Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Арутюнян, Е. Д. Косов, Оценки интегральных норм многочленов на пространствах с выпуклыми мерами, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 8, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:53:51

УДК 519.21

Л. М. Арутюнян, Е. Д. Косов

Оценки интегральных норм многочленов на пространствах с выпуклыми мерами

В работе доказано, что измеримые многочлены степени d интегрируемы по выпуклой мере в любой положительной степени, а все их L^p -нормы эквивалентны. Также доказывается закон нуля или единицы для множеств уровня измеримых многочленов и множеств сходимости измеримых многочленов на пространствах с выпуклыми мерами. Для непрерывных многочленов получена оценка L^1 -нормы через L^1 -норму их сужений на какое-либо множество положительной меры.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: выпуклые меры, логарифмически вогнутые меры, измеримые многочлены.

DOI: 10.4213/sm8436

Введение

Хорошо известно, что измеримые многочлены на бесконечномерных пространствах с гауссовскими мерами обладают целым рядом полезных свойств (см. [1], [2]), к важнейшим из которых можно отнести следующие:

- 1) на пространстве многочленов фиксированной степени эквивалентны все L^p -нормы;
- 2) из сходимости по мере последовательности многочленов фиксированной степени на множестве положительной меры следует их сходимость во всех L^p на всем пространстве;
- 3) для множеств уровня многочленов фиксированной степени и множеств их сходимости справедлив закон нуля или единицы, т.е. такие множества могут иметь меру только 0 или 1.

Некоторые из подобных свойств уже были перенесены на случай выпуклых мер. Так, в [3] доказано, что измеримые полунормы интегрируемы по выпуклой мере в любой степени. Из этого можно вывести, что всякий непрерывный многочлен лежит в L^1 по всякой выпуклой мере, а также, что все L^p -нормы на пространстве всех измеримых линейных функций, т.е. многочленов степени 1, эквивалентны. Однако не было известно, всякий ли измеримый многочлен интегрируем по выпуклой мере. В нашей работе дается положительный ответ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00196).

на этот вопрос. Более того, ниже показано, что измеримые многочлены интегрируемы в любой положительной степени, а все их L^p -нормы эквивалентны, причем для измеримых многочленов f степени d верна оценка

$$\|f\|_p \leq C(p, d) \|f\|_0,$$

где $C(p, d) = (c_1 p d)^d$, а c_1 – универсальная постоянная. В конечномерном случае этот результат был получен С. Г. Бобковым (см. [4]), а затем распространен В. Е. Бережным (см. [5]) на замыкание конечномерных многочленов, однако остается неизвестным, приближаются ли измеримые многочлены конечномерными. Отметим, что подобные вопросы также изучались, например, в работах [6], [7].

В работе также доказывается закон нуля или единицы для множеств уровня измеримых многочленов и множеств сходимости измеримых многочленов фиксированной степени на пространствах с выпуклыми мерами.

Наконец, для непрерывных многочленов нами получена оценка L^1 -нормы через L^1 -норму их сужений на какое-либо множество положительной меры. Из этого, в частности, следует эквивалентность этих норм на пространстве многочленов фиксированной степени. Для счетных произведений выпуклых мер с конечномерными сомножителями эквивалентность этих норм также была установлена В. Е. Бережным.

Напомним некоторые понятия и факты. Пусть μ – вероятностная радоновская мера на локально выпуклом пространстве E с топологическим сопряженным E^* (см. [8]). Положим

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad p > 0, \quad \|f\|_0 = \exp \left(\int_E \ln |f| d\mu \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \|f\|_r.$$

Выпуклой (или логарифмически вогнутой) называют такую вероятностную радоновскую меру μ на E , что всякий ее конечномерный образ (т.е. образ при всяком непрерывном конечномерном линейном отображении) является выпуклой мерой на $\mathbb{R}^n$, т.е. задается плотностью вида e^{-V} относительно меры Лебега на некотором аффинном подпространстве, где V – выпуклая функция (возможно, с бесконечными значениями) на этом подпространстве (см. [9]).

Мы будем использовать и другое эквивалентное определение выпуклой меры, состоящее в выполнении для всяких борелевских множеств A, B неравенства

$$\mu_*(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda},$$

где $\lambda \in [0, 1]$ – произвольное число и μ_* – внутренняя мера (см. [3]).

Назовем мономом степени m функцию вида $B_m(x, \dots, x): E \rightarrow \mathbb{R}$, где $B(x_1, \dots, x_m)$ – m -линейная симметричная функция на E^m . Алгебраическим многочленом степени d будем называть функцию f вида

$$f(x) = \sum_{m=0}^d B_m(x, \dots, x),$$

где B_d не является тождественно нулевым.

Через $\mathcal{P}_{\text{mes}}^d(\mu)$ будем обозначать множество алгебраических многочленов степени d , которые являются измеримыми относительно меры μ . Будем называть функции из $\mathcal{P}_{\text{mes}}^d(\mu)$ измеримыми многочленами степени d .

Обозначим через $\mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu)$ совокупность таких измеримых многочленов, которые лежат в замыкании множества непрерывных алгебраических многочленов степени d в $L^1(\mu)$ (это множество совпадает с пределами по мере таких многочленов, что легко видеть, например, из следствия 1.2). Отметим, что если функция является пределом по мере непрерывных многочленов, то у нее есть версия из $\mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu)$ (см. [10]).

Неизвестно, совпадают ли классы $\mathcal{P}_{\text{mes}}^d(\mu)$ и $\mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu)$, как это имеет место для гауссовской меры.

Приведем пример измеримого линейного функционала, который не является непрерывным. Рассмотрим в качестве пространства E пространство $\mathbb{R}^\infty$ с выпуклой мерой μ . Положим

$$\ell(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i,$$

где $c_i = 2^{-i} \|x_i\|_{L^1(\mu)}^{-1}$, на линейном подпространстве сходимости данного ряда и продолжим на все пространство до линейной функции. Функционал $\ell(x)$ не является непрерывным, поскольку зависит от бесконечного числа переменных. Другие примеры измеримых многочленов можно найти в [1], [10], [11], где рассматриваются многочлены, измеримые по гауссовской мере.

§ 1. Интегрируемость измеримых многочленов и связанные с этим оценки

Пусть Δ – некоторый отрезок в локально выпуклом пространстве E , т.е. выпуклая оболочка двух точек. Обозначим через m_Δ нормированную меру Лебега на отрезке Δ , т.е. такую меру, что

$$m_\Delta(A) = \frac{m(A \cap \Delta)}{m(\Delta)},$$

где m – стандартная мера Лебега (возникающая путем выбора масштаба на соответствующей прямой; выбор масштаба в дальнейшем не играет роли, поскольку мы используем нормированную меру m_Δ).

Пусть A – борелевское множество в E . Для всякого $\lambda \geq 1$ определим множество A_λ следующим образом:

$$A_\lambda = \left\{ x \in A : m_\Delta(A) \geq 1 - \frac{1}{\lambda} \text{ для всякого интервала } \Delta \ni x \right\}.$$

В работе [12] доказан следующий бесконечномерный аналог так называемой геометрической КЛШ-леммы (геометрической леммы Каннана–Ловаса–Шимонича) из [13].

ТЕОРЕМА. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на полном локально выпуклом пространстве E . Тогда для всякого борелевского множества A и для всякого $\lambda \geq 1$ имеем

$$\mu^*(A_\lambda) \leq (\mu(A))^\lambda,$$

где μ^* – внешняя мера.

Напомним также неравенство Ремеза (см. [14], [15]).

Неравенство Ремеза. Пусть f – многочлен степени d на вещественной прямой. Тогда для всякого интервала Δ и всякого измеримого множества $J \subset \Delta$ положительной меры выполнена оценка

$$\max_{\Delta} |f| \leq \left(\frac{4}{m_{\Delta}(J)} \right)^d \sup_J |f|.$$

Наш первый результат – закон нуля или единицы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E , f – измеримый многочлен степени d и $\{f_n\}$ – последовательность многочленов степени d . Тогда для всякой постоянной C число $\mu(\{x : f(x) = C\})$ равно либо 0, либо 1. Кроме того, число $\mu(\{x : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\})$ также равно либо 0, либо 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что достаточно доказать это утверждение только для полных пространств. Действительно, предположим, что оно верно для полных пространств, но E неполно. Обозначим через $\overline{E}$ пополнение пространства E , т.е. $\overline{E}$ – полное локально выпуклое пространство, в котором E является всюду плотным линейным подпространством. Пусть F – алгебраическое дополнение к E в пространстве $\overline{E}$, т.е. всякий элемент $x \in \overline{E}$ можно единственным образом представить в виде суммы $x = y + z$, где $y \in E$, $z \in F$. Продолжим многочлен f на пространство $\overline{E}$ следующим образом: $f(x) = f(y + z) := f(y)$. Мету тоже можно продолжить естественным образом по формуле $\mu(\overline{E} \setminus E) = 0$. Таким образом, по предположению утверждение верно для многочлена f на $\overline{E}$, а так как $\mu(E) = 1$, то и для многочлена f на E .

Теперь считаем E полным пространством. Сначала докажем первое утверждение. Ясно, что достаточно доказать его для множеств $\{x : f(x) = 0\}$. Положим $A = \{x : |f(x)| > 0\}$. Пусть A' – такое борелевское множество, что $A \subset A'$ и $\mu(A') = \mu(A)$. Заметим, что $A \subset A'_\lambda$. Действительно, пусть $x \in A$. Тогда ограничение f на всякую прямую, проходящую через x , оказывается ненулевым многочленом, значит, $m_{\Delta}(A) = 1$, поэтому

$$m_{\Delta}(A') \geq m_{\Delta}(A) = 1 > 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Применяя бесконечномерную геометрическую КЛШ-лемму, имеем

$$\mu(A) \leq \mu^*((A')_\lambda) \leq (\mu(A'))^\lambda = (\mu(A))^\lambda.$$

Таким образом, $\mu(A) \leq (\mu(A))^\lambda$, откуда сразу следует первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть множество

$$A = \{x : \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$$

и провести аналогичные рассуждения. Для доказательства того, что $A \subset A'_\lambda$, воспользуемся тем, что последовательность многочленов степени d на прямой, которая не сходится в некоторой точке, не может сходиться на множестве положительной меры.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для сфер, т.е. множеств вида $g^{-1}(\{1\})$, где g – полунорма, закон нуля или единицы неверен даже для гауссовских мер. Достаточно рассмотреть меру γ на $\mathbb{R}^\infty$, которая является счетной степенью стандартной гауссовской меры на прямой, и полунорму

$$g(x) = \max(|x_1|, \sqrt{B(x, x)}),$$

где $B(x, x)$ – это продолжение на все пространство полунормы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

с линейного пространства, на котором указанный верхний предел конечен.

Про закон нуля или единицы см. также замечание 2.1 и лемму 2.4.

Доказательство следующей теоремы – несложная модификация доказательства леммы о сравнении из [13].

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E , f – измеримый многочлен степени d . Тогда верна следующая оценка:

$$\mu(\{|f| \geq (4\lambda)^d k\}) \leq (\mu(\{|f| \geq k\}))^\lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично теореме 1.1 случай неполного пространства E сводится к случаю полного пространства, поэтому считаем пространство E полным. Если f совпадает с постоянной μ -п.в., то утверждение очевидно. Пусть теперь это не так, тогда мера всякой линии уровня f нулевая по теореме 1.1. Пусть

$$A = \{|f| \geq k\}$$

и A' – такое борелевское множество, что $A \subset A'$ и $\mu(A) = \mu(A')$; такое множество существует ввиду измеримости A . Пусть $x \in A'$ и $x \notin (A')_\lambda$. Тогда найдется такой интервал Δ , что $x \in \Delta$ и $m_\Delta(\Delta \setminus A') > \frac{1}{\lambda}$. Воспользуемся неравенством Ремеца:

$$|f(x)| \leq \max_{\Delta} |f| \leq \left(\frac{4}{m_\Delta(\Delta \setminus A')} \right)^d \sup_{\Delta \setminus A'} |f| < (4\lambda)^d k.$$

Таким образом, $\{x \in A' : |f(x)| \geq (4\lambda)^d k\} \subset (A')_\lambda$ и

$$\mu(\{x \in A' : |f(x)| \geq (4\lambda)^d k\}) \leq \mu^*((A')_\lambda) \leq (\mu(A'))^\lambda = (\mu(A))^\lambda.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mu(\{|f| \geq (4\lambda)^d k\}) &= \mu(\{x \in A : |f(x)| \geq (4\lambda)^d k\}) \\ &= \mu(\{x \in A' : |f(x)| \geq (4\lambda)^d k\}),\end{aligned}$$

поэтому

$$\mu(\{|f| \geq (4\lambda)^d k\}) \leq (\mu(A))^\lambda,$$

что и дает требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E , f – измеримый многочлен степени d , не равный постоянной μ -п.в. Тогда найдется такое положительное число $k(f)$, что для всякого $\lambda > 1$ выполнены оценки

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq (4\lambda)^d k(f)\}) \leq e^{-\lambda}, \quad \mu(\{x : |f(x)| \leq (4\lambda)^{-d} k(f)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f не совпадает с постоянной μ -п.в., по теореме 1.1 мера всякой линии уровня f нулевая. Пусть

$$k(f) = \inf \left\{ k : \mu(\{|f| \geq k\}) \leq \frac{1}{e} \right\} > 0,$$

тогда $\mu(\{|f| \geq k(f)\}) = \frac{1}{e}$. Поэтому первая оценка – прямое следствие теоремы 1.2 для $k = k(f)$. Докажем теперь вторую оценку. Применим теорему 1.2 для $k = (4\lambda)^{-d} k(f)$:

$$\frac{1}{e} \leq (1 - \mu(\{x : |f(x)| < (4\lambda)^{-d} k(f)\}))^\lambda.$$

Так как мера всякой линии уровня f нулевая, то

$$\mu(\{x : |f(x)| \leq (4\lambda)^{-d} k(f)\}) = \mu(\{x : |f(x)| < (4\lambda)^{-d} k(f)\}) \leq 1 - e^{-1/\lambda} \leq \frac{1}{\lambda},$$

что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E , f – измеримый многочлен степени d . Тогда $f \in L^p(\mu)$ при всех $p > 0$. Кроме того, если f не совпадает с константой п.в., то верна оценка

$$\|f\|_p \leq k(f) 4^d (1 + pd\Gamma(pd))^{1/p},$$

где $k(f)$ – число из предыдущего следствия. При $pd \geq 1$ выполняется также оценка

$$\|f\|_p \leq k(f)(c_1 pd)^d,$$

где $c_1 > 1$ – абсолютная константа, не зависящая от d и p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f совпадает с постоянной μ -п.в., то утверждение очевидно. Пусть теперь f не совпадает с постоянной μ -п.в. Тогда

$$\int_E |f|^p d\mu = \int_0^\infty \mu(\{|f|^p \geq t\}) dt = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{|f| \geq t\}) dt.$$

Производя в последнем интеграле замену $t = (4\lambda)^d k(f)$, получаем

$$\begin{aligned} k(f)^p 4^{pd} pd \int_0^\infty \lambda^{d(p-1)+d-1} \mu(\{|f| \geq (4\lambda)^d k(f)\}) d\lambda \\ = k(f)^p 4^{pd} pd \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \lambda^{pd-1} \mu(\{|f| \geq (4\lambda)^d k(f)\}) d\lambda. \end{aligned}$$

Теперь меру множества в первом интеграле оценим единицей, а во втором интеграле – по следствию 1.1. Тем самым последнее выражение оценится через

$$k(f)^p 4^{pd} + k(f)^p 4^{pd} pd \int_1^\infty \lambda^{pd-1} e^{-\lambda} d\lambda \leq k(f)^p 4^{pd} (1 + pd\Gamma(pd)) < \infty.$$

Оценка при $pd \geq 1$ следует из уже полученной и того, что $\Gamma(t) \leq t^t$ при $t \geq 1$, что дает первую оценку из условий теоремы.

Отметим, что, так как

$$k(f) \leq e \int |f| d\mu,$$

то в предыдущей теореме доказана эквивалентность L^p - и L^1 -норм на пространстве измеримых многочленов фиксированной степени. В конечномерном случае доказана более точная оценка $\|f\|_p \leq (cp)^d \|f\|_1$, где f – многочлен степени d и c – некоторая универсальная постоянная (см. [16]).

Следующая теорема обобщает другой результат С.Г. Бобкова (см. [4]) на случай измеримых многочленов.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E , f – измеримый многочлен степени d . Тогда при $q > 0$ имеем

$$\|f\|_q \leq c(q, d) \|f\|_0,$$

где $c(q, d)$ – постоянная, зависящая только от q, d . При $qd \geq 1$ в качестве $c(q, d)$ можно взять $(c_2 qd)^d$, где c_2 – абсолютная константа, не зависящая от q, d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f совпадает с постоянной μ -п.в., то утверждение очевидно. Пусть теперь f не совпадает с постоянной μ -п.в. Мы получим оценку $\|f\|_0$ снизу через $k(f)$. Воспользуемся тем, что

$$\|f\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p,$$

и оценим сначала $\|f\|_p$:

$$\int_E |f|^p d\mu = \int_0^\infty \mu(\{|f|^p \geq t\}) dt = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{|f| \geq t\}) dt.$$

В последнем интеграле производим замену $t = (4\lambda)^{-d}k(f)$:

$$\begin{aligned} & k(f)^p c^{-pd} pd \int_0^\infty \lambda^{-pd-1} \mu(\{|f| \geq (4\lambda)^{-d}k(f)\}) d\lambda \\ & \geq k(f)^p 4^{-pd} pd \int_1^\infty \lambda^{-pd-1} \mu(\{|f| \geq (4\lambda)^{-d}k(f)\}) d\lambda \\ & = k(f)^p c^{-pd} - k(f)^p c^{-pd} pd \int_1^\infty \lambda^{-pd-1} \mu(\{|f| < (4\lambda)^{-d}k(f)\}) d\lambda. \end{aligned}$$

Пользуясь следствием 1.1, оценим последнее выражение через

$$k(f)^p 4^{-pd} - k(f)^p 4^{-pd} pd \int_1^\infty \lambda^{-2-pd} d\lambda = k(f)^p 4^{-pd} \left(1 - \frac{pd}{pd+1}\right) = \frac{k(f)^p 4^{-pd}}{pd+1}.$$

Таким образом,

$$\|f\|_p \geq \frac{k(f)4^{-d}}{(pd+1)^{1/p}}.$$

Теперь, устремляя p к нулю, получаем, что $\|f\|_0 \geq k(f)(4e)^{-d}$. По теореме 1.3 имеем $\|f\|_q \leq k(f)4^d(1+qd\Gamma(qd))^{1/q}$. Поэтому

$$\|f\|_q \leq (16e)^d(1+qd\Gamma(qd))^{1/q}\|f\|_0.$$

Оценка при $qd \geq 1$ следует из последнего утверждения теоремы 1.3.

Приведем в качестве следствия вышеизложенного обобщение неравенства из статьи [17] на случай измеримых многочленов.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E , f – измеримый многочлен степени d . Тогда при $pd \geq 1$ имеет место неравенство

$$\mu(\{|f| \leq t\}) \|f\|_p^{1/d} \leq c_1 t^{1/d} pd,$$

где c_1 – абсолютная постоянная, не зависящая от p и d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f совпадает с постоянной μ -п.в., то утверждение очевидно. Пусть теперь f не совпадает с постоянной μ -п.в. Подставив $\lambda = (4t^{-1}k(f))^{1/d}$ в неравенство

$$\mu(\{x : |f(x)| \leq (4\lambda)^{-d}k(f)\}) \leq \frac{1}{\lambda}$$

из следствия 1.1, получим

$$\mu(\{|f| \leq t\}) \leq \frac{t^{1/d}}{4^{1/d}} (k(f))^{-1/d}.$$

Воспользуемся оценкой

$$(k(f))^{-1/d} \leq \|f\|_p^{-1/d} (c_1 pd),$$

которая следует из неравенства в теореме 1.3, и получим неравенство

$$\mu(\{|f| \leq t\}) \|f\|_p^{1/d} \leq \frac{t^{1/d}}{4^{1/d}} c_1 p d.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что $4^{1/d} \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Пусть F – измеримое полиномиальное отображение со значениями в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с сопряженным $(X^*, \|\cdot\|^*)$. Положим $f(x) = \|F(x)\|$. Тогда для ограничения f на любую прямую в пространстве X выполняется неравенство Ремеза, поэтому нетрудно доказать аналогии вышеизложенных утверждений для таких функций F . Оценка Ремеза в этом случае следует из того, что если Δ – отрезок в E и J – борелевское подмножество Δ , то

$$\sup_J \|F(x)\| = \sup_J \sup_{\|\ell\|^*=1} \ell(F(x)),$$

а $\ell(F(\cdot))$ – уже вещественный многочлен на пространстве E , к которому можно применить обычное неравенство Ремеза.

§ 2. Оценка интегральной нормы непрерывного многочлена через интегральную норму его сужения на подмножество

Основной результат этого параграфа заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E и U – измеримое множество положительной меры. Пусть $f \in \mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu)$. Тогда

$$\mu(U)^{d+1} \int_E |f| d\mu \leq (Cd)^{2d} \int_U |f| d\mu,$$

где C – некоторая абсолютная постоянная. Другими словами,

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \leq \frac{(Cd)^{2d}}{\mu(U)^d} \|f\|_{L^1(\mu_U)}, \quad \text{где } \mu_U(A) = \frac{\mu(A \cap U)}{\mu(U)}.$$

Отметим, что в [17] подобная оценка доказана для мер, которые являются равномерными распределениями на выпуклых телах в конечномерном пространстве. При этом использовалась оценка L^∞ -нормы многочлена через его L^1 -норму, которая зависит от размерности. Поэтому случай произвольной выпуклой меры не сводится к данному.

Напомним, что функция называется полунепрерывной снизу, если

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Функция называется полунепрерывной сверху, если $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$. Таким образом, индикатор открытого множества – полунепрерывная снизу функция, а индикатор замкнутого множества – полунепрерывная сверху.

В доказательстве используется следующий результат из [12], обобщающий локализационную лемму из [18] на бесконечномерное пространство.

ТЕОРЕМА. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на полном локально выпуклом пространстве E . Пусть $u, v: E \rightarrow \mathbb{R}$ – такие полунепрерывные снизу μ -интегрируемые функции, что

$$\int_E u \, d\mu > 0, \quad \int_E v \, d\mu > 0.$$

Тогда найдутся точки $a, b \in E$ и выпуклая мера ν на отрезке $\Delta = [a, b]$ такие, что

$$\int_\Delta u \, d\nu > 0, \quad \int_\Delta v \, d\nu > 0.$$

Следующее утверждение – перенос другой известной локализационной леммы (см. [19]) на бесконечномерное пространство.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть f_1, f_2 – две полунепрерывные снизу неотрицательные функции на E , f_3, f_4 – две полунепрерывные сверху неотрицательные функции на E . Предположим, что $f_1^\alpha f_2^\beta \leq f_3^\alpha f_4^\beta$ и для всякого отрезка $\Delta = [a, b] \subset E$ и всякой меры ν с плотностью $\exp \ell$ относительно меры Лебега на отрезке Δ , где ℓ – аффинная функция на Δ , выполнено неравенство

$$\left(\int_\Delta f_1 \, d\nu \right)^\alpha \left(\int_\Delta f_2 \, d\nu \right)^\beta \leq \left(\int_\Delta f_3 \, d\nu \right)^\alpha \left(\int_\Delta f_4 \, d\nu \right)^\beta.$$

Тогда для всякой выпуклой радоновской меры μ на E выполнено неравенство

$$\left(\int_E f_1 \, d\mu \right)^\alpha \left(\int_E f_2 \, d\mu \right)^\beta \leq \left(\int_E f_3 \, d\mu \right)^\alpha \left(\int_E f_4 \, d\mu \right)^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться тем, что это утверждение верно в конечномерном случае (см. [19]), но при этом будем использовать также фрагменты доказательства из цитированной работы. Предположим, что для некоторой вероятностной радоновской выпуклой меры μ выполнено обратное строгое неравенство. Тогда

$$\int_E f_2 > 0.$$

Добавлением константы можно добиться того, что

$$\int_E f_3 > 0.$$

Значит, найдется число A такое, что

$$\int_E f_1 \, d\mu \left(\int_E f_3 \, d\mu \right)^{-1} > A^{1/\alpha}, \quad \int_E f_4 \, d\mu \left(\int_E f_2 \, d\mu \right)^{-1} < A^{1/\beta}.$$

Тогда

$$\int_E f_1 - A^{1/\alpha} f_3 \, d\mu > 0, \quad \int_E A^{1/\beta} f_2 - f_4 \, d\mu > 0,$$

причем $f_1 - A^{1/\alpha} f_3$ и $A^{1/\beta} f_2 - f_4$ — полунепрерывные снизу функции, поэтому найдутся отрезок Δ и вероятностная выпуклая мера ν на нем, для которых

$$\int_{\Delta} f_1 - A^{1/\alpha} f_3 d\nu > 0, \quad \int_{\Delta} A^{1/\beta} f_2 - f_4 d\nu > 0.$$

Следовательно,

$$\left(\int_{\Delta} f_1 d\nu \right)^{\alpha} \left(\int_{\Delta} f_2 d\nu \right)^{\beta} > \left(\int_{\Delta} f_3 d\nu \right)^{\alpha} \left(\int_{\Delta} f_4 d\nu \right)^{\beta},$$

что противоречит конечномерной локализационной лемме.

Определим при $r \leq s$ функции

$$P(r, s) = \int_r^s |t| e^t dt, \quad Q(r, s) = \int_r^s e^t dt, \quad F(r, s) = \frac{P(r, s)}{(Q(r, s))^2},$$

причем $F(r, r)$ определяется по непрерывности, в частности, $F(0, 0) = \frac{1}{2}$.

ЛЕММА 2.1. *Функция $F(r, s)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) убывает по s , если $s \geq r \geq 0$ или $r \leq s \leq 0$,
- 2) возрастает по r , если $r \geq 0$,
- 3) убывает по r , если $s = 0$, $r \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем производную F по s :

$$\partial_s F = \left(\int_r^s e^t dt \right)^{-3} \left(e^s |s| \int_r^s e^t dt - 2e^s \int_r^s |t| e^t dt \right).$$

Положим

$$\varphi(s) = |s| \int_r^s e^t dt - 2 \int_r^s |t| e^t dt.$$

Имеем $\varphi(r) = 0$, а также $\varphi'(s) = \operatorname{sgn}(s)(e^s - e^r) - |s|e^s$. При $r \geq 0$ верна оценка

$$\varphi'(s) = e^s - e^r - se^s = 1 - e^r - e^s(e^{-s} - (1 - s)) \leq 0.$$

При $r \leq s \leq 0$ верна оценка

$$\varphi'(s) = -e^s + e^r + se^s \leq 0.$$

Поэтому $\varphi(s) \leq 0$, и значит, $\partial_s F \leq 0$, что доказывает п. 1).

Найдем теперь производную F по r :

$$\partial_r F = \left(\int_r^s e^t dt \right)^{-3} \left(-e^r |r| \int_r^s e^t dt + 2e^r \int_r^s |t| e^t dt \right).$$

Положим

$$\psi(r) = -|r| \int_r^s e^t dt + 2 \int_r^s |t| e^t dt.$$

Тогда $\psi'(r) = -\operatorname{sgn}(r)(e^s - e^r) - |r|e^r$. В случае $r \geq 0$ имеем $\psi'(r) \leq 0$, $\psi(s) = 0$, поэтому $\psi(r) \geq 0$, что доказывает п. 2).

В случае $r \leq 0$, $s = 0$ имеем $\psi'(r) = e^s - 1 + e^r(r - 1 + e^{-r}) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, что доказывает п. 3). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. При $r \leq 0$ и $s \geq 0$ верны неравенства

$$\frac{1}{2} = F(0, 0) \leq F(r, 0) \leq F(-\infty, 0) = 1, \quad F(0, s) \leq F(0, 0) = \frac{1}{2} < 1.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $r \leq 0 \leq s$. Тогда

$$4^{-1}F(0, s) \leq F(r, s) \leq 4F(0, s), \quad F(r, s) \leq 4F(r, 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала оценку $F(r, s) \leq 4F(0, s)$. Легко видеть, что

$$F(r, s) = \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{(Q(r, 0) + Q(0, s))^2} \leq \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2}.$$

Поскольку $F(r, 0) \leq 1$ по следствию 2.2, то

$$\frac{P(r, 0) + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2} \leq \frac{Q(r, 0)^2 + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2}.$$

Так как функция $\frac{t+a}{t+b}$, $0 < a < b$, возрастает при $t > 0$ и $F(0, s) < 1$ в силу следствия 2.2, то полученное выше выражение оценивается как

$$\frac{Q(-\infty, 0)^2 + P(0, s)}{Q(-\infty, 0)^2 + Q(0, s)^2} = \left(1 + \int_0^s |t|e^t dt\right) \left(1 + \left(\int_0^s e^t dt\right)^2\right)^{-1}.$$

Покажем, что

$$\left(1 + \int_0^s |t|e^t dt\right) \left(1 + \left(\int_0^s e^t dt\right)^2\right)^{-1} \leq 4 \int_0^s |t|e^t dt \left(\int_0^s e^t dt\right)^{-2}.$$

После непосредственного вычисления интегралов это неравенство приводится к виду

$$(e^s - 1)^2 < 3(e^s - 1)^2(se^s - e^s + 1) + 4(se^s - e^s + 1).$$

Ясно, что полученное неравенство верно при $s > 1$. Покажем, что при $s \leq 1$ верно неравенство

$$\varphi(s) = -(e^s - 1)^2 + 4(se^s - e^s + 1) > 0.$$

Заметим, что $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi'(s) = -2(e^s - 1)e^s + 4se^s = 2e^s(2s + 1 - e^s) > 0$$

на отрезке $[0, 1]$, что доказывает нужное соотношение. Таким образом,

$$F(r, s) \leq 4F(0, s).$$

Докажем теперь оценку $4^{-1}F(0, s) \leq F(r, s)$:

$$F(r, s) = \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{(Q(r, 0) + Q(0, s))^2} \geq 2^{-1} \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2}.$$

Поскольку

$$F(r, 0) = \frac{P(r, 0)}{Q(r, 0)^2} \geq \frac{1}{2},$$

то

$$2^{-1} \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2} \geq 4^{-1} \frac{(Q(r, 0))^2 + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2}.$$

В силу возрастания функции $\frac{t+a}{t+b}$ при $t > 0$, $0 < a < b$, а также с учетом неравенства $F(0, s) < 1$ из следствия 2.2, последнее выражение не меньше, чем

$$4^{-1} \frac{P(0, s)}{Q(0, s)^2} = 4^{-1} F(0, s),$$

что доказывает требуемое.

Теперь докажем оценку $F(r, s) \leq 4F(r, 0)$. Имеем

$$F(r, s) = \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{(Q(r, 0) + Q(0, s))^2} \leq \frac{P(r, 0) + P(0, s)}{Q(r, 0)^2 + Q(0, s)^2} \leq 1,$$

так как $F(r, 0) \leq 1$ и $F(0, s) \leq 1$ и верно неравенство $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leq 1$, если $\frac{a_1}{b_1} \leq 1$ и $\frac{a_2}{b_2} \leq 1$. В то же время $F(r, 0) \geq \frac{1}{2}$, значит, $F(r, s) \leq 2F(r, 0) \leq 4F(r, 0)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $a \leq r \leq s \leq b$, тогда $F(a, b) \leq 16F(r, s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пять случаев, доказательства которых непосредственно вытекают из леммы 2.1, следствия 2.2 и леммы 2.2.

1. Пусть $0 \leq a$. Тогда $F(a, b) \leq F(a, s) \leq F(r, s)$.

2. Пусть $b \leq 0$. Тогда согласно п. 1 леммы 2.1 имеем $F(a, b) \leq F(a, s)$.

Произведем замену переменной:

$$\begin{aligned} F(a, s) &= \int_a^s |t| e^t dt \left(\int_a^s e^t dt \right)^{-2} = e^{-s} \int_{a-s}^0 |t+s| e^t dt \left(\int_{a-s}^0 e^t dt \right)^{-2} \\ &= e^{-s} \int_{a-s}^0 |t| e^t dt \left(\int_{a-s}^0 e^t dt \right)^{-2} + e^{-s} |s| \int_{a-s}^0 e^t dt \left(\int_{a-s}^0 e^t dt \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что $F(a-s, 0) \leq 1$, а также тем, что $[r-s, 0] \subset [a-s, 0]$. Тогда последнее выражение оценится через

$$\begin{aligned} &e^{-s} + e^{-s} |s| \int_{r-s}^0 e^t dt \left(\int_{r-s}^0 e^t dt \right)^{-2} \\ &\leq 2e^{-s} F(r-s, 0) + 2e^{-s} \int_{r-s}^0 |s| e^t dt \left(\int_{r-s}^0 e^t dt \right)^{-2} = 2F(r, s), \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована оценка $F(r-s, 0) \geq 2^{-1}$.

3. Пусть $r \leq 0 \leq s$. Тогда $F(a, b) \leq 4F(0, b) \leq 4F(0, s) \leq 16F(r, s)$.

4. Пусть $a \leq 0 \leq r$. Тогда $F(a, b) \leq 4F(0, b) \leq 4F(0, s) \leq 4F(r, s)$.

5. Пусть $s \leq 0 \leq b$. Тогда $F(a, b) \leq 4F(a, 0) \leq 4 \leq 8F(r, 0) \leq 8F(r, s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть μ – выпуклая мера и g – положительно однородная выпуклая функция, т.е. g выпукла и $g(\lambda x) = |\lambda|g(x)$. Тогда если $\mu(g^{-1}(\{1\})) > 0$, то $\mu(g^{-1}([0, 1))) = 0$.

Обоснование нетрудно усмотреть из логарифмической вогнутости меры. Действительно, положим $V = g^{-1}([0, 1])$. Тогда V – выпуклое множество, причем $\mu(V) > 0$ и для некоторого $\delta > 0$ верно неравенство $\mu(\alpha V) \leq \mu(V) - \delta$ для всякого положительного $\alpha < 1$. Пусть найдется такое $0 < c < 1$, что $\mu(cV) > 0$. Тогда, пользуясь неравенством выпуклости для меры и учитывая выпуклость V , имеем

$$\mu(V)^\alpha \mu(cV)^{1-\alpha} \leq \mu(\alpha V + (1-\alpha)(cV)) = \mu((c + \alpha(1-c))V) < \mu(V) - \delta,$$

что приводит к противоречию при $\alpha \rightarrow 1$.

ЛЕММА 2.4. Пусть μ – выпуклая радоновская мера на локально выпуклом пространстве E и U – выпуклое открытое множество положительной меры. Тогда $\mu(U) = \mu(\bar{U})$, где $\bar{U}$ – замыкание множества U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $0 \in U$. Пусть $\tilde{U} = \bigcap_{t>1} tU$. Покажем, что $\tilde{U} = \bar{U}$. Легко видеть, что $\tilde{U} \subset \bar{U}$. Проверим обратное включение. Пусть $x \notin \tilde{U}$, значит, найдется такое $t > 1$, что $x \notin tU$. По теореме Хана–Банаха найдется такой непрерывный линейный функционал ℓ , что $\sup\{\ell(y), y \in tU\} \leq \ell(x)$. Поэтому

$$\sup\{\ell(y), y \in U\} \leq t^{-1}\ell(x) < \ell(x),$$

значит, $x \notin \bar{U}$. Теперь можно воспользоваться замечанием 2.1 для функционала Минковского множества U , либо непосредственно использовать выпуклость меры:

$$\mu(U)^2 = \mu\left(\frac{1}{2}(2-t)U + \frac{1}{2}tU\right)^2 \geq \mu((2-t)U)\mu(tU).$$

Полагая $t \rightarrow 1$ в этом неравенстве, в пределе получаем $\mu(U) \geq \mu(\bar{U})$.

Отметим, что лемму 2.4 можно было вывести из замечания 2.1.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Аналогично теореме 1.1 (только многочлен нужно продолжать по непрерывности) случай неполного пространства E сводится к случаю полного, поэтому считаем пространство E полным.

Несложно видеть, что достаточно доказать оценку только для непрерывных многочленов степени d . Сначала рассмотрим случай, когда U является конечным объединением открытых выпуклых множеств положительной меры. По лемме 2.4 имеем $\mu(U) = \mu(\bar{U})$. Легко заметить, что I_U – индикатор множества U – является полунепрерывной снизу функцией, а $|f|I_{\bar{U}}$ – полунепрерывная сверху функция. Рассмотрим функции $f_1 = I_U$, $f_2 = |f|$, $f_3 = 1$ и $f_4 = (Cd)^{2d}|f|I_{\bar{U}}$. Тогда интересующее нас неравенство

$$(\mu(U))^{d+1} \int_E |f| d\mu \leq (Cd)^{2d} \int_U |f| d\mu$$

обратится в соотношение

$$\left(\int_E f_1 d\mu \right)^{d+1} \int_E f_2 d\mu \leq \left(\int_E f_3 d\mu \right)^{d+1} \int_E f_4 d\mu.$$

Следствие 2.1 позволяет нам проверять это соотношение только для всех отрезков $\Delta \subset E$ и для всех мер ν с плотностями вида $\exp \ell$, где ℓ – аффинная функция на Δ . Так как прямая пересекает конечное объединение открытых выпуклых множеств по конечному объединению интервалов и $\overline{\Delta \cap \overline{U}} \subset \Delta \cap \overline{U}$, а ограничение многочлена на прямую – многочлен, то наша задача свелась к проверке для всякого одномерного многочлена f следующего неравенства:

$$\left(\int_J e^{kt+m} dt \right)^{d+1} \int_a^b |f(t)| e^{kt+m} dt \leq (Cd)^{2d} \int_J |f(t)| e^{kt+m} dt \left(\int_a^b e^{kt+m} dt \right)^{d+1},$$

где J является конечным объединением отрезков: $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$, $J_k = [r_k, s_k]$. С помощью линейной замены задача сводится к проверке для всякого многочлена f соотношения

$$\left(\int_J e^t dt \right)^{d+1} \int_a^b |f(t)| e^t dt \leq (Cd)^{2d} \int_J |f(t)| e^t dt \left(\int_a^b e^t dt \right)^{d+1}.$$

Далее сведем случай произвольного объединения отрезков к случаю одного отрезка, а в случае одного отрезка оценку будем сводить к оценке для многочлена первой степени.

Пусть сначала $J = [r, s]$. Напомним, что

$$Q(r, s) = \int_r^s e^t dt.$$

Докажем следующую оценку:

$$Q(r, s)^{d+1} \int_a^b |f(t)| e^t dt \leq (C_0 d)^d \int_r^s |f(t)| e^t dt Q(a, b)^{d+1}.$$

По теореме 1.4 верна оценка $\|f\|_1 \leq (c_1 d)^d \|f\|_0$, где c_1 – универсальная константа. Пусть $f(t) = A \prod (t - t_k)$. Тогда, применяя теорему 1.4 к вероятностной мере $(Q(a, b))^{-1} e^t dt$, получаем

$$\begin{aligned} & Q(r, s)^{d+1} \int_a^b |f(t)| e^t dt \\ & \leq (c_1 d)^d A Q(r, s)^{d+1} Q(a, b) \exp \left(Q(a, b)^{-1} \int_a^b \ln \left(\prod_{k=1}^d |t - t_k| \right) e^t dt \right) \\ & = (c_1 d)^d A Q(r, s)^{d+1} Q(a, b) \prod_{k=1}^d \exp \left(Q(a, b)^{-1} \int_a^b \ln(|t - t_k|) e^t dt \right). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\|t - t_k\|_0 \leq \|t - t_k\|_1$, последнее можно оценить выражением

$$\begin{aligned} & (c_1 d)^d A Q(a, b)^{1-d} Q(r, s)^{d+1} \prod_{k=1}^d \int_a^b |t - t_k| e^t dt \\ &= (c_1 d)^d A Q(a, b)^{1-d} Q(r, s)^{1-d} \prod_{k=1}^d Q(r, s)^2 \int_a^b |t - t_k| e^t dt. \end{aligned}$$

Положим $t_k = \alpha_k + i\beta_k$. По лемме 2.3 имеем

$$\begin{aligned} & Q(r, s)^2 \int_a^b |t - t_k| e^t dt \leq Q(r, s)^2 \int_a^b |t - \alpha_k| e^t dt + Q(r, s)^2 \int_a^b |\beta_k| e^t dt \\ & \leq 16 Q(a, b)^2 \int_r^s |t - \alpha_k| e^t dt + 16 Q(a, b)^2 \int_r^s |\beta_k| e^t dt \\ & \leq 32 Q(a, b)^2 \int_r^s |t - t_k| e^t dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & (c_1 d)^d A Q(a, b)^{1-d} Q(r, s)^{1-d} \prod_{k=1}^d Q(r, s)^2 \int_a^b |t - t_k| e^t dt \\ & \leq (c_1 d)^d A Q(a, b)^{1-d} Q(r, s)^{1-d} \prod_{k=1}^d 32 Q(a, b)^2 \int_r^s |t - t_k| e^t dt. \end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись оценкой из теоремы 1.4, получим следующую оценку сверху для правой части:

$$\begin{aligned} & (32 c_1 d)^d A Q(a, b)^{d+1} Q(r, s) \prod_{k=1}^d c_1 \exp \left(Q(r, s)^{-1} \int_r^s \ln |t - t_k| e^t dt \right) \\ &= (32 c_1^2 d)^d A Q(a, b)^{d+1} Q(r, s) \exp \left(Q(r, s)^{-1} \int_r^s \ln \prod_{k=1}^d |t - t_k| e^t dt \right) \\ & \leq (32 c_1^2 d)^d Q(a, b)^{d+1} \int_r^s |f(t)| e^t dt. \end{aligned}$$

Последняя оценка использует неравенство $\|f\|_0 \leq \|f\|_1$. Таким образом, случай, когда J – один отрезок, разобран.

Пусть теперь $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$, где $J_k = [r_k, s_k]$ – невырожденные отрезки. Рассмотрим функцию

$$G(r_2, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} |f(t)| e^t dt \left(\sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} e^t dt \right)^{-d-1}.$$

Пусть $n \geq d + 4$. Исследуем функцию G на минимум на компактном множестве $s_1 \leq r_2 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq r_n$ (считаем r_1, s_1, r_n и s_n фиксированными). Так как функция G гладкая на данном компакте, то минимум существует и достигается либо внутри области, либо на ее границе. Предположим,

что минимум этой функции достигается внутри области, т.е. на множестве $s_1 < r_2 < \dots < s_{n-1} < r_n$. Тогда в точке минимума все частные производные этой функции обратятся в нуль:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{s_j} G(r_2, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) \\ &= \left(e^{s_j} |f(s_j)| \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} e^t dt - (d+1) e^{s_j} \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} |f(t)| e^t dt \right) \left(\sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} e^t dt \right)^{-d-2}, \\ 0 &= \partial_{r_j} G(r_2, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) \\ &= \left(-e^{r_j} |f(r_j)| \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} e^t dt + (d+1) e^{r_j} \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} |f(t)| e^t dt \right) \left(\sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} e^t dt \right)^{-d-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всяких j, k из множества $\{2, 3, \dots, n-1\}$ имеем

$$|f(r_k)| = |f(r_j)| = |f(s_k)| = |f(s_j)|,$$

что невозможно для многочлена степени d , ибо $2(n-2) \geq 2d+2$. Таким образом, минимум G достигается на границе, значит, минимум отношения

$$\sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} |f(t)| e^t dt \left(\sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} e^t dt \right)^{-d-1}$$

по всевозможным конечным объединениям отрезков достигается на наборе, в котором число отрезков не превосходит $d+4$. Поэтому в доказательстве общего случая можно считать, что n – количество отрезков в J – не больше $d+4$.

Выведем общий случай из доказанного для отрезка:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^n Q(r_k, s_k) \right)^{d+1} \int_a^b |f(t)| e^t dt \leq n^d \sum_{k=1}^n Q(r_k, s_k)^{d+1} \int_a^b |f(t)| e^t dt \\ &\leq n^d \sum_{k=1}^n (32c_1^2 d)^d \int_{r_k}^{s_k} |f(t)| e^t dt Q(a, b)^{d+1} \\ &\leq (Cd)^{2d} \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{s_k} |f(t)| e^t dt Q(a, b)^{d+1}. \end{aligned}$$

Случай, когда U – произвольное измеримое множество, несложно доказывается предельным переходом. Действительно, в силу радоновости меры, внутри U есть компакт сколь угодно близкой меры. Компакт, в свою очередь, можно покрыть открытым множеством близкой меры, которое является объединением выпуклых открытых множеств из базы топологии. Значит, компакт лежит в конечном объединении выпуклых открытых множеств. Поэтому U приближается по симметрической разности конечными объединениями открытых выпуклых множеств, для которых оценка уже доказана. Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что вместо теоремы 1.4 в данном доказательстве можно было использовать аналогичный результат С. Г. Бобкова, но для непрерывных многочленов в конечномерном пространстве (см. [4]), а на некоторых этапах доказательства – даже результат работы [7] об оценке $\|g\|_1$ через $\|g\|_0$ для полунорм g .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из доказательства видно, что если U – объединение n открытых выпуклых множеств, то справедлива оценка

$$\mu(U)^{d+1} \int_E |f| d\mu \leq (Cnd)^d \int_U |f| d\mu,$$

где C – некоторая абсолютная постоянная.

Обозначим через $\mathcal{P}_{\text{fin}}^d(\mu)$ совокупность всех измеримых полиномов, которые являются пределами по мере последовательностей многочленов вида $f(\ell_1, \dots, \ell_n)$, где $\ell_i \in E^*$ и f – многочлен на $\mathbb{R}^n$ степени d . Это множество совпадает с замыканием в $L^1(\mu)$ многочленов того же типа, что легко видеть, например, из следствия 1.2. Заметим, что оценку из теоремы 2.1 для $f \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^d(\mu)$ можно было бы получить, используя только конечномерную локализационную лемму, приближая произвольные множества цилиндрами. Именно для полиномов из $\mathcal{P}_{\text{fin}}^d(\mu)$ В. Е. Бережным в статье [5] и был обобщен результат, приведенный в статье С. Г. Бобкова [4].

Отметим, что для общих мер

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}^d(\mu) \subset \mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu) \subset \mathcal{P}_{\text{mes}}^d(\mu),$$

однако для гауссовских мер все три класса совпадают. Для пространств с топологическими базисами имеет место равенство

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}^d(\mu) = \mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu).$$

Для общего случая выпуклой меры даже в простейших пространствах типа l^2 или $\mathbb{R}^\infty$ вопрос о соотношении этих классов с $\mathcal{P}_{\text{mes}}^d(\mu)$ остается открытым.

Из теоремы 2.1 и следствия 1.2 вытекает следующий полезный факт.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть последовательность многочленов из $\mathcal{P}_{\text{cont}}^d$ сходится по мере на некотором множестве положительной меры. Тогда эта последовательность сходится во всех L^p на всем пространстве.

Отметим еще, что для мер, являющихся сужениями выпуклых мер на подмножества положительной меры, все L^p -нормы на пространстве непрерывных многочленов эквивалентны.

Из теоремы 2.1 можно независимо вывести закон нуля или единицы для линий уровня непрерывного многочлена.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $f \in \mathcal{P}_{\text{cont}}^d(\mu)$ и $U_c(f) = \{x \in E : f(x) = c\}$. Тогда величина $\mu(U_c(f))$ равна либо 0, либо 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu(U_c(f)) > 0$, тогда по теореме 2.1 имеем

$$\mu(U_c(f))^{d+1} \int_E |f - c| d\mu \leq (Cd)^{2d} \int_{U_c(f)} |f - c| d\mu = 0.$$

Таким образом, μ -п.в. выполняется равенство $f = c$.

Список литературы

- [1] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997, 352 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Gaussian measures*, Math. Surveys Monogr., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, xii+433 pp.
- [2] V. I. Bogachev, “Gaussian measures on infinite-dimensional spaces”, *Real and stochastic analysis*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014, 1–83.
- [3] C. Borell, “Convex measures on locally convex spaces”, *Ark. Mat.*, **12**:1-2 (1974), 239–252.
- [4] S. G. Bobkov, “Remarks on the growth of L^p -norms of polynomials”, *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., **1745**, Springer, Berlin, 2000, 27–35.
- [5] V. Berezghnoy, “On the equivalence of integral norms on the space of measurable polynomials with respect to a convex measure”, *Theory Stoch. Process.*, **14**:1 (2008), 7–10.
- [6] J. Bourgain, “On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets”, *Geometric aspects of functional analysis* (1989-90), Lecture Notes in Math., **1469**, Springer, Berlin, 1991, 127–137.
- [7] R. Latała, “On the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures”, *Convex geometric analysis* (Berkeley, CA, 1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 123–127.
- [8] V. I. Bogachev, *Measure theory*, v. 2, Springer-Verlag, Berlin, 2007, xiv+575 pp.
- [9] V. I. Bogachev, *Differentiable measures and the Malliavin calculus*, Math. Surveys Monogr., **164**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, xvi+488 pp.
- [10] Л. М. Арутюнян, И. С. Ярославцев, “Об измеримых многочленах на бесконечномерных пространствах”, *Докл. РАН*, **449**:6 (2013), 627–631; англ. пер.: L. M. Arutyunyan, I. S. Yaroslavtsev, “On measurable polynomials on infinite-dimensional spaces”, *Dokl. Math.*, **87**:2 (2013), 214–217.
- [11] Л. М. Арутюнян, Е. Д. Косов, И. С. Ярославцев, “О некоторых свойствах многочленов, измеримых по гауссовской мере”, *Докл. РАН*, **457**:2 (2014), 131–135; англ. пер.: L. M. Arutyunyan, E. D. Kosov, I. S. Yaroslavtsev, “On some properties of polynomials measurable with respect to a Gaussian measure”, *Dokl. Math.*, **90**:1 (2014), 419–423.
- [12] S. G. Bobkov, J. Melbourne, *Hyperbolic measures on infinite dimensional spaces*, arXiv:1405.2961.
- [13] Ф. Назаров, М. Седин, А. Вольберг, “Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций”, *Алгебра и анализ*, **14**:2 (2002), 214–234; англ. пер.: F. Nazarov, M. Sodin, A. Vol’berg, “The geometric Kannan–Lovász–Simonovits lemma, dimension-free estimates for the distribution of the values of polynomials, and the distribution of the zeros of random analytic functions”, *St. Petersburg Math. J.*, **14**:2 (2003), 351–366.
- [14] Е. Ж. Ремец, “Sur une propriété extrême des polynômes de Tschébycheff”, *Сообщ. Харьк. мат. о-ва*, **13**:1 (1936), 93–95.
- [15] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math., **161**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+480 pp.
- [16] С. Г. Бобков, “Некоторые обобщения результатов Ю. В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов”, *ТВП*, **45**:4 (2000), 745–748; англ. пер.: S. G. Bobkov, “Some generalizations of Prokhorov’s results on Khinchin-type inequalities for polynomials”, *Theory Probab. Appl.*, **45**:4 (2001), 644–647.
- [17] A. Carbery, J. Wright, “Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$ ”, *Math. Res. Lett.*, **8**:3 (2001), 233–248.

- [18] L. Lovász, M. Simonovits, “Random walks in a convex body and an improved volume algorithm”, *Random Structures Algorithms*, **4**:4 (1993), 359–412.
- [19] R. Kannan, L. Lovász, M. Simonovits, “Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma”, *Discrete Comput. Geom.*, **13**:1 (1995), 541–559.

Лаврентин Мартунович Арутюнян
(Lavrentin M. Arutyunyan)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: Lavrentin@ya.ru

Поступила в редакцию
30.10.2014 и 02.12.2014

Егор Дмитриевич Косов
(Egor D. Kosov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ked_2006@mail.ru