Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кочергин, Некоторые обобщения теорем о перемешивающих потоках с невырожденными седлами на двумерном торе, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 19–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:12:12

УДК 517.987.5+517.938

А. В. Кочергин

Некоторые обобщения теорем о перемешивающих потоках с невырожденными седлами на двумерном торе

Обобщается теорема о перемешивании в специальном потоке, построенном по повороту окружности и асимметричной функции с логарифмическими особенностями, на случай лиувиллевых углов поворота при некоторых соотношениях на коэффициенты особенностей. Показано также, что наличие строго логарифмических симметричных особенностей не препятствует перемешиванию в случае сильно асимметричной функции.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение и формулировка результатов

В настоящей статье продолжается исследование перемешивающих свойств потоков с невырожденными гиперболическими неподвижными точками, сохраняющих меру с гладкой положительной плотностью на двумерном торе, начатое в [1]–[3] (и даже в [4]). Такие потоки естественным образом возникли в работе В. И. Арнольда [5]. Фазовое пространство такого потока распадается на ячейки, ограниченные замкнутыми сепаратрисами невырожденных особых точек и заполненные периодическими траекториями, и эргодическую компоненту, в которой траектория проходит вблизи неподвижной точки с одной стороны чаще, чем с другой. В работе В. И. Арнольда показано, что существует гладкая замкнутая трансверсаль к траекториям эргодической компоненты. Инвариантная мера и векторное поле, задающее поток, естественным образом порождают на трансверсали гладкую параметризацию (подробно эта процедура описана, например, в [4]). Отображение последования определено на трансверсали всюду, кроме конечного числа точек, являющихся точками последнего пересечения входящих сепаратрис с трансверсалью. В индуцированной параметризации отображение последования является поворотом окружности. Время возвращения является функцией, гладкой всюду, кроме точек, в которых не определено отображение последования. В работе [4] показано, что в этих точках функция времени возвращения имеет логарифмические особенности, а если плотность меры положительная и удовлетворяет условию Гёльдера, то в правой полукрестности особой точки функция имеет вид

$$f(x) = f_0(x) + A_i \ln \frac{1}{|b(x - \bar{x}_i)|},$$

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.1).

где $f_0, b \in C^{1+\nu}$, $\nu > 0$, $b(0) = 0$, $b'(0) \neq 0$. В левой полукрестности вид функции аналогичный. Нетрудно показать, что такая особенность является *строго логарифмической* (см. определение ниже).

Таким образом, поток на эргодической компоненте изоморфен специальному потоку, построенному по повороту окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и функции с логарифмическими особенностями. В силу эргодичности потока угол поворота окружности иррациональный. В общем случае функция является асимметричной, в исключительных — симметричной (точные определения см. ниже).

В работе [4] доказано отсутствие перемешивания для специального потока, построенного по повороту окружности и симметричной функции со строго логарифмическими особенностями, если угол поворота допускает аппроксимацию рациональными дробями со скоростью $\frac{\text{const}}{q^2 \ln q}$. Там же была высказана гипотеза о том, что специальный поток, построенный по повороту окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на иррациональный угол ρ и асимметричной функции с логарифмическими особенностями, может перемешивать.

Я. Г. Синай и К. М. Ханин [1] доказали это при некотором ограничении сверху на скорость роста знаменателей подходящих к ρ дробей, т.е. для некоторого множества *диофантовых* углов.

В [2] эти ограничения были ослаблены, а в [3] доказана теорема о перемешивании для *любох* иррациональных углов поворота и *сильно асимметричной* функции с логарифмическими особенностями.

В настоящей работе сделаны два обобщения.

Оказывается, что при отсутствии некоторых соотношений типа равенства между коэффициентами, описывающими особенности функции f , можно доказать перемешивание в специальном потоке для некоторого класса *лиувиллевых* углов, т.е. углов с ограничением снизу на скорость роста знаменателей подходящих дробей.

Второе обобщение касается наличия у асимметричной функции f отдельных симметричных особенностей. В [3] предполагается, что у сильно асимметричной функции их нет. Однако если наложить некоторое естественное ограничение на добавок к логарифмической функции в окрестности особой точки (в этом случае мы называем особенность *строго логарифмической*), то такие симметричные особенности могут присутствовать у сильно асимметричной функции и это не повлияет на теорему о перемешивании. Таким образом, расширяется понятие сильно асимметричной функции. Кроме того, строго логарифмические симметричные особенности не следует принимать в расчет в соотношениях, упомянутых в предыдущем абзаце.

Приведем необходимые определения и точные формулировки.

Мы будем рассматривать поворот окружности $\mathbb{S}^1$ на иррациональный угол ρ : $T_\rho x := x + \rho \pmod{1}$. Для краткости, если это не вызовет недоразумений, вместо T_ρ будем писать просто T .

Будем говорить, что функция $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$, по которой строится специальный поток, имеет логарифмические особенности, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) f имеет K особых точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K$;
- 2) $f \in C^1(\mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^K \bar{x}_i)$;

- 3) существует такое $c > 0$, что для любого x из области определения $f(x) \geq c > 0$;
- 4) для каждого $i = 1, \dots, K$

$$f'(x) = -\frac{1}{\{x - \bar{x}_i\}} (A_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i + 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\{\bar{x}_i - x\}} (B_i + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \bar{x}_i - 0,$$

причем $A_i, B_i \geq 0$.

Для того чтобы определить понятие строго логарифмической особенности, рассмотрим функцию $\Psi: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^2(0, 1]$ (в точке $x = 1$ определены левые производные), удовлетворяющую условиям

$$\Psi > 0, \quad \Psi' > 0, \quad \Psi'' \leq 0, \quad \Psi(+0) = 0. \quad (1.1)$$

Этим условиям удовлетворяют, например, функции Cx^ν при $C > 0, 0 < \nu \leq 1$, $Cx(C_1 - \ln x)$ при $C > 0, C_1 > 1$ и т. д.

Функцию Ψ будем считать определенной на $\mathbb{S}^1$.

Особенность функции f в точке $\bar{x}_i$ назовем *строго логарифмической*, если существует такая функция Ψ , удовлетворяющая (1.1), что в некоторой правой полукрестности точки $\bar{x}_i$

$$\left| f'(x) + \frac{A_i}{\{x - \bar{x}_i\}} \right| \leq \Psi'(\{x - \bar{x}_i\}),$$

а в некоторой левой полукрестности точки $\bar{x}_i$

$$\left| f'(x) - \frac{B_i}{\{\bar{x}_i - x\}} \right| \leq \Psi'(\{\bar{x}_i - x\}).$$

Обозначим

$$A = \sum_{i=1}^K A_i, \quad B = \sum_{i=1}^K B_i.$$

Функцию f назовем *симметричной*, если $A = B \neq 0$, *асимметричной*, если $A \neq B$.

В [3] функция f называлась *сильно асимметричной*, если для каждого i $\operatorname{sgn}(A_i - B_i) = \operatorname{sgn}(A - B) \neq 0$. Здесь мы будем называть функцию f *сильно асимметричной*, если для каждой особенности, не являющейся строго логарифмической, выполняется неравенство

$$\frac{A_i - B_i}{A - B} > 0,$$

а для строго логарифмической

$$\frac{A_i - B_i}{A - B} \geq 0.$$

Особенность функции f в точке $\bar{x}_i$ назовем *симметричной*, если $A_i = B_i$, и *асимметричной* в противном случае.

В [3] предполагалось, что каждая особенность асимметрична и эти асимметрии “однонаправлены”, т.е. для каждого i $(B_i - A_i)/(B - A) > 0$.

Для того чтобы сформулировать теорему для лиувиллевых углов, введем новые обозначения. Пусть I – подмножество множества $\{1, 2, \dots, K\}$ номеров особых точек. Обозначим

$$D_I = \sum_{i \in I} \frac{B_i - A_i}{B - A}. \quad (1.2)$$

Если $I = \emptyset$, то положим $D_I = 0$. Кроме того, обозначим через I_c множество номеров строго логарифмических особенностей, а через I_n – множество номеров особенностей, не являющихся строго логарифмическими, $\mathcal{I}_n = \{I : I \cap I_n \neq \emptyset\}$.

Пусть $\rho = [k_1, \dots, k_m, \dots]$ — разложение ρ в цепную дробь [6]. Через p_m/q_m обозначим m -ю подходящую к ρ дробь.

ТЕОРЕМА 1. Пусть асимметричная функция f с логарифмическими особенностями такова, что для любого непустого I и любого целого $l \geq 0$

$$D_I \neq -l. \quad (1.3)$$

Тогда существует такое $\lambda > 0$, что если угол поворота ρ удовлетворяет условию

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k_{n+1}}{\ln q_n} \geq \lambda, \quad (1.4)$$

то специальный поток, построенный по повороту T_ρ и функции f , перемешивает.

Константа λ находится из неравенства

$$\lambda > \max_{I: D_I < 0} \frac{[D_I] + 1}{\{|D_I|\}}. \quad (1.5)$$

Если все особенности f являются строго логарифмическими, то достаточно выполнения (1.3) для всех натуральных l .

(Через $[x]$ обозначена целая часть x , а через $\{x\}$ – дробная часть.)

Чтобы сформулировать теорему для функции, имеющей как строго логарифмические, так и не строго логарифмические особенности, необходимо ввести еще два обозначения. Через $\mathcal{I}$ обозначим совокупность всех непустых I , а через $\mathcal{I}_0$ – совокупность всех наборов I , каждый из которых либо пуст, либо состоит только из номеров строго логарифмических особенностей и удовлетворяет условию $D_I = 0$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть асимметричная, но не сильно асимметричная функция f такова, что для любого $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ и любого целого $l \geq 0$ выполнено (1.3). Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Следующая теорема является обобщением основной теоремы из [3].

ТЕОРЕМА 2. Если для всех особых точек функции f , кроме строго логарифмических, выполнено неравенство $(B_i - A_i)/(B - A) > 0$, а для строго логарифмических особых точек – неравенство $(B_i - A_i)/(B - A) \geq 0$, то для любого иррационального угла ρ специальный поток, построенный по повороту T_ρ и функции f , перемешивает.

§ 2. Схема доказательства

Напомним некоторые понятия, используемые при доказательстве перемешивания в рассматриваемом специальном потоке. Основным инструментом изучения перемешивающих свойств специального потока служат *биркгофовы суммы*: для $r \in \mathbb{N}$

$$f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f(T^k x), \quad f^{-r}(x) = -f^r(T^{-r}x), \quad f^0(x) \equiv 0.$$

Для почти каждого $x \in \mathbb{S}^1$ и $t > 0$ через $\mathcal{R}(t, x)$ обозначим одноточечное множество, в которое входит такое целое r , что

$$f^r(x) \leq t < f^{r+1}(x).$$

Иначе говоря, если $r \in \mathcal{R}(t, x)$, то r — это число скачков, которое совершит точка $(x; 0)$ под действием потока S^t за время t . Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{S}^1$ обозначим

$$\mathcal{R}(t, X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}(t, x).$$

Для доказательства перемешивания для каждого достаточно большого t задаются:

- конечное частичное разбиение ξ_t окружности $\mathbb{S}^1$, элементами которого являются отрезки $\xi_t = \{C_i^{(t)}\}$, причем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{C_i^{(t)} \in \xi_t} |C_i^{(t)}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu([\xi_t]) = 1$$

(через $[\xi_t]$ обозначено объединение элементов ξ_t , $|C|$ — длина отрезка C);

- положительные числа $\varepsilon(t)$ и $H(t)$, причем $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

При каждом достаточно большом t для любого номера $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t]) \cap (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$, а также для любого $C \in \xi_t$ биркгофова сумма $f^r \in C^1(C)$ и для любого $x \in C$ производная $(f^r)'$ представляется в виде

$$(f^r)'(x) = M(r, C)(1 + \gamma(r, x)), \quad |C| |M(r, C)| \geq H(t), \quad |\gamma(r, x)| < \varepsilon(t). \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что специальный поток перемешивает.

Пусть $q_m \leq r < q_{m+1}$ и $r = l_m q_m + \dots + l_0 q_0$ — такое разложение r по знаменателям q_n с целыми неотрицательными коэффициентами, что

$$\begin{aligned} 1 &\leq l_m \leq k_{m+1}, \\ 0 &\leq l_n \leq k_{n+1} \quad \text{для } n = 0, 1, \dots, m-1, \\ l_{n-1} q_{n-1} + \dots + l_0 q_0 &< q_n \quad \text{для } n = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Это разложение мы называем *стандартным*.

Определим два основных измерителя. Обозначим

$$e(r) = \sum_{n=1}^m l_n q_n \ln q_n.$$

Кроме того, выберем последовательность σ_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, зависящую от ρ и удовлетворяющую условиям:

$$\sigma_n \searrow 0; \quad \sigma_n > (\ln q_n)^{-1/4} \quad (\text{при } n > 1), \quad \sigma_n^2 \ln q_n \nearrow +\infty.$$

Разбиение ξ_t , которое мы будем использовать, построено в [3]. Там же построена бесконечно большая при $t \rightarrow +\infty$ функция $H(t)$ так, что для любого $C \in \xi_t$ выполнено неравенство $|B - A| |C| e(r) > H(t)$.

Согласно теореме о “главном резонансном слагаемом” из [3; § 4] возможны три ситуации, и в первой из них для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$, а также для любого $x \in [\xi_t]$

$$(f^r)'(x) = (B - A)e(r)(1 + \gamma_e(r, x)).$$

В этой ситуации нет никаких ограничений на коэффициенты особенностей, кроме асимметрии функции, т.е. условия $B - A \neq 0$. Поэтому все дальнейшие рассуждения относятся только ко второй и третьей ситуациям.

Центральным объектом анализа в настоящей работе является разложение производной биркгофовой суммы $(f^r)'$ в сумму “эргодической” и “резонансной” компонент, полученное в [3; § 4]: если $C \in \xi_t$, то для любого $x \in C$ и $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t]) \cap (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$

$$(f^r)'(x) = (B - A)(e(\bar{r})(1 + \gamma_e(r, x)) + L(C)(1 + \gamma_L(r, x))), \quad (2.2)$$

$$|\gamma_e(r, x)| < \varepsilon_e(t), \quad |\gamma_L(r, x)| < \varepsilon_L(t). \quad (2.3)$$

В этом разложении $L(C)$ – константа, описывающая “резонансную” компоненту в $(f^r)'$ и определяемая для каждого элемента разбиения $C \in \xi_t$. Ее величина зависит от расположения итераций $T^j C$ относительно особых точек. Точное определение будет приведено ниже. Номер $\bar{r} = \bar{r}(t) \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ определяется вместе с разбиением.

Из этого разложения и следует (2.1).

В [3] указанное разложение получено в предположении, что $(B_i - A_i)/(B - A) > 0$ для любого i . Здесь же, во-первых, слегка модифицировав оценки, мы покажем, что разложение (2.2) справедливо и при наличии симметричных строго логарифмических особенностей. Отсюда сразу следует теорема 2.

Во-вторых, мы покажем, что (2.2) остается справедливым (с чуть худшими оценками для γ_L) также при наличии особенностей, для которых $(B_i - A_i)/(B - A) < 0$, при условии, что для любого $I \in \mathcal{J}_n$ выполнено неравенство $D_I \neq 0$. В этом случае может нарушаться разложение (2.1) и, в частности, неравенство $(e(r) + L(C))|C| \geq e(r)|C| > H(t)$. Однако если существует такая константа $\theta > 0$, что при всех достаточно больших t для соответствующих r и C выполняется неравенство

$$|e(\bar{r}) + L(C)| \geq \theta e(\bar{r}),$$

то вместо неравенства $|C| |M(r, C)| \geq H(t)$ справедлива оценка

$$|C| |M(r, C)| = |B - A| |e(\bar{r}) + L(C)| |C| > \theta H(t),$$

а величины $\frac{e(\bar{r})}{e(\bar{r}) + L(C)}$ и $\frac{L(C)}{e(\bar{r}) + L(C)}$ равномерно ограничены, что дает представление $(f^r)'$ в виде (2.1) с новыми $\varepsilon(t)$ и $H(t)$.

Неравенство $|e(\bar{r}) + L(C)| \geq \theta e(\bar{r})$ равносильно равномерной по всем достаточно большим t и всем элементам разбиения $C \in \xi_t$ отделенности отношения $\frac{e(\bar{r})}{L(C)}$ от -1 . Мы покажем, что эта отделенность следует из условий теорем 1 и 1', исследуя возможные значения $e(r)$ и $L(C)$ и используя их относительную “дискретность” для лиувиллевых углов поворота.

В заключение этого параграфа отметим, что можно так подобрать коэффициенты особенностей и угол поворота, а также расположение особых точек, что в определенные моменты времени на значительной части элементов $C \in \xi_t$ величина $e(r) + L(C)$ мала настолько, что растяжения $f^r|C$ не будет и наше доказательство перемешивания не применимо. Однако в этой ситуации пока нет также и доказательства отсутствия перемешивания.

§3. Разложение $(f^r)'$ с учетом строго логарифмических особенностей

Сформулируем основное утверждение настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для любого набора $I \in \mathcal{J}_n$ выполнено неравенство $D_I \neq 0$. Тогда справедливо разложение (2.2), (2.3), а именно существуют такие бесконечно малые при $t \rightarrow +\infty$ функции $\varepsilon_e(t)$ и $\varepsilon_L(t)$, а также такие функции γ_e и γ_L , что для любого достаточно большого t , любого $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t]) \cap (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $C \in \xi_t$ при $x \in C$ либо

$$(f^r)'(x) = (B - A)e(r)(1 + \gamma_e(r, x)),$$

либо

$$(f^r)'(x) = (B - A)(e(\bar{r})(1 + \gamma_e(r, x)) + L(C)(1 + \gamma_L(r, x))),$$

причем

$$|\gamma_e(r, x)| < \varepsilon_e(t), \quad |\gamma_L(r, x)| < \varepsilon_L(t).$$

В частности, если все особенности асимметричной функции строго логарифмические, то $(f^r)'$ можно представить в виде (2.2).

Из теоремы 3.1 сразу следует справедливость теоремы 2. В самом деле, из условия $(B_i - A_i)/(B - A) > 0$ для всех особых точек, кроме строго логарифмических, для $I \in \mathcal{J}_n$ следует неравенство $D_I > 0$. Кроме того, $L(C) \geq 0$ для любого C , и поэтому из (2.2) и (2.3) следует (2.1).

Из условий теорем 1 и 1' также следует справедливость условий теоремы 3.1, поскольку $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, нужно рассмотреть лишь ситуации 2 и 3, описанные в теореме о “главном резонансном слагаемом” из [3; § 4].

Так же как при доказательстве леммы 3.1 в [2], представим f в виде суммы $f = \sum_{i=1}^K (g_i + h_i)$ следующим образом. Возьмем $\delta > 0$, меньшее половины минимального расстояния между соседними особыми точками функции f , и выделим вокруг особых точек попарно отделенные друг от друга δ -окрестности $U_1, \dots, U_K$: $U_i = (\bar{x}_i - \delta, \bar{x}_i + \delta)$.

Для $i = 1, \dots, K$ построим функции g_i и h_i так, чтобы

$$\begin{aligned} g_i|_{\overset{\circ}{U}_i^+} &= f|_{\overset{\circ}{U}_i^+}, \quad g_i|_{U_i^-} = 0, \quad g_i \in C^1(\bar{x}_i, \bar{x}_i + 1], \quad g_i|_{U_j} = 0 \quad \text{при } i \neq j, \\ h_i|_{\overset{\circ}{U}_i^-} &= f|_{\overset{\circ}{U}_i^-}, \quad h_i|_{U_i^+} = 0, \quad h_i \in C^1[\bar{x}_i, \bar{x}_i + 1), \quad h_i|_{U_j} = 0 \quad \text{при } i \neq j \end{aligned}$$

($U_i^+ = [\bar{x}_i, \bar{x}_i + \delta)$, $\overset{\circ}{U}_i^+ = (\bar{x}_i, \bar{x}_i + \delta)$), аналогично определяются U_i^- и $\overset{\circ}{U}_i^-$).

Пусть $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции с периодом 1, определенные так:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{x}, & \text{если } x \in (0, 1], \\ v(x) &= \frac{1}{1-x}, & \text{если } x \in [0, 1), \end{aligned}$$

$x_0 = 0$ — особая точка этих функций на $\mathbb{S}^1$.

Следующая лемма отражает разницу в оценках для строго логарифмических особенностей и в общем случае.

ЛЕММА 3.1. 1) *Существует такая бесконечно малая последовательность $\alpha(r)$, что для любого $i = 1, \dots, K$ и для любого x , кроме особых точек,*

$$\begin{aligned} (g_i' + h_i')^r(x) &= (-A_i + \alpha_i^-(r, x))u^r(x - \bar{x}_i) + (B_i + \alpha_i^+(r, x))v^r(x - \bar{x}_i), \\ |\alpha_i^\pm(r, x)| &< \alpha(r). \end{aligned}$$

2) *Для любого $i \in I_c$, любого $x \in [\xi_i]$ и $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$*

$$\begin{aligned} (g_i' + h_i')^r(x) &= -A_i u^r(x - \bar{x}_i) + B_i v^r(x - \bar{x}_i) + \varphi_i^r(x), \\ |\varphi_i^r(x)| &< \frac{A+B}{K} \sigma_m e(r). \end{aligned}$$

Пункт 1) леммы составляет содержание леммы 3.2 из [2], п. 2) следует из определения строго логарифмической особенности и следующей леммы для функции Ψ , с помощью которой определяются строго логарифмические особенности.

Пусть Ψ — функция, удовлетворяющая (1.1).

ЛЕММА 3.2. *При достаточно большом t для любого $t \in [\sqrt{2}q_m, \sqrt{2}q_{m+1})$, любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in [\xi_i]$*

$$(\Psi^r)'(x - \bar{x}_i) < \frac{A+B}{2K} \sigma_m e(r). \quad (3.1)$$

Доказательство сформулированной леммы приведено в последнем параграфе.

Пусть

$$D = \min_{I \in \mathcal{I}_n} |D_I|.$$

По условию $D > 0$.

Фиксируем достаточно большое t и выберем m так, что $\sqrt{2} q_m \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \max_{r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)} \alpha(r), \\ \varepsilon_e(t) &= \frac{21(A+B)}{|B-A|} \sigma_m + \frac{4K}{|B-A|} \alpha_t, \\ \varepsilon_L(t) &= \frac{2K}{|B-A|D} \alpha_t. \end{aligned}$$

(Заметим, что определение ε_L несколько отличается от аналогичного в [3].) Очевидно, что $\varepsilon_e(t) \rightarrow 0$ и $\varepsilon_L \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Как показано в [3; § 4], для любого $C \in \xi_t$, любого $x \in C$, а также для каждого i

$$\begin{aligned} u^{\overline{r}}(x - \overline{x}_i) &= e(\overline{r})(1 + \delta u^{\overline{r}}) + \chi(x - \overline{x}_i) q_{s+1} \ln k_{s+1}, & |\delta u^{\overline{r}}| &< 18\sigma_m, \\ v^{\overline{r}}(x - \overline{x}_i) &= e(\overline{r})(1 + \delta v^{\overline{r}}) + \chi(x - \overline{x}_i) q_{s+1} \ln k_{s+1}, & |\delta v^{\overline{r}}| &< 18\sigma_m, \end{aligned}$$

где s — номер “главного резонансного слагаемого”, χ — характеристическая функция множества $[X^{(s)}]$ — носителя “главного резонансного слагаемого”. Это множество состоит из отрезков, содержащих сгустки особых точек ранга s . Отсюда для логарифмической особенности общего вида ($i \in I_n$) получаем

$$\begin{aligned} (g'_i + h'_i)^{\overline{r}}(x) &= (-A_i + \alpha_i^-(\overline{r}, x)) u^{\overline{r}}(x - \overline{x}_i) + (B_i + \alpha_i^+(\overline{r}, x)) v^{\overline{r}}(x - \overline{x}_i) \\ &= e(\overline{r}) (B_i - A_i + B_i \delta v^{\overline{r}} - A_i \delta u^{\overline{r}} + (1 + \delta u^{\overline{r}}) \alpha_i^- + (1 + \delta v^{\overline{r}}) \alpha_i^+) \\ &\quad + \chi(x - \overline{x}_i) q_{s+1} \ln k_{s+1} (B_i - A_i + \alpha_i^+ + \alpha_i^-), \end{aligned}$$

а для строго логарифмической особенности ($i \in I_c$)

$$\begin{aligned} (g'_i + h'_i)^{\overline{r}}(x) &= -A_i u^{\overline{r}}(x - \overline{x}_i) + B_i v^{\overline{r}}(x - \overline{x}_i) + \varphi_i^{\overline{r}}(x) \\ &= e(\overline{r}) \left(B_i - A_i + B_i \delta v^{\overline{r}} - A_i \delta u^{\overline{r}} + \frac{\varphi_i^{\overline{r}}(x)}{e(\overline{r})} \right) \\ &\quad + (B_i - A_i) \chi(x - \overline{x}_i) q_{s+1} \ln k_{s+1}. \end{aligned}$$

В частности, для симметричной строго логарифмической особенности

$$(g'_i + h'_i)^{\overline{r}}(x) = e(\overline{r}) \left(B_i \delta v^{\overline{r}} - A_i \delta u^{\overline{r}} + \frac{\varphi_i^{\overline{r}}(x)}{e(\overline{r})} \right).$$

В силу п. 2) леммы 3.1 при достаточно большом m

$$\left| \frac{\varphi_i^{\overline{r}}(x)}{e(\overline{r})} \right| < \frac{A+B}{K} \sigma_m.$$

По построению частичного разбиения ξ_t для всех i функции $\chi(x - \bar{x}_i)$ постоянны на его элементах. Обозначим через $I(C)$ множество тех индексов i , для которых $C \subset [X^{(s)}] + \bar{x}_i$, т.е. таких i , что для $x \in C$ $\chi(x - x_i) = 1$ (заметим, что $I(C)$ может быть и пустым). Тогда, просуммировав по i выражения для $(g'_i + h'_i)^{\bar{r}}(x)$, получим разложение, справедливое для любой асимметричной функции:

$$(f^{\bar{r}})'(x) = (B - A)(e(\bar{r})(1 + \gamma_e(\bar{r}, x)) + L(C) + \Gamma_L(\bar{r}, x)), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_e(\bar{r}, x) = & \frac{1}{B - A} \sum_{i=1}^K (B_i \delta v^{\bar{r}} - A_i \delta u^{\bar{r}}) + \frac{1}{B - A} \left(\sum_{i \in I_{\text{н}}} ((1 + \delta u^{\bar{r}}) \alpha_i^- \right. \\ & \left. + (1 + \delta v^{\bar{r}}) \alpha_i^+) + \sum_{i \in I_c} \frac{\varphi_i^{\bar{r}}(x)}{e(\bar{r})} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$L(C) = D_{I(C)} q_{s+1} \ln k_{s+1}, \quad (3.4)$$

$$\Gamma_L(\bar{r}, x) = \frac{q_{s+1} \ln k_{s+1}}{B - A} \sum_{i \in I(C) \cap I_{\text{н}}} (\alpha_i^+ + \alpha_i^-).$$

Нетрудно показать, что

$$|\gamma_e(\bar{r}, x)| < \frac{19(A + B)}{|B - A|} \sigma_m + \frac{4K}{|B - A|} \alpha_t.$$

Рассмотрим в разложении (3.2) слагаемые $L(C) + \Gamma_L$.

Пусть элемент разбиения C таков, что $I(C) \notin \mathcal{J}_{\text{н}}$, т.е. $I(C) \cap I_{\text{н}} = \emptyset$. В этом случае $\Gamma_L(\bar{r}, x) = 0$. Полагая $\gamma_L(\bar{r}, x) = 0$, получаем независимо от значения $L(C)$

$$L(C) + \Gamma_L(\bar{r}, x) = L(C)(1 + \gamma_L(\bar{r}, x)).$$

Пусть теперь $I(C) \in \mathcal{J}_{\text{н}}$. Так как $D = \min_{I \in \mathcal{J}_{\text{н}}} |D_I| > 0$, то

$$\begin{aligned} |L(C)| & \geq D q_{s+1} \ln k_{s+1}, \\ |\Gamma_L(\bar{r}, x)| & < \frac{2K}{|B - A|} \alpha_t q_{s+1} \ln k_{s+1} < D \varepsilon_L(t) q_{s+1} \ln k_{s+1}. \end{aligned}$$

Если положить

$$\gamma_L(\bar{r}, x) = \frac{\Gamma_L(\bar{r}, x)}{L(C)},$$

то снова получаем соотношение $L(C) + \Gamma_L(\bar{r}, x) = L(C)(1 + \gamma_L(\bar{r}, x))$, и при этом $|\gamma_L(\bar{r}, x)| < \varepsilon_L(t)$.

Наконец, как показано в [3; §4], для любого $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t])$ можно записать $r = \bar{r} + \Delta r$ и $(f^r)'(x) = (f^{\bar{r}})'(x) + (f^{\Delta r})'(x + \bar{r}\rho)$, причем для любого $x \in [\xi_t]$

$$|(f^{\Delta r})'(x + \bar{r}\rho)| < (A + B) \sigma_m e(\bar{r}).$$

Положив

$$\gamma_e(r, x) = \gamma_e(\bar{r}, x) + \frac{(f^{\Delta r})'(x + \bar{r}\rho)}{(B - A)e(\bar{r})}, \quad \gamma_L(r, x) = \gamma_L(\bar{r}, x),$$

получим разложение (2.2) с требуемыми оценками

$$|\gamma_e(r, x)| < \varepsilon_e(t), \quad |\gamma_L(r, x)| < \varepsilon_L(t).$$

Теорема 3.1, а с ней и теорема 2 доказаны.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 1'

1. Поскольку теорема 1' является обобщением теоремы 1, мы будем доказывать сразу теорему 1'. Итак, из условий теоремы 1' на функцию следует представление производной $(f^r)'$ в виде (2.2) с оценками (2.3).

ЛЕММА 4.1. Пусть существует такая константа $\theta \in (0, 1)$, что для любого достаточно большого t , для любого $C \in \xi_t$ и любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ выполнено неравенство

$$|e(r) + L(C)| \geq \theta e(r).$$

Тогда рассматриваемый специальный поток перемешивает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что существует такая функция $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, что при всех достаточно больших t для любого номера $r \in \mathcal{R}(t, [\xi_t]) \cap (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$, а также для любого $C \in \xi_t$ и любого $x \in C$ производная $(f^r)'$ представляется в виде, чуть отличном от (2.1):

$$(f^r)'(x) = M(r, C)(1 + \gamma(r, x)), \quad |C| |M(r, C)| \geq \theta H(t), \quad |\gamma(r, x)| < \varepsilon(t) \quad (4.1)$$

(разбиение ξ_t и функция $H(t)$ построены в [3]). Отсюда и будет следовать перемешивание.

Положим

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_e(t)}{\theta} + \frac{(1 + \theta)\varepsilon_L(t)}{\theta}.$$

Ситуация, когда

$$(f^r)'(x) = (B - A)e(r)(1 + \gamma_e(r, x)),$$

тривиальна.

Пусть в соответствии с теоремой 3.1

$$(f^r)'(x) = (B - A)(e(\bar{r})(1 + \gamma_e(r, x)) + L(C)(1 + \gamma_L(r, x))),$$

причем

$$|\gamma_e(r, x)| < \varepsilon_e(t), \quad |\gamma_L(r, x)| < \varepsilon_L(t),$$

а в соответствии с (2.3) $e(r)|B - A||C| > H(t)$. Запишем (2.2) в виде

$$(f^r)'(x) = (B - A)(e(\bar{r}) + L(C))(1 + \gamma(r, x)),$$

$$\gamma(r, x) = \frac{e(\bar{r})}{e(\bar{r}) + L(C)} \gamma_e(r, x) + \frac{L(C)}{e(\bar{r}) + L(C)} \gamma_L(r, x).$$

Положим, как и прежде,

$$M(r, C) = (B - A)(e(\bar{r}) + L(C)).$$

Тогда

$$|C| |M(r, C)| = |C| |B - A| |e(\bar{r}) + L(C)| \geq \theta |C| |B - A| e(\bar{r}) > \theta H(t).$$

Кроме того (мы опустили аргументы функций e и L),

$$\left| \frac{e}{e+L} \right| \leq \frac{1}{\theta}, \quad \left| \frac{L}{e+L} \right| = \left| 1 - \frac{e}{e+L} \right| \leq 1 + \frac{1}{\theta} = \frac{1+\theta}{\theta},$$

поэтому

$$|\gamma(r, x)| = \left| \frac{e}{e+L} \right| |\gamma_e(r, x)| + \left| \frac{L}{e+L} \right| |\gamma_L(r, x)| < \frac{\varepsilon_e(t)}{\theta} + \frac{(1+\theta)\varepsilon_L(t)}{\theta} = \varepsilon(t).$$

Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что *существование константы $\theta \in (0, 1)$, для которой выполняется неравенство $|e(r) + L(C)| \geq \theta e(r)$, равносильно существованию константы $\theta' > 0$, для которой при $L(C) < 0$*

$$\left| \frac{e(r)}{L(C)} + 1 \right| \geq \theta'. \quad (4.2)$$

2. Пусть угол поворота ρ и λ удовлетворяют условиям (1.4) и (1.5) теоремы 1. Чуть уменьшив λ , будем считать, что для всех достаточно больших m выполняется неравенство

$$\frac{\ln q_m}{\ln k_{m+1}} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Из свойств подходящих дробей [6] легко получить, что

$$1 < \frac{\ln q_{m+1}}{\ln k_{m+1}} \leq 1 + \frac{1}{\lambda} + \nu_{m+1}, \quad \nu_{m+1} = \frac{q_{m-1}}{k_{m+1} q_m \ln k_{m+1}}, \quad (4.3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_m = 0, \quad (4.4)$$

$$k_m > q_m^{\lambda/(\lambda+2)}. \quad (4.5)$$

В самом деле, $q_{m+1} = k_{m+1} q_m \left(1 + \frac{q_{m-1}}{k_{m+1} q_m} \right)$, откуда

$$1 < \frac{\ln q_{m+1}}{\ln k_{m+1}} = 1 + \frac{\ln q_m}{\ln k_{m+1}} + \frac{\ln \left(1 + \frac{q_{m-1}}{k_{m+1} q_m} \right)}{\ln k_{m+1}} \leq 1 + \frac{1}{\lambda} + \nu_{m+1}.$$

Учитывая, что при достаточно больших m справедливо неравенство $\nu_m < 1/\lambda$, из (4.3) получаем (4.5).

ЛЕММА 4.2. *При достаточно больших t для любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ если $L(C) < 0$, то*

$$\frac{e(r)}{L(C)} \in \tilde{\mathcal{D}}(\lambda, m) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} \bigcup_{I: D_I < 0} \left(\frac{1}{D_I} \left(l + \frac{l+1}{\lambda} + l\nu'_m \right), \frac{l}{D_I} \right),$$

где $\nu'_m = \max(\nu_{m+1}, \nu_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем рассматривать только ситуации 2 и 3, описанные в теореме о “главном резонансном слагаемом” [3; § 4].

Начнем с ситуации 3. В этом случае существует номер $s < m$, для которого выполняется неравенство $q_{s+1} \ln k_{s+1} > \sigma_m t \ln q_m$. Если начиная с некоторого номера выполняется условие $\ln k_{n+1} \geq \lambda \ln q_n$, $\lambda > 0$, то при достаточно больших t , а значит, и m в ситуации 3 возможно только $s = m - 1$. В самом деле, предположим противное, пусть $s + 1 < m$. Тогда поскольку $t > q_m$, то

$$\frac{q_{s+1} \ln k_{s+1}}{t \ln q_m} < \frac{q_{s+1} \ln k_{s+1}}{q_m \ln q_m} < \frac{1}{k_m} \leq \frac{1}{q_m^{\lambda/(\lambda+2)}} < \frac{1}{\ln q_m} < \sigma_m,$$

что противоречит определению ситуации 3.

Таким образом, в силу (3.4)

$$L(C) = D_{I(C)} q_m \ln k_m.$$

Из условия $q_m \ln k_m > \sigma_m t \ln q_m$ при достаточно больших m следует (с учетом условия $\sigma_m \ln q_m \rightarrow +\infty$), что

$$t < \frac{q_m \ln k_m}{\sigma_m \ln q_m} < q_m \ln k_m < \frac{q_m k_m}{2} < \frac{q_{m+1}}{2},$$

поэтому $q_m < r < q_{m+1}$. Пусть $l q_m \leq r < (l + 1) q_m$, $1 \leq l \leq k_{m+1}$. Тогда

$$l q_m \ln q_m \leq e(r) < l q_m \ln q_m + q_m \ln q_{m-1}.$$

При $D_I < 0$ получаем (для краткости вместо $I(C)$ пишем I):

$$\frac{l}{D_I} > \frac{1}{D_I} \frac{l \ln q_m}{\ln k_m} \geq \frac{e(r)}{L(C)} > \frac{1}{D_I} \frac{l \ln q_m + \ln q_{m-1}}{\ln k_m} > \frac{1}{D_I} \left(l \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \nu_m \right) + \frac{1}{\lambda} \right),$$

т.е. для $r \in [l q_m, (l + 1) q_m)$

$$\frac{e(r)}{L(C)} \in \left(\frac{1}{D_I} \left(l + \frac{l + 1}{\lambda} + l \nu_m \right), \frac{l}{D_I} \right).$$

В ситуацию 2 мы попадаем, если $\sqrt{2} \max(q_m, \sigma_m q_{m+1}) \leq t < \sqrt{2} q_{m+1}$, поэтому $r \in (\max(q_m, \sigma_m q_{m+1}), 2 q_{m+1})$.

Рассмотрим сначала случай $q_m < r < q_{m+1}$. Тогда $q_m \ln q_m \leq e(r) < q_{m+1} \ln q_m$, $L(C) = D_{I(C)} q_{m+1} \ln k_{m+1}$. Если $D_I = D_{I(C)} < 0$, то

$$0 > \frac{1}{D_I} \frac{q_m \ln q_m}{q_{m+1} \ln k_{m+1}} \geq \frac{e(r)}{L(C)} > \frac{1}{D_I} \frac{\ln q_m}{\ln k_{m+1}} > \frac{1}{D_I \lambda},$$

т.е.

$$\frac{e(r)}{L(C)} \in \left(\frac{1}{D_{I(C)} \lambda}, 0 \right).$$

Пусть теперь $q_{m+1} \leq r < 2q_{m+1}$ (а значит, $r < q_{m+2}$). Тогда $q_{m+1} \ln q_{m+1} \leq e(r) < q_{m+1}(\ln q_{m+1} + \ln q_m)$, откуда при $D_I < 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_I} &> \frac{1}{D_I} \left(1 + \frac{\ln q_m}{\ln k_{m+1}} \right) \geq \frac{e(r)}{L(C)} > \frac{1}{D_I} \left(1 + \frac{2 \ln q_m}{\ln k_{m+1}} + \nu_{m+1} \right) \\ &> \frac{1}{D_I} \left(1 + \frac{2}{\lambda} + \nu_{m+1} \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{e(r)}{L(C)} \in \left(\frac{1}{D_I} \left(1 + \frac{2}{\lambda} + \nu_{m+1} \right), \frac{1}{D_I} \right).$$

Объединяя результаты ситуаций 2 и 3, получаем заключение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Если*

$$-1 \notin \mathcal{D}(\lambda) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}_+} \bigcup_{I: D_I < 0} \left[\frac{1}{D_I} \left(l + \frac{l+1}{\lambda} \right), \frac{l}{D_I} \right], \quad (4.6)$$

то существует такое $\theta' > 0$, что начиная с некоторого номера m при $t > \sqrt{2}q_m$ для всех $C \in \xi_t$ и всех $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{e(r)}{L(C)} + 1 \right| \geq \theta'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лишь конечное число отрезков, входящих в $\mathcal{D}(\lambda)$, пересекается с интервалом $(-2, 0)$. Точнее, достаточно рассмотреть $l \leq 2 \max_I (-D_I)$. Поэтому если $-1 \notin \mathcal{D}(\lambda)$, то точка -1 отделена от указанного множества и в качестве θ' можно взять половину расстояния от -1 до ближайшего отрезка, а m выбрать так, чтобы $2\nu'_m < \theta'$. Тогда множество $\tilde{\mathcal{D}}(\lambda, m)$ содержится в θ' -окрестности множества $\mathcal{D}(\lambda)$ и точка -1 отстоит от $\tilde{\mathcal{D}}(\lambda, m)$ не менее чем на θ' , откуда в силу леммы 4.2 и следует требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Из этой леммы сразу следует, что если для любого $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ и любого $l \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство $D_I \neq -l$, то существует такое λ , что $-1 \notin \mathcal{D}(\lambda)$, откуда следует перемешивание в специальном потоке.

Наконец, покажем, что условие (1.4) на λ , сформулированное в теореме 1, достаточно для выполнения (4.6).

Рассмотрим условие, противоположное (4.6): пусть $-1 \in \mathcal{D}(\lambda)$, т. е. для некоторого $D_I < 0$ и некоторого $l \in \mathbb{Z}_+$

$$-1 \in \left[\frac{1}{D_I} \left(l + \frac{l+1}{\lambda} \right), \frac{l}{D_I} \right].$$

Это означает, что

$$\frac{1}{D_I} \left(l + \frac{l+1}{\lambda} \right) \leq -1 \leq \frac{l}{D_I},$$

что равносильно в силу неравенства $D_I < 0$ условию

$$l \leq |D_I| \leq l + \frac{l+1}{\lambda},$$

откуда следует, что $l \leq \lfloor |D_I| \rfloor$, поэтому

$$\{|D_I|\} = |D_I| - \lfloor |D_I| \rfloor \leq |D_I| - l \leq \frac{l+1}{\lambda} \leq \frac{\lfloor |D_I| \rfloor + 1}{\lambda},$$

а значит,

$$0 < \lambda \leq \frac{\lfloor |D_I| \rfloor + 1}{\{|D_I|\}}.$$

Таким образом, если

$$\lambda > \max_{D_I < 0} \frac{\lfloor |D_I| \rfloor + 1}{\{|D_I|\}},$$

то выполняется (4.6).

Теоремы 1 и 1' доказаны.

§ 5. Доказательство оценки для $(\Psi^r)'$

Пусть Ψ — функция с периодом 1, удовлетворяющая (1.1).

ЛЕММА 5.1. 1) Для любого $x \in (0, 1)$

$$x\Psi'(x) \leq \Psi(x). \quad (5.1)$$

2) Если $h > 0$, $x \geq 0$, $x + kh \leq 1$, то

$$\Psi'(x+h) + \dots + \Psi'(x+kh) \leq \frac{1}{h} \Psi(x+kh). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если доопределить $\Psi(0) = 0$, то к функции Ψ на отрезке $[0, x]$ можно применить теорему Лагранжа о конечных приращениях:

$$\frac{\Psi(x)}{x} = \frac{\Psi(x) - \Psi(0)}{x} = \Psi'(\theta x) \geq \Psi'(x)$$

в силу невозрастания Ψ' .

2) В силу положительности и невозрастания функции $\varphi(\tau) = \Psi'(x + \tau h)$ на отрезке $[1, k]$

$$0 < \sum_{j=1}^k \varphi(j) \leq \varphi(1) + \int_1^k \varphi(\tau) d\tau.$$

Имеем

$$\int_1^k \varphi(\tau) d\tau = \int_1^k \Psi'(x + \tau h) d\tau = \frac{1}{h} (\Psi(x + kh) - \Psi(x + h)).$$

В соответствии с (5.1)

$$\varphi(1) = \Psi'(x+h) \leq \frac{\Psi(x+h)}{x+h} \leq \frac{\Psi(x+h)}{h},$$

откуда и получаем требуемое неравенство.

Лемма доказана.

В [3; §3] определено множество $\tilde{V}(t)$, с помощью которого строится ξ_t , следующим образом. Для каждого номера $m \geq 2$ определим множества

$$V_m = \left\{ x : |x - T^{-j}x_0| \geq \frac{3\sigma_m}{q_m} \quad \forall j = 0, 1, \dots, q_m - 1 \right\},$$

$$V'_m = \left\{ x : |x - T^{-j}x_0| \geq \frac{3\sigma_m}{q_{m+1}} \quad \forall j = 0, 1, \dots, 2q_{m+1} - 1 \right\}.$$

Далее положим

$$\tilde{V}(t) = \begin{cases} V_m, & \text{если } \sqrt{2}q_m \leq t < \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1}, \\ V'_m, & \text{если } \sqrt{2}\sigma_m q_{m+1} \leq t < \sqrt{2}q_{m+1}. \end{cases}$$

По построению разбиения

$$[\xi_t] \subset \bigcap_{i=1}^K (\tilde{V}(t) + \bar{x}_i),$$

поэтому лемма 3.2 вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 5.2. *При достаточно большом m для любого $t \in [\sqrt{2}q_m, \sqrt{2}q_{m+1})$, любого $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$ и любого $x \in \tilde{V}(t)$*

$$(\Psi^r)'(x) < \frac{A+B}{2K} \sigma_m e(r). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим Ψ' в виде суммы $\Psi' = \hat{\psi} + \check{\psi}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \Psi'(x), & \check{\psi} &= 0 & \text{при } x \in (0, \Delta_m), \\ \hat{\psi} &= 0, & \check{\psi} &= \Psi'(x) & \text{при } x \notin (0, \Delta_m), \end{aligned}$$

где Δ_m — минимальное из попарных расстояний между точками вида $T^{-j}0$, $j = 0, \dots, q_m - 1$. Известно, что $1/(2q_m) < \Delta_m < 1/q_m$ (см., например, [6]).

Покажем сначала, что для любого $r \in (q_m, 2q_{m+1})$ и любого x

$$\check{\psi}^r(x) < \frac{8\Psi(1)}{\ln q_m} e(r). \quad (5.4)$$

Для этого рассмотрим *нестандартное* разложение

$$r = lq_m + r', \quad 0 \leq r' < q_m, \quad 1 \leq l \leq \frac{r}{q_m}.$$

Имеем

$$\check{\psi}^r(x) \leq \sum_{k=0}^{l+1} \check{\psi}^{q_m}(x + k\delta_m).$$

Применим п. 2) леммы 5.1 к $\check{\psi}^{q_m}(x)$ для произвольного x . Для $j = 0, \dots, q_m - 1$ обозначим $\Delta x_j = \{x - T^{-j}0\}$. Как следует из определения Δ_m , величины Δx_i попарно различаются не менее чем на Δ_m . Кроме того, если $\Delta x_i < \Delta_m$, то $\check{\psi}(\Delta x_i) = 0$, поэтому

$$\check{\psi}^{q_m}(x) = \sum_{j=0}^{q_m-1} \check{\psi}(\Delta x_j) \leq \sum_{i=0}^{q_m-1} \check{\psi}(i\Delta_m) \leq \frac{1}{\Delta_m} \Psi(q_m \Delta_m) < \frac{1}{\Delta_m} \Psi(1).$$

Подставив это неравенство в предыдущее, получим

$$\check{\psi}^r(x) < \frac{l+1}{\Delta_m} \Psi(1) \leq \frac{2r}{q_m \Delta_m} \Psi(1).$$

Учитывая, что $q_m \Delta_m > 1/2$, а также неравенство $e(r) > (r/2) \ln q_m$, получим требуемое неравенство (5.4).

Для оценки $\hat{\psi}^r$ рассмотрим случаи $t \in [\sqrt{2} q_m, \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1})$ и $t \in [\max(\sqrt{2} q_m, \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1}), \sqrt{2} q_{m+1})$, поскольку в этих случаях по-разному определено множество $\tilde{V}(t)$.

Пусть сначала $t \in [\sqrt{2} q_m, \sqrt{2} \sigma_m q_{m+1})$. Как показано в [3; § 3], для любого $x \in \tilde{V}(t)$ расстояние до любой особой точки функции $(\Psi^r)'$ больше чем σ_m/q_m . Если $r \in (t/\sqrt{2}, \sqrt{2} t)$, то $q_m < r < 2\sigma_m q_{m+1} < q_{m+1}$ и в стандартном разложении $r = l_m q_m + \dots$ коэффициент l_m удовлетворяет неравенству $l_m \geq 1$. В левой Δ_m -полуокрестности точки x может находиться не более чем $l_m + 1$ особая точка функции Ψ' (см. [2; § 2]), поэтому

$$\hat{\psi}^r(x) \leq (l_m + 1) \Psi' \left(\frac{\sigma_m}{q_m} \right).$$

В силу неравенства $\Psi'(\theta) < \Psi(\theta)/\theta$, а также с учетом неравенства $e(r) \geq l_m q_m \times \ln q_m$ получаем

$$\hat{\psi}^r(x) < \frac{2\Psi(\sigma_m/q_m)}{\sigma_m \ln q_m} e(r). \quad (5.5)$$

Пусть теперь $\sqrt{2} \sigma_m q_{m+1} t \leq \sqrt{2} q_{m+1}$, $t \geq \sqrt{2} q_m$. В этом случае $\sigma_m q_{m+1} < r < 2q_{m+1}$, $r > q_m$, $\tilde{V}(t) = V'_m$. По построению расстояние от любой точки $\tilde{V}(t)$ до ближайшей особой точки функции $(\Psi^r)'$ составляет более чем $3\sigma_m/q_{m+1}$. Возможны два подслучая: $q_m < r < q_{m+1}$ и $q_{m+1} \leq r < 2q_{m+1}$.

Пусть $q_m < r < q_{m+1}$. В этом случае стандартное разложение r имеет вид $r = l_m q_m + \dots$, $l_m \geq 1$, значит, $e(r) > \frac{r \ln q_m}{2}$. В левой Δ_m -полуокрестности точки x может находиться не более чем $l_m + 1$ точка из множества $X(r)$, причем ближайшая из них $x^-(x)$ на расстоянии не меньшем чем $3\sigma_m/q_{m+1}$, а взаимно точки $X(r)$ удалены друг от друга не менее чем на $|\delta_m|$ (см. [2; § 4]). Поэтому в силу невозрастания функции Ψ' и согласно лемме 5.1

$$\hat{\psi}^r(x) < \Psi' \left(\frac{3\sigma_m}{q_{m+1}} \right) + \sum_{j=1}^{l_m} \Psi'(j|\delta_m|) \leq \Psi' \left(\frac{3\sigma_m}{q_{m+1}} \right) + \frac{1}{|\delta_m|} \Psi(\Delta_m).$$

Учитывая неравенства $\Psi'(\theta) < \Psi(\theta)/\theta$ и $q_{m+1} < 1/|\delta_m| < 2q_{m+1}$, получаем

$$\widehat{\psi}^r(x) < \frac{\Psi(3\sigma_m/q_{m+1})q_{m+1}}{3\sigma_m} + 2\Psi(\Delta_m)q_{m+1} < \frac{\Psi(\Delta_m)q_{m+1}}{2\sigma_m}$$

(при достаточно большом m). С другой стороны, $e(r) > \frac{\sigma_m q_{m+1} \ln q_m}{2}$, откуда

$$\widehat{\psi}^r(x) < \frac{\Psi(\Delta_m)}{\sigma_m^2 \ln q_m} e(r). \quad (5.6)$$

Рассмотрим случай $q_{m+1} \leq r < 2q_{m+1}$. В этом случае $e(r) \geq q_{m+1} \ln q_{m+1}$. Положим $r = q_{m+1} + r'$, $0 \leq r' < q_{m+1}$. Тогда

$$\widehat{\psi}^r(x) = \widehat{\psi}^{q_{m+1}}(x) + \widehat{\psi}^{r'}(x + \delta_{m+1}).$$

К каждому из слагаемых в правой части можно применить рассуждения из предыдущего случая и для каждого из них получить такую же оценку, откуда

$$\widehat{\psi}^r(x) < \frac{\Psi(\Delta_m)q_{m+1}}{\sigma_m},$$

или, учитывая неравенство для $e(r)$, получаем оценку более сильную, чем (5.6):

$$\widehat{\psi}^r(x) < \frac{\Psi(\Delta_m)}{\sigma_m \ln q_{m+1}} e(r).$$

Сравнивая (5.5) и (5.6), приходим к выводу, что неравенство (5.6) справедливо во всех случаях. Наконец, прибавив оценку (5.4) для $\widehat{\psi}^r$, окончательно получаем во всех рассматриваемых случаях

$$(\Psi^r)'(x) < \frac{\Psi(1)}{\sigma_m^2 \ln q_m} e(r),$$

откуда с учетом неравенства $\sigma_m^2 \ln q_m > 1/\sigma_m^2$ и следует при достаточно больших m неравенство (5.3).

Лемма доказана.

Список литературы

1. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Перемешивание некоторых классов потоков над поворотом окружности // Функциональный анализ и его приложения. 1992. Т. 26. № 3. С. 1–21.
2. *Кочергин А. В.* Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 8. С. 83–112.
3. *Кочергин А. В.* Невырожденные неподвижные точки и перемешивание в потоках на двумерном торе. II // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 3. С. 15–46.
4. *Кочергин А. В.* Невырожденные седла и отсутствие перемешивания // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 453–468.
5. *Арнольд В. И.* Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами // Функциональный анализ и его приложения. 1991. Т. 25. № 2. С. 1–12.
6. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: avk@econ.msu.ru

Поступила в редакцию
26.02.2004