Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Ганзбург, П. Неваи, Т. Эрдейи, Неравенства типа Рисса–Шура для целых функций экспоненциального типа, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 1, 29–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:30:55

УДК 517.53

Михаил И. Ганзбург, Пол Неваи, Тамас Эрдейи

Неравенства типа Рисса–Шура для целых функций экспоненциального типа

Для целых функций экспоненциального типа доказано общее неравенство типа Рисса–Шура. Если f и Q – функции экспоненциальных типов $\sigma > 0$ и $\tau \geq 0$ соответственно и Q принимает вещественные значения на вещественной оси, причем ее вещественные нули (без учета кратностей) отделены друг от друга, то

$$|f(x)| \leq (\sigma + \tau)(A_{\sigma+\tau}(Q))^{-1/2} \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$A_s(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathbb{R}} ([Q'(x)]^2 + s^2 [Q(x)]^2).$$

Это неравенство применяется к весам $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(\tau x)$ и $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$. Описаны экстремальные функции в соответствующих оценках.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: неравенства типа Рисса–Шура, неравенство Даффина–Шеффера, целые функции экспоненциального типа.

DOI: 10.4213/sm8435

§ 1. Введение

Для $n \in \mathbb{N}$ пусть $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{T}_n$ – соответственно множества алгебраических и тригонометрических полиномов степени не выше n с комплексными коэффициентами. Для данного $\gamma \geq 0$ пусть $\mathbb{B}_\gamma$ – семейство целых функций экспоненциального типа γ . Иными словами, $f \in \mathbb{B}_\gamma$, тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \exp(-(\gamma + \varepsilon)|z|) < \infty$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Наконец, пусть $C(\Omega)$ – пространство непрерывных комплекснозначных функций f на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$, для которых¹

$$\|f\|_{C(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in \Omega} |f(t)| < \infty.$$

Хорошо известное неравенство Рисса–Шура²

$$\|P\|_{C([-1,1])} \leq (n+1) \left\| \sqrt{1-t^2} P(t) \right\|_{C([-1,1])}, \quad P \in \mathbb{P}_n, \quad (1.1)$$

Работа Пола Неваи была поддержана KAU (грант № 20-130/1433 HiCi).

¹Мы должны извиниться за “неизящное” обозначение $\|f(t)\|_{C(\Omega)}$, используемое в статье несколько раз.

²До недавнего времени оно обычно называлось неравенством Шура; почему здесь следует упоминать также Марселя Рисса, объясняется, к примеру, в [1] и [2].

играет заметную роль в теории приближений. К примеру, самое простое доказательство неравенства Маркова основано на приложении (1.1) к неравенству Бернштейна. Мы уверены, что каждый читатель нашей статьи неоднократно сталкивался с выводом неравенств такого типа, так что ограничимся ссылкой на работу М. Рисса 1914 г. [3; §3, предложение IV], откуда в конечном счете берут начало и все последующие примеры этого рода.

Хуже известны неравенство типа Рисса–Шура

$$\|T\|_{C([- \pi, \pi])} \leq (n+1) \|\sin t \, T(t)\|_{C([- \pi, \pi])}, \quad T \in \mathbb{T}_n, \quad (1.2)$$

и неравенство типа Шура

$$\|P\|_{C([-1, 1])} \leq (n+1) \|tP(t)\|_{C([-1, 1])}, \quad P \in \mathbb{P}_n. \quad (1.3)$$

На самом деле третий из авторов опросил ведущих специалистов, но не нашел ни одного, кто бы знал о неравенстве (1.2), столь обманчиво похожем на (1.1). Хотя, действительно, для четных тригонометрических полиномов (1.2) эквивалентно (1.1), мы не знаем простых способов распространить его с четных тригонометрических полиномов на все полиномы. Мы натолкнулись на (1.2), “запрятанное” в [4; лемма 15.1.3], без каких либо ссылок на источники, так что остается предположить, что [4] – единственная работа, содержащая доказательство, и весьма вероятно, что это доказательство принадлежит К. И. Рахману³. Неравенство (1.3) было доказано К. И. Шуром в 1919 г. (см. [5; формула (29)]). Фактически он доказал немного больше, а именно, что для нечетных n коэффициент $n+1$ в (1.3) можно заменить на n .

В настоящей статье мы обсудим различные варианты неравенств (1.2) и (1.3) для целых функций экспоненциального типа. Они представляют собой частные случаи следующего общего неравенства типа Рисса–Шура.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\tau \geq 0$ и $\sigma > 0$, и пусть $Q \in B_\tau$ – функция, принимающая вещественные значения на $\mathbb{R}$. Через $Z_Q \stackrel{\text{def}}{=} \{t_n\}$ обозначим множество вещественных нулей Q (рассматриваемых без учета кратностей). Если $\text{card } Z_Q > 1$, то предположим, что $\inf_{k \neq \ell} |t_k - t_\ell| > 0$. Пусть

$$A_s(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t \in \mathbb{R}} ([Q'(t)]^2 + s^2 [Q(t)]^2), \quad s \geq 0. \quad (1.4)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(а) Пусть $f \in B_\sigma$; тогда

$$|f(x)| \leq (\sigma + \tau) (A_{\sigma+\tau}(Q))^{-1/2} \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

(б) Если функция $f \in B_\sigma$, $f \not\equiv 0$, принимает вещественные значения на $\mathbb{R}$ и в точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$ в (1.5) выполнено равенство, то либо

$$|(Qf)(x_0)| = \|Qf\|_{C(\mathbb{R})},$$

³Кази Ибадур Рахман умер 21 июля 2013 г., и возможно, что источник (1.2) теперь уже никогда не будет установлен.

либо существуют вещественные константы S и C , $|S| + |C| > 0$, для которых

$$Q(x)f(x) \equiv S \sin((\sigma + \tau)x) + C \cos((\sigma + \tau)x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Разумеется, если $\|Qf\|_{C(\mathbb{R})} = \infty$ в (1.5), то теорема 1.1, (а) совершенно очевидна и не представляет никакой ценности. Это так, например, для функции f , являющейся непостоянной функцией экспоненциального типа 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В доказательстве теоремы 1.1 мы опираемся на неравенство Даффина–Шеффера для целых функций экспоненциального типа (см. [6; теорема II]). Доказательство теоремы 1.1, (а) аналогично доказательству леммы 15.1.3 в книге К. И. Рахмана и Г. Шмайссера [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если функция $f \in B_\sigma$ принимает вещественные значения на $\mathbb{R}$ и в точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$ в (1.5) выполнено равенство, то $f'(x_0) = 0$, так что если $f \not\equiv 0$ и $Q'(x_0) \neq 0$, то

$$|(Qf)(x_0)| < \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Как показывает теорема 1.1, (b), равенство в (1.5) выполняется только в исключительных случаях: функция f в (1.6) должна быть целой (порядка 1 и типа не выше σ), так что нули Q (с кратностями) должны быть также нулями правой части.

В двух следствиях ниже теорема 1.1 применяется к весам Рисса–Шура, возникающим в (1.2) и (1.3).

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть $\tau > 0$ и $\sigma > 0$. Для $f \in B_\sigma$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq \left(\frac{\sigma}{\tau} + 1 \right) \|\sin(\tau t)f(t)\|_{C(\mathbb{R})}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Более того, для $f \in B_\sigma$, $f \not\equiv 0$, принимающей вещественные значения на $\mathbb{R}$, равенство в (1.7) выполняется в точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $\cos(\tau x_0) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $\sigma/\tau \in \mathbb{N}$ и

$$f(x) \equiv S \frac{\sin((\sigma + \tau)x)}{\sin(\tau x)}$$

с некоторым вещественным $S \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть $\sigma > 0$. Для $f \in B_\sigma$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq \sigma \|tf(t)\|_{C(\mathbb{R})}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Более того, для $f \in B_\sigma$, $f \not\equiv 0$, принимающей вещественные значения на $\mathbb{R}$, равенство в (1.8) выполняется в точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, если и только если $f(x) \equiv S \sin(\sigma x)/x$ с некоторым вещественным $S \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Неравенство (1.2) – частный случай соотношения (1.7) из следствия 1.6, а так как (1.1) – частный случай (1.2), неравенство (1.1) также вытекает из (1.7). Остается неясным, можно ли вывести (1.3) непосредственно из следствия 1.7 или теоремы 1.1, (а).

Сначала в § 2 мы обсудим некоторые леммы, а потом в § 3 докажем сформулированные выше результаты.

В § 2 и § 3 мы будем считать, что $\tau \geq 0$, $\sigma > 0$, а функция $Q \in B_\tau$ вещественна на $\mathbb{R}$. По ходу дела мы упомянем условия

$$A_\theta(Q) > 0, \quad \text{где } A_s(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t \in \mathbb{R}} ([Q'(t)]^2 + s^2[Q(t)]^2), \quad s \geq \theta, \quad (1.9)$$

для фиксированного $\theta > \tau$ и

$$d > 0, \quad \text{где } d \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \inf_{k \neq \ell} |t_k - t_\ell| & \text{при } \text{card } Z_Q \geq 2, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.10)$$

В последнем условии $Z_Q \stackrel{\text{def}}{=} \{t_n\}$ обозначает множество вещественных нулей Q , рассматриваемых без учета кратностей.

Заметим, что $A_s(Q) > 0$ для некоторого $s > 0$ тогда и только тогда, когда эта величина положительна для всех $s > 0$.

В дальнейшем меру Лебега измеримого (по Лебегу) множества $E \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через $m(E)$.

§ 2. Несколько лемм

Мы обсудим свойства Q и других целых функций экспоненциального типа, требующиеся в доказательстве теоремы 1.1. Начнем с двух простых свойств.

ЛЕММА 2.1. (а) Величина $A_s(Q)$, определенная в (1.4), – непрерывная неубывающая функция $s \in [0, \infty)$.

(б) Если Q удовлетворяет условию (1.9), то

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |Q(x)| > 0, \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} |Q(x)| > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Очевидно, что $A_s(Q)$ – неубывающая функция $s \in [0, \infty)$. Зафиксируем $c \in [0, \infty)$; тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $u_0 = u_0(\varepsilon, c) \in \mathbb{R}$, что

$$A_c(Q) \geq [Q'(u_0)]^2 + c^2[Q(u_0)]^2 - \varepsilon,$$

и поэтому

$$A_c(Q) \leq A_s(Q) \leq [Q'(u_0)]^2 + s^2[Q(u_0)]^2 \leq A_c(Q) + (s^2 - c^2)[Q(u_0)]^2 + \varepsilon, \\ s \in (c, \infty),$$

откуда

$$A_c(Q) \leq \lim_{s \rightarrow c+} A_s(Q) \leq A_c(Q) + \varepsilon.$$

Полагая здесь $\varepsilon \rightarrow 0+$, мы получаем непрерывность $A_s(Q)$ справа в точке c .

Непрерывность слева в точке $c > 0$ следует из неравенств

$$A_s(Q) \leq A_c(Q) \leq \left(\frac{c}{s}\right)^2 A_s(Q), \quad s \in (0, c).$$

(b) Зафиксируем $s \geq \theta$. Если $\limsup_{x \rightarrow \infty} |Q(x)| = 0$, т.е. если $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0$, то при $x > 0$ имеем

$$|x| \inf_{t \in [x, \infty)} |Q'(t)| \leq |Q(2x) - Q(x)|$$

по теореме о среднем. Так что, поделив обе части на $|x|$ и положив $x \rightarrow \infty$, получим⁴

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} |Q'(x)| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|Q(2x) - Q(x)|}{|x|} = 0$$

и, следовательно,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} ([Q'(x)]^2 + s^2 [Q(x)]^2) \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} [Q'(x)]^2 + s^2 \lim_{x \rightarrow \infty} [Q(x)]^2 = 0,$$

что противоречит (1.9). Если $\limsup_{x \rightarrow -\infty} |Q(x)| = 0$, то применим предыдущие рассуждения к функции $Q(-x)$, которая тоже удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Обсудим теперь некоторые метрические свойства Q и других целых функций экспоненциального типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $0 < \delta \leq L < \infty$. Измеримое множество $E \subseteq \mathbb{R}$ называется (L, δ) -плотным, если для всякого промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}$ длины $m(\Delta) = L$ выполнено $m(E \cap \Delta) \geq \delta$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $0 < \delta \leq L < \infty$ и $\sigma > 0$. Если измеримое множество $E \subseteq \mathbb{R}$ (L, δ) -плотно, то существует такая константа $C_1 > 0$, что неравенство типа Ремеза

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq C_1 \|f\|_{C(E)} \quad (2.1)$$

выполняется с этой константой для всякой $f \in B_\sigma$.

Лемма 2.3 – частный случай результата В.Э. Кацнельсона [7; теорема 3], который он доказал⁵ для полисубгармонических функций в $\mathbb{C}^n$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\tau \geq 0$ и $\theta \geq \tau$. Если $Q \in B_\tau$ удовлетворяет условиям (1.9) и (1.10), то существует такое $\alpha^* > 0$, что для d , определенного в (1.10), множество

$$E^* \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : |Q(x)| \geq \alpha^*\}$$

$(d/2, d/4)$ -плотное.

⁴На самом деле здесь достаточно более общее условие $Q(x) = o(|x|)$ при $x \rightarrow \infty$.

⁵Виктор Кацнельсон сообщил нам, что Б.Я. Левин знал об этом результате, во всяком случае для $n = 1$, и докладывал о нем заведомо раньше 1971 г., хотя опубликовал его много позже в виде неравенства типа Ремеза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \geq \theta$; см. (1.9). Из (1.9) непосредственно следует существование константы $C_2 > 0$, для которой

$$[Q'(x)]^2 + s^2[Q(x)]^2 \geq C_2^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Далее, для данного $\alpha > 0$ открытое множество $E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : |Q(x)| < \alpha\}$ можно представить в виде $E_\alpha = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_\alpha} I$, где $\mathcal{A}_\alpha$ – семейство попарно не пересекающихся интервалов I . Тогда из (2.2) получаем, что при $\alpha \in (0, C_2/s]$ множество E_α не содержит нулей Q' . Значит, Q строго монотонна на каждом интервале $I \in \mathcal{A}_\alpha$.

Если $\alpha \in (0, C_2/s]$, а $I \in \mathcal{A}_\alpha$ – ограниченный интервал, то $|Q|$ принимает равные значения на концах I , так что I содержит ровно один нуль Q .

Если $\alpha \in (0, C_2/s]$, а $I \in \mathcal{A}_\alpha$ – неограниченный интервал (к примеру, вида (a, ∞)), то, поскольку Q монотонна на I , существует конечный или бесконечный предел $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)$ и по лемме 2.1, (b) $\Gamma \neq 0$. Так что, если $\beta > 0$ достаточно мало (скажем, $0 < \beta < \alpha_1 \leq C_2/s$), то $I \not\subset E_\beta$ и, значит, $I \notin \mathcal{A}_\beta$. Иными словами, если $0 < \alpha < \alpha_1 \leq C_2/s$, то у $\mathcal{A}_\alpha$ нет неограниченных компонент.

Подведем итог: существует такое $\alpha_1 \in (0, C_2/s]$, что для $\alpha \in (0, \alpha_1]$ каждый интервал $I \in \mathcal{A}_\alpha$ ограничен и содержит ровно один нуль t_I функции Q . В частности, если у Q нет вещественных нулей, то $E_\alpha = \emptyset$ при $\alpha \in (0, \alpha_1]$.

Остается оценить длину каждого интервала $I \in \mathcal{A}_\alpha$. Пусть $\alpha_2 \in (0, C_2/s]$ – единственное положительное решение уравнения $\alpha/\sqrt{C_2^2 - \alpha^2 s^2} = d/8$. Пусть $\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Учитывая (2.2) и используя теорему о среднем, получаем, что при $0 < \alpha \leq \alpha^*$ для всякого $x \in I$ существует такое $\xi \in I$, что

$$|x - t_I| = \frac{|Q(x)|}{|Q'(\xi)|} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{C_2^2 - \alpha^2 s^2}} \leq \frac{d}{8}.$$

Значит, $m(I) \leq d/4$ при $\alpha \in (0, \alpha^*]$. Итак, в силу условия (1.10) для всякого отрезка Δ длины $d/2$ выполнена оценка $m(\Delta \cap E_{\alpha^*}) \leq d/4$. Это показывает, что $E^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus E_{\alpha^*}$ $(d/2, d/4)$ -плотно. Лемма доказана.

Теперь у нас есть все для доказательства следующего неравенства типа Шура.

ЛЕММА 2.5. Для $\tau \geq 0$ пусть $\theta \geq \tau$. Предположим, что функция $Q \in \mathcal{B}_\tau$ удовлетворяет условиям (1.9) и (1.10). Пусть $\sigma > 0$. Тогда существует такая константа $C_3 > 0$, что для всякой $f \in \mathcal{B}_\sigma$ выполнено неравенство

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq C_3 \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $\alpha^* > 0$ и $(d/2, d/4)$ -плотное множество $E^* \subset \mathbb{R}$ по лемме 2.4. Тогда

$$\|f\|_{C(E^*)} \leq \frac{1}{\alpha^*} \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}, \quad (2.4)$$

так что (2.3) следует из леммы 2.3.

§ 3. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1, (а). Предположим, что τ , σ и Q удовлетворяют условиям теоремы 1.1, и пусть $f \in B_\sigma$. Также предположим, что $A_{\sigma+\tau}(Q) > 0$, $f \not\equiv 0$ и $\|Qf\|_{C(\mathbb{R})} < \infty$, так как иначе все утверждения очевидны.

Доказательство состоит из трех несложных шагов. Применяя лемму 2.5 с $\theta = \sigma + \tau$, мы видим, что $\|f\|_{C(\mathbb{R})} < \infty$ (мы используем это на каждом из шагов).

Шаг 1. Допустим сначала, что f вещественна на $\mathbb{R}$ и что существует $x^* \in \mathbb{R}$, для которого $|f(x^*)| = \|f\|_{C(\mathbb{R})}$. Поскольку $Qf \in B_{\sigma+\tau}$, к Qf мы можем применить неравенство

$$[(Qf)'(x)]^2 + (\sigma + \tau)^2[(Qf)(x)]^2 \leq (\sigma + \tau)^2\|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (3.1)$$

см. [6; теорема II]. Так как $f'(x^*) = 0$, в (3.1) можно положить $x = x^*$, что даст

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})}^2 = f^2(x^*) \leq \frac{(\sigma + \tau)^2\|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2}{[Q'(x^*)]^2 + (\sigma + \tau)^2[Q(x^*)]^2},$$

откуда сразу следует (1.5).

Шаг 2. Теперь пусть f принимает вещественные значения на $\mathbb{R}$, но $|f|$ не обязательно достигает максимума на $\mathbb{R}$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$, для которого $\|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq |f(x_\varepsilon)| + \varepsilon$. Заметим теперь, что для фиксированного $\delta > 0$ функция F_δ , определенная равенством

$$F_\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \frac{\sin(\delta(x - x_\varepsilon))}{\delta(x - x_\varepsilon)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

лежит в классе $B_{\sigma+\delta}$, принимает вещественные значения на $\mathbb{R}$, $|F_\delta(x)| \leq |f(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$, и, поскольку $F_\delta(x)$ стремится к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$, достигает максимума в некоторой точке $\mathbb{R}$; так что, как показано на шаге 1, мы можем воспользоваться (1.5), что дает

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(\mathbb{R})} - \varepsilon &\leq |f(x_\varepsilon)| = |F_\delta(x_\varepsilon)| \leq \|F_\delta\|_{C(\mathbb{R})} \\ &\leq (\sigma + \tau + \delta)(A_{\sigma+\tau+\delta}(Q))^{-1/2}\|QF_\delta\|_{C(\mathbb{R})} \\ &\leq (\sigma + \tau + \delta)(A_{\sigma+\tau+\delta}(Q))^{-1/2}\|Qf\|_{C(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Положив здесь сначала $\varepsilon \rightarrow 0+$, получим

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq (\sigma + \tau + \delta)(A_{\sigma+\tau+\delta}(Q))^{-1/2}\|Qf\|_{C(\mathbb{R})},$$

после чего положим $\delta \rightarrow 0+$ и, используя непрерывность $A_s(Q)$, доказанную в лемме 2.1, (а), получим (1.5) также и для рассматриваемой f .

Шаг 3. Теперь допустим, что f не обязательно вещественная на оси $\mathbb{R}$. Тогда запишем $f = f_1 + if_2$, где обе функции f_1 и f_2 , заданные равенствами

$$f_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(\bar{z})}), \quad f_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(\bar{z})}),$$

принимают вещественные значения на $\mathbb{R}$ и принадлежат B_σ .

Для данного $\varepsilon > 0$ выберем точку $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$, в которой

$$f(x_\varepsilon) \neq 0, \quad \|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq |f(x_\varepsilon)| + \varepsilon.$$

Возьмем $\eta \in \mathbb{R}$, для которого $\exp(i\eta) = f(x_\varepsilon)/|f(x_\varepsilon)|$, и пусть G – функция, определенная равенством

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \cos \eta \, f_1 + \sin \eta \, f_2.$$

Тогда G принимает вещественные значения на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет неравенствам $|G(x)| \leq |f(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$ и $|G(x_\varepsilon)| = |f(x_\varepsilon)|$. Применим (1.5) к G , тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(\mathbb{R})} - \varepsilon &\leq |f(x_\varepsilon)| = |G(x_\varepsilon)| \leq \|G\|_{C(\mathbb{R})} \\ &\leq (\sigma + \tau)(A_{\sigma+\tau}(Q))^{-1/2} \|QG\|_{C(\mathbb{R})} \leq (\sigma + \tau)(A_{\sigma+\tau}(Q))^{-1/2} \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}; \end{aligned}$$

полагая теперь $\varepsilon \rightarrow 0+$, снова получаем (1.5) для рассматриваемой f .

Тем самым, теорема 1.1, (а) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1, (b). Предположим, что τ , σ и Q удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Если существуют такая точка $x = x_0 \in \mathbb{R}$ и такая функция $f \in B_\sigma$, принимающая вещественные значения на $\mathbb{R}$, что в (1.5) выполнено равенство, то $\|Qf\|_{C(\mathbb{R})} < \infty$ и $|f(x_0)| = \|f\|_{C(\mathbb{R})} < \infty$, так что $f'(x_0) = 0$. Значит, снова используя (1.5) и определение $A_s(Q)$ в (1.4), получаем

$$\begin{aligned} [(Qf)'(x_0)]^2 + (\sigma + \tau)^2 [(Qf)(x_0)]^2 &= [(Q'(x_0)]^2 + (\sigma + \tau)^2 [Q(x_0)]^2) \|f\|_{C(\mathbb{R})}^2 \\ &= (\sigma + \tau)^2 \frac{[Q'(x_0)]^2 + (\sigma + \tau)^2 [Q(x_0)]^2}{A_{\sigma+\tau}(Q)} \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2 \geq (\sigma + \tau)^2 \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

В итоге

$$[(Qf)'(x_0)]^2 + (\sigma + \tau)^2 [(Qf)(x_0)]^2 \geq (\sigma + \tau)^2 \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2,$$

и по неравенству Даффина–Шеффера

$$[(Qf)'(x_0)]^2 + (\sigma + \tau)^2 [(Qf)(x_0)]^2 \leq (\sigma + \tau)^2 \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2$$

(см. (3.1)), так что

$$[(Qf)'(x_0)]^2 + (\sigma + \tau)^2 [(Qf)(x_0)]^2 = (\sigma + \tau)^2 \|Qf\|_{C(\mathbb{R})}^2.$$

При $|(Qf)(x_0)| < \|(Qf)\|_{C(\mathbb{R})}$ это равенство выполнено только для Qf вида

$$(Qf)(x) = S \sin((\sigma + \tau)x) + C \cos((\sigma + \tau)x)$$

с вещественными постоянными S и C (см. [6; теорема II]), и поскольку $f \not\equiv 0$, имеем $|S| + |C| > 0$.

Тем самым, мы закончили и доказательство теоремы 1.1, (b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ 1.6 и 1.7. Как вес $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(\tau x) \in B_\tau$, так и вес $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \in B_0$ удовлетворяют условиям (1.9) и (1.10) из теоремы 1.1, и соответствующая $A_s(Q)$ в обоих случаях легко вычисляется. Поэтому неравенства (1.7) и (1.8) непосредственно следуют из (1.5).

Теперь опишем экстремальные функции в следствиях 1.6 и 1.7.

Пусть $Q(x) \equiv \sin(\tau x)$, где $\tau > 0$. Если $\sigma/\tau \in \mathbb{N}$, то

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} S \frac{\sin((\sigma + \tau)x)}{\sin(\tau x)}$$

– экстремальная функция в (1.7) в точке $x = 0$. Предположим, что $f \in B_\sigma$, где $f \not\equiv 0$ – экстремальная функция в (1.7) в некоторой точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, в которой $\cos(\tau x_0) \neq 0$. Тогда по теореме 1.1, (b) и замечанию 1.4

$$\sin(\tau x)f(x) \equiv S \sin((\sigma + \tau)x) + C \cos((\sigma + \tau)x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где S и C вещественные, $|S| + |C| > 0$. Очевидно, C должна быть равна 0, так как иначе f даже не непрерывна в 0. Вдобавок $\sin((\sigma + \tau)x)/\sin(\tau x)$ лежит в классе B_σ тогда и только тогда, когда нули знаменателя являются и нулями числителя. В этом случае числитель обращается в нуль в π/τ , первом положительном нуле знаменателя, так что σ – целое, кратное τ . Это доказывает следствие 1.6.

Теперь пусть $Q(x) \equiv x$. Тогда

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} S \frac{\sin(\sigma x)}{x}$$

– экстремальная функция в (1.8) в точке $x = 0$. Более того, если $f \in B_\sigma$, $f \not\equiv 0$, – экстремальная функция в (1.8) в некоторой точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, то, поскольку $Q' \equiv 1 \neq 0$, мы получаем по теореме 1.1, (b) и замечанию 1.4, что

$$xf(x) \equiv S \sin(\sigma x) + C \cos(\sigma x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где S и C вещественные, $|S| + |C| > 0$. Как и выше, C должна быть равна 0. Следствие 1.7 доказано.

Авторы признательны рецензентам за ценные советы.

Список литературы

- [1] P. Nevai, “The Bernstein inequality and the Schur inequality are equivalent”, *J. Approx. Theory*, **182** (2014), 103–109.
- [2] P. Nevai, *The true story of n vs. $2n$ in the Bernstein inequality* (to appear).
- [3] M. Riesz, “Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.*, **23** (1914), 354–368.
- [4] Q.I. Rahman, G. Schmeißer, *Analytic theory of polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002, xiv+742 pp.
- [5] I. Schur, “Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall”, *Math. Z.*, **4**:3-4 (1919), 271–287.

- [6] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, “Some inequalities concerning functions of exponential type”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43**:8 (1937), 554–556.
- [7] В. Э. Кацнельсон, “Эквивалентные нормы в пространствах целых функций”, *Матем. сб.*, **92(134)**:1(9) (1973), 34–54; англ. пер.: V. È. Kacnel’son, “Equivalent norms in spaces of entire functions”, *Math. USSR-Sb.*, **21**:1 (1973), 33–55.

Михаил Иосифович Ганзбург

(**Michael I. Ganzburg**)

Department of Mathematics, Hampton University,

Hampton, VA, USA

E-mail: michael.ganzburg@hamptonu.edu

Поступила в редакцию

15.04.2014

Пол Неваи

(**Paul Nevai**)

KAU, Jeddah, Saudi Arabia;

Upper Arlington (Columbus), Ohio, USA

E-mail: paul@nevai.us

Тамас Эрдейи

(**Tamás Erdélyi**)

Department of Mathematics, Texas A&M University,

College Station, TX, USA

E-mail: terdelyi@math.tamu.edu