Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, О сходимости m -точечных аппроксимаций Паде набора многозначных аналитических функций, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 2, 5–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 09:41:25

УДК 517.53

В. И. Буслаев

О сходимости m -точечных аппроксимаций Паде набора многозначных аналитических функций

В работе доказана сходимость m -точечных аппроксимаций Паде набора m голоморфных ростков функций, имеющих аналитические продолжения вдоль любых путей в расширенной комплексной плоскости, не проходящих через конечное число точек. Полученный результат распространяет теорему Штала со случая $m = 1$ на случай произвольного $m \in \mathbb{N}$.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: рациональные приближения, ортогональные многочлены, аппроксимации Паде, сходимость по емкости, предельное распределение полюсов.

DOI: 10.4213/sm8428

§ 1. Формулировка результата

Пусть $a_1, \dots, a_q$, $q \geq 2$, – различные точки комплексной плоскости, $\mathcal{K}$ – множество континуумов, содержащих точки $a_1, \dots, a_q$. В геометрической теории функций хорошо известна проблема Чеботарёва, состоящая в том, чтобы найти континуум $F \in \mathcal{K}$ такой, что

$$\text{cap } F = \min_{K \in \mathcal{K}} \text{cap } K, \quad (1)$$

где $\text{cap } K$ – логарифмическая емкость компакта K (как указывается в работе Г. Пойа [1], эта проблема была сообщена ему Н. Г. Чеботарёвым).

Проблема Чеботарёва была решена в 30-е годы прошлого века Г. Грётшем и (независимо) М. А. Лаврентьевым. Г. Грётш [2] доказал своим методом полос единственность экстремального континуума. М. А. Лаврентьев [3], [4] получил решение проблемы Чеботарёва при помощи вариационно-геометрического метода при дополнительном существенном предположении, что искомым континуум является объединением аналитических дуг. В цикле работ 1946–1951 гг. Г. М. Голузин разработал свой (отличный от предложенного М. Шиффером) метод внутренних вариаций. Пользуясь этим методом, Г. М. Голузин дал решение проблемы Чеботарёва в терминах ассоциированного квадратичного дифференциала.

ТЕОРЕМА. *Во введенных выше обозначениях существует единственный континуум $F \in \mathcal{K}$, для которого выполнено равенство (1). Континуум F является объединением замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала*

$$-\frac{B(z)}{A(z)}dz^2, \quad \text{где } A(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_q),$$

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

$B(z)$ – многочлен степени $q-2$ с единичным старшим коэффициентом, однозначно определяемый многочленом A . Функция Грина $g(z, \infty)$ с особенностью в точке $z = \infty$ для области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ определяется равенством

$$g(z, \infty) = \operatorname{Re} \int_a^z \sqrt{\frac{B(t)}{A(t)}} dt.$$

Нули многочлена $B(z)$ определяются из условия связности объединения замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала $-B(z)/A(z) dz^2$. Нахождение нулей многочлена $B(z)$ – весьма трудная задача, решенная к настоящему моменту только лишь для случая $q = 3$. Подробнее о проблеме Чеботарёва и некоторых других экстремальных проблемах в геометрической теории функций см. [5] и [6].

Всюду в дальнейшем через $\mathcal{F}$ будем обозначать множество компактов F расширенной комплексной плоскости, представимых в виде $\bigcup_{s=1}^S \overline{\gamma}_s$, где γ_s – открытые аналитические дуги такие, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\gamma}_s$ связно и $\gamma_s \cap \overline{\gamma}_t = \emptyset$ при всех $s, t = 1, \dots, S$, $s \neq t$. Легко видеть, что компакт F , фигурирующий в сформулированной выше теореме, принадлежит множеству $\mathcal{F}$. Если $F = \bigcup_{s=1}^S \overline{\gamma}_s$, то через F_0 будем обозначать множество $\bigcup_{s=1}^S \gamma_s$.

В 80-е годы прошлого века Г. Шталь разработал теоретико-потенциальный метод решения ряда задач, включающих в себя проблему Чеботарёва как частный случай [7], [8].

Перед формулировкой теоремы Шталя напомним, что классической аппроксимацией Паде типа (n, n) функции $f \in H(\{\infty\})$ называется рациональная функция $R_n = P_n/Q_n$ такая, что

$$\deg P_n \leq n, \quad \deg Q_n \leq n, \quad Q_n \not\equiv 0 \quad (2)$$

и

$$(fQ_n - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Здесь и всюду в дальнейшем через $H(E)$ обозначается множество функций, голоморфных в некоторой окрестности компакта E .

Через δ_z будем обозначать меру Дирака, сосредоточенную в точке z . Если $z_1, \dots, z_n$ – нули многочлена Q (каждый нуль выписан столько раз, какова его кратность), то будем обозначать через δ_Q меру $\sum_{j=1}^n \delta_{z_j}$.

Будем говорить, что последовательность функций $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ сходится по емкости к функции f на компактах, лежащих в открытом множестве Ω :

$$R_n \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \Omega,$$

если для любого $K \subset \Omega$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{cap}\{z \in K : |(R_n - f)(z)| > \varepsilon\} = 0.$$

Символом $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ будем обозначать слабую сходимост мер μ_n к мере μ .

ТЕОРЕМА ШТАЛЯ. Пусть функция $f \in H(\{\infty\})$ имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\mathbb{C}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f . Тогда существует компакт F , обладающий следующими свойствами.

1. $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ – область, содержащая точку $z = \infty$.
2. f – однозначная голоморфная функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$.
3. $\text{cap } F = \min_K \text{cap } K$, где минимум берется по всем компактам $K \subset \mathbb{C}$ таким, что f – однозначная голоморфная функция в связной компоненте $\mathbb{C} \setminus K$, содержащей точку $z = \infty$.
4. $F \in \mathcal{F}$, и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial g_F(z, \infty)}{\partial n_+} = \frac{\partial g_F(z, \infty)}{\partial n_-},$$

где $g_F(z, \infty)$ – функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ с особенностью в точке $z = \infty$, n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны.

5. Если $R_n = P_n/Q_n$, $n = 1, 2, \dots$, – классические аппроксимации Паде функции f , то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \lambda_F \quad \text{и} \quad R_n \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где λ_F – равновесная мера компакта F . При этом скорость сходимости характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} > e^{-2g_F(z, \infty)} + \varepsilon\} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} < e^{-2g_F(z, \infty)} - \varepsilon\} &= 0, \end{aligned}$$

где ε – произвольное положительное число.

Нетрудно показать, что решение проблемы Чеботарёва следует из теоремы Шталя, если в теореме Шталя выбрать в качестве функции f функцию

$$f(z) = \sqrt[q]{\left(1 - \frac{a_1}{z}\right) \cdots \left(1 - \frac{a_q}{z}\right)},$$

где $a_1, \dots, a_q$ – точки комплексной плоскости, фигурирующие в проблеме Чеботарёва. Более того, утверждение 5 теоремы Шталя позволяет в определенном смысле “моделировать” нулями знаменателя аппроксимаций Паде функции f искомый континуум F , а также и его равновесную меру.

Теорема Шталя может рассматриваться как предельный случай второй его теоремы, перед формулировкой которой введем следующие обозначения.

Через $g_K(z, t)$ будем обозначать функцию Грина с особенностью в точке $z = t$ связной компоненты D_t дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку t , доопределенную нулем при $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D_t$. Хорошо известно, что функция $g_K(z, t)$ непрерывна во всех регулярных точках компакта K и емкость множества иррегулярных точек компакта K равна нулю.

Мера (заряд) на компакте K расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ – это положительная (соответственно вещественная) борелевская мера μ , носитель $S(\mu) = \text{supp}(\mu)$ которой принадлежит K .

Через $\mathcal{M}(K)$ будем обозначать множество всех единичных мер на K таких, что

$$\int_{|t| \geq 1} \log |t| d\mu(t) < \infty,$$

а через $\mathcal{M}^\odot(K)$ – множество всех единичных мер μ , носитель $S(\mu)$ которых – конечное множество точек, лежащих в $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, т.е. $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j}$, где $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^m p_j = 1$, $e_j \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ ($j = 1, \dots, m$).

Логарифмический потенциал меры $\mu \in \mathcal{M}(K)$ будем обозначать через V^μ :

$$V^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(t). \quad (3)$$

При $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j}$ потенциал $V^\mu = -\sum_{j=1}^m p_j \log |z - e_j|$ не определен, если $\{e_1, \dots, e_m\} \ni \infty$. В этом случае в качестве (модифицированного) потенциала будем использовать величину

$$\mathcal{V}^\mu(z) = - \sum_{e_j \neq \infty} p_j \log |z - e_j|.$$

В частности, при $\mu = \delta_\infty$ имеем $\mathcal{V}^{\delta_\infty}(z) \equiv 0$. Очевидно, что (модифицированный) потенциал $\mathcal{V}^\mu$ определен при всех $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j}$ и совпадает с V^μ , если $\{e_1, \dots, e_m\} \not\ni \infty$.

Если μ – мера, а T – преобразование расширенной комплексной плоскости, то через $T\mu$ будем обозначать меру, определенную равенством $T\mu(E) = \mu(T^{-1}E)$, где $T^{-1}E = \{z : Tz \in E\}$.

Через $\lambda_{E,F} = \lambda_{E,F}^F - \lambda_{E,F}^E$ будем обозначать равновесный заряд конденсатора (E, F) (пары непересекающихся компактов комплексной плоскости), т.е. единственный заряд в классе зарядов вида $\mu = \mu_F - \mu_E$, где $\mu_F \in \mathcal{M}(F)$, $\mu_E \in \mathcal{M}(E)$, для которого приблизительно всюду (т.е. за исключением множества нулевой емкости) выполнено соотношение

$$V^{\lambda_{E,F}}(z) \begin{cases} = w_E, & z \in E, \\ = w_F, & z \in S(\lambda_{E,F}^F), \\ \geq w_F, & z \in F. \end{cases}$$

Величина $\text{cap}(E, F) = (w_F - w_E)^{-1}$ называется *емкостью конденсатора* (E, F) .

Пусть $E_n = \{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$ – набор точек (отдельные из которых, возможно, совпадают) расширенной комплексной плоскости. Напомним, что *многоточечной аппроксимацией Паде типа (n, n)* в точках $e_1, \dots, e_{2n+1}$ функции $f \in H(E_n)$ называется рациональная функция $R_n = P_n/Q_n$ такая, что выполняются условия (2), и при $e \in E_n \cap \{\infty\}$

$$(fQ_n - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_e - n}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где n_e – кратность точки e в наборе E_n , а при $e \in E_n \setminus \{\infty\}$ функция $(fQ_n - P_n)(z)$ в точке e обращается в нуль с кратностью n_e (или больше), т.е.

$$(fQ_n - P_n)(z) = O((z - e)^{n_e}), \quad z \rightarrow e \in E_n \setminus \{\infty\}.$$

В этой ситуации будем говорить, что рациональная функция $R_n = P_n/Q_n$ “слабо интерполирует” функцию f в точках множества E_n . Хорошо известно (см., например, [9]), что многоточечная аппроксимация Паде всегда существует.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ШТАЛЯ. Пусть E – континуум со связным дополнением, функция $f \in H(E)$ имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\mathbb{C}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f . Тогда существует компакт F , обладающий следующими свойствами.

1. $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ – область, содержащая континуум E .
2. f – однозначная голоморфная функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$.
3. $\text{cap}(F, E) = \min_K \text{cap}(K, E)$, где минимум берется по всем компактам $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ таким, что f – однозначная голоморфная функция в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей континуум E .
4. $F \in \mathcal{F}$, и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial n_+} \int g_F(z, t) d\lambda_{E,F}^E(t) = \frac{\partial}{\partial n_-} \int g_F(z, t) d\lambda_{E,F}^E(t),$$

где $\lambda_{E,F}^E$ есть E -компонента равновесного заряда $\lambda_{E,F} = \lambda_{E,F}^F - \lambda_{E,F}^E$ конденсатора (E, F) , n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны.

5. Если $R_n = P_n/Q_n$ – многоточечные аппроксимации Паде функции f в точках множества E_n , где

$$E_n = \{e_{n,1}, \dots, e_{n,2n+1}\} \subset E \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n+1} \delta_{e_{n,j}} \xrightarrow{*} \lambda_{E,F}^E,$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \lambda_{E,F}^F \quad \text{и} \quad R_n \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где $\lambda_{E,F}^F$ есть F -компонента равновесного заряда $\lambda_{E,F} = \lambda_{E,F}^F - \lambda_{E,F}^E$ конденсатора (E, F) . При этом скорость сходимости характеризуется соотношениями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \left\{ z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} > \exp \left\{ -2 \int g_F(z, t) d\lambda_{E,F}^E(t) \right\} + \varepsilon \right\} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \left\{ z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} < \exp \left\{ -2 \int g_F(z, t) d\lambda_{E,F}^E(t) \right\} - \varepsilon \right\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

Отметим, что Г. Шталь доказал свои теоремы не только для функций с конечным числом точек ветвления, но с соответствующими уточнениями и для многозначных аналитических функций, множество особых точек которых имеет нулевую емкость.

Как отмечалось, утверждение 5 первой теоремы Шталя позволяет “моделировать” нулями знаменателя Q_n компакт F и его равновесную меру. Этого нельзя сказать про вторую теорему Шталя, так как конструкция аппроксимаций Паде $R_n = P_n/Q_n$ в этой теореме опирается на распределение $\lambda_{E,F}^E$, которое зависит от моделируемого (заранее неизвестного) компакта F .

В работе автора [9] теорема Шталя распространена на случай, когда множество E – это две различные точки (и, следовательно, E не является континуумом), а f – кусочно голоморфная функция, определенная в объединении

непересекающихся окрестностей этих двух точек (причем не предполагается, что указанные два ростка f имеют аналитическое продолжение друг в друга). Точнее, в [9] исследован случай, когда

$$E_n = \{e_{n,1}, \dots, e_{n,2n+1}\} \subset E = \{e_1, e_2\}, \quad \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n+1} \delta_{e_{n,j}} \xrightarrow{*} \frac{\delta_{e_1} + \delta_{e_2}}{2}, \quad f \in H(E).$$

В этом случае функция f по сути дела есть не что иное, как пара функций f_1 и f_2 , одна из которых голоморфна в окрестности точки e_1 , а другая – в окрестности точки e_2 , а множество E_n точек интерполяции состоит из двух точек e_1 и e_2 , первая из которых имеет кратность n_1 , а вторая – кратность n_2 , причем $n_1 + n_2 = 2n + 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_2/n) = 1$. Аппроксимацию Паде, “слабо интерполирующую” n_1 раз функцию f_1 в точке e_1 и “слабо интерполирующую” n_2 раз функцию f_2 в точке e_2 естественно назвать *двухточечной* аппроксимацией Паде кратности (n_1, n_2) функций f_1 и f_2 в точках e_1 и e_2 .

В [9] доказана следующая теорема, сформулированная в целях симметрии для точек $e_1 = 0$ и $e_2 = \infty$.

ДВУХТОЧЕЧНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ШТАЛЯ. Пусть каждая из двух функций $f_0 \in H(\{0\})$ и $f_\infty \in H(\{\infty\})$ имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\mathbb{C}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек, среди которых хотя бы одна является точкой ветвления функции f_0 и хотя бы одна – точкой ветвления f_∞ , причем первая из них (т.е. точка ветвления f_0) по модулю строго меньше второй. Пусть $\mu = (\delta_0 + \delta_\infty)/2$. Тогда существует компакт $F \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, обладающий следующими свойствами.

1. $\overline{\mathbb{C}} \setminus F = D_0 \cup D_\infty$, где области $D_0 \ni 0$ и $D_\infty \ni \infty$ либо не пересекаются, либо совпадают.

2. f_0 – однозначная голоморфная функция в D_0 , и f_∞ – однозначная голоморфная функция в D_∞ . Если $D_0 = D_\infty$, то $f_0 = f_\infty$.

3. $\text{cap}_\psi F = \min_K \text{cap}_\psi K$, где $\text{cap}_\psi K$ – емкость компакта K , находящегося в гармоническом внешнем поле

$$\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z) = \frac{1}{2} \log |z|,$$

и минимум берется по всем компактам $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таким, что f_0 и f_∞ – однозначные голоморфные функции соответственно в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку $e_0 = 0$, и в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку $e_\infty = \infty$, и $f_0 = f_\infty$, если эти компоненты совпадают.

4. $F \in \mathcal{F}$, и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial(g_F(z, 0) + g_F(z, \infty))}{\partial n_+} = \frac{\partial(g_F(z, 0) + g_F(z, \infty))}{\partial n_-},$$

где n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны.

5. Если $R_n = P_n/Q_n$ – двухточечные аппроксимации Паде кратности (n_1, n_2) , где $n_1 + n_2 = 2n + 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_2/n) = 1$, функций f_0 и f_∞ в точках $e_0 = 0$ и $e_\infty = \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \tilde{\mu}_F \quad \text{и} \quad R_n \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где $\tilde{\mu}_F$ – выметание на F меры μ , $f(z) = f_0(z)$ при $z \in D_0$ и $f(z) = f_\infty(z)$ при $z \in D_\infty$. При этом имеется оценка скорости сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}\{z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F : |(f - R_n)(z)|^{1/n} \geq \exp\{-g_F(z, 0) - g_F(z, \infty)\} + \varepsilon\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

В связи с этим двухточечным аналогом и последующим составляющим основное содержание статьи m -точечным аналогом ($m \geq 2$) теоремы Штала напомним определение емкости $\text{cap}_\psi K$ компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, находящегося в гармоническом внешнем поле ψ , причем ограничимся внешним полем вида $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где $\mu \in \mathcal{M}^\odot(K)$ (произвольные гармонические поля использоваться в статье не будут).

Пусть K – компакт расширенной комплексной плоскости, ψ – функция, гармоническая в некоторой окрестности K . Энергией меры $\mu \in \mathcal{M}(K)$ во внешнем поле ψ называется величина

$$\begin{aligned} I_\psi(\mu) &:= \iint \left(\log \frac{1}{|z - \zeta|} + \psi(z) + \psi(\zeta) \right) d\mu(z) d\mu(\zeta) \\ &= \iint \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(z) d\mu(\zeta) + 2 \int \psi(z) d\mu(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Известно, что существует единственная в классе $\mathcal{M}(K)$ мера λ такая, что

$$I_\psi(\lambda) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(K)} I_\psi(\mu). \quad (5)$$

Эта экстремальная мера λ обладает свойством равновесия, а именно приблизительно всюду (т.е. за исключением множества емкости нуль) выполняется соотношение

$$(V^\lambda + \psi)(z) \begin{cases} = w_\psi, & z \in S(\lambda), \\ \geq w_\psi, & z \in K, \end{cases} \quad (6)$$

где $S(\lambda)$ – носитель меры λ . Мера $\lambda = \lambda_\psi(K)$, удовлетворяющая соотношению (6), называется *равновесной мерой* компакта K в поле ψ . Верно и обратное – равновесная мера является экстремальной для функционала энергии (т.е. для нее выполняется равенство (5)).

Можно показать (см., например, [10]), что для равновесной меры $\lambda = \lambda_\psi(K)$ имеет место равенство

$$I_\psi(\lambda) = \omega_\psi + \int \psi(z) d\lambda(z), \quad (7)$$

где ω_ψ – постоянная равновесия, фигурирующая в соотношении (6) (если исключительное множество нулевой емкости, вне которого выполнено соотношение (6), пусто, то равенство (7) является тривиальным следствием определений энергии меры (4), логарифмического потенциала (3) и соотношения равновесия (6)).

Величина

$$I_\psi(K) = I_\psi(\lambda_\psi(K)) \quad (8)$$

называется *энергией* K в поле ψ , а величина

$$\text{cap}_\psi K = e^{-I_\psi(K)} \quad (9)$$

называется *емкостью компакта* K в поле ψ .

Если $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где $\mu \in \mathcal{M}^\odot(K)$, то $\lambda_\psi(K) = \tilde{\mu}_K$, где $\tilde{\mu}_K$ – выметание на K меры μ , т.е. единственная в классе $\mathcal{M}(K)$ мера, потенциал $V^{\tilde{\mu}_K}$ которой совпадает с точностью до постоянной с потенциалом $\mathcal{V}^\mu$ приблизительно всюду на K . Подробнее об экстремальной и равновесной мере компакта, находящегося в произвольном гармоническом внешнем поле, см. [10], [11].

Хорошо известно (см., например, [10]), что емкость $\text{cap}_\psi K$ совпадает с трансфинитным диаметром $d_\psi K$ компакта K в гармоническом поле ψ , т.е.

$$\text{cap}_\psi K = d_\psi K := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{(z_1, \dots, z_n) \subset K} \prod_{1 \leq q < r \leq n} |z_q - z_r| e^{-(\psi(z_q) + \psi(z_r))} \right)^{\frac{2}{(n-1)n}} \quad (10)$$

(нетрудно показать, что предел в (10) всегда существует). В следующем параграфе данной статьи будет получена формула для вычисления $\text{cap}_\psi K$ в случае $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где $\mu \in \mathcal{M}^\odot(K)$ (см. ниже равенство (28)).

Отметим, что если $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где $\mu = \delta_\infty$, то $\psi(z) \equiv 0$ и введенные понятия совпадают со стандартными (в отсутствие внешнего поля) понятиями равновесной меры, емкости и трансфинитного диаметра компакта $K \subset \mathbb{C}$. Всюду в дальнейшем через $\text{cap } K$ обозначается стандартная емкость компакта K .

В данной статье приведенный выше двухточечный аналог теоремы Шталя будет распространен на случай, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_1/2n) = p$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_2/2n) = 1 - p$, где p – произвольное число интервала $(0, 1)$ (в отличие от сформулированного выше случая $p = 1/2$). Более того, при $m \in \mathbb{N}$ в статье будет доказан *m-точечный* аналог теоремы Шталя.

По аналогии с двухточечной аппроксимацией Паде рациональную функцию $R_n = P_n/Q_n$, удовлетворяющую условиям (2), будем называть *m-точечной аппроксимацией Паде кратности* $(n_1, \dots, n_m)$, где $n_1 + \dots + n_m = 2n + 1$, набора функций $f_1, \dots, f_m$, голоморфных в некоторых окрестностях точек $e_1, \dots, e_m$ соответственно, если R_n “слабо интерполирует” n_j раз функцию f_j в точке e_j , $j = 1, \dots, m$ (т.е. если при всех $j = 1, \dots, m$ функция $(f_j Q_n - P_n)(z)$ обращается в точке e_j в нуль с кратностью n_j (или больше)).

Пусть $F = \bigcup_{s=1}^S \bar{\gamma}_s \in \mathcal{F}$. Дугу $\gamma_s \subset F_0$ будем называть *внутренней граничной дугой* *связной компоненты* D *дополнения* $\mathbb{C} \setminus F$, если обе нормали n_+ и n_- в каждой точке этой дуги направлены внутрь D .

Основное содержание данной статьи заключено в следующей теореме.

ТЕОРЕМА (*m-точечный аналог теоремы Шталя*). Пусть $m \in \mathbb{N}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ – множество различных точек расширенной комплексной плоскости, $(f_1, \dots, f_m)$ – набор функций, голоморфных в окрестностях точек $e_1, \dots, e_m$ соответственно и таких, что каждая функция f_j этого набора имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{A}_j$, где $\mathcal{A}_j$ – конечное множество отличных от e_j точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f_j , $j = 1, \dots, m$. Пусть $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j}$, где $p_j > 0$, $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Тогда существует компакт $F \subset \mathbb{C} \setminus E$, обладающий следующими свойствами.

1. $\overline{\mathbb{C}} \setminus F = \bigcup_{j=1}^m D_j$, где область D_j содержит точку e_j , и при всех $1 \leq j < k \leq m$ области D_j и D_k либо не пересекаются, либо совпадают.
2. f_j – однозначная голоморфная функция в D_j , $j = 1, \dots, m$. Если $D_j = D_k$, то $f_j = f_k$.
3. Выполняется равенство

$$\text{cap}_\psi F = \min_K \text{cap}_\psi K, \quad (11)$$

где $\text{cap}_\psi K$ – емкость компакта K , находящегося во внешнем поле

$$\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z) = \sum_{e_j \neq \infty} p_j \log |z - e_j|, \quad (12)$$

и минимум берется по всем компактам $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ таким, что f_j – однозначная голоморфная функция в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку $z = e_j$ ($j = 1, \dots, m$), $f_j = f_k$, если связные компоненты, содержащие точки e_j и e_k , совпадают.

4. $F \in \mathcal{F}$, и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^m p_j g_F(z, e_j)}{\partial n_+} = \frac{\partial \sum_{j=1}^m p_j g_F(z, e_j)}{\partial n_-}, \quad (13)$$

где n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны.

5. Если $R_n = P_n/Q_n$ суть m -точечные аппроксимации Паде набора функций $(f_1, \dots, f_m)$ кратности $(n_1, \dots, n_m)$, где $n_1 + \dots + n_m = 2n + 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_j/2n) = p_j$, и каждая область D_j , $j = 1, \dots, m$, имеет непустую внутреннюю граничную дугу, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \tilde{\mu}_F \quad \text{и} \quad R_n(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где $\tilde{\mu}_F$ – выметание на F меры μ , $f(z) = f_j(z)$ при $z \in D_j$, $j = 1, \dots, m$. При этом имеется оценка скорости сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F : |(f - R_n)(z)|^{1/n} \geq \exp \left\{ -2 \sum_{j=1}^m p_j g_F(z, e_j) \right\} + \varepsilon \right\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

Обратим внимание, что в утверждении 5 этой теоремы по сравнению с теоремами, сформулированными ранее, имеется дополнительное предположение наличия непустых внутренних граничных дуг у всех областей D_j , $j = 1, \dots, m$. Легко видеть, что из этого предположения и свойства 3 следует, в частности, что внутри области $D_j^* \supset D_j$, получаемой из области D_j удалением всех ее внутренних дуг, лежит по крайней мере одна точка ветвления функции f_j , $j = 1, \dots, m$. В [9] при $m = 2$ указан пример, в котором утверждение 5 не выполняется при отсутствии указанного предположения. В приведенном выше двухточечном варианте условие наличия непустых внутренних граничных дуг у областей D_1 и D_2 обеспечивается другим предположением. А именно предполагается, что функция f_1 имеет точку ветвления a_1 , а f_2 – точку ветвления a_2 и $|a_1| < |a_2|$. Отметим также, что если $D_1 = \dots = D_m = D$, то все

граничные дуги этой единственной области D являются внутренними (так как нет внешних областей).

Сделаем несколько замечаний, связанных со схемой доказательства теоремы. Сначала будет доказано существование компакта F , обладающего свойством 3. Предлагаемое доказательство существенным образом отличается от изложенного в [12] доказательства этого же утверждения для случая

$$m = 2, \quad e_1 = 0, \quad e_2 = \infty, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}.$$

В [12] используется соображение, связанное с невозрастанием емкости $\text{cap}_\psi K$, где $\psi = \frac{1}{2} \log |z|$, при радиальном проектировании компакта K на кольцо $\bar{U}_{0,r,R} = \{r \leq |z| \leq R\}$, где $0 < r \leq R < \infty$. Это проектирование определяется следующим образом: $z \rightarrow T_{r,R}z$, где

$$T_{r,R}z = \begin{cases} z, & \text{если } z \in \bar{U}_{0,r,R}, \\ z \frac{R}{|z|}, & \text{если } |z| \geq R, \\ z \frac{r}{|z|}, & \text{если } |z| \leq r. \end{cases}$$

В [12] показано, что если $\psi(z) = \frac{1}{2} \log |z|$, то $\text{cap}_\psi T_{r,R}K \leq \text{cap}_\psi K$ для любого компакта $K \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ и любых $0 < r \leq R < \infty$. При $\psi(z) = p \log |z|$, где $p \neq 1/2$, это утверждение о невозрастании емкости при радиальном проектировании на кольцо становится неверным. Действительно, из приводимого ниже равенства (30) видно, что если $\psi(z) = p \log |z|$, $\Gamma_\rho = \{|z| = \rho\}$, то

$$\text{cap}_\psi \Gamma_\rho = \rho^{1-2p}.$$

Поэтому при $p \neq 1/2$, $0 < r^* < r \leq R < R^* < \infty$ неравенства

$$\text{cap}_\psi T_{r,R} \Gamma_{r^*} = \text{cap}_\psi \Gamma_r \leq \text{cap}_\psi \Gamma_{r^*}, \quad \text{cap}_\psi T_{r,R} \Gamma_{R^*} = \text{cap}_\psi \Gamma_R \leq \text{cap}_\psi \Gamma_{R^*}$$

не могут выполняться одновременно.

Доказательство утверждения 3 теоремы будет опираться, с одной стороны, на следующее наблюдение (являющееся следствием приводимой ниже леммы 3): если континуумы Γ_n , $n = 1, 2, \dots$, содержат некоторую фиксированную точку $a \notin E = \{e_1, \dots, e_m\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Gamma_n, E) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_\psi \Gamma_n = \infty$, где $d(\Gamma_n, E)$ – расстояние между Γ_n и E , а поле ψ определено равенством (12). С другой стороны, доказательство будет опираться на доказанную Е. А. Рахмановым [13] полунепрерывность сверху функционала энергии для последовательности компактов, состоящих из конечного числа (одного и того же для всех компактов) континуумов.

Импlications $3 \Rightarrow 4$ и $3 \Rightarrow 1$ будут получены как следствия общего вариационного метода Рахманова доказательства подобного рода импликаций, впервые использованного в [11] и позже в [14]. Впоследствии этот метод был подробно описан в [15]. В частности, этим методом были доказаны в [12] импликации $3 \Rightarrow 4$ и $3 \Rightarrow 1$ двухточечного варианта теоремы Шталя.

Импlication $4 \Rightarrow 5$ (при наличии 3) является частным случаем следующей теоремы автора [9].

ТЕОРЕМА (см. [9]). Пусть E – компакт расширенной комплексной плоскости, $f \in H(E)$, точки интерполяции $E_n = \{e_{n,1}, \dots, e_{n,2n+1}\}$ таковы, что

$$E_n \subset E \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n+1} \delta_{e_{n,j}} \xrightarrow{*} \mu \in \mathcal{M}(E), \quad (14)$$

пусть существует компакт $F \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, обладающий следующими свойствами: $F \in \mathcal{F}$, каждая связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ имеет непустую внутреннюю граничную дугу,

$$\frac{\partial \int g_F(z, t) d\mu(t)}{\partial n_+} = \frac{\partial \int g_F(z, t) d\mu(t)}{\partial n_-}, \quad z \in F_0, \quad (15)$$

где n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны, и пусть f допускает (кусочно) голоморфное продолжение с компакта E в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ такое, что $f \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$, где $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$ – класс функций, (кусочно) голоморфных в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ и имеющих непрерывные граничные значения на дугах из $F_0 \setminus B$, где B – некоторый компакт нулевой емкости, причем скачок отличен от нуля на $F_0 \setminus B$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \tilde{\mu}_F, \quad R_n(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где $\tilde{\mu}_F$ – выметание на F меры μ , $R_n = P_n/Q_n$ – многочечные аппроксимации Паде функции f в точках E_n . При этом на скорость сходимости имеется оценка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \left\{ z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} > \exp \left\{ -2 \int g_F(z, t) d\mu(t) \right\} + \varepsilon \right\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

Отметим, что для случая компактов F со связным дополнением эта теорема была доказана ранее А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым в [11]. Отметим также, что эта теорема применима не только к функции f , указанной в доказываемой здесь теореме (m -точечном аналоге теоремы Шталя), но и к функции f , лежащей в более широком классе функций $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$. Кроме того, эта теорема применима не только для используемой в доказываемой теореме меры $\mu \in \mathcal{M}^\circ(F)$, носитель E которой состоит из конечного числа точек, но и для произвольной меры $\mu \in \mathcal{M}(E)$, где E – произвольный компакт, не пересекающийся с F . Таким образом, утверждение 5 доказываемой в статье теоремы – это, при наличии утверждений 3 и 4, весьма частный случай приведенной теоремы. Из сказанного выше следует, что основной момент в доказательстве m -точечного аналога теоремы Шталя – это доказательство утверждения 3.

§ 2. Вспомогательные леммы

Сформулируем и докажем некоторые вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть K – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in \mathcal{M}^\odot(K)$. Тогда

$$I_\psi K = \sum_{j,l=1}^m p_j p_l H_K(e_j, e_l), \quad (16)$$

где

$$H_K(z, t) = \begin{cases} g_K(z, t) + \log |z - t|, & \text{если } z, t \in \mathbb{C} \setminus K, \ z \neq t, \\ \lim_{w \rightarrow t} (g_K(z, w) + \log |z - w|), & \text{если } z, t \in \mathbb{C} \setminus K, \ z = t, \\ g_K(z, t), & \text{если } z = \infty, \ t \in \mathbb{C} \setminus K \\ & \text{или } t = \infty, \ z \in \mathbb{C} \setminus K, \\ \lim_{w \rightarrow \infty} (g_K(w, \infty) - \log |w|), & \text{если } z = t = \infty. \end{cases} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что одна из точек $e_1, \dots, e_m$ – для определенности точка e_m – является бесконечно удаленной точкой ($e_m = \infty$), и $p_m > 0$ (в противном случае и формулировка леммы, и ее доказательство упрощаются).

Обозначим через D_j связную компоненту дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащую точку e_j , $j = 1, \dots, m$, а через λ_j , $j = 1, \dots, m-1$, выметание меры δ_{e_j} на границу области D_j , т.е. единственную в классе $\mathcal{M}(\partial D_j)$ меру, для которой

$$V^{\lambda_j}(z) + \log |z - e_j| = w_j, \quad z \in (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_j) \setminus B_j, \quad (18)$$

где $B_j \subset \partial D_j$ – множество нулевой емкости (точнее, B_j – множество иррегулярных точек ∂D_j , емкость которого, как известно, равна нулю).

Обозначим через λ_m равновесную меру ∂D_m :

$$V^{\lambda_m}(z) = w_m, \quad z \in (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_m) \setminus B_m, \quad (19)$$

где $B_m \subset \partial D_m$, $\text{cap } B_m = 0$.

Так как $g_K(z, e_j) = 0$ при $z \in (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_j) \setminus B_j$, $j = 1, \dots, m$, то из равенств (18) и (19) следуют равенства

$$\begin{aligned} V^{\lambda_j}(z) + \log |z - e_j| + g_K(z, e_j) &= w_j, \\ z &\in (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_j) \setminus B, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$V^{\lambda_m}(z) + g_K(z, e_m) = w_m, \quad z \in (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_m) \setminus B, \quad (21)$$

где

$$B = \bigcup_{j=1}^m B_j \subset \bigcup_{j=1}^m \partial D_j \subseteq K, \quad \text{cap } B = 0.$$

Так как левые части равенств (20) и (21) являются гармоническими функциями в областях D_j ($j = 1, \dots, m-1$) и D_m и на границах этих областей (вне множества B емкости нуль) принимают постоянные значения ω_j и ω_m соответственно, то, во-первых, равенства (20) и (21) имеют место при всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus B$ и, во-вторых, постоянные ω_j равны значению левых частей этих равенств в точке

$e_m = \infty$ (принадлежащей области D_m и, следовательно, не принадлежащей множеству $B \subset K$):

$$\omega_j = \lim_{z \rightarrow \infty} (V^{\lambda_j}(z) + \log |z - e_j| + g_K(z, e_j)) = g_K(\infty, e_j) = H_K(e_m, e_j),$$

$$j = 1, \dots, m-1,$$

$$\omega_m = \lim_{z \rightarrow \infty} (V^{\lambda_m}(z) + g_K(z, \infty)) = \lim_{z \rightarrow \infty} (g_K(z, \infty) - \log |z|) = H_K(e_m, e_m).$$

Таким образом, $\omega_j = H_K(e_m, e_j)$, $j = 1, \dots, m$, и при всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus B$, где $B \subset K$ – множество нулевой емкости, имеют место равенства

$$V^{\lambda_j}(z) + \log |z - e_j| + g_K(z, e_j) = H_K(e_m, e_j), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (22)$$

$$V^{\lambda_m}(z) + g_K(z, e_m) = H_K(e_m, e_m). \quad (23)$$

Подставляя в эти равенства $z = e_l \in D_l \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus B$, $l = 1, \dots, m-1$, получаем равенства

$$V^{\lambda_j}(e_l) + H_K(e_l, e_j) = H_K(e_m, e_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, m-1. \quad (24)$$

Положим

$$\lambda = \sum_{j=1}^m p_j \lambda_j. \quad (25)$$

Так как $g_K(z, e_j) = 0$ при $z \in K \setminus B$, $j = 1, \dots, m$, и

$$\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z) = \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |z - e_j|, \quad (26)$$

то из равенств (22) и (23) при всех $z \in K \setminus B$, где $\text{cap } B = 0$, имеем равенство

$$(V^\lambda + \psi)(z) = \sum_{j=1}^{m-1} p_j (V^{\lambda_j}(z) + \log |z - e_j|) + p_m V^{\lambda_m}(z) = \sum_{j=1}^m p_j H_K(e_m, e_j). \quad (27)$$

Так как правая часть полученного равенства не зависит от z ($z \in K \setminus B$, $\text{cap } B = 0$), то это означает, что λ – равновесная, а следовательно, и экстремальная мера K в поле ψ , т.е. $\lambda = \lambda_\psi(K)$.

Вычислим энергию в поле ψ этой (экстремальной) меры λ . Из равенств (7) и (27) с учетом явного вида (26) поля ψ , определения (3) логарифмического потенциала, определения (25) меры λ и равенства (24) получаем равенство

$$\begin{aligned} I_\psi(\lambda) &= \sum_{j=1}^m p_j H_K(e_m, e_j) + \int \sum_{l=1}^{m-1} p_l \log |z - e_l| d\lambda(z) \\ &= \sum_{j=1}^m p_j H_K(e_m, e_j) - \sum_{l=1}^{m-1} p_l V^\lambda(e_l) = \sum_{j=1}^m p_j H_K(e_m, e_j) - \sum_{l=1}^{m-1} p_l \sum_{j=1}^m p_j V^{\lambda_j}(e_l) \\ &= \sum_{j=1}^m p_j H_K(e_m, e_j) - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{m-1} p_j p_l (H_K(e_m, e_j) - H_K(e_l, e_j)) \\ &= p_m \sum_{j=1}^m p_j H_K(e_m, e_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{m-1} p_j p_l H_K(e_l, e_j) = \sum_{j,l=1}^m p_j p_l H_K(e_l, e_j). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Как следствие леммы 1 отметим следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть K – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где

$$\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in \mathcal{M}^{\odot}(K).$$

Тогда

$$\text{cap}_{\psi} K = \prod_{j=1}^m (\text{cap } K_j)^{p_j^2} \prod_{1 \leq j < l \leq m} (|e_j - e_l| e^{g_K(e_j, e_l)})^{-2p_j p_l}, \quad (28)$$

где $K_j = \{1/(z - e_j), z \in K\}$, если $e_j \neq \infty$, $K_j = K$, если $e_j = \infty$, и множитель $|e_j - e_l|$ считается отсутствующим, если либо $e_j = \infty$, либо $e_l = \infty$.

Действительно, из определения (9) емкости $\text{cap}_{\psi} K$ и леммы 1 (равенства (16)) следует равенство

$$\text{cap}_{\psi} K = \prod_{j=1}^m e^{-p_j^2 H_K(e_j, e_j)} \prod_{1 \leq j < l \leq m} e^{-2p_j p_l H_K(e_j, e_l)}.$$

Отсюда, из определения (17) функции $H_K(z, t)$, равенства $H_K(e_m, e_m) = \gamma_m$, где γ_m – постоянная Робэна компакта K , равенств

$$H_K(e_j, e_j) = \lim_{z \rightarrow e_j} (g_K(z, e_j) + \log |z - e_j|) = \lim_{w \rightarrow \infty} (g_{K_j}(w, \infty) - \log |w|) = \gamma_j$$

(получаемых заменой переменной $w = (z - e_j)^{-1}$), где γ_j – постоянная Робэна компакта K_j , $j = 1, \dots, m-1$, и хорошо известных равенств $\text{cap } K_j = e^{-\gamma_j}$, $j = 1, \dots, m$, следует равенство (28). Утверждение 1 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть K – компакт комплексной плоскости, не содержащий точку $z = 0$, и пусть $\psi = p \log |z|$, где $0 \leq p \leq 1$. Тогда

$$\text{cap}_{\psi} K = (\text{cap } K^{-1})^{p^2} (\text{cap } K)^{(1-p)^2} e^{-2p(1-p)g_K(0, \infty)}, \quad (29)$$

где $K^{-1} = \{z : z^{-1} \in K\}$.

В частности, имеют место следующие формулы:

$$\text{cap}_{\psi} \Gamma_{\rho} = \rho^{1-2p}, \quad (30)$$

$$\text{cap}_{\psi}[a, b] = \frac{(a^{-1} - b^{-1})^{p^2} (b - a)^{(1-p)^2}}{4} \left(\frac{4(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \right)^{2p(1-p)}, \quad (31)$$

где $\Gamma_{\rho} = \{|z| = \rho\}$ ($0 < \rho < \infty$), $[a, b] = \{a \leq z \leq b\}$ ($0 < a < b < \infty$).

Действительно, равенство (29) – это частный случай $m = 2$, $e_1 = 0$, $e_2 = \infty$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$ равенства (28).

Равенство (30) следует из (29), если учесть, что стандартная емкость любой окружности равна ее радиусу, а $g_{\Gamma_{\rho}}(0, \infty) = 0$.

Равенство (31) следует из (29), если учесть, что стандартная емкость любого отрезка равна четверти его длины, а

$$g_{[a, b]}(z, \infty) = \log \left| w(z) + \sqrt{w^2(z) - 1} \right|, \quad \text{где } w(z) = \frac{2z - (a + b)}{b - a},$$

и следовательно,

$$g_{[a,b]}(0, \infty) = \log \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}.$$

Утверждение 2 доказано.

ЛЕММА 2. Пусть K – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in \mathcal{M}^\odot(K)$, T – невырожденное дробно линейное преобразование. Тогда

$$\text{cap}_{\mathcal{V}-T\mu}(TK) = C \text{cap}_{\mathcal{V}-\mu} K, \quad (32)$$

где положительная постоянная $C = C_{T,\mu}$ не зависит от K .

Напомним, что для произвольной меры $\lambda \in \mathcal{M}(K)$ мера $T\lambda$ определяется равенством $T\lambda(E) = \lambda(T^{-1}E)$. Следовательно, $T\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{Te_j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Так как всякое дробно линейное преобразование можно представить в виде композиции линейных преобразований и преобразования $Tz = z^{-1}$ и так как для линейных преобразований лемма 2 тривиальна, то лемму 2 достаточно доказать только лишь для преобразования $Tz = z^{-1}$, причем без потери в общности можно считать, что $0 \notin \{e_1, \dots, e_m\} \cup K$. Кроме того, будем считать, что $e_m = \infty$, $p_m > 0$, так как в противном случае доказательство упрощается. При указанных предположениях, полагая $\theta_j = e_j^{-1}$ ($j = 1, \dots, m$), $w = z^{-1}$, $\tau = t^{-1}$, и учитывая, что $\theta_m = 0$, для произвольной меры $\lambda \in \mathcal{M}(K)$ и меры μ , указанной в лемме, получаем равенства

$$\begin{aligned} V^\lambda(z) &= \int \log \frac{1}{|z-t|} d\lambda(t) = \int \log \frac{|w\tau|}{|w-\tau|} dT\lambda(\tau) \\ &= V^{T\lambda}(w) - V^{T\lambda}(0) + \log |w|, \\ \mathcal{V}^{-\mu}(z) &= \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |z - e_j| = \sum_{j=1}^{m-1} p_j (\log |w - \theta_j| - \log |w| - \log |\theta_j|) \\ &= \sum_{j=1}^m p_j \log |w - \theta_j| - \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j| - \log |w| \\ &= \mathcal{V}^{-T\mu}(w) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j| - \log |w|. \end{aligned} \quad (33)$$

После сложения полученных равенств имеем

$$(V^\lambda + \mathcal{V}^{-\mu})(z) = (V^{T\lambda} + \mathcal{V}^{-T\mu})(w) - V^{T\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j|.$$

Из последнего равенства видно, что если λ – равновесная мера компакта K в поле $\mathcal{V}^{-\mu}$, то $T\lambda$ – равновесная мера компакта TK в поле $\mathcal{V}^{-T\mu}$, и наоборот. При этом постоянные равновесия ω_λ и $\omega_{T\lambda}$ связаны между собой равенством

$$\omega_\lambda = \omega_{T\lambda} - V^{T\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j|. \quad (34)$$

Пользуясь формулой (7) применительно к равновесным мерам λ и $T\lambda$ компактов K и TK (в полях $\mathcal{V}^{-\mu}$ и $\mathcal{V}^{-T\mu}$ соответственно), из равенств (34) и (33) получаем равенство

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{V}^{-\mu}}(K) &= \omega_\lambda + \int \mathcal{V}^{-\mu}(z) d\lambda(z) = \omega_{T\lambda} - V^{T\lambda}(0) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j| \\ &\quad + \int \left(\mathcal{V}^{-T\mu}(w) - \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j| - \log |w| \right) dT\lambda(w) \\ &= I_{\mathcal{V}^{-T\mu}}(TK) - 2 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j|, \end{aligned}$$

в котором постоянная

$$-2 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |\theta_j| = 2 \sum_{j=1}^{m-1} p_j \log |e_j| = 2\mathcal{V}^{-\mu}(0)$$

не зависит от K . Отсюда и определения (9) емкости компакта, находящегося во внешнем поле, следует равенство (32). Лемма 2 доказана.

В приводимых ниже леммах 3 и 4 предположение $\{e_1, \dots, e_m\} \not\subset \infty$ не принципиально, однако его отсутствие приводит (как и в лемме 1) к усложнению формулировок. Для того, чтобы избежать этого усложнения, сделаем следующие два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Многоточечные аппроксимации Паде инвариантны относительно дробно линейных преобразований. Точнее, если R_n есть m -точечная аппроксимация Паде кратности $(n_1, \dots, n_m)$ набора функций $f_1, \dots, f_m$ в точках $e_1, \dots, e_m$, а T – невырожденное дробно линейное преобразование, то $R_n \circ T$ есть m -точечная аппроксимация Паде той же кратности $(n_1, \dots, n_m)$ набора функций $f_1 \circ T, \dots, f_m \circ T$ в точках $T^{-1}e_1, \dots, T^{-1}e_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу леммы 2 следующие два неравенства эквивалентны между собой:

$$\text{сар}_{\mathcal{V}^{-\mu}} K_1 < \text{сар}_{\mathcal{V}^{-\mu}} K_2 \iff \text{сар}_{\mathcal{V}^{-T\mu}} TK_1 < \text{сар}_{\mathcal{V}^{-T\mu}} TK_2,$$

где $K_1, K_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in \mathcal{M}^\odot(K_1) \cap \mathcal{M}^\odot(K_2)$, T – невырожденное дробно линейное преобразование, $T\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{Te_j}$.

Из замечаний 1 и 2 следует, что без потери в общности можно считать, что в доказываемой теореме множество $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ таково, что $\infty \notin E$. В этом случае $\mathcal{V}^{-\mu} = V^{-\mu}$, где $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j}$.

Обозначим через Π_j оператор проектирования комплексной плоскости на неотрицательную полуось, определенный равенством

$$\Pi_j z = |z - e_j|, \quad j = 1, \dots, m.$$

ЛЕММА 3. Пусть K – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $\psi(z) = V^{-\mu}(z)$, где $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in \mathcal{M}^\odot(K)$, $\infty \notin \{e_1, \dots, e_m\}$, и пусть при некотором $j \in \{1, \dots, m\}$ имеет место

включение $\Pi_j K \supseteq [a, b]$, где $0 < a < b < \infty$. Тогда

$$\text{cap}_\psi K \geq \frac{(a^{-1} - b^{-1})^{p_j^2} (b - a)^{(1-p_j)^2}}{4} \left(\frac{4(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \right)^{2p_j(1-p_j)} (b + \zeta_j)^{-2(1-p_j)}, \quad (35)$$

где $\zeta_j = \max_{1 \leq k \leq m} |e_k - e_j|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть j – индекс, указанный в условиях леммы 3. Положим $K^* = \{z \in K : \Pi_j z \in [a, b]\}$. При всех $z \in K^*$ и всех $k \in \{1, \dots, m\}$ имеют место неравенства

$$|z - e_k| = |(z - e_j) + (e_j - e_k)| \leq \Pi_j z + \zeta_j \leq b + \zeta_j.$$

Следовательно, при всех $z \in K^*$ справедлива оценка

$$e^{\psi(z)} = \prod_{k=1}^m |z - e_k|^{p_k} \leq |z - e_j|^{p_j} \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} (b + \zeta_j)^{p_k} = |z - e_j|^{p_j} (b + \zeta_j)^{1-p_j}.$$

Отсюда при всех $z, w \in K^*$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} |z - w| e^{-(\psi(z) + \psi(w))} &\geq |z - e_j| - |w - e_j| (b + \zeta_j)^{-2(1-p_j)} |z - e_j|^{-p_j} |w - e_j|^{-p_j} \\ &= (b + \zeta_j)^{-2(1-p_j)} |\Pi_j z - \Pi_j w| (\Pi_j z \Pi_j w)^{-p_j}. \end{aligned}$$

Так как $K \supseteq K^*$, отсюда, пользуясь равенством (10), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \text{cap}_\psi K &\geq \text{cap}_\psi K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{(z_1, \dots, z_n) \subset K^*} \prod_{1 \leq q < r \leq n} |z_q - z_r| e^{-(\psi(z_q) + \psi(z_r))} \right)^{\frac{2}{(n-1)n}} \\ &\geq (b + \zeta_j)^{-2(1-p_j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{(z_1, \dots, z_n) \subset K^*} \prod_{1 \leq q < r \leq n} |\Pi_j z_q - \Pi_j z_r| (\Pi_j z_q \Pi_j z_r)^{-p_j} \right)^{\frac{2}{(n-1)n}} \\ &= (b + \zeta_j)^{-2(1-p_j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{(w_1, \dots, w_n) \subset \Pi_j K^*} \prod_{1 \leq q < r \leq n} |w_q - w_r| (w_q w_r)^{-p_j} \right)^{\frac{2}{(n-1)n}} \\ &= (b + \zeta_j)^{-2(1-p_j)} \text{cap}_{\varphi_j} \Pi_j K^*, \quad \text{где } \varphi_j(w) = p_j \log |w|. \end{aligned}$$

Так как $\Pi_j K^* = [a, b]$, то заменив в полученном неравенстве $\text{cap}_{\varphi_j} \Pi_j K^*$ правой частью равенства (31) при $\psi(z) = \varphi_j(z)$, получим требуемую оценку (35). Лемма 3 доказана.

Как следствие леммы 3 отметим следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть компакт $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ содержит континуум, соединяющий точки a_1 и a_2 , и пусть $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z)$, где $\mu \in \mathcal{M}^\circ(K)$. Тогда $\text{cap}_\psi K \geq \eta > 0$, где $\eta = \eta(a_1, a_2, \mu)$ не зависит от K .

Действительно, если $\mu = \delta_e$, то это утверждение хорошо известно (постоянная $\eta(a_1, a_2, \delta_e)$ в этом случае равна $\frac{1}{4}|a_1 - a_2|$, если $e = \infty$, и $\frac{1}{4}|(a_1 - e)^{-1} - (a_2 - e)^{-1}|$, если $e \neq \infty$), а если носитель меры μ содержит более одной точки, то утверждение является следствием леммы 3 (при дополнительном предположении $\infty \notin \text{supp } \mu$), так как $\Pi_j K$ при некотором j содержит не зависящий

от K отрезок $[a, b]$ такой, что $0 < a < b$. В силу леммы 2 дополнительное предположение $\infty \notin \text{supp } \mu$ можно отбросить. Утверждение 3 доказано.

Всюду в дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: если $e \in \mathbb{C}$ и $0 \leq \rho < r \leq \infty$, то

$$U_{e,r} = \{ |z - e| < r \}, \quad U_{e,\rho,r} = \{ \rho < |z - e| < r \}.$$

ЛЕММА 4. Пусть K – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $\psi(z) = V^{-\mu}(z)$, где $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j} \in \mathcal{M}^{\odot}(K)$, $\infty \notin \{e_1, \dots, e_m\}$, и пусть при некотором $j \in \{1, \dots, m\}$ имеет место включение $D_j \subseteq U_{e_j, \kappa_j}$, где D_j – связная компонента $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащая точку e_j , $0 < \kappa_j < \min_{k \neq j} |e_k - e_j|$. Тогда $\text{cap}_{\psi} K \geq \kappa_j^{-1}$, если $p_j = 1$, а если $p_j < 1$, то

$$\text{cap}_{\psi} K \geq \kappa_j^{-p_j^2} \zeta_j^{-2p_j(1-p_j)} (\text{cap}_{\psi_j} K)^{(1-p_j)^2}, \quad (36)$$

где $\zeta_j = \max_{1 \leq k \leq m} |e_k - e_j|$,

$$\psi_j(z) = \sum_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} \frac{p_k}{1 - p_j} \log |z - e_k|. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что ∂D_j содержит некоторый контур Γ_j , охватывающий точку e_j . Так как $\Gamma_j \subseteq \partial D_j \subseteq K \cap \overline{U}_{e_j, \kappa_j}$, то

$$\Gamma_j^* = \{(z - e_j)^{-1}, z \in \Gamma_j\}$$

– контур, охватывающий точку e_j , и

$$\Gamma_j^* \subseteq K_j \cap \{|z - e_j| \geq \kappa_j^{-1}\}, \quad \text{где } K_j = \{(z - e_j)^{-1}, z \in K\}.$$

Таким образом, Γ_j^* – контур, охватывающий окружность $\{|z - e_j| = \kappa_j^{-1}\} = \partial U_{e_j, \kappa_j^{-1}}$. Следовательно, $\text{cap } \Gamma_j^* \geq \text{cap } \partial U_{e_j, \kappa_j^{-1}}$. Поэтому, учитывая, что (стандартная) емкость окружности равна ее радиусу и $\Gamma_j^* \subseteq K_j$, имеем неравенство

$$\text{cap } K_j \geq \text{cap } \Gamma_j^* \geq \text{cap } \partial U_{e_j, \kappa_j^{-1}} = \kappa_j^{-1}. \quad (38)$$

В частности, лемма 4 доказана, если $p_j = 1$, так как в этом случае по утверждению 1 $\text{cap}_{\psi} K = \text{cap } K_j$.

Будем предполагать далее, что $p_j < 1$. Из условий леммы 4 следует, что $D_j \not\ni e_k$ при $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$. Поэтому $g_K(e_j, e_k) = 0$ при $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$. С учетом этих равенств, пользуясь утверждением 1 для вычислений $\text{cap}_{\psi} K$ и $\text{cap}_{\psi_j} K$ и неравенством (38), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \text{cap}_{\psi} K &= (\text{cap } K_j)^{p_j^2} (\text{cap}_{\psi_j} K)^{(1-p_j)^2} \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}} |e_j - e_k|^{-2p_j p_k} \\ &\geq \kappa_j^{-p_j^2} (\text{cap}_{\psi_j} K)^{(1-p_j)^2} \zeta_j^{-2p_j(1-p_j)}, \end{aligned}$$

совпадающее с доказываемым неравенством (36). Лемма 4 доказана.

Всюду в дальнейшем под функцией f и множеством E будем понимать набор функций $f_1, \dots, f_m$ и множество $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, указанные в доказываемой теореме (m -точечном аналоге теоремы Шталя). При этом, как отмечалось, без потери в общности можно считать, что $\infty \notin E$. Напомним также, что через $\mathcal{A}_j$ обозначается конечное множество, вне которого функция f_j , $j = 1, \dots, m$, имеет по условиям теоремы аналитическое продолжение. Под мерой μ понимается мера $\mu = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{e_j}$, указанная в теореме, $\psi(z) = \mathcal{V}^{-\mu}(z) = V^{-\mu}(z)$ (так как $\infty \notin E$). Так как при $m = 1$ доказываемая теорема совпадает с теоремой Шталя, будем считать, что $m \geq 2$ и $0 < p_j < 1$ при всех $j = 1, \dots, m$.

Будем говорить, что компакт $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ принадлежит множеству компактов $\mathcal{K}_f$ ($K \in \mathcal{K}_f$), если $K \cap E = \emptyset$ и при всех $j = 1, \dots, m$ функция f_j , голоморфная в некоторой окрестности точки e_j , допускает (однозначное) голоморфное продолжение в связную компоненту D_j дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащую точку e_j , причем $f_j = f_k$, если $D_j = D_k$. Таким образом, $\mathcal{K}_f$ – это множество всех компактов в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, по которым берется точная нижняя грань правой части равенства (11). Наша цель – доказать, что эта точная нижняя грань достигается на некотором компакте $F \in \mathcal{K}_f$. (Как показывает построенный в [16] пример функции $f \in H([-1, 1])$, аналитической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, нижняя точная грань может не достигаться в случае, когда μ – равновесная мера или нормированная мера Лебега на $[-1, 1]$).

Напомним, что расстояние между компактами $K_1, K_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ в сферической метрике Хаусдорфа определяется следующим образом:

$$\rho(K_1, K_2) = \min\{\delta : K_1 \subseteq \overline{K_2^\delta} \text{ и } K_2 \subseteq \overline{K_1^\delta}\},$$

где

$$K^\delta = \{z : d(z, K) < \delta\}, \quad d(z, w) = |z - w|(1 + |z|^2)^{-1/2}(1 + |w|^2)^{-1/2}. \quad (39)$$

Под записью $K_n \rightarrow K$ будем понимать сходимость компактов K_n , $n = 1, 2, \dots$, к компакту K в сферической метрике Хаусдорфа. Напомним также, что из любой последовательности компактов $K_n \subset \overline{\mathbb{C}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Имеют место следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $K \in \mathcal{K}_f$, $K^* \supseteq K$ и $K^* \cap E = \emptyset$. Тогда $K^* \in \mathcal{K}_f$.

Утверждение 4 тривиально, так как $K^* \cap E = \emptyset$ и $D_j^* \subseteq D_j$ при всех $j = 1, \dots, m$, где D_j и D_j^* – связные компоненты соответственно дополнений $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus K^*$, содержащие точку e_j .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\delta > 0$, U – односвязная область, $U^\delta = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U} : d(z, \overline{U}) < \delta\}$, D – область, содержащая U_δ , f – функция, голоморфная в D и имеющая аналитическое продолжение вдоль любого пути в $D \cup \overline{U}$. Тогда f – функция, голоморфная в $D \cup \overline{U}$.

Утверждение 5 является простым следствием теоремы о монодромии.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $K \in \mathcal{K}_f$ и $K = \bigcup_{j=0}^p \Gamma_j$, где $p \geq 1$, $\Gamma_0, \dots, \Gamma_p$ – непересекающиеся континуумы. Пусть Ω – связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_0$ такова, что $\mathcal{A} \cup E \subset \Omega$, где $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{A}_j$, а континуумы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ перенумерованы таким образом, что $\Gamma_j \subset \Omega$ при $1 \leq j \leq p'$ ($p' \leq p$) и $\Gamma_j \cap \Omega = \emptyset$ при $j > p'$. Тогда $p' \geq 1$ и $K' = \bigcup_{j=1}^{p'} \Gamma_j \in \mathcal{K}_f$.

Положим $K^* = \Gamma_0^* \cup (\bigcup_{j=1}^{p'} \Gamma_j)$, где $\Gamma_0^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Так как $K^* \cap E = \emptyset$ и $\Gamma_0^* \supset \Gamma_0 \cup (\bigcup_{j>p'} \Gamma_j)$, а следовательно, $K^* \supset K$, то по утверждению 4 $K^* \in \mathcal{K}_f$.

Положим $\rho = d(\Gamma_0^*, \mathcal{A} \cup E \cup (\bigcup_{j=1}^{p'} \Gamma_j))$. Очевидно, что $\rho > 0$. Положим $U = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : d(z, \Gamma_0^*) < \rho/2\}$. Заметим, что U – односвязная область, содержащая Γ_0^* , а $U^\delta = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U} : d(z, \overline{U}) < \delta\}$ при $0 < \delta < \rho/2$ лежит в некоторой связной компоненте D дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K^*$. Из этих замечаний и утверждения 5 следует, что $K' = K^* \setminus \Gamma_0^* \in \mathcal{K}_f$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть компакты K_n таковы, что $K_n \in \mathcal{K}_f$, $n = 1, 2, \dots$, и $K_n \rightarrow K$. Тогда если $K \cap E = \emptyset$, то $K \in \mathcal{K}_f$.

Легко видеть, что утверждение 7 имеет следующую эквивалентную формулировку.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7'. Пусть компакты K_n таковы, что

$$K_n \in \mathcal{K}_f, \quad n = 1, 2, \dots, \quad K_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^m \overline{U}_{e_j, \rho} \right) = \emptyset,$$

где ρ – некоторая положительная постоянная, и $K_n \rightarrow K$. Тогда $K \in \mathcal{K}_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 7'. Легко видеть, что $K \cap (\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, \rho}) = \emptyset$ и, следовательно, $K \cap E = \emptyset$. Далее, пусть D_j – связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащая точку e_j , $j = 1, \dots, m$. Пусть Γ_1 и Γ_2 – два пути, лежащие в D_j и соединяющие точку e_j с точкой $z_0 \in D_j$. Положим $\delta = \min\{\rho(\Gamma_1, K), \rho(\Gamma_2, K)\}$ и заметим, что $\delta > 0$ и $\min\{\rho(\Gamma_1, K_n), \rho(\Gamma_2, K_n)\} > \delta/2$ при всех $n \geq n_0 = n_0(\delta)$. Так как множества Γ_1 и Γ_2 не пересекаются с K_{n_0} и связны, то $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D_{j, n_0}$, где D_{j, n_0} – связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_{n_0}$, содержащая точку e_j . Так как $K_{n_0} \in \mathcal{K}_f$, то $f_{j, \Gamma_1}(z_0) = f_{j, \Gamma_2}(z_0)$, где $f_{j, \Gamma_1}(z_0)$ и $f_{j, \Gamma_2}(z_0)$ – результаты аналитического продолжения функции f_j из точки e_j в точку z_0 вдоль путей Γ_1 и Γ_2 соответственно. Так как z_0 – произвольная точка D_j , то отсюда следует, что $f_j \in H(D_j)$. Аналогичным образом показывается, что $f_j = f_k$, если $D_j = D_k$. Утверждение доказано.

ЛЕММА 5. Пусть $K \in \mathcal{K}_f$. Тогда

$$\text{cap}_\psi K \geq d > 0, \quad \text{cap}_{\psi_j} K \geq d_j > 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где поле ψ_j определено равенством (37), постоянные d и d_j не зависят от K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_1, \dots, D_m$ – связные компоненты дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащие соответственно точки $e_1, \dots, e_m$. Перенумеруем точки $e_1, \dots, e_m$ множества E и соответствующие им области $D_1, \dots, D_m$ так, что

$$E = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,m_1}; \dots; e_{k,1}, \dots, e_{k,m_k}\}, \quad \sum_{i=1}^k m_i = m,$$

$$D_{i,1} = \dots = D_{i,m_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad D_{i,1} \neq D_{l,1}, \quad 1 \leq i < l \leq k.$$

В соответствии с этой нумерацией запишем меру μ в виде

$$\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{m_i} p_{i,s} \delta_{e_{i,s}}.$$

Так как $e_{i,s} \in D_{i,1}$, $e_{l,t} \in D_{l,1}$ и $D_{i,1} \neq D_{l,1}$, если $i \neq l$, то $g_K(e_{i,s}, e_{l,t}) = 0$ при $1 \leq i < l \leq k$, $1 \leq s \leq m_i$, $1 \leq t \leq m_l$. Поэтому равенство (28) можно переписать в следующем виде:

$$\text{cap}_\psi K = d_{\mu,K} \prod_{i=1}^k \left(\prod_{s=1}^{m_i} (\text{cap } K_{i,s})^{p_{i,s}^2} \prod_{1 \leq s < t \leq m_i} (|e_{i,s} - e_{i,t}| e^{g_K(e_{i,s}, e_{i,t})})^{-2p_{i,s}p_{i,t}} \right), \quad (40)$$

где

$$d_{\mu,K} = \prod_{1 \leq i < l \leq k} \prod_{s=1}^{m_i} \prod_{t=1}^{m_l} |e_{i,s} - e_{l,t}|^{-2p_{i,s}p_{l,t}}, \quad K_{i,s} = \left\{ \frac{1}{z - e_{i,s}}, z \in K \right\}.$$

Из равенства (28), примененного к внешнему полю

$$\varphi_i(z) = \sum_{s=1}^{m_i} \frac{p_{i,s}}{q_i} \log |z - e_{i,s}|, \quad q_i = \sum_{s=1}^{m_i} p_{i,s},$$

следует, что

$$(\text{cap}_{\varphi_i} K)^{q_i^2} = \prod_{s=1}^{m_i} (\text{cap } K_{i,s})^{p_{i,s}^2} \prod_{1 \leq s < t \leq m_i} (|e_{i,s} - e_{i,t}| e^{g_K(e_{i,s}, e_{i,t})})^{-2p_{i,s}p_{i,t}}.$$

Подставляя это равенство в (40), получаем равенство

$$\text{cap}_\psi K = d_{\mu,K} \prod_{i=1}^k (\text{cap}_{\varphi_i} K)^{q_i^2}. \quad (41)$$

Заметим, что зависимость положительной постоянной $d_{\mu,K}$ от компакта K определяется лишь введенной выше нумерацией множества E . Так как всевозможных нумераций множества E лишь конечное число, то $d_{\mu,K}$ может принимать только лишь конечное число значений, минимум которых положителен и не зависит от K . Следовательно, $d_{\mu,K} \geq d_\mu > 0$, где постоянная d_μ не зависит от K .

Так как $e_{i,s} \in D_{i,1}$ при всех $s = 1, \dots, m_i$, то $\text{cap}_{\varphi_i} K = \text{cap}_{\varphi_i} (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_{i,1})$. Так как однозначная голоморфная в области $D_{i,1}$ функция $f_{i,1}$, аналитически продолжаемая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}$, по условиям теоремы имеет среди точек $\mathcal{A}$ по крайней мере одну точку ветвления, то $\overline{\mathbb{C}} \setminus D_{i,1}$ содержит некоторый континуум Γ_i , соединяющий две различные точки из $\mathcal{A}$. Поэтому

$$\text{cap}_{\varphi_i} K = \text{cap}_{\varphi_i} (\overline{\mathbb{C}} \setminus D_{i,1}) \geq \text{cap}_{\varphi_i} \Gamma_i \geq \eta_i > 0,$$

где зависящая от $\mathcal{A}$ и меры μ постоянная η_i не зависит от K в силу утверждения 3.

С учетом сказанного из равенства (41) получаем неравенство

$$\text{cap}_\psi K = d_{\mu,K} \prod_{i=1}^k (\text{cap}_{\varphi_i} K)^{q_i^2} \geq d_\mu \prod_{i=1}^k \eta_i^{q_i^2} = d > 0.$$

Неравенства $\text{cap}_{\psi_j} K \geq d_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, доказываются аналогично. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Для всякой положительной постоянной $C < \infty$ можно указать положительную постоянную $\rho_C = \rho_C(\mathcal{A}, E, f)$ такую, что включение $K \in \mathcal{K}_f$ и неравенство $\text{cap}_\psi K \leq C$ влекут за собой включение

$$K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, \rho_C} \right) \in \mathcal{K}_f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем положительное число $\kappa = \kappa_C$ столь малым, чтобы $\kappa < \min_{1 \leq j \leq m} \min_{a \in \mathcal{A}_j} |e_j - a|$, $\kappa < \min_{k \neq j} |e_k - e_j|$ и

$$C \kappa^{p_j^2} < \zeta^{-2p_j(1-p_j)} d_j^{(1-p_j)^2}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (42)$$

где не зависящие от компакта $K \in \mathcal{K}_f$ постоянные d_j определены в лемме 5, $\zeta = \max_{1 \leq j < k \leq m} |e_j - e_k|$. Это возможно, так как $e_j \notin \mathcal{A}_j$, $e_j \neq e_k$ при $j \neq k$, правая часть неравенства (42) положительна, а $p_j > 0$ (по условиям теоремы), $j = 1, \dots, m$.

Фиксируем затем положительное число $\rho = \rho_{C, \kappa} < \kappa$ столь малым, чтобы при всех $j = 1, \dots, m$ выполнялись неравенства

$$\frac{(\rho^{-1} - \kappa^{-1})^{p_j^2} (\kappa - \rho)^{(1-p_j)^2}}{4} \left(\frac{4(\sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho})}{\sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}} \right)^{2p_j(1-p_j)} (\kappa + \zeta)^{-2(1-p_j)} > C. \quad (43)$$

Это возможно, так как левая часть неравенства (43) при фиксированном κ стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow 0$.

Пусть $K \in \mathcal{K}_f$ и пусть имеет место неравенство $\text{cap}_\psi K \leq C$. Из леммы 3 (при $a = \rho$, $b = \kappa$) и неравенства (43) следует, что каждое из включений $\Pi_j K \supseteq [\rho, \kappa]$, $j = 1, \dots, m$, влечет за собой неравенство $\text{cap}_\psi K > C$, которое противоречит сделанному предположению. Поэтому с учетом замкнутости множества $\Pi_j K$ найдутся числа r_j и R_j такие, что $\rho \leq r_j < R_j \leq \kappa$ и

$$K \cap \overline{U}_{e_j, r_j, R_j} = \emptyset, \quad j = 1, \dots, m. \quad (44)$$

Если $D_j \cap U_{e_j, r_j, R_j} = \emptyset$ при некотором $j \in \{1, \dots, m\}$, то $D_j \subseteq U_{e_j, r_j} \subset U_{e_j, \kappa}$ и по лемме 4 и лемме 5 имеем неравенство

$$C \geq \text{cap}_\psi K \geq \kappa^{-p_j^2} \zeta^{-2p_j(1-p_j)} (\text{cap}_{\psi_j} K)^{(1-p_j)^2} \geq \kappa^{-p_j^2} \zeta^{-2p_j(1-p_j)} d_j^{(1-p_j)^2},$$

которое противоречит (42). Следовательно, $D_j \cap U_{e_j, r_j, R_j} \neq \emptyset$ при всех $j = 1, \dots, m$. В силу связности кольца U_{e_j, r_j, R_j} и равенства (44) отсюда следует, что кольцо U_{e_j, r_j, R_j} целиком лежит в D_j : $U_{e_j, r_j, R_j} \subseteq D_j$. В силу выбора числа κ имеем равенство $\mathcal{A}_j \cap \overline{U}_{e_j, \kappa} = \emptyset$. Следовательно, функция f_j имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в $D_j \cup \overline{U}_{e_j, \kappa}$. Отсюда по утверждению 5 (при $U = U_{e_j, r_j}$, $\delta = R_j - r_j$, $D = D_j$) получаем, что

$$f_j \in H(D_j \cup U_{e_j, R_j}).$$

Следовательно, $K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, r_j} \right) \in \mathcal{K}_f$. Так как $\rho \leq \min_{1 \leq j \leq m} r_j$, то

$$K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, \rho_C} \right) \supseteq K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, r_j} \right).$$

Отсюда и утверждения 4 следует, что $K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, \rho_C} \right) \in \mathcal{K}_f$. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $K \in \mathcal{K}_f$. Тогда существует компакт K^* такой, что $K^* \subseteq K$, $K^* \in \mathcal{K}_f$ и K^* состоит из не более чем $q + m(m + q)$ континуумов, где m – число точек множества $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, q – число точек множества $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_q\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму сначала в предположении, что компакт K состоит из конечного (возможно, превосходящего $q + m(m + q)$) числа континуумов. Удалим из компакта K все континуумы Γ , входящие в его состав, и такие, что множество $\mathcal{A} \cup E$ целиком лежит в одной из связных компонент дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. В результате в силу утверждения 6 получим компакт $K' \subseteq K$, $K' \in \mathcal{K}_f$. Отметим, что всякий континуум Γ , входящий в состав K' , либо пересекается с $\mathcal{A}$, либо разбивает плоскость (т.е. дополнение к этому континууму не связно), так как в противном случае $\mathcal{A} \cup E \subset \Omega$, где Ω – единственная связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, что невозможно по построению компакта K' .

Обозначим через $D_1, \dots, D_m$ связные компоненты дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K'$, содержащие соответственно точки $e_1, \dots, e_m$ множества E . Удаляя из K' все континуумы Γ , входящие в состав K' и такие, что $\Gamma \cap (\bigcup_{j=1}^m \partial D_j) = \emptyset$, получим компакт $K^* \subset K'$. Так как области $D_1, \dots, D_m$ не изменяются при замене компакта K' на компакт K^* , то $K^* \in \mathcal{K}_f$.

Оценим число континуумов, входящих в состав K^* . Во-первых, число континуумов, входящих в состав K^* и пересекающихся с $\mathcal{A}$, не превосходит числа q точек множества $\mathcal{A}$. Фиксируем некоторый индекс $j \in \{1, \dots, m\}$ и обозначим через l_j число континуумов $\Gamma_{j,1}, \dots, \Gamma_{j,l_j}$, входящих в состав K^* , не пересекающихся с $\mathcal{A}$ и таких, что $\Gamma_{j,l} \cap \partial D_j \neq \emptyset$, $l = 1, \dots, l_j$. Заметим, что при всех $l = 1, \dots, l_j$ одна из связных областей дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_{j,l}$, которую обозначим через $D_{j,l}$, содержит область D_j и $D_j = \bigcap_{l=1}^{l_j} D_{j,l}$. По построению компакта K' множество $\mathcal{A} \cup E$ не принадлежит целиком $D_{j,l}$. Следовательно, найдется точка $a_{j,l} \in \mathcal{A} \cup E$ такая, что $a_{j,l} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D_{j,l}$. Заметим, что $a_{j,l_1} \neq a_{j,l_2}$ при всех $1 \leq l_1 < l_2 \leq l_j$. Поэтому число l_j не может превосходить числа $m + q$ точек множества $\mathcal{A} \cup E$. Отсюда получаем, что число всех континуумов, входящих в состав K^* не превосходит $q + \sum_{j=1}^m l_j \leq q + m(m + q)$.

Таким образом, лемма 7 доказана в предположении, что компакт K состоит из конечного числа континуумов. Пусть теперь K – произвольный компакт из $\mathcal{K}_f$. Так как $K \cap E = \emptyset$, то существует положительное δ_0 такое, что $K^\delta \cap E = \emptyset$ при всех $\delta \leq \delta_0$, где компакт K^δ определен равенством (39). Так как $K^\delta \supseteq K$, то по утверждению 4 имеет место $K^\delta \in \mathcal{K}_f$ при всех $\delta \leq \delta_0$.

Так как сферическая площадь каждого континуума, входящего в состав K^δ , не меньше h_δ , где $h_\delta > 0$ – сферическая площадь δ -окрестности (любой) точки из $\overline{\mathbb{C}}$, а сферическая площадь S сферы $\overline{\mathbb{C}}$ ограничена, то компакт K^δ состоит из конечного числа (не превосходящего S/h_δ) континуумов. Поэтому по уже доказанному при всех положительных $\delta \leq \delta_0$ найдется компакт $(K^\delta)^*$, состоящий из не более чем $q + m(m + q)$ континуумов и такой, что $(K^\delta)^* \subseteq K^\delta$, $(K^\delta)^* \in \mathcal{K}_f$.

Пусть $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная монотонно убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Легко видеть, что $K^{\delta_n} \rightarrow K$. Выберем из последовательности компактов $\{(K^{\delta_n})^*\}_{n=1}^\infty$ сходящуюся (в метрике Хаусдорфа) подпоследовательность $\{(K^{\delta_n})^*\}_{n \in \Lambda}$, предел которой обозначим через K^* : $(K^{\delta_n})^* \xrightarrow{n \in \Lambda} K^*$. Так как $(K^{\delta_n})^* \subseteq K^{\delta_n}$, то $K^* \subseteq K$.

Так как $K^* \cap E \subseteq K \cap E = \emptyset$ и $K^* = \lim_{n \subset \Lambda} (K^{\delta_n})^*$, где $(K^{\delta_n})^* \in \mathcal{K}_f$, то по утверждению 7 имеем $K^* \in \mathcal{K}_f$. Так как $(K^{\delta_n})^*$ состоит из не более чем $q + m(m + q)$ континуумов, то и их предел K^* тоже состоит из не более чем $q + m(m + q)$ континуумов. Лемма 7 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы

Докажем утверждение 3 теоремы. Положим

$$I = \inf_{K \in \mathcal{K}_f} \text{cap}_\psi K$$

и фиксируем последовательность компактов $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что $K_n \in \mathcal{K}_f$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_\psi K_n = I$. Отметим, что $\text{cap}_\psi K_n \leq I + 1$ при всех $n \geq n_0$.

Пользуясь леммами 6 (при $C = I + 1$) и 7, получим, что при всех $n \geq n_0$ существуют компакты $K_n^* \in \mathcal{K}_f$, состоящие из не более чем $q + m(m + q)$ континуумов и такие, что $K_n^* \subseteq K_n$, $K_n^* \cap (\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, \rho}) = \emptyset$, где $\rho = \rho_{I+1} > 0$. Легко видеть, что

$$I \leq \text{cap}_\psi K_n^* \leq \text{cap}_\psi K_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_\psi K_n^* = I.$$

Выберем из последовательности $\{K_n^*\}_{n=n_0}^\infty$ сходящуюся (в метрике Хаусдорфа) подпоследовательность $K_n^* \rightarrow F$, $n \subset \Lambda$. Так как $K_n^* \cap (\bigcup_{j=1}^m U_{e_j, \rho}) = \emptyset$, то по утверждению 7' имеем включение $F \in \mathcal{K}_f$. Так как $F \cap E = \emptyset$, то внешнее поле $\psi(z) = V^{-\mu}(z) = \sum_{j=1}^m p_j \log |z - e_j|$ непрерывно в окрестности компакта F . В имеющейся ситуации (непрерывность внешнего поля и равномерная ограниченность числа континуумов, образующих компакты $K_n^* \rightarrow F$, $n \subset \Lambda$) Е. А. Рахманов [13] доказал полунепрерывность сверху функционала энергии (в действительности Е. А. Рахманов доказал полунепрерывность сверху функционала энергии для внешних полей более общего вида). Следовательно, с учетом равенства (9)

$$I \leq \text{cap}_\psi F \leq \lim_{n \subset \Lambda} \text{cap}_\psi K_n^* = I.$$

Отсюда следует утверждение 3 теоремы. (Как отмечалось, это утверждение 3 является основным в теореме.)

Докажем утверждения 4 (равенство (13)) и 1 теоремы. Как отмечалось во введении, доказательство этих утверждений опирается на вариационный метод, впервые использованный в [11] и [14] и позже подробно описанный в [15]. Не повторяя всех деталей, приводимых в [15], изложим здесь лишь схему доказательства импликаций $3 \Rightarrow 4$ и $3 \Rightarrow 1$, описав основные ключевые моменты.

Пусть функция $h \in C^1(\overline{\mathbb{C}})$ такова, что $h(z) = 0$ при $z \in \mathcal{A}$. При $t \in \overline{\mathbb{C}}$ определим преобразование $z \rightarrow z_t^h = z + th(z)$, которое является взаимно однозначным при всех достаточно малых t . Преобразование $z \rightarrow z_t^h$ естественным образом порождает вариацию компактов и мер

$$K \rightarrow K_h^t = \{z_t^h : z \in K\}, \quad \nu \rightarrow \nu_h^t, \quad d\nu_h^t(z_t^h) = d\nu(z).$$

Пусть $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\nu \in \mathcal{M}(K)$, $\psi(z) = V^{-\mu}(z)$, где $\mu \in \mathcal{M}^{\odot}(K \cup \{\infty\})$. Нетрудно показать (см., например, [15] или [12]), что

$$I_{\psi}(\nu_h^t) - I_{\psi}(\nu) = \operatorname{Re} th_{\psi}(\nu) + O(t^2), \quad (45)$$

где

$$h_{\psi}(\nu) = - \iint \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} d\nu(\zeta) d\nu(z) + 2 \iint \frac{h(z)}{z - \zeta} d\nu(\zeta) d\mu(z).$$

Опираясь на равенство (45), Е. А. Рахманов [13] показал, что

$$I_{\psi}(K_h^t) - I_{\psi}(K) = \operatorname{Re} th_{\psi}(\lambda_{\psi}(K)) + o(t), \quad (46)$$

где $I_{\psi}(K)$ и $I_{\psi}(K_h^t)$ – энергии компактов K и K_h^t в поле ψ , определенные равенством (8), $\lambda_{\psi}(K)$ – равновесная мера K в поле ψ .

Пусть F – компакт, состоящий из конечного числа континуумов и обладающий свойством 3 (т.е. имеющий наименьшую емкость в поле $\psi(z) = V^{-\mu}(z)$ среди всех компактов $K \in \mathcal{K}_f$). Так как $h(z) = 0$ при $z \in \mathcal{A}$, то $F_h^t \in \mathcal{K}_f$ при всех достаточно малых $t \in \overline{\mathbb{C}}$. Так как компакт F обладает свойством 3 максимальности энергии, то левая часть равенства (46) при $K = F$ не превосходит нуля при всех $t \in \overline{\mathbb{C}}$, $|t| \leq t_0$. Нетрудно показать, варьируя по модулю и аргументу малый параметр $t \in \overline{\mathbb{C}}$, что это возможно только лишь в случае, когда

$$h_{\psi}(\lambda_{\psi}(F)) = 0.$$

Отсюда и из равенства (45) следует, что $\lambda_{\psi}(F)$ является $(\mathcal{A}, \psi)$ -критической мерой (в терминологии работы [15], в которой такие меры подробно исследованы), т.е.

$$I_{\psi}(\lambda_{\psi}(F)_h^t) - I_{\psi}(\lambda_{\psi}(F)) = o(t). \quad (47)$$

В [15] показано, что утверждения 4 и 1 теоремы являются следствиями равенства (47). (Аргументы, приведенные в [15], полностью воспроизведены в [12] для частного случая $m = 2$, $e_1 = 0$, $e_2 = \infty$, $p_1 = p_2 = 1/2$ доказываемых здесь импликаций $3 \implies 4$ и $3 \implies 1$. Полное доказательство этих импликаций, причем в более общей ситуации, см. в [16].)

Как отмечалось выше, утверждение 5 теоремы следует из утверждений 3 и 4 в силу доказанной в [9] общей теоремы, сформулированной в конце первого параграфа. Теорема (m -точечный аналог теоремы Шталя) доказана.

Список литературы

- [1] G. Polya, “Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. III”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, 1929, 55–62.
- [2] Н. Грötzsch, “Über ein Variationsproblem der konformen Abbildung”, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Phys. Kl.*, **82** (1930), 251–263.
- [3] M. A. Lavrentieff, “Sur un problème de maximum dans la représentation conforme”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **191** (1930), 827–829.
- [4] М. А. Лаврентьев, “К теории конформных отображений”, Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **5**, Изд-во АН СССР, Л., 1934, 159–245.

- [5] Г. В. Кузьмина, “Модули семейства кривых и квадратичные дифференциалы”, Тр. МИАН СССР, **139**, 1980, 3–241; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Moduli of families of curves and quadratic differentials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **139** (1982), 1–231.
- [6] K. Strebel, *Quadratic differentials*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xii+184 pp.
- [7] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex-valued weight function”, I, *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 225–240; II, 241–251.
- [8] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function”, I, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 311–324; II, 325–338.
- [9] В. И. Буслаев, “О сходимости многоточечных аппроксимаций Паде кусочно аналитических функций”, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 39–72; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Convergence of multipoint Padé approximants of piecewise analytic functions”, *Sb. Math.*, **204**:2 (2013), 190–222.
- [10] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Appendix B by T. Bloom, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xvi+505 pp.
- [11] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134**(176):3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [12] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Метод внутренних вариаций и существование S -компактов”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58; англ. пер.: V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Method of interior variations and existence of S -compact sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279** (2012), 25–51.
- [13] E. A. Rakhmanov, “Orthogonal polynomials and S -curves”, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, Contemp. Math., **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 195–239.
- [14] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S -свойство компактов минимальной емкости*, Препринт, М., 1994.
- [15] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, “Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeroes of Stieltjes polynomials”, *Comm. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111.
- [16] V. I. Buslaev, S. P. Suetin, “On the existence of compacta of minimal capacity in the problems of rational approximation of multivalued analytic functions”, *J. Approx. Theory*, 2015 (to appear).

Виктор Иванович Буслаев
(Viktor I. Buslaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: buslaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
28.07.2014