Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, Существование полуправильных решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 9, 121–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:22:26

УДК 517.95

В. Н. Павленко, Д. К. Потапов

Существование полуправильных решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями

Рассматривается проблема существования полуправильных решений задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью без условия формальной самосопряженности дифференциального оператора. Доказаны теоремы о существовании полуправильных (положительных и отрицательных) решений для исследуемой задачи, получен принцип верхних и нижних решений существования полуправильных решений. Установлено существование нетривиальных полуправильных (положительных и отрицательных) решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями при положительных значениях спектрального параметра.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: спектральные задачи, уравнения эллиптического типа, разрывная нелинейность, полуправильные решения, метод верхних и нижних решений.

DOI: 10.4213/sm8427

§ 1. Введение

Эллиптические краевые задачи с разрывными нелинейностями активно изучаются последние сорок лет. Нелинейные проблемы часто имеют более одного решения. Поэтому актуальной является оценка числа решений, в частности получение результатов о существовании не менее двух или трех решений. В ситуации, когда априори задача имеет тривиальное решение, актуален вопрос существования ненулевых решений. Достаточно хорошо развита техника доказательства существования обобщенных решений задач с разрывными нелинейностями, удовлетворяющих соответствующим включениям. Однако часто интерес представляет ситуация наличия решений, удовлетворяющих самому уравнению (сильные решения), а также сильных решений с дополнительными свойствами – полуправильные и правильные решения (такие решения были введены в совместной работе М. А. Красносельского и А. В. Покровского [1] в 1976 г.). При почти всех значениях пространственной переменной значение полуправильного решения является точкой непрерывности нелинейности по фазовой переменной. Полуправильное решение называется правильным, если оно устойчиво по отношению к возмущениям нелинейности и линейной части уравнения. Теорема существования полуправильного решения эллиптической краевой задачи Дирихле с разрывной нелинейностью была получена в 1995 г. в работе [2] методом верхних и нижних решений в предположении, что нелинейность удовлетворяет правому одностороннему условию Липшица и ограничена. Существенным продвижением в области исследования эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями были работы К.-Ч. Чанга 1980, 1981

и 1983 гг. [3]–[5], в которых были развиты вариационный и топологический подходы применительно к таким задачам. В работе [5] были указаны достаточные условия, при выполнении которых любое обобщенное решение уравнения

$$Lu = g(x, u), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

будет сильным. Здесь L – равномерно эллиптический дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, функция $g(x, u)$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $g_-(x, u)$, $g_+(x, u)$ – соответственно нижний и верхний пределы функции $g(x, \cdot)$ в точке u . Найденное достаточное условие выглядит так: существует не более чем счетное число W_1^2 поверхностей вида $u = \varphi_i(x)$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$ и любой точки разрыва u сечения $g(x, \cdot)$ найдется i , для которого $u = \varphi_i(x)$ и либо $L\varphi_i(x) \notin [g_-(x, \varphi_i(x)), g_+(x, \varphi_i(x))]$, либо $L\varphi_i(x) = g(x, \varphi_i(x))$. Данное условие в случае, когда $g(x, u) \equiv g(u)$, $\{u_i\}$ – множество точек разрыва функции $g(u)$, а коэффициент при u дифференциального оператора Lu равен нулю, означает, что $0 \notin [g_-(u_i), g_+(u_i)]$, т.е. разрыв не должен “проскакивать” нуль. Заметим, что в работе [2] нет дополнительных ограничений на точки разрыва функции $g(x, \cdot)$, кроме одностороннего условия Липшица, допускающего только “прыгающие” вверх разрывы; этим работа [2] выгодно отличается от результатов К.-Ч. Чанга по проблеме существования сильных и полуправильных решений. Однако в этой ситуации считать, что всякое обобщенное решение будет сильным и тем более полуправильным, нельзя. В этом же отношении интересны работы З. Карла и С. Хейкила (см., например, [6], [7]), в которых методом монотонных итераций доказывалось существование сильных решений параболических краевых задач с разрывными нелинейностями при наличии упорядоченной пары нижнего и верхнего решений. При этом основным предположением является существование положительной константы M такой, что добавление $M \cdot u$ к нелинейности, стоящей в правой части уравнения, приводит к неубывающей по u функции. Первые работы, в которых задача Дирихле для уравнения (1.1) с разрывной нелинейностью $g(x, u) \equiv g(u)$ была исследована методом верхних и нижних решений, были опубликованы в 1978 г. и 1980 г. (см. [8]–[11]). В этих работах предполагалось, что функция $g(u)$ равна разности неубывающих функций, а существование сильных решений было получено в случае, когда у функции $g(\cdot)$ допускаются только прыгающие вверх разрывы: в точке разрыва предел слева меньше предела справа для $g(\cdot)$. Более общие результаты о существовании сильных решений для эллиптических и параболических краевых задач с разрывными нелинейностями были получены методом верхних и нижних решений в работах [12]–[14]. При этом приводятся дополнительные условия на точки разрыва нелинейности типа условий Чанга, при выполнении которых всякое сильное решение (1.1) является полуправильным. В ситуации, когда для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие вверх разрывы, существование полуправильных решений уравнения (1.1) для различных краевых условий было получено вариационным методом (см., например, работы [15]–[17]) без дополнительных ограничений на точки разрыва нелинейности. Важно отметить, что в этом случае полуправильными решениями являются не любые критические точки недифференцируемого

функционала задачи, а только точки локальных минимумов этого функционала. В работе [17] найдены достаточные условия существования правильных решений уравнения (1.1) с различными краевыми условиями. Заметим, что вариационный подход реализуем, только когда дифференциальный оператор L формально самосопряженный. В монографии [18] излагается теория критических точек для локально липшицевых функционалов, приводятся новые вариационные принципы для негладких функционалов. В качестве приложений доказываются теоремы существования обобщенных и сильных решений квазилинейных эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями. Теорема существования двух нетривиальных полуправильных решений однородной задачи Дирихле для уравнения (1.1) с $L = -\Delta$ (Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$) в [18] доказывается в случае, когда для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ – неубывающая функция, ее множество точек разрыва $\{u_i\}$ не более чем счетно и не зависит от x , а $0 \notin [g(x, u_j-), g(x, u_j+)]$ для всех точек разрыва u_j (см. теорему 4.8.1 в [18; с. 694]). В работе [19] приводятся постановки нелинейных спектральных задач в пространствах Соболева–Орлича, вариационным методом доказываются существование нетривиального решения для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывными нелинейностями. Однако вопрос существования двух нетривиальных решений не рассматривается. Проблема существования решений нелинейных задач на собственные значения с разрывными операторами в банаховых пространствах изучалась в работах [16], [20]. В работе [21] на случай локально липшицева функционала в банаховом пространстве обобщается теорема о трех критических точках и рассматриваются приложения к спектральным эллиптическим краевым задачам с разрывными нелинейностями (результаты о существовании трех обобщенных решений). В работе [22] исследуются спектральные эллиптические задачи с разрывными нелинейностями, доказывается теорема существования по крайней мере трех обобщенных решений для таких задач с суперлинейной нелинейностью в нуле. Отметим, что в работах [21], [22] предполагается, что проекция множества точек разрыва нелинейности на ось фазовой переменной имеет меру нуль в $\mathbb{R}$. В работе [23] доказана теорема существования по крайней мере двух обобщенных решений для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка с разрывной нелинейностью, суперлинейной в нуле. Проблема существования решений в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями изучалась также в работе [24]. В работе [25] вариационным методом устанавливается разрешимость спектральных задач для вариационных неравенств с разрывными правыми частями.

В настоящей работе доказывается существование полуправильного решения уравнения (1.1) с однородным граничным условием Дирихле, если существует упорядоченная пара нижнего $\underline{u}$ и верхнего $\bar{u}$ решений, не являющихся сильными решениями (теорема 1). Относительно нелинейности $g(x, u)$, кроме суперпозиционной измеримости, предполагается существование положительной константы M такой, что функция $g(x, u) + M \cdot u$ неубывающая по u , причем для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ ограничена по модулю на отрезке $[\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$ функцией $a(x)$ из $L_q(\Omega)$, $q > n$. С помощью теоремы 1 получены предложения о существовании полуправильных положительных (отрицательных) решений рассматриваемой задачи и о существовании одновременно двух

полуправильных решений – положительного и отрицательного (теоремы 4–6). Утверждения о существовании луча (интервала) собственных значений задачи

$$Lu = \mu \cdot g(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

для каждого из которых существует положительное (отрицательное) полуправильное решение задачи (1.2) или одновременно два полуправильных решения (положительное и отрицательное), получаются как следствия теорем 4–6 (см. теоремы 7–12).

§ 2. Постановка задачи. Определения

Исследуется проблема существования нетривиальных полуправильных решений задачи Дирихле

$$Lu(x) = \mu g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.2)$$

для различных значений спектрального параметра $\mu > 0$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Здесь

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j} + c(x)u \quad (2.3)$$

– равномерно эллиптический в Ω дифференциальный оператор, коэффициенты которого a_{ij} , b_j , c непрерывны по Гёльдеру с показателем α вместе с частными производными $(a_{ij})_{x_j}$ на $\bar{\Omega}$. Нелинейность $g(x, u)$ суперпозиционно измеримая: из измеримости $u(x)$ на Ω следует измеримость композиции $g(x, u(x))$ на Ω , и существует постоянная $M > 0$ такая, что функция $g(x, u) + M \cdot u$ неубывающая по u на $\mathbb{R}$. Предполагается, что $g(x, 0) = 0$ почти всюду на Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенным решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $u \in W_1^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая включению*

$$Lu(x) \in \mu[g(x, u(x)-), g(x, u(x)+)]$$

почти всюду на Ω , где $g(x, u-)$, $g(x, u+)$ – пределы слева и справа соответственно функции $g(x, \cdot)$ в точке u .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сильным решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $u \in W_1^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (2.1) для почти всех $x \in \Omega$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Полуправильным решением задачи (2.1), (2.2) называется такое сильное ее решение u , значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Верхним (нижним) решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $\bar{u}(\underline{u}) \in W_1^2(\Omega)$, для которой почти всюду на Ω $L\bar{u} \geq \mu g(x, \bar{u}(x)+)$ (соответственно $L\underline{u} \leq \mu g(x, \underline{u}(x)-)$) и $\bar{u}|_{\partial\Omega} \geq 0$ (соответственно $\underline{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$).*

Поскольку $g(x, 0) = 0$ почти всюду на $\overline{\Omega}$, то при любом значении спектрального параметра $u(x) = 0$ на Ω является сильным решением задачи (2.1), (2.2). Нулевое (тривиальное) решение является полуправильным тогда и только тогда, когда нуль является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$ для почти всех $x \in \Omega$.

§ 3. Принцип верхних и нижних решений существования полуправильных решений

Рассмотрим задачу (2.1), (2.2) при $\mu = 1$:

$$Lu(x) = g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.2)$$

Для эллиптического уравнения (3.1) с граничным условием (3.2) получен ниже следующий принцип верхних и нижних решений существования полуправильных решений.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что:*

1) *функция $g(x, u)$ суперпозиционно измерима и для некоторой положительной константы M функция $g(x, u) + M \cdot u$ для почти всех $x \in \Omega$ неубывающая по u на $\mathbb{R}$;*

2) *задача (3.1), (3.2) имеет нижнее $\underline{u}$ и верхнее $\overline{u}$ решения из пространства $W_q^2(\Omega)$, $q > n$, которые не являются сильными решениями этой задачи, причем $\underline{u} \leq \overline{u}$ на Ω ;*

3) *найдется функция $a \in L_q(\Omega)$ такая, что для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $|g(x, u)| \leq a(x)$ для всех $u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$.*

Тогда задача (3.1), (3.2) имеет полуправильное решение $u \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющее неравенству $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$ на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $g(x, 0) = 0$ почти всюду на Ω отсутствует в формулировке теоремы 1 и не используется при ее доказательстве. В доказательстве теоремы 1 строятся положительное верхнее и отрицательное нижнее решения задачи (3.1), (3.2), а затем устанавливается существование полуправильного решения, лежащего между нижним и верхним решениями. Если $g(x, 0) = 0$ и нуль – точка непрерывности функции $g(x, \cdot)$ почти всюду на Ω , то нуль – полуправильное решение задачи (3.1), (3.2), и в этом случае теорема 1 ничего более не гарантирует. Если же $g(x, 0) = 0$ почти всюду на Ω и нуль является точкой разрыва функции $g(x, \cdot)$ на подмножестве Ω ненулевой меры, то нуль – сильное решение задачи (3.1), (3.2), но не полуправильное. Поэтому в этом случае теорема 1 гарантирует существование нетривиального полуправильного решения задачи (3.1), (3.2).

Отметим, что в работе [2] изучался вопрос существования полуправильных решений задачи (3.1), (3.2) в случае, когда функция $g(x, u)$ суперпозиционно измерима, ограничена на $\Omega \times \mathbb{R}$ некоторой константой и удовлетворяет правому одностороннему условию Липшица: для $x \in \Omega$ выполняется неравенство $(u - v)(g(x, u) - g(x, v)) \geq \gamma(u - v)^2$ при любых $u, v \in \mathbb{R}$, γ – некоторая константа. Дополнительно в [2] предполагалось, что коэффициент $c(x)$ в 2.3 неотрицательный на Ω . При сделанных предположениях строились отрицательное нижнее и

положительное верхнее решения задачи и было доказано существование полуправильного решения, расположенного между нижним и верхним решениями.

При доказательстве теоремы 1 исходная задача преобразуется с использованием обобщенного принципа максимума к задаче с ограниченной нелинейностью в более общем смысле, чем в работе [2]: существует функция $b(x) \in L_q(\Omega)$, $q > n$, ограничивающая модуль нелинейности для всех значений $u \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$. Существование полуправильного решения полученной задачи, расположенного между нижним и верхним решениями, доказывается по схеме, изложенной в [2].

В случае, когда оператор L самосопряженный ($b_j(x) \equiv 0$ на Ω , $j = 1, \dots, n$), теоремы существования нетривиальных полуправильных решений задачи (2.1), (2.2) для каждого значения параметра $\mu \geq \mu_0$ (μ_0 – некоторое положительное число) были получены вариационным методом в работах [16], [26] для ограниченной нелинейности (для почти всех $x \in \Omega$ $|g(x, u)| \leq a(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$) и в [27; теорема 4.1.2] в случае, когда нелинейность $g(x, u)$ имеет подлинейный рост: для почти всех $x \in \Omega$ $|g(x, u)| \leq a(x) + b|u|^r$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$, $b > 0$ и $r \in (0, 1)$.

§ 4. Доказательство теоремы 1

На первом этапе доказательства теоремы 1 используется обобщенный принцип максимума для равномерно эллиптического дифференциального оператора L в области Ω , определенного формулой (2.3).

ТЕОРЕМА 2 (см. [3]). *Предположим дополнительно, что коэффициент $c(x)$ оператора L неотрицательный на Ω . Тогда для произвольных $u, v \in W_q^2(\Omega)$, $q > n$, неравенства $(Lu - Lv)(v - u)^+ \geq 0$ почти всюду на Ω и $(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L} - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_L})(v - u)^+|_{\partial\Omega} \geq 0$ влекут неравенство $u(x) \geq v(x)$ почти всюду на Ω . Здесь $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j)$, $x \in \partial\Omega$, $\mathbf{n}(x)$ – внешняя по отношению к Ω нормаль к границе $\partial\Omega$ в точке x , $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ – направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}(x)$, $z^+(x) = \max\{z(x), 0\}$.*

Выберем положительную постоянную k так, чтобы $c(x) + k > 1$ и функция $h(x, u) = g(x, u) + ku$ удовлетворяла условию равномерной монотонности по u :

$$(u - v)(h(x, u) - h(x, v)) \geq (u - v)^2 \quad (4.1)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и любых $u, v \in \mathbb{R}$ (последнее возможно в силу условия 1) теоремы 1). Рассмотрим банаховы пространства $L_p(\Omega)$ и $L_q(\Omega)$ ($p = q/(q - 1)$, q – из условия 2) теоремы 1), полуупорядоченные конусами неотрицательных функций (см. [28; гл. 1, § 1]). Заметим, что конус неотрицательных функций в $L_p(\Omega)$ сильно миниедральный (см. [28; гл. 1, § 7]), что означает, что всякое ограниченное в смысле полуупорядоченности подмножество $L_p(\Omega)$ имеет точную верхнюю грань. Определим линейный оператор Λ , действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, равенствами

$$D(\Lambda) = \{u \in L_p(\Omega) : u \in W_q^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \Lambda u = Lu + ku.$$

Так как $c(x) + k > 1$ на Ω , то Λ имеет ограниченный обратный $\Lambda^{-1}: L_q \rightarrow D(\Lambda)$, причем существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|u\|_{W_q^2(\Omega)} \leq C\|\Lambda u\|_q$ для любого $u \in D(\Lambda)$ (см. [29; лемма 9.17]), $\|\cdot\|_q$ – норма в $L_q(\Omega)$. Поскольку $q > n$,

то $W_q^2(\Omega)$ вложено в $C_1(\overline{\Omega})$ и, значит, функции из $W_q^2(\Omega)$ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$. Оператор Λ^{-1} представляется через функцию Грина $G(x, y)$ первой краевой задачи для дифференциального оператора Λ :

$$\Lambda^{-1}f(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y) dy \quad \forall f \in L_q(\Omega).$$

Известно [28; гл. 7, § 2], что функция $G(x, y)$ неотрицательна на $\Omega \times \Omega$. Это влечет монотонность в смысле полуупорядоченности оператора Λ^{-1} : для любых $u, v \in L_q(\Omega)$ из $u(x) \leq v(x)$ почти всюду на Ω $\Lambda^{-1}u(x) \leq \Lambda^{-1}v(x)$ на Ω . Относительно Λ^{-1} верно более сильное утверждение.

ЛЕММА (ср. [28; теорема 7.9]). Пусть

$$u_0(x) = \int_{\Omega} G(x, y) dy$$

(это решение задачи Дирихле $\Lambda u = 1$, $x \in \Omega$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, положительное в Ω в силу принципа максимума), $u, v \in L_q(\Omega)$, $u(x) \leq v(x)$ почти всюду на Ω и $\text{mes}\{x \in \Omega : u(x) < v(x)\} \neq 0$. Тогда существует постоянная $\mu(u, v) > 0$ такая, что

$$\int_{\Omega} G(x, y)(v(y) - u(y)) dy \geq \mu u_0(x) \quad \text{на } \overline{\Omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in L_q(\Omega)$, $u(x) \leq v(x)$ почти всюду на Ω , $W(x) = v(x) - u(x)$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : W(x) > 0\}$ и $\text{mes} \Omega_1 \neq 0$. Тогда найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что множество $\Omega_{1n} = \{x \in \Omega_1 : W(x) > n^{-1}\}$ имеет ненулевую меру. Поэтому существует постоянная $\varepsilon(\Omega_{1n}) > 0$ такая, что для всех $x \in \overline{\Omega}$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega_{1n}} G(x, y) dy \geq \varepsilon \int_{\Omega} G(x, y) dy$$

(см. [28; лемма 7.2]). Отсюда получим для каждого $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G(x, y)W(y) dy &\geq \int_{\Omega_{1n}} G(x, y)W(y) dy \\ &\geq n^{-1} \int_{\Omega_{1n}} G(x, y) dy \geq \varepsilon n^{-1} \int_{\Omega} G(x, y) dy = \varepsilon n^{-1} u_0(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Дифференциальное выражение $\Lambda u(x) + ku(x)$ для любого $u \in W_q^2(\Omega)$ определено и принимает значения из пространства $L_q(\Omega)$. Далее будем обозначать его через $\Lambda u(x)$ и в случае, когда $u(x)$ не принадлежит области определения оператора Λ , однако u принадлежит пространству $W_q^2(\Omega)$.

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, u) &= h(x, u), & \text{если } \underline{u}(x) \leq u \leq \overline{u}(x), \\ \tilde{h}(x, u) &= h(x, \underline{u}), & \text{если } u < \underline{u}(x), \\ \tilde{h}(x, u) &= h(x, \overline{u}), & \text{если } u > \overline{u}(x), \end{aligned}$$

для любого $x \in \Omega$.

Аналогично определяются $\tilde{h}_{\pm}(x, u)$:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\pm}(x, u) &= h(x, u \pm), & \text{если } \underline{u}(x) \leq u \leq \bar{u}(x), \\ \tilde{h}_{\pm}(x, u) &= h(x, \underline{u} \pm), & \text{если } u < \underline{u}(x), \\ \tilde{h}_{\pm}(x, u) &= h(x, \bar{u} \pm), & \text{если } u > \bar{u}(x).\end{aligned}$$

Обозначим $h(x, u \pm)$ через $h_{\pm}(x, u)$.

Заметим, что $\tilde{h}_{\pm}(x, u)$ суперпозиционно измеримы (см. [30]) вместе с $\tilde{h}(x, u)$ и для почти всех $x \in \Omega$ для произвольных $u, v \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$ верно неравенство (4.1) с заменой h на $\tilde{h}_{\pm}$ или $\tilde{h}$. Кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ в силу условия 3) теоремы 1 верны оценки

$$|\tilde{h}_{\pm}(x, u)| \leq b(x), \quad |\tilde{h}(x, u)| \leq b(x) \quad (4.2)$$

для любого $u \in \mathbb{R}$, где $b(x) = a(x) + k \max_{\bar{\Omega}}\{|\underline{u}(x)|, |\bar{u}(x)|\} \in L_q(\Omega)$. Покажем, что всякое сильное решение задач

$$\Delta u = \tilde{h}_{\pm}(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.3)$$

из $W_q^2(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ и, значит, удовлетворяет уравнениям $\Delta u = h_{\pm}(x, u(x))$, $x \in \Omega$, эквивалентным уравнениям $\Delta u = g(x, u(x) \pm)$, $x \in \Omega$. Отсюда следует, что полуправильное решение $u \in W_q^2(\Omega)$ задач (4.3) является полуправильным решением задачи (3.1), (3.2), поскольку если $u(x)$ – точка непрерывности $h_{+}(x, \cdot)$ или $h_{-}(x, \cdot)$, то $u(x)$ – точка непрерывности $h(x, \cdot)$ и $h_{\pm}(x, u) = h(x, u(x))$. Рассмотрим ситуацию, когда в (4.3) имеется нелинейность $\tilde{h}_{-}(x, u)$ (случай нелинейности $\tilde{h}_{+}(x, u)$ рассматривается аналогично). По определению нижнего решения задачи (3.1), (3.2) $\Delta \underline{u} \leq g(x, \underline{u}(x) -) + k\underline{u}(x) = h_{-}(x, \underline{u}(x))$ почти всюду на Ω и $\underline{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$. Если $u \in W_q^2(\Omega)$ – сильное решение задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_{-}(x, u)$, то

$$\Delta(\underline{u} - u)(x) \leq h_{-}(x, \underline{u}) - \tilde{h}_{-}(x, u(x)) \quad (4.4)$$

почти всюду на Ω и $(\underline{u} - u)|_{\partial\Omega} \leq 0$. На множестве $\Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) < \underline{u}(x)\}$ $\tilde{h}_{-}(x, u(x))$ совпадает с $h_{-}(x, \underline{u}(x))$, и, следовательно, правая часть (4.4) равна нулю. Если $x \in \Omega$ и $u(x) \geq \underline{u}(x)$, то $(\underline{u} - u)^+(x) = 0$. Из этого заключаем, что $(\Delta u - \Delta \underline{u})(\underline{u} - u)^+(x) \geq 0$ почти всюду на Ω . Так как $(\underline{u} - u)^+(x)|_{\partial\Omega} = 0$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathbf{n}_L} \right) (\underline{u} - u)^+(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 для функций $u(x)$ и $\underline{u}(x)$, откуда следует, что $u(x) \geq \underline{u}(x)$ на Ω .

Аналогично доказывается неравенство $u(x) \leq \bar{u}(x)$ на Ω . Действительно, по определению верхнего решения задачи (3.1), (3.2)

$$\Delta \bar{u} \geq g(x, \bar{u}(x) +) + k\bar{u}(x) = h_{+}(x, \bar{u}(x)) \geq h_{-}(x, \bar{u}(x))$$

почти всюду на Ω и $\bar{u}|_{\partial\Omega} \geq 0$. Так как $u \in W_q^2(\Omega)$ – сильное решение задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_{-}(x, u)$, то

$$\Delta(u - \bar{u})(x) \leq \tilde{h}_{-}(x, u(x)) - h_{-}(x, \bar{u}(x)) \quad (4.5)$$

почти всюду на Ω и $(u - \bar{u})|_{\partial\Omega} \leq 0$. На множестве $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > \bar{u}(x)\}$ $\tilde{h}_-(x, u(x))$ совпадает с $h_-(x, \bar{u}(x))$, и, следовательно, правая часть (4.5) равна нулю. Из этого заключаем, что $(\Lambda\bar{u} - \Lambda u)(u - \bar{u})^+(x) \geq 0$ почти всюду на Ω , так как $(u - \bar{u})^+ = 0$ для $x \in \Omega \setminus \Omega_+$. Поскольку $(u - \bar{u})|_{\partial\Omega} \leq 0$, то $(u - \bar{u})^+|_{\partial\Omega} = 0$ и, значит,

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}_L} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L} \right) (u - \bar{u})^+(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 для функций $u(x)$ и $\bar{u}(x)$, откуда следует, что $u(x) \leq \bar{u}(x)$ на Ω .

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось установить существование полуправильного решения задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_-(x, u)$. Запишем задачу (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_-(x, u)$ как операторное уравнение в пространстве $L_p(\Omega)$, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций. Нелинейность $\tilde{h}_-(x, u)$ порождает оператор Немыцкого

$$H_-(u) = \tilde{h}_-(x, u(x)) \quad \forall u \in L_p(\Omega)$$

(в силу оценки (4.2) $\|H_-(u)\|_q \leq \|b\|_q$ для любого $u \in L_p(\Omega)$). Так как $\tilde{h}_-(x, \cdot)$ неубывающая на $\mathbb{R}$ для почти всех $x \in \Omega$, то оператор H_- монотонный в $L_p(\Omega)$ в смысле полуупорядоченности: для любых $u, v \in L_p(\Omega)$ из $u(x) \leq v(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ следует, что $H_-(u)(x) \leq H_-(v)(x)$ почти всюду на Ω . Определим действующий в $L_p(\Omega)$ оператор A_- равенством $A_-(u) = \Lambda^{-1} \circ H_-(u)$ для любого $u \in L_p(\Omega)$. Заметим, что этот оператор монотонный (в смысле полуупорядоченности) и его неподвижные точки являются сильными решениями задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_-(x, u)$. Рассмотрим в $L_p(\Omega)$ конусный отрезок $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle = \{u \in L_p(\Omega) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x) \text{ почти всюду на } \Omega\}$. Покажем, что $A_-(\underline{u}) \geq \underline{u}$. Положим $v = A_-(\underline{u}) = \Lambda^{-1} \circ H_-(\underline{u})$. Тогда $\Lambda v = H_-(\underline{u})$. По определению нижнего решения для почти всех $x \in \Omega$ имеем

$$L\underline{u}(x) + k\underline{u}(x) \leq g(x, \underline{u}(x)-) + k\underline{u}(x) = \tilde{h}_-(x, \underline{u}(x)) = H_-(\underline{u})(x),$$

т.е. $\Lambda\underline{u}(x) \leq H_-(\underline{u})(x) = \Lambda v(x)$. Таким образом, $\Lambda(\underline{u} - v)(x) \leq 0$ почти всюду на Ω , причем $(\underline{u} - v)|_{\partial\Omega} \leq 0$, поскольку $v|_{\partial\Omega} = 0$, а $\underline{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$. Отсюда получаем $(\Lambda v - \Lambda\underline{u})(\underline{u} - v)^+(x) \geq 0$ почти всюду на Ω и $(\underline{u} - v)^+|_{\partial\Omega} = 0$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что $v(x) \geq \underline{u}(x)$ почти всюду на Ω , т.е. $A_-(\underline{u}) \geq \underline{u}$. Аналогично доказывается неравенство $A_-(\bar{u}) \leq \bar{u}$.

Действительно, пусть $v = A_-(\bar{u}) = \Lambda^{-1} \circ H_-(\bar{u})$. Тогда $\Lambda v = H_-(\bar{u})$. По определению верхнего решения для почти всех $x \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} L\bar{u}(x) + k\bar{u}(x) &\geq g(x, \bar{u}(x)+) + k\bar{u}(x) \geq g(x, \bar{u}(x)-) + k\bar{u}(x) \\ &= \tilde{h}_-(x, \bar{u}(x)) = H_-(\bar{u})(x) = \Lambda v(x), \end{aligned}$$

т.е. $\Lambda\bar{u}(x) \geq \Lambda v(x)$. Таким образом, $\Lambda(v - \bar{u})(x) \leq 0$ почти всюду на Ω , причем $(v - \bar{u})|_{\partial\Omega} \leq 0$, поскольку $v|_{\partial\Omega} = 0$, а $\bar{u}|_{\partial\Omega} \geq 0$. Отсюда получаем $(\Lambda\bar{u} - \Lambda v)(v - \bar{u})^+(x) \geq 0$ почти всюду на Ω и $(v - \bar{u})^+|_{\partial\Omega} = 0$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что $v(x) \leq \bar{u}(x)$ почти всюду на Ω , т.е. $A_-(\bar{u}) \leq \bar{u}$. Так как

$A_-(\underline{u})(x) \geq \underline{u}(x)$ и $A_-(\bar{u})(x) \leq \bar{u}(x)$, то из этого следует, что A_- отображает $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$ в себя. Действительно, если $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$, то

$$\underline{u}(x) \leq A_-(\underline{u})(x) \leq A_-(u)(x) \leq A_-(\bar{u})(x) \leq \bar{u}(x),$$

т.е. $A_-(u) \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$. Рассмотрим множество $B = \{u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle : A_-(u) \geq u\}$. Оно непустое (содержит $\underline{u}$) и ограниченное элементом $\bar{u}$. Так как конус в $L_p(\Omega)$ сильно миниедральный, то существует точная верхняя грань множества B , т.е. такое $z \in L_p(\Omega)$, что $y \leq z$ для любого $y \in B$, и если для некоторого $z_1 \in L_p(\Omega)$ верно неравенство $y \leq z_1$ для произвольного $y \in B$, то $z \leq z_1$. Заметим, что $A_-(z) \geq z$. Действительно, для любого $y \in B$ имеем $y \leq A_-(y) \leq A_-(z)$, поэтому по определению точной верхней грани множества $z \leq A_-(z)$. Кроме того, $\underline{u} \leq z$, так как $\underline{u} \in B$, и $z \leq \bar{u}$, поскольку $y \leq \bar{u}$ для любого $y \in B$. Далее, $A_-(z) \leq A_-(A_-(z))$. Отсюда в силу принадлежности $A_-(z)$ к B следует, что $A_-(z) \leq z$. Таким образом, $A_-(z) = z$, т.е. z – неподвижная точка A_- , и, значит, z – сильное решение задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_-(x, u)$ из $W_q^2(\Omega)$.

Покажем, что $z(x)$ – полуправильное решение этой задачи. Допустим противное, т.е. что мера множества $D = \{x \in \Omega : h_-(x, z(x)) < h_+(x, z(x))\}$ не равна нулю (воспользовались совпадением для почти всех $x \in \Omega$ функций $\tilde{h}_-(x, u)$ и $h_-(x, u)$ для $u \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$). В силу условия 2) теоремы 1 $z(x) < \bar{u}(x)$ на множестве области Ω ненулевой меры. Отсюда следует, что множество $\{x \in \Omega : h_-(x, z(x)) < h_-(x, \bar{u}(x))\}$ имеет ненулевую меру в силу справедливости неравенства (4.1) при замене h на h_- . Из этого в силу леммы следует существование постоянной $\mu(z, \bar{u})$ такой, что $A_-(\bar{u})(x) - A_-(z)(x) \geq \mu u_0(x)$, где $u_0(x)$ – решение задачи Дирихле $\Delta u = 1$, $x \in \Omega$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Заметим, что $u_0(x) > 0$ на Ω . Имеем $\bar{u}(x) - z(x) \geq A_-(\bar{u})(x) - A_-(z)(x) \geq \mu u_0(x)$ для всех $x \in \Omega$. Следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, \mu)$ функция $z(x) + \varepsilon u_0(x)$ принадлежит $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$.

Далее, почти для всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$h_-(x, z(x) + \varepsilon u_0(x)) \geq h_+(x, z(x)) = h_-(x, z(x)) + w(x),$$

где $w(x) = h_+(x, z(x)) - h_-(x, z(x)) \geq 0$ на Ω по предположению больше нуля на множестве ненулевой меры D . Отсюда по лемме получим оценку $\Lambda^{-1}w(x) \geq \mu_1 \cdot u_0(x)$ на D , где μ_1 – положительная константа, зависящая от D . Поскольку оператор Λ^{-1} является (K_1, K_2) -монотонным и $h_-(x, z(x) + \varepsilon u_0(x)) \geq h_-(x, z(x)) + w(x)$ почти всюду на Ω , то

$$\begin{aligned} A_-(z + \varepsilon u_0)(x) &= \Lambda^{-1} \circ H_-(z + \varepsilon u_0)(x) = \Lambda^{-1}(h_-(x, z(x) + \varepsilon u_0(x))) \\ &\geq \Lambda^{-1}(h_-(x, z(x)) + w(x)) = \Lambda^{-1}(h_-(x, z(x))) + \Lambda^{-1}w(x). \end{aligned}$$

Из этого заключаем, что

$$A_-(z + \varepsilon u_0)(x) \geq A_-(z)(x) + \mu_1 u_0(x) \quad \text{на } \Omega.$$

Отсюда для $0 < \varepsilon < \min\{\mu, \mu_1\}$ получаем неравенство

$$A_-(z + \varepsilon u_0)(x) \geq z(x) + \varepsilon u_0(x).$$

Последнее означает принадлежность $z + \varepsilon u_0$ к B , что противоречит выбору z . Следовательно, z – полуправильное решение задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_-(x, u)$, лежащее в конусном отрезке $\langle u, \bar{u} \rangle$, что, как уже отмечалось выше, означает, что z – полуправильное решение задачи (3.1), (3.2).

Если задачу (4.3) рассмотреть с нелинейностью $\tilde{h}_+(x, u)$, вместо B взять множество $B_1 = \{u \in \langle u, \bar{u} \rangle : A_+(u) \leq u\}$, $A_+ = \Lambda^{-1} \circ H_+$, $H_+(u)(x) = \tilde{h}_+(x, u(x))$, то аналогично предыдущему можно показать, что точная нижняя грань z_1 множества B_1 является полуправильным решением задачи (4.3) с нелинейностью $\tilde{h}_+$, а значит, и полуправильным решением задачи (3.1), (3.2) из конусного отрезка $\langle u, \bar{u} \rangle$.

Заметим, что z и z_1 в общем случае могут не совпадать.

Теорема 1 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Принцип верхних и нижних решений для задачи (3.1), (3.2) с нелинейностью $g(x, u)$, равной разности суперпозиционно измеримых и неубывающих по u функций, был получен в работе [13]. С помощью него доказываются теоремы существования сильных решений задачи (3.1), (3.2) без дополнительных ограничений на “прыгающие” точки разрыва $g(x, u)$ по u : $g(x, u+) > g(x, u-)$. Однако этот принцип не гарантирует наличие полуправильных решений.

§ 5. Существование полуправильных решений задачи (3.1), (3.2)

В этом параграфе нелинейность $g(x, u)$ в уравнении (3.1) суперпозиционно измерима и для некоторой положительной константы M функция $g(x, u) + Mu$ неубывающая на $\mathbb{R}$ по u при почти всех $x \in \Omega$. Через λ_1 будем обозначать минимальное собственное значение оператора L в уравнении (3.1), определяемого формулой (2.3), с граничным условием (3.2). Известно (см. [31]), что λ_1 простое и базисную функцию соответствующего собственного подпространства можно считать положительной на Ω (обозначим ее $\varphi_1(x)$). Причем $\varphi_1(x) \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial \Omega} < 0$, где $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к $\partial \Omega$, внешняя по отношению к Ω . Не теряя общности, можно считать, что $\max\{\varphi_1(x) : x \in \bar{\Omega}\} = 1$.

Справедливы нижеследующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что:*

- 1) найдутся константы $\gamma < \lambda_1$ и $r > 0$, для которых при почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $u^{-1}g(x, u) \leq \gamma$, если $|u| \geq r$;
- 2) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках числовой прямой равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда для любого $q > n$ задача (3.1), (3.2) имеет полуправильное решение из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 является обобщением основного результата из работы [2] на случай неограниченной нелинейности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу условий 1) и 2) теоремы 3 существует положительное число k такое, что для почти всех $x \in \Omega$ верны неравенства

$$g(x, u+) \leq \gamma u + k \quad \forall u \geq 0, \quad (5.1)$$

$$g(x, u-) \geq \gamma u - k \quad \forall u \leq 0. \quad (5.2)$$

Так как коэффициент $c(x)$ в (2.3) принадлежит $C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, то можно выбрать постоянную $d > 0$ так, что $c(x) + d > 0$ на $\bar{\Omega}$. Пусть $v(x)$ – решение из $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ задачи

$$Lu(x) + du(x) = k, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Такое $v(x)$ существует (см. [32; гл. 3, теорема 1.1]). Из принципа максимума следует, что $v(x) > 0$ на Ω . Так как $\varphi_1 \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} < 0$ на $\partial\Omega$, $v \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $v|_{\partial\Omega} = 0$ и $\lambda_1 > \gamma$, то найдется постоянная $b > 0$ такая, что

$$b(\lambda_1 - \gamma)\varphi_1(x) - (\gamma + d)v(x) > 0 \quad \text{на } \Omega. \quad (5.3)$$

Покажем, что $\bar{u}(x) = v(x) + b\varphi_1(x)$ – верхнее решение задачи (3.1), (3.2), но $\bar{u}(x)$ не является решением этой задачи. Заметим, что $\bar{u}(x)$ положительна в Ω и удовлетворяет условию (3.2).

С учетом (5.1) и (5.3) имеем для почти всех $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} L\bar{u}(x) - g(x, \bar{u}(x)) &\geq L\bar{u}(x) - \gamma\bar{u}(x) - k \\ &= Lv(x) + b\lambda_1\varphi_1(x) - \gamma v(x) - \gamma b\varphi_1(x) - k \\ &= k - dv(x) - \gamma v(x) + b(\lambda_1 - \gamma)\varphi_1(x) - k \\ &= b(\lambda_1 - \gamma)\varphi_1(x) - (d + \gamma)v(x) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{u}(x)$ является верхним решением задачи (3.1), (3.2), и оно не является ее решением.

Теперь докажем, что $\underline{u}(x) = -\bar{u}(x) = -v(x) - b\varphi_1(x)$ – нижнее решение задачи (3.1), (3.2) из $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, но оно не является решением этой задачи. Функция $\underline{u}(x)$ отрицательна на Ω и удовлетворяет граничному условию (3.2). Отсюда и из (5.2) с учетом (5.3) следует для почти всех $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} L\underline{u}(x) - g(x, \underline{u}(x)) &\leq L\underline{u}(x) - \gamma\underline{u}(x) + k \\ &= -Lv(x) - b\lambda_1\varphi_1(x) + \gamma v(x) + \gamma b\varphi_1(x) + k \\ &= -k + dv(x) + \gamma v(x) - b(\lambda_1 - \gamma)\varphi_1(x) + k \\ &= -b(\lambda_1 - \gamma)\varphi_1(x) + (d + \gamma)v(x) < 0. \end{aligned}$$

Из этого заключаем, что $\underline{u}(x)$ – нижнее решение задачи (3.1), (3.2) из $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и оно не является решением этой задачи. Фиксируем $q > n$. Тогда $\bar{u}(x)$ и $\underline{u}(x)$ принадлежат пространству $W_q^2(\Omega)$ и $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$ на Ω . Следовательно, условие 2) теоремы 1 выполнено.

Справедливость условия 3) теоремы 1 следует из условия 2) теоремы 3.

Поскольку все условия теоремы 1 выполняются, то заключаем, что существует полуправильное решение задачи (3.1), (3.2) из пространства $W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющее неравенству $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ на Ω .

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что:*

- 1) для некоторого $r_0 > 0$ и почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $g(x, u-) > \lambda_1 u$ для любого $u \in (0, r_0]$;
- 2) существуют постоянные $r_1 > 0$ и $\gamma < \lambda_1$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство $g(x, u) \leq \gamma u$ для любого $u > r_1$;
- 3) $g(x, 0) = 0$ на Ω ;
- 4) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$ равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда для любого $q > n$ задача (3.1), (3.2) имеет полуправильное положительное на Ω решение из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 1) следует, что $\underline{u}(x) = r_0\varphi_1(x)$ – нижнее решение задачи (3.1), (3.2), которое не является решением этой задачи. Действительно, учитывая, что $\max\{\varphi_1(x) : x \in \bar{\Omega}\} = 1$, получим $L\underline{u}(x) = \lambda_1(r_0\varphi_1(x)) < g(x, \underline{u}(x))$. Кроме того, $\underline{u}(x)$ удовлетворяет граничному условию (3.2), принадлежит пространству $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и положительно на Ω . Верхнее решение задачи (3.1), (3.2) строится так же, как и верхнее решение при доказательстве теоремы 3 ($\bar{u}(x) = v(x) + b\varphi_1(x)$); при этом дополнительно предполагается, что $b > r_0$. Последнее гарантирует неравенство $\underline{u}(x) < \bar{u}(x)$ на Ω . Фиксируем $q > n$. Так как $\bar{u}(x)$ и $\underline{u}(x)$ принадлежат пространству $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, то они принадлежат и пространству $W_q^2(\Omega)$. Кроме того, $\bar{u}(x)$ и $\underline{u}(x)$ на $\partial\Omega$ равны нулю и не являются решением задачи (3.1), (3.2), а условие 3) теоремы 1 гарантируется выполнением условия 4) теоремы 4. В силу теоремы 1 задача (3.1), (3.2) имеет полуправильное решение $u(x)$ из пространства $W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющее неравенству $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ на Ω .

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что:*

- 1) для некоторого $r_0 > 0$ и почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $g(x, u+) < \lambda_1 u$ для любого $u \in [-r_0, 0]$;
- 2) существуют постоянные $r_1 > 0$ и $\gamma < \lambda_1$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство $g(x, u) \geq \gamma u$ для любого $u < -r_1$;
- 3) $g(x, 0) = 0$ на Ω ;
- 4) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках полупрямой $\mathbb{R}_- = \{s \in \mathbb{R} : s \leq 0\}$ равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда для любого $q > n$ задача (3.1), (3.2) имеет полуправильное отрицательное на Ω решение из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. В качестве нижнего решения берется $-v(x) - b\varphi_1(x)$, где b и $v(x)$ те же, что и в доказательстве теоремы 4, а верхнее решение полагается равным $-r_0\varphi_1(x)$.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующий результат о существовании двух нетривиальных полуправильных решений задачи (3.1), (3.2).

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что:*

- 1) для некоторого $r_0 > 0$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства $g(x, u-) > \lambda_1 u$ для любого $u \in (0, r_0]$, $g(x, u+) < \lambda_1 u$ для любого $u \in [-r_0, 0]$;
- 2) существует постоянная $\gamma < \lambda_1$ такая, что

$$\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} u^{-1}g(x, u) = g_\infty(x) \leq \gamma$$

равномерно по $x \in \Omega$;

- 3) $g(x, 0) = 0$ на Ω ;

4) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках числовой прямой $\mathbb{R}$ равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда для любого $q > n$ задача (3.1), (3.2) имеет полуправильное положительное и полуправильное отрицательное на Ω решение из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что условие 1) теоремы означает одновременное выполнение условия 1) теорем 4 и 5. По определению верхнего предела из условия 2) теоремы следует для любого $\gamma_1 \in (\gamma, \lambda_1)$ существование $r_1 > 0$ такого, что $u^{-1}g(x, u) \leq \gamma_1$ для произвольного u с $|u| \geq r_1$ и почти всех $x \in \Omega$. Последнее влечет выполнение условия 2) теорем 4 и 5 одновременно. Поэтому теорема 6 получается как прямое следствие теорем 4 и 5.

§ 6. Существование полуправильных решений задачи (2.1), (2.2)

В этом параграфе перейдем к исследованию спектральной задачи (2.1), (2.2). Напомним, что нелинейность $g(x, u)$ в уравнении (2.1) предполагается суперпозиционно измеримой и для некоторой положительной константы M функция $g(x, u) + Mu$ неубывающая по u на $\mathbb{R}$ для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, $g(x, 0) \equiv 0$ на Ω . Как и в §5, через λ_1 обозначается минимальное собственное значение дифференциального оператора L в уравнении (2.1) с граничным условием (2.2). Дополнительно потребуем, чтобы λ_1 было положительным.

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия:

- 1) $\liminf_{u \rightarrow 0+} u^{-1}g(x, u) = g_0^+(x) \geq k_1$ (k_1 – положительная константа или $+\infty$) равномерно по $x \in \Omega$;
- 2) $\limsup_{u \rightarrow +\infty} u^{-1}g(x, u) = 0$ равномерно по $x \in \Omega$;
- 3) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках полупрямой $\mathbb{R}_+$ равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \geq \mu_0$ и произвольного $q > n$ задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное положительное решение на Ω из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия 1) теоремы для $k \in (0, k_1)$ найдется $r_0 > 0$ такое, что $g(x, u-) > ku$ для любого $u \in (0, r_0]$ и $x \in \Omega$. Возьмем $\mu_0 = \lambda_1 k^{-1}$. Тогда для любого $\mu \geq \mu_0$ и $x \in \Omega$ верно неравенство $\mu g(x, u-) > \lambda_1 u$ для любого $u \in (0, r_0]$.

Таким образом, для нелинейности $\mu g(x, u)$ условие 1) теоремы 4 выполняется для всех $\mu \geq \mu_0$. Фиксируем $\mu \geq \mu_0$. Тогда найдется $\varepsilon(\mu) > 0$ такое, что $\mu\varepsilon < \lambda_1$. Из условия 2) теоремы следует существование $r_1 > 0$ такого, что для $x \in \Omega$ справедливо неравенство $u^{-1}g(x, u) < \varepsilon$ для произвольного $u > r_1$. Из этого заключаем, что выполнено условие 2) теоремы 4 для нелинейности $\mu g(x, u)$ для произвольного $\mu \geq \mu_0$. Следовательно, в силу теоремы 4 задача (2.1), (2.2) для любого $q > n$ имеет полуправильное положительное решение на Ω из пространства $W_q^2(\Omega)$ для любого $\mu \geq \mu_0$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия:

- 1) $\liminf_{u \rightarrow 0-} u^{-1}g(x, u) = g_0^-(x) \geq k_1$ (k_1 – положительная константа или $+\infty$) равномерно по $x \in \Omega$;
- 2) $\limsup_{u \rightarrow -\infty} u^{-1}g(x, u) = 0$ равномерно по $x \in \Omega$;
- 3) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках полупрямой $\mathbb{R}_-$ равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \geq \mu_0$ и произвольного $q > n$ задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное отрицательное решение на Ω из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

Так же, как и при доказательстве теоремы 7, проверяется выполнение условий теоремы 5 для нелинейности $\mu g(x, u)$ при достаточно больших значениях μ . Заключение теоремы 8 получается как следствие теоремы 5.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены условия:

- 1) $\liminf_{u \rightarrow 0} u^{-1}g(x, u) = g_0(x) \geq k_1$ (k_1 – положительная константа или $+\infty$) равномерно по $x \in \Omega$;
- 2) $\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} u^{-1}g(x, u) = 0$ равномерно по $x \in \Omega$;
- 3) функция $g(x, \cdot)$ ограничена на отрезках числовой прямой $\mathbb{R}$ равномерно по $x \in \Omega$.

Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \geq \mu_0$ и произвольного $q > n$ задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное положительное и полуправильное отрицательное решения на Ω из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

Поскольку выполнены одновременно все условия теорем 7 и 8, то из этих теорем следует справедливость теоремы 9.

Приведем пример разрывной неограниченной нелинейности $g(x, u)$, удовлетворяющей условиям теоремы 9.

ПРИМЕР 1. Пусть $g(x, u) \equiv g(u)$, где $g(u) = \operatorname{sgn}(u)$, если $|u| \leq 1$; $g(u) = \sqrt{u} + 1$, если $u > 1$; $g(u) = -\sqrt[3]{u} - 3$, если $u < -1$. Функция $g(u)$ суперпозиционно измерима, функция $g(u) + u$ неубывающая на $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$. У функции $g(u)$ три точки разрыва, она не ограничена на $\mathbb{R}$ и для нее выполняются условия 1)–3) теоремы 9. Отметим, что для задачи (2.1), (2.2) с такой нелинейностью $u(x) \equiv 0$ является сильным решением, но не является полуправильным решением.

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполнены все условия теоремы 7, кроме условия 2). Вместо него выполняется условие:

- 2') $\limsup_{u \rightarrow +\infty} u^{-1}g(x, u) = g_\infty^+(x) \leq \gamma$ равномерно по $x \in \Omega$, где $\gamma \in (0, k_1)$ – постоянная, k_1 – константа из условия 1) теоремы 7.

Тогда для любого $\mu \in (\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1 \gamma^{-1})$ и произвольного $q > n$ задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное положительное решение на Ω из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\mu \in (\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1 \gamma^{-1})$. Тогда найдется $k \in (\gamma, k_1)$ такое, что $\mu = \lambda_1 k^{-1}$. В силу условия 1) теоремы 7 заключаем, что существует $r_0(k) > 0$ такое, что $g(x, u-) > ku$ для любого $u \in (0, r_0]$ и $x \in \Omega$, и, значит, $\mu g(x, u) > \lambda_1 u$ для любого $u \in (0, r_0]$ и $x \in \Omega$. Далее, из условия 2') теоремы 10 следует существование $r_1(k) > 0$ такого, что

$$g(x, u) \leq \frac{k + \gamma}{2} u$$

для любого $u \geq r_1$ и произвольного $x \in \Omega$. Заметим, что

$$\mu \frac{k + \gamma}{2} < \mu k = \lambda_1.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4 для нелинейности $\mu g(x, u)$.

Следовательно, задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное положительное на Ω решение, принадлежащее пространству $W_q^2(\Omega)$ при любом $q > n$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11. Пусть выполнены все условия теоремы 8, кроме условия 2). Вместо него выполняется условие:

2') $\limsup_{u \rightarrow -\infty} u^{-1}g(x, u) = g_\infty^-(x) \leq \gamma$ равномерно по $x \in \Omega$, где $\gamma \in (0, k_1)$ – постоянная, k_1 – константа из условия 1) теоремы 8.

Тогда для любого $\mu \in (\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1 \gamma^{-1})$ и произвольного $q > n$ задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное отрицательное решение на Ω из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

Как и в доказательстве теоремы 10, для каждого $\mu \in (\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1 \gamma^{-1})$ проверяется выполнение условий теоремы 5 для нелинейности $\mu g(x, u)$. Тогда заключение теоремы 11 получается как следствие теоремы 5.

ТЕОРЕМА 12. Пусть выполнены все условия теоремы 9, кроме условия 2). Вместо него выполняется условие:

2') $\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} u^{-1}g(x, u) = g_\infty(x) \leq \gamma$ равномерно по $x \in \Omega$, где $\gamma \in (0, k_1)$ – постоянная, k_1 – константа из условия 1) теоремы 9.

Тогда для любого $\mu \in (\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1 \gamma^{-1})$ и произвольного $q > n$ задача (2.1), (2.2) имеет полуправильное положительное и полуправильное отрицательное решения на Ω из соболевского пространства $W_q^2(\Omega)$.

Поскольку выполняются одновременно все условия теорем 10 и 11, то из этих теорем следует заключение теоремы 12.

В заключение приведем пример разрывной нелинейности линейного роста на бесконечности, удовлетворяющей условиям теоремы 12.

ПРИМЕР 2. Пусть $g(x, u) \equiv g(u)$, где $g(u) = -\gamma_1 u - 3$, если $u < -1$; $g(u) = \operatorname{sgn}(u)$, если $|u| \leq 1$; $g(u) = \gamma u + 1$, если $u > 1$ ($\gamma > 0$ – постоянная, $\gamma_1 \in (0, 2)$). Функция $g(u)$ суперпозиционно измеримая, функция $g(u) + \gamma_1 u$ неубывающая на $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$. У функции $g(u)$ три точки разрыва, и для нее выполняются условия теоремы 12. На бесконечности $g(u)$ имеет линейный рост.

Список литературы

- [1] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, “Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями”, *Докл. АН СССР*, **226**:3 (1976), 506–509; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skiĭ, A. V. Pokrovskii, “Regular solutions of equations with discontinuous nonlinearities”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:1 (1976), 128–132.
- [2] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, “Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностями”, *Докл. РАН*, **342**:6 (1995), 731–734; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skiĭ, A. V. Pokrovskii, “Elliptic equations with discontinuous nonlinearities”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **51**:3 (1995), 415–418.
- [3] К.-С. Chang, “The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:2 (1980), 117–146.
- [4] К.-С. Chang, “Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **80**:1 (1981), 102–129.
- [5] К.-С. Chang, “Free boundary problems and the set-valued mappings”, *J. Differential Equations*, **49**:1 (1983), 1–28.

- [6] S. Carl, “The monotone iterative technique for a parabolic boundary value problem with discontinuous nonlinearity”, *Nonlinear Anal.*, **13**:12 (1989), 1399–1407.
- [7] S. Carl, S. Heikkilä, “On a parabolic boundary value problem with discontinuous nonlinearity”, *Nonlinear Anal.*, **15**:11 (1990), 1091–1095.
- [8] C. A. Stuart, “Maximal and minimal solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities”, *Math. Z.*, **163**:3 (1978), 239–249.
- [9] C. A. Stuart, J. F. Toland, “A property of solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities”, *J. London Math. Soc.* (2), **21**:2 (1980), 329–335.
- [10] N. Basile, M. Mininni, “Some solvability results for elliptic boundary value problems in resonance at the first eigenvalue with discontinuous nonlinearities”, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), **17**:3 (1980), 1023–1033.
- [11] I. Massabò, “Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuous nonlinearities”, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), **17**:3 (1980), 1308–1320.
- [12] В. Н. Павленко, “О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью”, *Дифференц. уравнения*, **27**:3 (1991), 520–526; англ. пер.: V. N. Pavlenko, “Existence of semiregular solutions of a first boundary-value problem for a parabolic equation with a nonmonotonic discontinuous nonlinearity”, *Differ. Equ.*, **27**:3 (1991), 374–379.
- [13] В. Н. Павленко, О. В. Ульянова, “Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Изв. вузов. Матем.*, 1998, № 11, 69–76; англ. пер.: V. N. Pavlenko, O. V. Ul’yanova, “The method of upper and lower solutions for equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **42**:11 (1998), 65–72.
- [14] В. Н. Павленко, О. В. Ульянова, “Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **38**:4 (2002), 499–504; англ. пер.: V. N. Pavlenko, O. V. Ul’yanova, “Method of upper and lower solutions for parabolic-type equations with discontinuous nonlinearities”, *Differ. Equ.*, **38**:4 (2002), 520–527.
- [15] В. Н. Павленко, В. В. Винокур, “Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, № 5, 43–58; англ. пер.: V. N. Pavlenko, V. V. Vinokur, “Resonance boundary value problems for elliptic equations with discontinuous nonlinearities”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **45**:5 (2001), 40–55.
- [16] В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, “О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:4 (2001), 911–919; англ. пер.: V. N. Pavlenko, D. K. Potapov, “Existence of a ray of eigenvalues for equations with discontinuous operators”, *Siberian Math. J.*, **42**:4 (2001), 766–773.
- [17] М. Г. Лепчинский, В. Н. Павленко, “Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями”, *Алгебра и анализ*, **17**:3 (2005), 124–138; англ. пер.: M. G. Lepchinskii, V. N. Pavlenko, “Regular solutions of elliptic boundary-value problems with discontinuous nonlinearities”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:3 (2006), 465–475.
- [18] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005, xiv+775 pp.
- [19] H. Chrayteh, J. M. Rakotoson, “Eigenvalue problems with fully discontinuous operators and critical exponents”, *Nonlinear Anal.*, **73**:7 (2010), 2036–2055.
- [20] Д. К. Потапов, “Спектральные задачи для уравнений с разрывными монотонными операторами”, *Труды весенней математической школы “Понтрягинские чтения–XIV”* (Воронеж, 2003), Современная математика и ее приложения, **35**, Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2005, 31–32; англ. пер.: D. K. Potapov,

- “Spectral problems for equations with discontinuous monotone operators”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **144**:4 (2007), 4232–4233.
- [21] S. A. Marano, D. Motreanu, “On a three critical points theorem for non-differentiable functions and applications to nonlinear boundary value problems”, *Nonlinear Anal.*, **48**:1 (2002), 37–52.
- [22] G. Bonanno, P. Candito, “Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities”, *J. Differential Equations*, **244**:12 (2008), 3031–3059.
- [23] Chengfu Wang, Yisheng Huang, “Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic problems with discontinuous nonlinearities and weights”, *Nonlinear Anal.*, **72**:11 (2010), 4076–4081.
- [24] Д. К. Потапов, “О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **46**:1 (2010), 150–152; англ. пер.: D. K. Potapov, “On the eigenvalue set structure for higher-order equations of elliptic type with discontinuous nonlinearities”, *Differ. Equ.*, **46**:1 (2010), 155–157.
- [25] Д. К. Потапов, “Спектральные задачи для вариационных неравенств с разрывными операторами”, *Матем. заметки*, **93**:2 (2013), 252–262; англ. пер.: D. K. Potapov, “Spectral problems for variational inequalities with discontinuous operators”, *Math. Notes*, **93**:2 (2013), 288–296.
- [26] Д. К. Потапов, “О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, 2004, № 4, 125–132.
- [27] М. Г. Лепчинский, *Существование и устойчивость решений краевых задач эллиптического типа с разрывными нелинейностями*, Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Челябинский гос. ун-т, Челябинск, 2006, 124 с.
- [28] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962, 394 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skii, *Positive solutions of operator equations*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1964, 381 pp.
- [29] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, reprint of the 1998 ed., *Classics Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2001, xiv+517 pp.
- [30] И. В. Шрагин, “Условия измеримости суперпозиций”, *Докл. АН СССР*, **197**:2 (1971), 295–298; англ. пер.: I. V. Shragin, “Conditions for the measurability of superpositions”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 465–470.
- [31] R. Iannacci, M. N. Nkashama, J. R. Ward, “Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:2 (1989), 711–726.
- [32] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964, 538 с.; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York–London, 1968, xviii+495 pp.

Вячеслав Николаевич Павленко
(Vyacheslav N. Pavlenko)

Челябинский государственный университет
E-mail: pavlenko@csu.ru

Поступила в редакцию
01.10.2014 и 06.01.2015

Дмитрий Константинович Потапов
(Dmitriy K. Potapov)

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru