 &\in \left(\frac{l-1}{2^{s+1}}, \frac{2^l-1}{2^{s+2}} \right), & \text{если } l \text{ нечетное, } \alpha_{s+2} = 0, \\ x_0 &\in \left(\frac{l}{2^{s+1}}, \frac{2^l+1}{2^{s+2}} \right), & \text{если } l \text{ нечетное, } \alpha_{s+2} = 1. \end{aligned}$$

Применяя оценки Г. Г. Геворкяна (см. [41]), получим, что

$$|f_n(t_{2i+1})| < 3.5|f_n(t_{2i})|, \quad |f_n(t_{2i-3})| < 3.5|f_n(t_{2i-2})|, \quad n = 2^s + i.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} |f_n(x_0)| &> \frac{49}{196}|f_n(z_n)|, & \text{если } l = 2l_0, \alpha_{s+2} = 0, \\ |f_n(x_0)| &> \frac{300}{1372}|f_n(z_n)|, & \text{если } l = 2l_0, \alpha_{s+2} = 1, \\ |f_n(x_0)| &> \frac{210}{1330}|f_n(z_n)|, & \text{если } l = 2l_0 + 1, \alpha_{s+2} = 0, \\ |f_n(x_0)| &> \frac{41}{214}|f_n(z_n)|, & \text{если } l = 2l_0 + 1, \alpha_{s+2} = 1. \end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

2.2. Доказательства теорем 5 и 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть x_0 не является двоично-рациональной точкой плотности множества E , и пусть $I_m = (a_m, b_m) = ((p_m - 1)/2^m, p_m/2^m)$, $m = 2, 3, \dots$, — двоичные интервалы, содержащие точку x_0 . Положим $G_m = I_m \cap E$, $m \geq 2$, и $\beta_m = 1 - \mu G_m / (\mu I_m)$, $m \geq 2$. Так как x_0 является точкой плотности множества E , то $\beta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Имеем

$$\mu(I_m \setminus G_m) \leq \beta_m \mu I_m = \frac{\beta_m}{2^m}, \quad m \geq 2. \quad (2.52)$$

Так как x_0 не двоично-рациональная, то в ее двоичном разложении $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ бесконечное число раз встретится комбинация 01. По индукции определим подпоследовательности натуральных чисел $m_k, n_k, s_k, k = 1, 2, \dots$, таким образом, чтобы имело место $m_k > n_{k-1}$, $m_1 > 4 \log_{1/2} \min(x_0, 1 - x_0)$ и

$$\beta_{m_k} < \frac{1}{4^k}, \quad (2.53)$$

$$\alpha_{m_k+1} = 0, \quad \alpha_{m_k+2} = 1, \quad (2.54)$$

$$\left| \sum_{\ell=l_0}^{k-1} \frac{(-1)^\ell}{\ell} \frac{f_{n_\ell}(x) - f_{n_\ell}(x_0)}{f_{n_\ell}(x_0)} \right| < \frac{1}{k}, \quad x \in I_{m_k}, \quad k > l_0, \quad (2.55)$$

где n_k получается применением леммы 8 с $s_k = m_k + 3 + k$ ($n_k = 2^{s_k} + i_k$) и удовлетворяет неравенствам

$$|f_{n_k}(x_0)| > A_0 \sup_{t \in [0,1]} |f_{n_k}(t)| = A_0 f_{n_k}(z_n), \quad (2.56)$$

$$|z_{n_k} - x_0| < \frac{3}{2^{s_k+2}}. \quad (2.57)$$

Условие (2.55) корректно ввиду непрерывности функций системы Франклина. Учитывая (2.54), легко видеть, что

$$\min\{|a_{m_k} - x_0|, |b_{m_k} - x_0|\} > \frac{1}{2^{m_k+2}}.$$

Отсюда и из (2.57) получаем

$$|t - z_{n_\ell}| > 2^{k-s_k} \quad \forall \ell \geq k, \quad t \in [0, 1] \setminus (a_{m_k}, b_{m_k}). \quad (2.58)$$

Для любого $t \neq x_0$ существует номер $k(t)$ такой, что

$$t \in I_{m_{k(t)}}, \quad t \notin I_{m_{k(t)+1}}, \quad (2.59)$$

следовательно,

$$|t - z_{n_\ell}| > 2^{k(t)+1-s_{k(t)+1}} \quad \forall \ell \geq k(t) + 1. \quad (2.60)$$

Пусть

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x)}{f_{n_k}(x_0)}. \quad (2.61)$$

Пусть k_0 фиксирована. Рассмотрим несколько случаев, когда $x = x_0$, $k(x) \leq k_0 - 1$, $k(x) > k_0 - 1$. В первом случае имеем

$$\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| < \frac{1}{k_0}.$$

В случае $x \neq x_0$, $k(x) \leq k_0 - 1$ имеем $s_k - s_{k(x)+1} > k - k(x) - 1$. Отсюда в силу (2.2), (2.3), (2.54), (2.56), (2.60) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x)}{f_{n_k}(x_0)} \right| &\leq \frac{A_1}{A_0 A_2} \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\sqrt{n_k} q^{n_k |x - z_{n_k}|}}{\sqrt{n_k} k} \right| \\ &\leq \frac{A_1}{k_0 A_0 A_2} \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{n_k} 2^{k(x)+1-s_{k(x)+1}} \right| \leq \frac{A_1}{k_0 A_0 A_2} \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{n_k} 2^{k(x)+1-s_{k(x)+1}} \right| \\ &\leq \frac{A_1}{k_0 A_0 A_2} \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{2^{s_k+k(x)+1-s_{k(x)+1}}} \right| \leq \frac{A_1}{k_0 A_0 A_2} \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{2^{k-k(x)-1+k(x)+1}} \right| \\ &\leq \frac{A_1}{k_0 A_0 A_2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k} \right| < \frac{A_{14}}{k_0}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3), (2.53), (2.55) в случае $x \neq x_0$, $k(x) > k_0 - 1$ получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x)}{f_{n_k}(x_0)} \right| \\
 & \leq \left| \sum_{k=k_0}^{k(x)-1} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x)}{f_{n_k}(x_0)} \right| + \left| \frac{1}{k(x)} \frac{f_{n_{k(x)}}(x)}{f_{n_{k(x)}}(x_0)} \right| + \left| \sum_{k=k(x)+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x)}{f_{n_k}(x_0)} \right| \\
 & \leq \left| \sum_{k=k_0}^{k(x)-1} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0)}{f_{n_k}(x_0)} \right| + \left| \sum_{k=k_0}^{k(x)-1} \frac{(-1)^k}{k} \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{k(x)} \frac{f_{n_{k(x)}}(x)}{f_{n_{k(x)}}(x_0)} \right| + \left| \sum_{k=k(x)+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{f_{n_k}(x)}{f_{n_k}(x_0)} \right| \\
 & \leq \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} + \frac{A_3}{A_0 A_2} \frac{1}{k(x)} + \frac{A_{14}}{k(x) + 1} < \frac{A_{15}}{k_0}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (2.57) сходится равномерно и функция $F(x)$ непрерывна. Заметим, что из определения функции $F(x)$ (см. (2.61)) вытекает, что

$$|c_{n_k}(F)| = \left| \int_0^1 F(t) f_{n_k}(t) dt \right| = \frac{1}{k |f_{n_k}(x_0)|}.$$

Пусть $g(x)$ – любая ограниченная функция, совпадающая с $F(x)$ на множестве E . Тогда

$$\begin{aligned}
 |c_{n_k}(g) - c_{n_k}(F)| &= \left| \int_0^1 (F(t) - g(t)) f_{n_k}(t) dt \right| = \left| \int_{(0,1) \setminus I_{m_k}} (F(t) - g(t)) f_{n_k}(t) dt \right| \\
 &+ \left| \int_{I_{m_k}} (F(t) - g(t)) f_{n_k}(t) dt \right| = B_1 + B_2.
 \end{aligned}$$

Оценим по отдельности B_1 и B_2 . Учитывая (2.2), (2.58), получим

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \left| \int_{(0,1) \setminus I_{m_k}} (F(t) - g(t)) f_{n_k}(t) dt \right| \leq 2M \int_{(0,1) \setminus I_{m_k}} |f_{n_k}(t)| dt \\
 &\leq 2M \int_{(0,1) \setminus I_{m_k}} |A_1 \sqrt{n_k} q^{n_k |t - z_{n_k}|} dt = 2M A_1 \sqrt{n_k} \int_{(0, a_{m_k})} q^{n_k(z_{n_k} - t)} dt \\
 &\quad + 2M A_1 \sqrt{n_k} \int_{(b_{m_k}, 1)} q^{n_k(t - z_{n_k})} dt = \frac{2M A_1 \sqrt{n_k}}{n_k} q^{n_k(z_{n_k} - a_{m_k})} \\
 &\quad - \frac{2M A_1 \sqrt{n_k}}{n_k} q^{n_k(z_{n_k})} + \frac{2M A_1 \sqrt{n_k}}{n_k} q^{n_k(b_{m_k} - z_{n_k})} - \frac{2M A_1 \sqrt{n_k}}{n_k} q^{n_k(1 - z_{n_k})} \\
 &\leq \frac{8M A_1}{\sqrt{n_k}} q^{n_k 2^{k-s_k}} \leq \frac{8M A_1}{\sqrt{n_k}} q^{2^k},
 \end{aligned}$$

где $M = \sup_{t \in [0,1]} \{f(t), g(t)\}$. Из (2.52) и (2.3) получаем

$$B_2 = \left| \int_{I_{m_k}} (F(t) - g(t)) f_{n_k}(t) dt \right| \leq A_3 \sqrt{n_k} \int_{I_{m_k}} |F(t) - g(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2MA_3\sqrt{n_k}\mu(I_{m_k} \setminus G_{m_k}) \leq 3MA_32^{s_k/2}\beta_{m_k}\mu(I_{m_k}) \\
&\leq 3MA_32^{s_k/2}2^{-2k}2^{m_k} = 3MA_32^{s_k/2-2k+s_k-3-k} = 3MA_3\frac{2^{-k-3}}{2^{s_k/2}} \leq \frac{MA_3}{\sqrt{n_k}}2^{-k}.
\end{aligned}$$

Следовательно, из (2.2) получим

$$|(c_{n_k}(g) - c_{n_k}(F))f_{n_k}(x_0)| < A_3\sqrt{n_k}\frac{1}{\sqrt{n_k}}(8MA_1q^{2^k} + MA_32^{-k}) \leq A_{13}(q^{2^k} + 2^{-k}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)f_n(x_0)| > \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}(g)f_{n_k}(x_0)| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}(f)f_{n_k}(x_0) + (c_{n_k}(g) - c_{n_k}(F))f_{n_k}(x_0)| \\
&> \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}(F)f_{n_k}(x_0)| - \sum_{k=1}^{\infty} |(c_{n_k}(g) - c_{n_k}(F))f_{n_k}(x_0)| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - A_{16} \sum_{k=1}^{\infty} (q^{2^k} + 2^{-k}).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)f_n(x_0)|$ расходится.

В случае двоично-рациональной точки доказательство проводится аналогичным образом.

Теорема 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, и пусть

$$\{H_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0, 1), \quad (2.62)$$

– последовательность всех ступенчатых функций, принимающих рациональные значения на двоичных интервалах ($H_n(x) \neq 0$ для любого $x \in [0, 1]$).

Последовательно применяя лемму 7, можем найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$ и последовательность полиномов по системе Франклина вида

$$Q_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} f_k(x), \quad n \geq 1, \quad m_n \nearrow, \quad (2.63)$$

удовлетворяющие условиям

$$Q_n(x) = H_n(x), \quad x \in E_n, \quad n \geq 1, \quad (2.64)$$

$$\mu E_n > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-8(n+2)}, \quad (2.65)$$

$$\int_0^1 |Q_n(x)| dx < 2 \int_0^1 |H_n(x)| dx, \quad (2.66)$$

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} |a_k^{(n)}|^{2+2^{-n}} < \frac{1}{2^n} = 2^{-n}, \quad n \geq 1, \quad (2.67)$$

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} |a_k^{(n)} f_k(x)| \leq \frac{B|H_n(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |H_n(x)| dx} \ln \sqrt{\int_0^1 |H_n(x)| dx}^{-1}} \quad \forall x \in G_n, \quad n \geq 1, \quad (2.68)$$

$$\mu G_n > 1 - \sqrt{\int_0^1 |H_n(x)| dx}, \quad n \geq 1. \quad (2.69)$$

Положим

$$a_k = a_k^{(n)} \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n), \quad \forall n \geq 1, \quad (2.70)$$

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n. \quad (2.71)$$

Ясно, что (см. (2.65), (2.67))

$$\mu E > 1 - \varepsilon, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^r < \infty \quad \forall r > 2.$$

Пусть $f(x) \in L^1(0, 1)$. Нетрудно заметить, что можно выбрать подпоследовательность $\{H_{n_k}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (2.62) такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^N H_{n_k}(x) - f(x) \right| dx = 0, \quad (2.72)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N H_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [0, 1], \quad (2.73)$$

$$\bar{\varepsilon} \cdot 2^{-4(k+3)} \leq \int_0^1 |H_{n_k}(x)| dx \leq \bar{\varepsilon} \cdot 2^{-4(k+2)}, \quad k \geq 2, \quad (2.74)$$

где $\bar{\varepsilon} = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \int_E |f(x)| dx \right\}.$

Пусть

$$W_k = \{x \in [0, 1]; |H_{n_k}(x)| \leq 2^{-3(k+2)}\}, \quad k \geq 2. \quad (2.75)$$

Отсюда и из (2.73) получаем

$$\mu([0, 1] \setminus W_k) \cdot 2^{-3(k+2)} \leq \int_{[0,1] \setminus B_k} |H_{n_k}(x)| dx \leq \bar{\varepsilon} \cdot 2^{-4(k+2)}, \quad k \geq 2.$$

Следовательно,

$$\mu W_k > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-(k+2)}. \quad (2.76)$$

Положим

$$W = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bigcap_{k=\nu}^{\infty} (W_k \cap G_{n_k}). \quad (2.77)$$

Из (2.65), (2.72), (2.73) и (2.74) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n_k}(x) \right| dx \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |H_{n_k}(x)| dx < \infty, \quad (2.78)$$

$$\mu(W) = 1.$$

Пусть функция $\tilde{f}(x)$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i f_i(x)$ определены следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_{n_k}-1}^{m_{n_k}-1} a_j^{(n_k)} f_j(x), \quad (2.79)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_{n_k}-1}^{m_{n_k}-1} a_j^{(n_k)} f_j(x), \quad (2.80)$$

где

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in \bigcup_{k=1}^{\infty} [m_{n_k}-1, m_{n_k}), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда и из (2.64), (2.66), (2.72), (2.73) и (2.74) получаем

$$\tilde{f}(x) \in L^1(0, 1), \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in E,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{m_{n_k}-1} \delta_i a_i f_i(x) - \tilde{f}(x) \right| dx = 0, \quad (2.81)$$

следовательно,

$$\delta_i a_i = \int_0^1 \tilde{f}(x) f_i(x) dx, \quad i \geq 1.$$

Пусть $x \in W$. Тогда при некотором k_0 (см. (2.77)) будем иметь $x \in W_k \cap G_{n_k}$ для любого $k \geq k_0$. Из (2.68), (2.81) получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=m_{n_k}-1}^{m_{n_k}-1} |a_j^{(n_k)} f_j(x)| &\leq \frac{B |H_{n_k}(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |H_{n_k}(x)| dx} \ln \sqrt{\int_0^1 |H_{n_k}(x)| dx}^{-1}} \\ &\leq \frac{B 2^{-3(k+2)}}{2^{-2(k+2)}(2k+4)} < \frac{B 2^{k+2}}{2k+4}. \end{aligned}$$

Из (2.80), (2.81) следует, что ряд (2.80) почти всюду абсолютно (безусловно) сходится на $[0, 1]$ к $\tilde{f}(x)$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j |a_j f_j(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_{n_k}-1}^{m_{n_k}-1} |a_j^{(n_k)} f_j(x)| < \infty, \quad x \in W,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \delta_i a_i f_i(x) = \tilde{f}(x) \quad \text{п.в.} \quad \forall x \in W.$$

Теорема 6 доказана.

§ 3. Абсолютная сходимость рядов Фурье–Хаара

Напомним определение системы Хаара, нормированной в L_2 (см., например, [42]).

Положим $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = (0, 1)$, $h_1(x) = h_0^{(0)}(x) = \chi_{(0,1)}$ и

$$h_2(x) = h_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1 & \text{при } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

где $\chi(E)$ – характеристическая функция множества E .

Пусть $n = 2^k + i$, $0 < i \leq 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, и $\Delta_n = \Delta_k^{(i)} = ((i-1)/2^k, i/2^k)$. Тогда функция $h_n(x)$ системы Хаара определяется следующим образом:

$$h_n(x) = h_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 2^{k/2-1} & \text{при } x = \frac{i-1}{2^k}, \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right), \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right), \\ -2^{k/2-1} & \text{при } x = \frac{i}{2^k}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Значения функции в точках $\{0, 1\}$ определяются как односторонний предел в этих точках (соответственно правый и левый).

Отметим, что (см. [43], [44]) система Хаара является базисом во всех $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, и безусловным базисом в $L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$. Пусть $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – система Хаара, и пусть $\{v_j\}_{j=1}^\infty \nearrow \infty$ – наперед заданная возрастающая подпоследовательность натуральных чисел.

В настоящем параграфе будут рассмотрены подсистемы системы Хаара вида

$$\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty = \{h_{s_k}(x)\}_{k=1}^\infty = \{h_n(x)\}, \quad n = 2^{v_j} + i, \quad i = 1, \dots, 2^{v_j}. \quad (3.2)$$

Коэффициенты Фурье $c_n(f)$ по системе $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ от суммируемой функции f обозначим как

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t) \lambda_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Для систем Хаара в работе [45] Ф. Г. Арутюнян доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. Для любой измеримой почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^2[0, 1]$, $\mu(\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$, такую, что ее ряд Фурье по системе Хаара абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$.

Применяя иной подход (который отличается от доказательства теоремы I), теорему I можно усилить. Точнее: пусть $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – подсистема системы

Хаара вида (3.2) и $\varepsilon > 0$; тогда для любой измеримой функции f можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1]$, $\mu(\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$, такую, что ряд Фурье по подсистеме $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ функции $\tilde{f}$ абсолютно сходится к $\tilde{f}$ равномерно на $[0, 1]$ и все ненулевые коэффициенты расположены в убывающем порядке.

В [46] М. Г. Григоряном анонсирована следующая теорема.

ТЕОРЕМА J. *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$ и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Хаара расположены в убывающем порядке.*

Отметим, что в теореме J “исключительное” множество, на котором происходит изменение функции, в отличие от теоремы I не зависит от исправляемой функции.

В настоящем параграфе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Для любой непрерывной неотрицательной возрастающей функции $\omega(t)$, $t \in (0, \infty)$, с $\omega(+0) = 0$ и для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье–Хаара абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$, все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ расположены в убывающем порядке и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\tilde{f})|^2 \omega(|c_k(\tilde{f})|) < \infty, \quad c_k(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(t) \lambda_k(t) dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы 7 следует, что значения функции $f \in L^1[0, 1]$ можно изменить на множестве сколь угодно малой меры таким образом, что коэффициенты Фурье вновь полученной функции по системе $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ будут принадлежать пространствам l_r , $r > 2$. В связи с этим отметим, что П. Л. Ульянов построил (см. [47]) пример суммируемой функции, последовательность коэффициентов Фурье–Хаара которой является неограниченной.

Доказательства вспомогательных лемм. Теорема 7 доказывается применением следующих двух лемм.

ЛЕММА 9. *Пусть даны числа $\gamma \neq 0$, $N_0 > 1$, q , q_0 ($q > q_0 > 2$), $N_0 \in \mathcal{N}$ и интервал Хаара $\Delta = [(i-1)/2^\nu, i/2^\nu]$, $i \in [1, 2^\nu]$.*

Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином по подсистеме $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ Хаара вида

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \lambda_k(x)$$

такие, что:

$$1) \mu E = (1 - 2^{-q})\mu\Delta;$$

- 2) $Q(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E, \\ 0, & x \notin \Delta; \end{cases}$
- 3) $\int_0^1 |Q(x)| dx < 2|\gamma|\mu\Delta;$
- 4) $\sum_{k=N_0}^N a_k |\varphi_k(x)| < 2^{q_0} |\gamma|, \quad x \in G;$
- 5) $\mu G = (1 - 2^{-q_0})\mu\Delta;$
- 6) $\sum_{k=N_0}^N a_k |\lambda_k(x)| = 0, \quad x \in 0, 1] \setminus \Delta;$
- 7) $\sum_{k=N_0}^N a_k^2 < 2^{q+1} |\gamma|^2 \mu\Delta;$

и ненулевые коэффициенты в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим подпоследовательность $\{l_i\}$ из $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ таким образом, чтобы имело место

$$l_{i+1} - l_i \geq 2 \quad \forall i \in N, \quad (3.4)$$

и возьмем натуральное число j настолько большим, чтобы имело место

$$l_j \geq 2 \log_2 \frac{|\gamma|}{\delta} + \log_2 \widetilde{N}_0 + \nu, \quad (3.5)$$

где $\widetilde{N}_0$ определяется из условия $h_{\widetilde{N}_0}(x) = \lambda_{N_0}(x)$. Определим полином Q_1 , полагая

$$Q_1 = 2^{-l_j/2} |\gamma| \sum_{s(\Delta_{l_j}^{(s)} \subset \Delta)} h_{l_j}^{(s)}. \quad (3.6)$$

Полином Q_1 на интервале Δ принимает значения γ и $-\gamma$. Через E_1 обозначим множество, на котором Q_1 равняется $-\gamma$. По индукции определим полиномы $Q_2, Q_3, \dots, Q_q$ и множества $E_2, E_3, \dots, E_q$ следующим образом:

$$Q_{i+1} = 2^{i-l_{j+i}/2} |\gamma| \sum_{s: \Delta_{l_{j+i}}^{(s)} \subset E_i} h_{l_{j+i}}^{(s)}(x), \quad (3.7)$$

$$E_{i+1} = \{t \in E_i : Q_{i+1}(t) \neq 2^i \gamma\}. \quad (3.8)$$

Ясно, что

$$|Q_{i+1}(x)| = 2^{i-l_{j+i}/2} |\gamma| \sum_{s: \Delta_{l_{j+i}}^{(s)} \subset E_i} |h_{l_{j+i}}^{(s)}(x)| = \begin{cases} 2^i |\gamma|, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\mu E_1 = \frac{\mu\Delta}{2}, \quad \mu E_{i+1} = \frac{\mu E_i}{2} = 2^{-i-1} \mu\Delta \quad \forall i = 1, 2, \dots, q-1, \quad (3.10)$$

$$E_0 = \Delta \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_{q_0} \supset \dots \supset E_q. \quad (3.11)$$

Определим множества E и G и полином Q следующим образом:

$$E = \Delta \setminus E_q, \quad G = \Delta \setminus E_{q_0}, \quad (3.12)$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^q Q_i(x). \quad (3.13)$$

Из (3.10)–(3.12) будем иметь

$$\mu G = \mu \Delta - \mu E_{q_0} = (1 - 2^{-q_0})\mu \Delta, \quad \mu E = \mu \Delta - \mu E_q = (1 - 2^{-q})\mu \Delta.$$

Учитывая (3.5)–(3.9) и (3.13), получим

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma & \forall x \in E, \\ -(2^q - 1)\gamma & \forall x \in E_q, \\ 0 & \forall x \notin \Delta, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\int_0^1 |Q(x)| dx < 2|\gamma|\mu \Delta, \quad Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \lambda_k(x),$$

где

$$a_k = \int_0^1 Q(x) \lambda_k(x) dx.$$

Отсюда и из (3.10) получим

$$\sum_{k=N_0}^N a_k^2 < \int_0^1 |Q(x)|^2 dx < 2^{q+1}|\gamma|^2 \mu \Delta.$$

Нетрудно видеть, что все коэффициенты в разложениях полиномов Q_i неотрицательны, поэтому неотрицательными будут и коэффициенты a_k . Все ненулевые коэффициенты полинома Q_i равняются $2^{i-1-l_{j+i-1}/2}|\gamma|$.

Из (3.4) имеем

$$2^{i-1-l_{j+i-1}/2}|\gamma| \geq 2^{i-l_{j+i}/2}|\gamma|.$$

Поэтому все ненулевые числа в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке.

Согласно (3.5), (3.9)–(3.11) и (3.14) имеем

$$2^{i-l_{j+i}/2}|\gamma| \leq 2^{-l_j/2}|\gamma| < \delta.$$

Учитывая (3.6)–(3.9), (3.13) и (3.14), для всех $x \in G$ и для каждого $i > q_0$ имеем $Q_i(x) = 0$. Следовательно, для всех $x \in G$ получим

$$\sum_{k=N_0}^N a_k |\lambda_k(x)| = \sum_{i=1}^q |Q_i(x)| = \sum_{i=1}^{q_0} |Q_i(x)| < 2^{q_0}|\gamma|.$$

Из (3.6)–(3.9), (3.13) и (3.14) непосредственно следует также

$$\sum_{k=N_0}^N a_k |\lambda_k(x)| = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \Delta,$$

$$\sum_{k=N_0}^N a_k |\lambda_k(x)| = \sum_{i=1}^q |Q_i(x)| < 2^q|\gamma| \quad \forall x \in \Delta.$$

Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $\omega(t)$, $t \in (0, \infty)$, – непрерывная неотрицательная возрастающая функция с $\omega(+0) = 0$.

Тогда для любого полинома по системе Хаара $f(x)$ с $\int_0^1 |f(x)| dx < 1$ и для любых чисел $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $k_0 \geq 1$ существуют множества $G \subset E \subset \Delta$ и полином $Q(x)$ по подсистеме по $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ вида

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \lambda_k(x)$$

такие, что:

- 1) $\mu E > 1 - \varepsilon$;
- 2) $\mu G > 1 - \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}$;
- 3) $Q(x) = f(x)$ на E ;
- 4) $\int_0^1 |Q(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx$;
- 5) $\sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k |\varphi_{n_k}(x)| < \frac{4|f(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}}$ при $x \in G$;
- 6) $0 \leq a_k < \varepsilon$ и ненулевые коэффициенты в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке;
- 7) $\sum_{k=N_0}^N a_k^2 \omega(|a_k|) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad [0, 1) = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \Delta_\nu, \quad (3.15)$$

где Δ_k имеют вид $\Delta_m^{(i)}$.

Определим числа q_0 и q следующим образом:

$$q_0 = 2 - \left\lceil \log_2 \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx} \right\rceil, \quad q = q_0 + \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil. \quad (3.16)$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\omega\left(\max_{1 \leq \nu \leq \nu_0} (2^q |\gamma_\nu| (\mu \Delta_\nu)^{1/2})\right) + \max_{1 \leq \nu \leq \nu_0} (2^q |\gamma_\nu| (\mu \Delta_\nu)^{1/2}) < \varepsilon_0, \quad (3.17)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{(2^{q+1} \int_0^1 |f(x)|^2 dx + 1)}. \quad (3.18)$$

Последовательным применением леммы 9 можно определить множество $G_\nu \subset E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномы

$$Q_\nu = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} a_k^{(\nu)} \lambda_k(x), \quad \nu = 1, 2, \dots, \nu_0, \quad N_0 = k_0 + 1, \quad (3.19)$$

которые для всех $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$ удовлетворяют условиям

$$Q_\nu = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{на } E_\nu, \\ 0 & \text{вне } \Delta_\nu, \end{cases} \quad \nu = 1, 2, \dots, \nu_0, \quad (3.20)$$

$$\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} |\lambda_k(x)| = 0, \quad x \in [0, 1] \setminus \Delta_\nu, \quad 1 < \nu \leq \nu_0, \quad (3.21)$$

$$\mu E_\nu = (1 - 2^{-q}) \mu \Delta_\nu, \quad (3.22)$$

$$\mu G_\nu = (1 - 2^{-q_0}) \mu \Delta_\nu, \quad (3.23)$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x)| dx < 2|\gamma_\nu| \mu \Delta_\nu, \quad (3.24)$$

$$\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} |\lambda_k(x)| < 2^{q_0+1} |\gamma_\nu| \quad \text{при } x \in G_\nu; \quad (3.25)$$

$0 \leq a_k^{(\nu)} < \varepsilon$ и для каждого $\nu \in [1, \nu_0]$ ненулевые коэффициенты в $\{a_k^{(\nu)}\}_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}$ расположены в убывающем порядке и

$$\max_{j \in [N_\nu; N_{\nu+1})} (a_j^{(\nu)}) < \min_{k \in [N_{\nu-1}; N_\nu)} (a_k^{(\nu)}) \quad \text{при } 1 < \nu \leq \nu_0, \quad (3.26)$$

$$\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2 \leq \int_0^1 |Q_\nu(x)|^2 dx \leq 2^{q+1} |\gamma_\nu|^2 \mu \Delta_\nu. \quad (3.27)$$

Положим

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \quad G = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} G_\nu, \quad (3.28)$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} a_k \lambda_k(x), \quad (3.29)$$

где

$$\bar{k} = N_{\nu_0} - 1, \quad a_k = a_k^{(\nu)}, \quad k \in [N_{\nu-1}; N_\nu), \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0. \quad (3.30)$$

Из (3.15), (3.19)–(3.24), (3.28) и (3.29) вытекает

$$Q(x) = f(x), \quad x \in E, \quad \int_0^1 |Q(x)| dx \leq 2 \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\gamma_\nu| \mu \Delta_\nu = 2 \int_0^1 |f(x)| dx,$$

$$\mu E > 1 - \varepsilon, \quad \mu G > 1 - \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}.$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы 10. Для любого $N \in [k_0; \bar{k}]$ определим ν из условия $N_{\nu-1} \leq N < N_\nu$. Учитывая соотношения (3.15),

(3.16), (3.25) и (3.29), для всех $x \in G$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^N a_k |\lambda_k(x)| &\leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_{\nu}} a_k^{(\nu)} |\lambda_k(x)| \\ &< \sum_{\nu=1}^{\nu_0} 2^{q_0+1} |\gamma_{\nu}| \chi_{\Delta_{\nu}}(x) \leq \frac{2|f(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx}}. \end{aligned}$$

В силу (3.17), (3.18), (3.27) и (3.30) ненулевые коэффициенты в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке, $0 \leq a_k < \varepsilon$ и

$$\begin{aligned} \sum_{k=N_0}^{\bar{k}} |a_k|^2 \omega(|a_k|) &< \omega\left(\max_{N_0 \leq k \leq \bar{k}} |a_k|\right) \cdot \sum_{k=N_0}^{\bar{k}} a_k^2 \\ &\leq \omega\left(\max_{1 \leq \nu \leq \nu_0} ((\mu \Delta_{\nu})^{1/2} 2^{(q+1)/2} |\gamma_{\nu}|)\right) \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left[\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_{\nu}-1} |a_k^{(\nu)}|^2 \right] \\ &\leq \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^{\nu_0} 2^{q+1} |\gamma_{\nu}|^2 \mu \Delta_{\nu} = \varepsilon_0 2^{q+1} \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство теоремы 7 получаем, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 6 и применяя лемму 10 вместо леммы 7.

Список литературы

- [1] Н. Н. Лузинъ, “Къ основной теоремѣ интегральнаго исчисления”, *Матем. сб.*, **28**:2 (1912), 266–294.
- [2] D. Menchoff, “Sur la convergence uniforme des séries de Fourier”, *Матем. сб.*, **11**(53):1–2 (1942), 67–96.
- [3] M. G. Grigorian, “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 ”, *Anal. Math.*, **17**:3 (1991), 211–237.
- [4] Д. Е. Меньшов, “Свойства чезаровских средних отрицательного порядка и некоторых других T -средних для рядов Фурье от непрерывных функций”, *Матем. сб.*, **86**(128):3(11) (1971), 419–445; англ. пер.: D. E. Men’shov, “Properties of Cesàro means of negative order and of certain other T -means for Fourier series of continuous functions”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:3 (1971), 415–441.
- [5] Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, “Об одном подходе к теоремам об исправлении”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1988, №4, 6–9; англ. пер.: B. S. Kashin, G. G. Kosheleva, “An approach to “correction” theorems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **43**:4 (1988), 1–5.
- [6] M. G. Grigoryan, T. M. Grigoryan, “On the absolute convergence of Schauder series”, *Adv. Theor. Appl. Math.*, **9**:1 (2014), 11–14.
- [7] Д. Е. Меньшов, “Свойства чезаровских средних отрицательного порядка для рядов Фурье от суммируемых функций”, *Теория функций и ее приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **134**, 1975, 204–218; англ. пер.: D. E. Men’shov, “Properties of Cesàro means of negative order for Fourier series of summable functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **134** (1977), 229–245.

- [8] Г. Г. Геворкян, “О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина”, *Докл. АН Арм.ССР*, **83**:1 (1986), 15–18.
- [9] Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зерекидзе, “О сопряженных функциях нескольких переменных”, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **94**:3 (1979), 541–544.
- [10] К. И. Осолков, “Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры”, *Докл. АН СССР*, **229**:2 (1976), 304–306; англ. пер.: K. I. Oskolkov, “Uniform modulus of continuity of summable functions on sets of positive measure”, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1976), 1028–1031.
- [11] Ш. В. Хеладзе, “Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L ”, *Матем. сб.*, **107**(149):2(10) (1978), 245–258; англ. пер.: Sh. V. Kheladze, “Convergence of Fourier series almost everywhere and in the L -metric”, *Math. USSR-Sb.*, **35** (1979), 527–534 pp.
- [12] С. В. Кисляков, “Количественный аспект теорем об исправлении”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. IX, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **92**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1979, 182–191.
- [13] М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, *Матем. сб.*, **181**:8 (1990), 1011–1030; англ. пер.: M. G. Grigorian, “On convergence of Fourier series in complete orthonormal systems in the L^1 metric and almost everywhere”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:2 (1991), 445–466.
- [14] S. A. Episkoposian, M. G. Grigorian, “ L^p -convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system”, *J. Math. Anal. Appl.*, **389**:2 (2012), 1374–1379.
- [15] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, *Anal. Math.*, **32**:1 (2006), 49–80.
- [16] M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, “Mean convergence of orthonormal Fourier series of modified functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:8 (2000), 3777–3798.
- [17] М. Г. Григорян, “Об усиленном L_μ^p -свойстве ортонормированных систем”, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 77–106; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “On the L_μ^p -strong property of orthonormal systems”, *Sb. Math.*, **194**:10 (2003), 1503–1532.
- [18] M. Grigoryan, “Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system”, *Studia. Math.*, **198**:2 (2010), 197–206.
- [19] М. Г. Григорян, “Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 49–78; англ. пер.: M. G. Grigoryan, “Modifications of functions, Fourier coefficients and nonlinear approximation”, *Sb. Math.*, **203**:3 (2012), 351–379.
- [20] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, “Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера–Шаудера”, *Матем. сб.*, **199**:5 (2008), 3–26; англ. пер.: M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “Non-linear approximation of continuous functions by the Faber–Schauder system”, *Sb. Math.*, **199**:5 (2008), 629–653.
- [21] M. G. Grigorian, R. E. Zink, “Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134**:12 (2006), 3495–3505.
- [22] A. Kh. Kobelyan, “On the Fourier–Haar coefficients of functions from L_p ”, *International conference “Harmonic analysis and approximations, IV”* (Tsaghkadzor, Armenia), 2008, 73–74.
- [23] M. Grigoryan, A. Kobelyan, “On the convergence of hard sampling operators”, *Second International conference “Mathematics in Armenia: advances and perspectives”* (Tsaghkadzor, Armenia, 2013), 2013, 45–46.
- [24] А. Х. Кобелян, “О сходимости в $L^1[0, 1]$ жадного алгоритма по общей системе Хаара”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **47**:6 (2012), 53–70.
- [25] A. Kh. Kobelyan, “Some property of Fourier–Haar coefficients”, *Adv. Theor. Appl. Math.*, **7**:4 (2012), 433–438.

- [26] A. Kh. Kobelyan, "On a property of general Haar system", *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, **3** (2013), 23–28.
- [27] Л. Н. Галоян, "Суммирование тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов по методу (C, α, β) ", *Изв. НАН Армении. Матем.*, **46:5** (2011), 25–40; англ. пер.: L. N. Galoyan, "Summation of Fourier trigonometric series and conjugate series by the (C, α, β) method", *J. Contemp. Math. Anal.*, **46:5** (2011), 252–263.
- [28] Л. Н. Галоян, "О сходимости в метриках L_p , $p > 1$, средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье–Уолша", *Изв. НАН Армении. Матем.*, **47:3** (2012), 35–54; англ. пер.: L. N. Galoyan, "On convergence of negative order Cesàro means of the Fourier–Walsh series in L_p , $p > 1$, metrics", *J. Contemp. Math. Anal.*, **47:3** (2012), 134–147.
- [29] L. N. Galoyan, "On convergence in $L_1[0, 1]$ norm of some irregular linear means of Walsh–Fourier series", *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, 2012, № 1, 10–15.
- [30] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961, 936 с.; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, v. I, II, The Macmillan Co., New York, 1964, xxiii+553 pp., xix+508 pp.
- [31] Д. Е. Меньшов, "Применение методов суммирования Чезаро отрицательного порядка к тригонометрическим рядам Фурье от суммируемых функций и от функций с суммируемым квадратом", *Матем. сб.*, **93(135):4** (1974), 494–511; англ. пер.: D. E. Men'shov, "Application of Cesàro summability methods of negative order to trigonometric Fourier series of summable and square summable functions", *Math. USSR-Sb.*, **22:4** (1974), 497–515.
- [32] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965, 615 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp.
- [33] А. М. Олевский, "Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана", *Докл. АН СССР*, **238:4** (1978), 796–799; англ. пер.: A. M. Olevskii, "Existence of functions with nonremovable Carleman singularities", *Soviet Math. Dokl.*, **238:4** (1978), 102–106.
- [34] Г. Х. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИЛ, М., 1951, 504 с.; пер. с англ.: G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, Clarendon Press, 1949, xvi+396 pp.
- [35] М. И. Дьяченко, "Теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами", *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 5, 38–47; англ. пер.: M. I. D'yachenko, "The Hardy–Littlewood theorem for trigonometric series with generalized monotone coefficients", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52:5** (2008), 32–40.
- [36] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", *Studia Math.*, **23** (1963), 141–157.
- [37] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system. II", *Studia Math.*, **27** (1966), 289–323.
- [38] Z. Ciesielski, "Constructive function theory and spline systems", *Studia Math.*, **53** (1975), 277–302.
- [39] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, x+550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
- [40] S. Karlin, "Bases in Banach spaces", *Duke Math. J.*, **15:4** (1948), 971–985.
- [41] Г. Г. Геворкян, "Неограниченность оператора сдвига по системе Франклина в пространстве L_1 ", *Матем. заметки*, **38:4** (1985), 523–533; англ. пер.: G. G. Gevorkyan, "Unboundedness of the shift operator with respect to the Franklin system in the space L_1 ", *Math. Notes*, **38:4** (1985), 796–802.
- [42] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Ann.*, **69:3** (1910), 331–371.

- [43] J. Schauder, “Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems”, *Math. Z.*, **28**:1 (1928), 317–320.
- [44] J. Marcinkiewicz, *Collected papers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1964, viii+673 pp.
- [45] Ф. Г. Арутюнян, “О рядах по системе Хаара”, *Докл. АН Арм. ССР*, **42**:3 (1966), 134–140.
- [46] M. G. Grigoryan, “On the unconditional representation of functions in L_p by Haar series”, *International conference on Fourier analysis and approximation theory* (Bazaleti, Georgia, 2013), 2013, 20–21.
- [47] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.

Левон Николаевич Галоян
(Levon N. Galoyan)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: levongaloyan@ysu.am

Поступила в редакцию
23.09.2014

Мартин Геворгович Григорян
(Martin G. Grigoryan)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: gmarting@ysu.am

Артур Хачикович Кобелян
(Artur Kh. Kobelyan)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: a_kobelyan@ysu.am