Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 37–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 05:15:28

УДК 517.59

И. Ф. Красичков-Терновский

Аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки

Дается упрощенное доказательство известной аппроксимационной теоремы для однородного уравнения свертки. Используемый метод позволяет распространить эту теорему на более общий случай векторной свертки.

Библиография: 16 названий.

Введение

Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $H(\Omega)$ – пространство функций, голоморфных в Ω с топологией равномерной сходимости на компактах в Ω , $H^*(\Omega)$ – сильное сопряженное пространство к $H(\Omega)$. Любой линейный непрерывный функционал $S \in H^*(\Omega)$ допускает представление

$$\langle S, f \rangle = \int f d\mu, \quad (0.1)$$

где μ – комплексная конечно аддитивная мера ограниченной полной вариации с носителем, сосредоточенным на компакте $K \Subset \Omega$.

Пусть $\Omega \ominus K = \{h : h + K \subset \Omega\}$ – *геометрическая разность* множеств Ω и K . Это множество нам удобно обозначать через O . Нетрудно проверить, что O – выпуклая окрестность нуля. Из представления (0.1) следует, что выражение $\langle S, f(z+h) \rangle$, где функционал действует по переменной z , представляет собой функцию, голоморфную в O . Эта функция называется *сверткой функционала S и функции f* и обозначается $S*f$. Оператор свертки $f \rightarrow S*f$ линейно и непрерывно отображает $H(\Omega)$ в $H(O)$. Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$S * f = 0, \quad f \in H(\Omega). \quad (0.2)$$

Частным случаем уравнения (0.2) является однородное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами.

Экспоненциальным полиномом называется функция вида

$$p(z) \exp \langle \lambda, z \rangle,$$

где $p(z)$ – многочлен. Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (0.2), принято называть его *элементарными решениями*. Возникает вопрос:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00030).

можно ли каждое решение уравнения (0.2) аппроксимировать в топологии $H(\Omega)$ линейными комбинациями элементарных решений? Положительный ответ называют *аппроксимационной теоремой* для уравнения свертки. В разных ситуациях аппроксимационная теорема была доказана следующими авторами: Л. Шварцем [1] ($\Omega = \mathbb{C}$), Л. Эренпрайсом [2], Б. Мальгранжем [3] ($\Omega = \mathbb{C}^n$), И. Ф. Красичковым-Терновским [4] (Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}$), В. В. Напалковым [5] (Ω – трубчатая выпуклая область в $\mathbb{C}^n$), Р. С. Юлмухаметовым [6] (Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$).

Среди этих утверждений наиболее сильное – это результат Р. С. Юлмухаметова [6]. Однако описанная им в краткой заметке [6] схема доказательства слишком фрагментарна, чтобы считаться удовлетворительной. Более развернутое описание той же схемы содержится в обзоре В. В. Напалкова и А. С. Кривошеева [7]. К сожалению, оно содержит неоднократные ссылки на мало доступные широкому читателю препринты [8], [9] Р. С. Юлмухаметова.

Таким образом, хотя аппроксимационная теорема хорошо известна специалистам, ее развернутое доказательство отсутствует в журнальной литературе. Цель настоящей статьи – восполнить этот пробел.

Известно, что аппроксимационная теорема сводится к так называемому “аналитическому” факту (см. [4]). В статьях [6], [7] аналитический факт интерпретируется в терминах специальной задачи весовой аппроксимации многочленами (см. [7; теорема 12.3]). Основная тяжесть рассуждений связана с этой задачей. В статьях [8], [9] весьма сложным путем задача весовой аппроксимации сводится к теореме Н. Сибони [10] о полиномиальной аппроксимации в интегро-весовых нормах.

В настоящей статье мы даем прямой и естественный метод вывода аналитического факта из теоремы Сибони, минуя при этом упомянутую выше задачу весовой аппроксимации. Этот метод позволяет рассмотреть ситуацию более общую, чем описанная выше.

Вместо пространства $H(\Omega)$ мы рассматриваем топологическое произведение $\mathcal{H} = H(\Omega_1) \times \cdots \times H(\Omega_\nu)$ ν пространств такого типа. Линейный непрерывный функционал S на этом пространстве представляется в виде вектора $S = (S_1, \dots, S_q)$, где $S_i \in H^*(\Omega_i)$; свертка функционала S и элемента $f = (f_1, \dots, f_q)$ представляется в виде суммы

$$S * f = \sum_{i=1}^q S_i * f_i.$$

Такую свертку, чтобы отличить ее от обычной, будем называть “векторной сверткой”.

В работе доказывается аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки.

§ 1. Основные понятия

1. Пусть Ω – область Рунге в $\mathbb{C}^n$, $H(\Omega)$ – пространство функций, голоморфных в Ω , с топологией равномерной сходимости на компактах; $H(\Omega)$ есть пространство типа (M^*) и как таковое является рефлексивным [11]; $H^*(\Omega)$ – сопряженное к $H(\Omega)$ пространство, наделенное сильной топологией. Обозначим через T преобразование Лапласа, которое каждому функционалу $S \in H^*(\Omega)$ ставит в соответствие его

характеристическую функцию $\varphi(\lambda) = \langle S, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$; $P(\Omega)$ – образ $H^*(\Omega)$ относительно T . Поскольку Ω – область Рунге, отображение $T: H^*(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ является взаимно однозначным; $P(\Omega)$ наделяется локально выпуклой топологией, индуцированной из $H^*(\Omega)$. Кроме того, $P(\Omega)$ выдерживает умножение на многочлены, причем операция умножения на фиксированный многочлен непрерывна в топологии $P(\Omega)$. Это позволяет рассматривать $P(\Omega)$ как топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Мы будем ссылаться на $P(\Omega)$ как на *модуль, ассоциированный с областью Ω* .

В случае, когда область Ω выпуклая, топология $P(\Omega)$ может быть описана следующим образом. Пусть $D_1 \Subset D_2 \Subset \dots$ – возрастающая последовательность выпуклых компактов, исчерпывающих Ω ; $H_{D_1} < H_{D_2} < \dots$ – последовательность опорных функций (в смысле комплексного анализа) этих компактов. Рассмотрим возрастающую последовательность банаховых пространств

$$P_1 \subset P_2 \subset \dots,$$

где

$$P_n = \left\{ \varphi \in H(\mathbb{C}^n) : \|\varphi_n\| = \sup_{\mathbb{C}^n} \frac{|\varphi(z)|}{\exp H_{D_n}(z)} < \infty \right\}.$$

Топология $P(\Omega)$ может быть описана как топология индуктивного предела этой последовательности. Так как вложения $P_n \subset P_{n+1}$ вполне непрерывны, то $P(\Omega)$ есть пространство типа (LN^*) (см. [11]).

Из такого описания топологии в $P(\Omega)$ следует [11], что последовательность φ_n сходится к φ_0 в топологии $P(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

- 1) $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ равномерно на компактах,
- 2) существует компакт $K \Subset \Omega$ такой, что $|\varphi_n(z) - \varphi_0(z)| \leq \text{const} \cdot \exp H_K(z)$.

2. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ – система областей Рунге в $\mathbb{C}^n$;

$$\mathcal{H} = H(\Omega_1) \times \dots \times H(\Omega_q)$$

– топологическое произведение; $\mathcal{H}$ является пространством типа (M^*) и рефлексивным [11]; $\mathcal{H}^*$ – сильное сопряженное к $\mathcal{H}$.

Линейный непрерывный функционал $S \in \mathcal{H}$ представляется в виде вектора $S = (S_1, \dots, S_q)$ где $S_j \in H^*(\Omega_j)$, $j = 1, \dots, q$. Действие функционала S на элемент $f = (f_1, \dots, f_q)$ осуществляется по правилу

$$\langle S, f \rangle = \sum_{j=1}^q \langle S_j, f_j \rangle.$$

Обозначим через $\mathcal{T}$ отображение, которое каждому функционалу

$$S = (S_1, \dots, S_q) \in \mathcal{H}^*$$

ставит в соответствие его *характеристический элемент* $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$, где $\varphi_j(\lambda) = \langle S_j, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$ – *характеристическая функция* функционала S_j , $j = 1, \dots, q$.

Как и в случае $q = 1$, отображение $\mathcal{T}$ будем называть *преобразованием Лапласа*. Обозначим через $\mathcal{P}$ образ $\mathcal{H}^*$ относительно $\mathcal{T}$. Так как $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ — области Рунге, то отображение $\mathcal{T}: \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{P}$ является взаимно однозначным. Наделим $\mathcal{P}$ топологией, индуцированной из $\mathcal{H}^*$. Из определения $\mathcal{P}$ следует, что $\mathcal{P}$ совпадает с топологическим произведением

$$P(\Omega_1) \times \dots \times P(\Omega_q).$$

Этот влечет, что $\mathcal{P}$, как и каждое из пространств $P(\Omega_1), \dots, P(\Omega_q)$, обладает структурой модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_q)$. Мы будем называть $\mathcal{P}$ *модулем, ассоциированным с системой областей* $\Omega_1, \dots, \Omega_q$.

3. Пусть $\Omega'_1, \dots, \Omega'_q$ — еще одна система областей Рунге в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{H}' = H(\Omega'_1) \times \dots \times H(\Omega'_q)$ и $u: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ — линейное непрерывное отображение; $u^*: \mathcal{H}'^* \rightarrow \mathcal{H}^*$ — сопряженное отображение.

Обозначим через W ядро операции u , $W^0 = \{S \in \mathcal{H}^* : \langle S, W \rangle = 0\}$ — подпространство в $\mathcal{H}^*$, “ортогональное” W , $V = u^*(\mathcal{H}'^*)$. Поскольку u непрерывно, $V \subset \mathcal{H}^*$.

Обозначим через $\text{Cl } V$ замыкание V в $\mathcal{H}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\text{Cl } V = W^0. \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\text{cl } V$ слабое замыкание V в $\mathcal{H}^*$. Известно, что $\text{cl } V = W^0$ [12; формула (8.6.4)]. Пространство $\mathcal{H}$ является рефлексивным. В этой ситуации слабое замыкание абсолютно выпуклого множества в $\mathcal{H}^*$ совпадает с его сильным замыканием. Множество V как линейный образ абсолютно выпуклого множества $\mathcal{H}'^*$ является также абсолютно выпуклым. Поэтому $\text{cl } V = \text{Cl } V$. Следовательно, $\text{Cl } V = \text{cl } V = W^0$.

Пусть $\mathcal{P}'$ — модуль, ассоциированный с системой областей $\Omega'_1, \dots, \Omega'_q$, $\mathcal{T}': \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{P}'$ — соответствующее преобразование Лапласа.

Преобразования Лапласа $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ индуцируют операцию $u^{\otimes}: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$, именно $u^{\otimes} = \mathcal{T} \circ u^* \circ \mathcal{T}'^{-1}$. Следуя [13], отображение $u^{\otimes}$ назовем *дуальным* по отношению к *прямому* отображению u . Обозначим $I = \mathcal{T}(W^0)$, $J = u^{\otimes}(\mathcal{P}')$, $\bar{J}$ — замыкание J в топологии $\mathcal{H}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Справедливо соотношение*

$$\bar{J} = I. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование $\mathcal{T}$ есть топологический изоморфизм $\mathcal{H}^*$ на $\mathcal{P}$, причем $J = \mathcal{T}(V)$, $I = \mathcal{T}(W^0)$. Поэтому соотношения (1.1) и (1.2) эквивалентны.

4. В пространстве $\mathcal{H}$ покомпонентно действуют операторы частного дифференцирования

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial z_n}. \quad (1.3)$$

Элемент f называется *корневым элементом* системы операторов (1.3), отвечающим вектору собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если при некотором целом k выполняются соотношения

$$(D_1 - \lambda_1 E)^k f = 0, \quad \dots, \quad (D_n - \lambda_n E)^k f = 0, \quad (1.4)$$

где E – тождественный оператор.

В случае $q = 1$, т.е. когда f – скалярная функция, общее решение системы уравнений (1.4) представляет собой конечную линейную комбинацию функций вида

$$z^\alpha \exp\langle C\lambda, z \rangle,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$. В случае $q > 1$ система (1.4) расщепляется на q независимых систем

$$(D_1 - \lambda_1 E)^k f_j = 0, \quad \dots, \quad (D_n - \lambda_n E)^k f_j = 0, \quad j = 1, \dots, q,$$

где $f_j \in H(\Omega_j)$. Общее решение такой системы можно представить в виде конечной линейной комбинации элементов из $\mathcal{H}$ вида

$$z^\alpha \exp\langle \lambda, z \rangle e_j,$$

где α – мультииндекс, $w \in \mathbb{C}^n$, e_j – единичный q -вектор, у которого j -я компонента равна единице, а все остальные компоненты – нули.

5. Замкнутое подпространство $W \subset \mathcal{H}$ называется *инвариантным*, если оно инвариантно относительно системы операторов (1.3).

Пусть W – инвариантное подпространство в $\mathcal{H}$, $W^0 = \{S \in \mathcal{H}^* : \langle S, f \rangle = 0 \forall f \in W\}$ – подпространство в $\mathcal{H}^*$, “ортогональное” к W , и $I = \mathcal{T}(W^0)$; I обладает структурой замкнутого подмодуля $\mathbb{C}[z]$ -модуля $\mathcal{P}$; I называется *аннуляторным подмодулем* подпространства W . Замкнутое инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{H}$ допускает *спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{H}$ множества конечных линейных комбинаций корневых элементов системы операторов (1.3), содержащихся в W .

6. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^n$; $O(\lambda)$ – кольцо ростков функций n переменных, аналитических в точке λ ; $\mathbb{O}(\lambda)$ – декартово произведение q копий $O(\lambda)$. Будем рассматривать $\mathbb{O}(\lambda)$ как модуль над кольцом $O(\lambda)$. Всякий замкнутый подмодуль $I \subset \mathcal{P}$ порождает в $O(\lambda)$ -модуле $\mathbb{O}(\lambda)$ локальный подмодуль $I(\lambda)$, состоящий из всевозможных комбинаций вида

$$\sum c_i u^{(i)},$$

где $u^{(i)} \in I$, $c_i \in O(\lambda)$.

Замкнутый подмодуль $I \subset \mathcal{P}$ называется *обильным*, если справедлива импликация

$$f \in \mathcal{P}, \quad f \in I(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n \implies f \in I.$$

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ [14]. *Замкнутое инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $I \subset \mathcal{P}$ является обильным.*

Еще более общая теорема двойственности доказана А. Б. Шишкиным [15].

Эта теорема сводит задачу спектрального синтеза для инвариантного подпространства W к проверке обильности его аннуляторного подмодуля $I = \mathcal{T}(W^0)$.

§ 2. Однородное уравнение векторной свертки

1. Оператор векторной свертки. Фиксируем линейный непрерывный функционал $S^0 = (S_1^0, \dots, S_q^0) \in \mathcal{H}^*$. Действие функционала S^0 на элемент $f = (f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{H}$ осуществляется по правилу

$$\langle S^0, f \rangle = \sum_{j=1}^q \langle S_j^0, f_j \rangle = \sum_{j=1}^q \int_{K_j} f_j d\mu_j,$$

где $\mu_1, \dots, \mu_q$ — комплексные меры ограниченной вариации с носителями, сосредоточенными на компактах $K_1 \subset \Omega_1, \dots, K_q \subset \Omega_q$ соответственно.

Подберем области G_j , $j = 1, \dots, q$, такие, что $K_j \Subset G_j \Subset \Omega_j$. Существует открытая выпуклая окрестность нуля $O \subset \mathbb{C}^n$ такая, что $O + G_j \subset \Omega_j$, $j = 1, \dots, q$. Для элемента $f = (f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{H}$ функции $f_1(z+h), \dots, f_q(z+h)$ как функции переменных z и h будут аналитическими на множествах $G_1 \times O, \dots, G_q \times O$ соответственно. Поэтому при фиксированном $h \in O$ имеет смысл действие $S^0 = (S_1^0, \dots, S_q^0)$ на вектор $f(z+h) = (f_1(z+h), \dots, f_q(z+h))$:

$$(S^0 * f)(h) := \langle S^0, f(z+h) \rangle = \sum_{j=1}^q \int_{K_j} f_j(z+h) d\mu_j.$$

Это выражение представляет собой сумму сверток $S_1 * f_1 + \dots + S_q * f_q$. Оно является функцией переменной h , голоморфной в O , и называется *векторной сверткой функционала $S^0 \in H^*$ и элемента $f = (f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{H}$* .

Перечислим свойства оператора векторной свертки $u: f \rightarrow S * f$.

Свойство 1. Операция u есть линейное непрерывное отображение $\mathcal{H}$ в $H(O)$.

Доказательство тривиально.

Свойство 2. Оператор свертки перестановочен с каждым из операторов $D_1, D_2, \dots, D_n$.

Доказательство тривиально.

Пусть $P(O)$ — модуль, ассоциированный с областью O .

Свойство 3. Дуальная операция $u^\circ: P(O) \rightarrow \mathcal{P}$ имеет вид $\varphi \rightarrow \varphi\varphi^0$, где $\varphi^0(\lambda)$ — характеристический элемент функционала S^0 .

Доказательство. Сопряженная операция $u^*: H^*(O) \rightarrow \mathcal{H}^*$ переводит функционал $s \in H^*(O)$ в функционал $S \in \mathcal{H}^*$ по правилу

$$\langle S, f \rangle = \langle s, u(f) \rangle = \langle s, S^0 * f \rangle = \left\langle s, \sum_{j=1}^q (S_j^0 * f_j)(h) \right\rangle = \sum_{j=1}^q \langle s, S_j^0 * f_j \rangle,$$

т.е. $S = (S_1, \dots, S_q)$, где $\langle S_j, f \rangle = \langle s, S_j^0 * f_j \rangle$. Отсюда следует, что дуальная операция u^* переводит характеристическую функцию $\varphi(\lambda) = \langle s, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle$ функционала s в характеристический элемент $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_q)$ функционала $S = (S_1, \dots, S_q)$ по правилу

$$\begin{aligned}\psi_j(\lambda) &= \langle S_j, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = \langle s, \langle S_j^0, \exp\langle \lambda, z + h \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle s, \exp\langle \lambda, h \rangle \rangle \cdot \langle S_j^0, \exp\langle \lambda, z \rangle \rangle = \varphi(\lambda) \varphi_j^0(\lambda), \quad j = 1, \dots, q.\end{aligned}$$

Таким образом, $\psi = \varphi(\varphi_1^0, \dots, \varphi_q^0) = \varphi \varphi^0$. Свойство 3 установлено.

2. Однородное уравнение векторной свертки. Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$S * f = 0, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Множество W решений $f \in \mathcal{H}$ уравнения (2.1) есть замкнутое инвариантное подпространство в $\mathcal{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что множество W – замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$, есть следствие линейности и непрерывности оператора векторной свертки $u: \mathcal{H} \rightarrow H(O)$ (свойство 1). Инвариантность W относительно системы операторов D_i , $i = 1, \dots, n$, есть следствие перестановочности оператора u с каждым из операторов D_i (свойство 2).

Корневые элементы системы операторов $D_1, \dots, D_n$, удовлетворяющие уравнению (2.1), называются *элементарными решениями* этого уравнения.

Аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки представляет собой

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждое решение $f \in \mathcal{H}$ уравнения (2.1) аппроксимируется в топологии $\mathcal{H}$ линейными комбинациями элементарных решений; иными словами, инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{H}$ решений уравнения (2.1) допускает спектральный синтез.*

Мы докажем это утверждение в предположении, что система $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$ состоит из выпуклых областей.

Замкнутый подмодуль $I \subset \mathcal{P}$ называется *главным, порожденным элементом* $\varphi^0 \in \mathcal{P}$, если он совпадает с замыканием в $\mathcal{P}$ множества всех элементов вида $p\varphi^0$, где $p \in \mathbb{C}[z]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Аннуляторный подмодуль замкнутого инвариантного подпространства W решений однородного уравнения векторной свертки (2.1) – главный подмодуль в $\mathcal{P}$, порожденный характеристическим элементом $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0)$ функционала $S^0 = (S_1^0, \dots, S_q^0)$.*

ЛЕММА. *Пусть G, Ω – области в $\mathbb{C}^n$ и $G + O \subset \Omega$, где O – открытый шар с центром в начале. Далее, пусть $\varphi^{(0)} \in P(G)$, $l \in P(O)$ и существует последовательность многочленов p_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к l в топологии $P(O)$. Тогда $p_n \varphi^{(0)}$ сходится к $l \varphi^{(0)}$ в топологии $P(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\varphi^{(0)} \in P(G)$ влечет представление $\varphi^{(0)} = \langle S, \exp \langle \lambda, z \rangle \rangle$, где S — линейный непрерывный функционал на $H(G)$. Этот функционал допускает представление

$$\langle S, f \rangle = \int f d\mu,$$

где μ — комплексная конечно аддитивная мера ограниченной полной вариации, сосредоточенная на компакте $K \Subset G$. Таким образом, имеет место представление

$$\varphi^{(0)}(\lambda) = \int \exp \langle \lambda, z \rangle d\mu. \quad (2.2)$$

Так как $K \Subset G$, то существует шар O' с центром в начале такой, что $K + O' \subset G$. Компакт K можно покрыть конечной системой открытых множеств $a_1 + O', \dots, a_m + O'$, $a_1, \dots, a_m \in K$. Мету μ можно представить в виде суммы $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_m$, где $\text{supp } \mu_i \subset a_i + O'$, $i = 1, \dots, m$. Из представления (2.2) следует, что

$$\varphi^{(0)}(\lambda) = \varphi_1^{(0)}(\lambda) + \dots + \varphi_m^{(0)}(\lambda), \quad (2.3)$$

где $\varphi_i^{(0)}(\lambda) = \int f d\mu_i$, $i = 1, \dots, m$. Следовательно, в представлении (2.3) $\varphi_i \in P(a_i + O')$. Далее, поскольку множества $a_i + O'$, O выпуклы,

$$p_n \varphi_i^{(0)}(\lambda) \rightarrow l \varphi_i^{(0)}(\lambda) \quad (2.4)$$

в топологии $P(a_i + O' + O)$ (см. § 1, п. 1). Так как

$$a_i + O' + O \subset K + O' + O \subset G + O \subset \Omega,$$

то вложения $P(a_i + O' + O) \subset P(\Omega)$ непрерывны. Поэтому сходимость (2.4) будет иметь место и в топологии $P(\Omega)$. Это имеет место для любого $i = 1, \dots, m$. Поэтому последовательность

$$p_n \varphi^{(0)}(\lambda) = p_n \varphi_1^{(0)}(\lambda) + \dots + p_n \varphi_m^{(0)}(\lambda)$$

сходится к $l \varphi_1^{(0)}(\lambda) + \dots + l \varphi_m^{(0)}(\lambda)$ в топологии $P(\Omega)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. При условии $G_i + O \subset \Omega_i$, $i = 1, \dots, m$, оператор свертки будет линейно и непрерывно отображать $\mathcal{H}$ в $H(O)$. Подпространство W решений $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ уравнения (2.1) есть ядро оператора свертки

$$u: f = (f_1, \dots, f_q) \rightarrow S^0 * f = \sum_{i=1}^q S_i^0 * f_i.$$

Пусть $J = u^{\otimes}(H(O))$ — образ $H(O)$ относительно дуальной операции $u^{\otimes}$. По свойству 3 (см. п. 1) J состоит из элементов вида $\varphi \varphi^{(0)}$, где $\varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_q^{(0)})$ —

характеристический элемент функционала $S^0 = (S_1^0, \dots, S_q^0)$, а $\varphi \in P(O)$. С другой стороны, по предложению 1.2 замыкание J в топологии $\mathcal{P}$ совпадает с аннуляторным подмодулем $I = \mathcal{T}(W^0)$ инвариантного подпространства W . Из вышеизложенного следует: каждый элемент $\psi \in I$ можно аппроксимировать в топологии $\mathcal{P}$ элементами вида $\varphi\varphi^{(0)}$, $\varphi \in P(O)$. Далее, разлагая функцию $\varphi \in P(O)$ в ряд Тейлора и проделывая соответствующие оценки, убедимся, что существует последовательность многочленов p_n , $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к φ в топологии $P(O)$. В силу леммы последовательность $p_n\varphi_i^{(0)}$ сходится к $\varphi\varphi_i^{(0)}$ в топологии $P(\Omega_i)$. Поскольку такая сходимость имеет место для любого $i = 1, \dots, q$, заключаем, что $p_n\varphi^{(0)} \rightarrow \varphi\varphi^{(0)}$ в топологии $\mathcal{P}$. Из вышеизложенного следует, что каждый элемент ψ из I аппроксимируется в топологии $\mathcal{P}$ элементами вида $p\varphi^{(0)}$, где p – многочлен. Это означает, что I есть главный подмодуль в $\mathcal{P}$. Предложение доказано.

3. Обильность главных подмодулей и аналитический факт. Рассмотрим главный подмодуль I в $\mathcal{P}$, порождаемый элементом $\varphi^{(0)}$. Каждый элемент $u \in I$ аппроксимируется в топологии $\mathcal{P}$, а следовательно, и в более слабой топологии равномерной сходимости на компактах, элементами вида $p\varphi^{(0)}$, где p – многочлен. Поэтому u имеет вид $u = l\varphi^{(0)}$, где $\varphi^{(0)}$ – целая функция. Рассмотрим подмодуль $J \subset \mathcal{P}$, состоящий из всех элементов такого вида. Очевидно, $I \subset J$. Покажем, что J – обильный подмодуль. По определению (см. §1, п. 6) локальный подмодуль $J(\lambda)$ состоит из конечных комбинаций

$$\sum c_i u^{(i)}, \quad (2.5)$$

где $u_i \in J$, $c_i \in O(\lambda)$. Но $u^{(i)} = l^{(i)}\varphi^{(0)}$, где $l^{(i)}$ – целые функции. Поэтому сумма (2.5) есть $c\varphi^{(0)}$, где $c = \sum c_i l^{(i)} \in O(\lambda)$.

Итак, каждый локальный подмодуль $J(\lambda)$ состоит из элементов вида $c\varphi^{(0)}$, $c \in O(\lambda)$. Пусть теперь f – элемент $\mathcal{P}$ такой, что $f \in J(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n$. Тогда в некоторой открытой окрестности U_λ каждой точки λ справедливо представление $f = c_\lambda\varphi^{(0)}$, где c_λ голоморфна в U_λ . Если открытые множества U_λ и $U_{\lambda'}$ пересекаются, то в пересечении $U = U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ будет $c_\lambda\varphi^{(0)} = c_{\lambda'}\varphi^{(0)} = f$, откуда следует, что $c_\lambda = c_{\lambda'}$ в U . Отсюда стандартным образом следует, что семейство $\{c_\lambda\}$ склеивается в единую целую функцию c и $f = c\varphi^{(0)}$. Таким образом, доказана импликация обильности:

$$f \in \mathcal{P}, \quad f \in J(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n \implies f \in J.$$

Из вышеизложенного следует: для того чтобы доказать обильность I , достаточно доказать, что $I = J$. А для этого, ввиду включения $I \subset J$, достаточно установить, что каждый элемент $f \in J$ аппроксимируется в топологии $\mathcal{P}$ элементами вида $p\varphi^{(0)}$, где p – многочлен. Итак, аппроксимационная теорема для однородного уравнения свертки будет доказана, если установить следующий

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ФАКТ. Пусть элементы $\varphi^{(0)}$ и $l\varphi^{(0)}$, где l – целая функция, принадлежат $\mathcal{P}$; тогда существует последовательность многочленов p_n , $n = 1, 2, \dots$, такая, что $p_n\varphi^{(0)} \rightarrow l\varphi^{(0)}$ в топологии $\mathcal{P}$.

Отметим, что в ситуации $n = 1$, $q = 1$ аналитический факт был впервые сформулирован в [4].

Остальная часть статьи нацелена на доказательство аналитического факта.

§ 3. Аналитический факт

В настоящем параграфе доказывается векторная версия аналитического факта. В случае $n = 1$ такая версия была доказана ранее в [16; § 3].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $l, \varphi_1, \dots, \varphi_q$ — целые функции, $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ — выпуклые области. Предположим, что выполняется условие

$$\varphi_i \in P(\Omega_i), \quad l\varphi_i \in P(\Omega_i), \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.1)$$

Тогда существует последовательность многочленов p_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, сходящаяся к l равномерно на компактах и такая, что при каждом $i = 1, \dots, q$ $p_\nu \varphi_i \rightarrow l\varphi_i$ в топологии $P(\Omega_i)$.

Доказательство основано на теореме Н. Сибони [10; замечание к предложению 14].

1. Теорема Сибони. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс плюрисубгармонических функций ω логарифмического роста, т.е. удовлетворяющих условию

$$\omega(z) \leq a \ln^+ |z| + b,$$

где a, b — положительные константы; $\mathcal{L}'$ — класс верхних огибающих семейств функций из $\mathcal{L}$. Для произвольной функции $\omega \in \mathcal{L}'$ ω^* обозначает наименьшую полунепрерывную мажоранту функции ω .

Следующее утверждение доказано Н. Сибони [10; замечание 15 к предложению 14].

ТЕОРЕМА СИБОНИ. Пусть F — целая функция, $a \omega \in \mathcal{L}'$. Если интеграл $\int |F(z)|^2 \exp(-\omega^*(z)) d\lambda_z$ сходится, то F аппроксимируется многочленами по норме

$$\|f\| = \int \frac{|f(z)|^2 \exp(-\omega^*)}{1 + |z|^2} d\lambda_z,$$

где λ_z — $2n$ -мерная мера Лебега.

2. Мажорирование функциями класса $\mathcal{L}'$. Следующее утверждение дает возможность воспользоваться теоремой Сибони.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть F — целая функция экспоненциального типа. Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ω класса $\mathcal{L}'$ такая, что

$$|F(z)| \leq \omega(z) \leq \ln^+ |F(z)| + \varepsilon |z| + \text{const}.$$

Доказательство использует специальную оценку для частичных сумм ряда Тейлора.

Пусть F — целая функция. Введем обозначения: $M_F(r) = \max_{|z| \leq r} |F(z)|$ — максимум модуля F ,

$$m_F(r) = \ln M_F(r), \quad \tilde{m}_F(r) = \inf_{0 < t \leq r} \left\{ m_F(r+t) + n \ln \frac{r}{t} \right\}. \quad (3.2)$$

Очевидно, $\tilde{m}_F(r) \leq m_F(r)$.

ЛЕММА. Пусть

$$P_\nu(z) = \sum_{|\alpha| \leq \nu} a_\alpha z^\alpha$$

— ν -я частичная сумма ряда Тейлора функции F . Справедливо неравенство

$$\ln |P_\nu(z)| \leq \tilde{m}_F(r) + n \ln 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\widehat{M}_F(r_1, \dots, r_n) = \max_{|z_1| \leq r_1, \dots, |z_n| \leq r_n} |F(z)|.$$

Легко видеть, что

$$M_F(r) = \sup_{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} \leq r} \widehat{M}_F(r_1, \dots, r_n). \quad (3.3)$$

Используя неравенства Коши

$$|a_\alpha| \leq \inf_{t_1, \dots, t_n > 0} \frac{\widehat{M}_F(t_1, \dots, t_n)}{t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}},$$

имеем

$$|P_\nu(z)| \leq \sum_{|\alpha| \leq \nu} \inf \frac{\widehat{M}_F(t_1, \dots, t_n)}{t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}} r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n}.$$

Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$. Полагая $t_1 = r_1(1 + \varepsilon), \dots, t_n = r_n(1 + \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\leq \widehat{M}_F(r_1(1 + \varepsilon), \dots, r_n(1 + \varepsilon)) \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\alpha_1} \dots (1 + \varepsilon)^{\alpha_n}} \\ &= \widehat{M}_F(r_1(1 + \varepsilon), \dots, r_n(1 + \varepsilon)) \left(\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right)^n \leq 2^n M_F(r(1 + \varepsilon)) \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^n. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу (3.3) и условия $0 < \varepsilon \leq 1$. Итак,

$$|P_\nu(z)| \leq 2^n \frac{M_F(r(1 + \varepsilon))}{\varepsilon^n}.$$

Это верно при любом $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \ln |P_\nu(z)| &\leq \inf_{0 < \varepsilon \leq 1} \left(n \ln 2 + m_F(r + \varepsilon r) + n \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &= \inf_{0 < t \leq r} \left(n \ln 2 + m_F(r + t) + n \ln \frac{r}{t} \right) = n \ln 2 + \tilde{m}_F(r). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Полагая $t = r$ в выражении (3.2) для $\tilde{m}_F(r)$, получаем неравенство

$$\ln |P_\nu(z)| \leq m_F(2r) + n \ln 2, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2. По условию функция F имеет экспоненциальный тип, т.е. существуют положительные константы a, b такие, что

$$m_F(r) \leq ar + b, \quad r > 0. \quad (3.5)$$

Подбираем столь большое целое число N , что $1/N < \varepsilon/(2a)$. Представим $\ln |F|$ в виде

$$\ln |F(z)| = \frac{1}{N} \ln |F(z)| + \dots + \frac{1}{N} \ln |F(z)| = \frac{1}{N} \ln |F^{(1)}(z)| + \dots + \frac{1}{N} \ln |F^{(N)}(z)|,$$

где $F^{(i)}(z) \equiv F(z)$, $i = 1, \dots, N$.

В силу (3.4) и (3.5) частичные суммы $P_\nu(z)$ ряда Тейлора функции F допускают оценку

$$\ln |P_\nu(z)| \leq 2a|z| + b + n \ln 2, \quad 0 \leq |z| < \infty. \quad (3.6)$$

Фиксируем произвольное положительное число R_1 . Пусть $P_{\nu_1}^{(1)}$ — частичная сумма ряда Тейлора функции $F^{(1)}$ такая, что $|F^{(1)}(z) - P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq 1/2$ при $|z| \leq R_1$. Заметим, что $|P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq |F^{(1)}(z) - P_{\nu_1}^{(1)}(z)| + |F^{(1)}(z)|$, откуда

$$\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq \ln \left(\frac{1}{2} + |F^{(1)}(z)| \right), \quad |z| \leq R_1.$$

Если $|F^{(1)}(z)| \leq 1/2$, то $\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq 0$; если $|F^{(1)}(z)| > 1/2$, то

$$\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq \ln 2 |F^{(1)}(z)| = \ln |F(z)| + \ln 2.$$

Таким образом, во всех случаях

$$\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq \ln^+ |F^{(1)}(z)| + 1, \quad |z| \leq R_1.$$

Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2a} - \frac{1}{N}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что $\delta > 0$. Подбираем $R_2 > R_1$ столь большим, что

$$\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2), \quad |z| > R_2.$$

Согласно (3.6) при $R_1 \leq |z| \leq R_2$ будет выполняться оценка

$$\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq 2a|z| + b + n \ln 2.$$

Итак, получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| &\leq \ln^+ |F^{(1)}(z)| + 1, & |z| &\leq R_1; \\ \ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| &\leq 2a|z| + b + n \ln 2, & R_1 &\leq |z| \leq R_2; \\ \ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| &\leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2), & |z| &\geq R_2. \end{aligned}$$

Теперь выберем частичную сумму $P_{\nu_2}^{(2)}$ ряда Тейлора $F^{(2)}$ так, чтобы

$$|F_1^{(2)}(z) - P_{\nu_2}^{(2)}(z)| \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \leq R_2.$$

Подбираем $R_3 > R_2$ столь большим, чтобы

$$\ln |P_{\nu_2}^{(2)}(z)| \leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2), \quad |z| \geq R_3.$$

В силу (3.5) при $R_2 \leq |z| \leq R_3$ выполняется неравенство

$$\ln |P_{\nu_2}^{(2)}(z)| \leq 2a|z| + b + n \ln 2.$$

Таким образом, $P_{\nu_2}^{(2)}$ допускает оценки

$$\begin{aligned} \ln |P_{\nu_2}^{(2)}(z)| &\leq \ln^+ |F^{(2)}(z)| + 1, & |z| &\leq R_2; \\ \ln |P_{\nu_2}^{(2)}(z)| &\leq 2a|z| + b + n \ln 2, & R_2 &\leq |z| \leq R_3; \\ \ln |P_{\nu_2}^{(2)}(z)| &\leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2), & |z| &\geq R_3. \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, построим систему чисел

$$R_1 < R_2 < \dots < R_{N+1}$$

и систему многочленов

$$P_{\nu_1}^{(1)}, \quad P_{\nu_2}^{(2)}, \quad \dots, \quad P_{\nu_N}^{(N)}.$$

Обозначим

$$P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z) = P_{\nu_1}^{(1)}(z) \dots P_{\nu_N}^{(N)}(z).$$

При $|z| \leq R_1$ имеем

$$\ln |P_{\nu_1}^{(1)}(z)| \leq \ln^+ |F^{(1)}(z)| + 1, \quad \dots, \quad \ln |P_{\nu_N}^{(N)}(z)| \leq \ln^+ |F^{(N)}(z)| + 1,$$

откуда следует

$$\frac{1}{N} \ln |P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z)| = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \ln^+ |F^{(i)}(z)| + 1 \right) = \ln^+ |F(z)| + 1, \quad |z| \leq R_1. \quad (3.8)$$

При $|z| \geq R_{N+1}$ имеем

$$\ln |P_{\nu_i}^{(i)}(z)| \leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2),$$

откуда

$$\frac{1}{N} \ln |P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z)| \leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2), \quad |z| \geq R_{N+1}. \quad (3.9)$$

Оценим $\ln |P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z)|$ при $R_k \leq |z| \leq R_{k+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \ln |P_{\nu_i}^{(i)}(z)| &\leq \delta(2a|z| + b + n \ln 2), & i < k; \\ \ln |P_{\nu_i}^{(i)}(z)| &\leq \frac{1}{N}(\ln^+ |F(z)| + 1), & i > k; \\ \ln |P_{\nu_k}^{(k)}(z)| &\leq (2a|z| + b + \ln 2), & i = k. \end{aligned}$$

Таким образом, при $R_k \leq |z| \leq R_{k+1}$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \ln |P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z)| &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \ln |P_{\nu_i}^{(i)}(z)| \\ &\leq \sum_{i < k} \frac{1}{N} \delta(2a|z| + b + n \ln 2) + \frac{1}{N} (2a|z| + b + n \ln 2) + \sum_{i > k} \frac{1}{N} (\ln^+ |F(z)| + 1) \\ &= \frac{k-1}{N} \cdot \delta(2a|z| + b + n \ln 2) + \frac{1}{N} (2a|z| + b + n \ln 2) + \frac{N-k}{N} (\ln^+ |F(z)| + 1) \\ &\leq (\ln^+ |F(z)| + 1) + \left(\delta + \frac{1}{N} \right) (2a|z| + b + n \ln 2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Согласно (3.7) имеем $(\delta + 1/N)2a = \varepsilon$. Из оценок (3.8), (3.9), (3.10) следует

$$\frac{1}{N} \ln |P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z)| \leq \ln^+ |F(z)| + \varepsilon|z| + b + n \ln 2. \quad (3.11)$$

Используя описанную выше процедуру, построим последовательность много-членов

$$P_{\nu_1, \dots, \nu_N}(z) = P_{\nu_1}^{(1)}(z) \times \dots \times P_{\nu_N}^{(N)}(z),$$

где $\nu_1 \rightarrow \infty, \dots, \nu_N \rightarrow \infty$. При этом

$$P_{\nu_1}^{(1)} \rightarrow F(z), \quad \dots, \quad P_{\nu_N}^{(N)}(z) \rightarrow F(z).$$

Отсюда

$$\frac{1}{N} \sum \ln |P_{\nu_i}^{(i)}(z)| \rightarrow \ln |F(z)|. \quad (3.12)$$

Обозначим через ω верхнюю огибающую системы функций

$$\frac{1}{N} \ln |P_{\nu_1}^{(1)} \times \dots \times P_{\nu_N}^{(N)}|.$$

Из (3.12) следует, что $\omega(z) \geq \ln |F(z)|$, а из (3.11) следует, что $\omega(z) \leq \ln^+ |F(z)| + \varepsilon|z| + b + n \ln 2$.

Предложение 3.2 доказано.

3. Об отношении целых функций экспоненциального типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\varphi, \Phi, l = \Phi/\varphi$ — целые функции. Если φ, Φ имеют экспоненциальный тип, то и l имеет экспоненциальный тип.

Доказательство основано на лемме, которая имеет и самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Пусть $u, v, w = u - v$ — субгармонические функции на $\mathbb{R}^m$; B — шар с центром в точке z радиуса меньше чем $|z|$, E — наименьший шаровой слой с центром в z , содержащий B .

Тогда

$$w(z) \leq \frac{1}{|B|} \int_B u \, d\lambda + \frac{1}{|B|} \int_E v^+ \, d\lambda - \frac{|E|}{|B|} v(0). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v(0) = -\infty$, то неравенство (3.13) выполняется тривиальным образом. Поэтому предположим, что $v(0) > -\infty$. В силу субгармоничности w имеем

$$w(z) \leq \frac{1}{|B|} \int_B w \, d\lambda = \frac{1}{|B|} \int_B u \, d\lambda - \frac{1}{|B|} \int_B v \, d\lambda.$$

Оценим второй интеграл снизу. Обозначим через v^+ и v^- положительную и отрицательную части функции v . Имеем

$$\frac{1}{|B|} \int_B v \, d\lambda = \frac{1}{|B|} \int_B (v^+ - v^-) \, d\lambda \geq -\frac{1}{|B|} \int_B v^- \, d\lambda \geq -\frac{1}{|B|} \int_E v^- \, d\lambda.$$

Следовательно,

$$w(z) \leq \frac{1}{|B|} \int_B u \, d\lambda + \frac{1}{|B|} \int_E v^- \, d\lambda = \frac{1}{|B|} \int_B u \, d\lambda + \frac{1}{|B|} \int_E (v^+ - v) \, d\lambda. \quad (3.14)$$

В силу субгармоничности v

$$\frac{1}{|B|} \int_E v \, d\lambda = \frac{|E|}{|B|} \cdot \frac{1}{|E|} \int_E v \, d\lambda \geq \frac{|E|}{|B|} v(0). \quad (3.15)$$

Из (3.14), (3.15) следует неравенство (3.13).

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3. Без ограничения общности положим $\varphi(0) = 1$. Полагаем $u = \ln |\Phi|$, $v = \ln |\varphi|$, $w = \ln |l|$. Ясно, что $w = u - v$ и что u, v, w — субгармонические функции, причем $v(0) = 0$. Поскольку Φ, φ имеют экспоненциальный тип, существуют положительные константы a, b такие, что

$$u, v \leq a|z| + b. \quad (3.16)$$

При $v(0) = 0$ неравенство (3.13) принимает вид

$$w(z) \leq \frac{1}{|B|} \int_B u \, d\lambda + \frac{1}{|B|} \int_E v^+ \, d\lambda. \quad (3.17)$$

Фиксируем $\sigma, 0 < \sigma < 1$. В неравенстве (3.17) положим

$$B = \{\xi : |\xi - z| \leq \sigma|z|\}, \quad E = \{\xi : |\xi - |z|| \leq \sigma|z|\}.$$

Пусть $|B(1)|$ — объем единичного шара $B(1) = \{z : |z| \leq 1\}$. Вычислим объемы B и E . Имеем

$$\begin{aligned} |B| &= |B(1)|(\sigma|z|)^{2n}, \\ |E| &= |B(1)|(|z|(1+\sigma)^{2n} - |z|(1-\sigma)^{2n}) = |B(1)|(|z|\sigma)^{2n}C_\sigma, \end{aligned}$$

где $C_\sigma = (1+1/\sigma)^{2n} - (1-1/\sigma)^{2n}$. Отсюда $|E|/|B| = C_\sigma$. Учитывая (3.16), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|} \int_B u \, d\lambda &\leq \max_B |u| \leq a|z|(1+\sigma) + b; \\ \frac{1}{|B|} \int_E v^+ \, d\lambda &\leq \frac{|E|}{|B|} \max_E |v^+| \leq C_\sigma(a|z|(1+\sigma) + b). \end{aligned}$$

Отсюда согласно неравенству (3.17) получим неравенство

$$\ln |l(z)| = w(z) \leq a'|z| + b',$$

где $a' = (1+\sigma)a(1+C_\sigma)$, $b' = b(1+C_\sigma)$.

Предложение 3.3 доказано.

Более сложным образом подобное утверждение было доказано Л. Эренпрайсом [2].

4. Доказательство аналитического факта. Фиксируем число $\varkappa > n$. Из условия (3.1) следует, что существуют выпуклые компакты K_i , $K_i \in \Omega_i$, такие, что

$$\ln |\varphi_i(z)|, \ln |\varphi_i(z)l(z)| \leq H_{K_i}(z) + \text{const}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.18)$$

Далее, подбираем компакты K'_i так, чтобы

$$K_i \in K'_i \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ столь малое, что

$$H_{K_i}(z) + \varepsilon|z| + \varkappa \ln^+ |z| \leq H_{K'_i}(z) + \text{const}. \quad (3.19)$$

Из неравенств (3.18), в частности, следует, что $\varphi_i, \varphi_i l$ имеют экспоненциальный тип. По предложению 3.3 l имеет также экспоненциальный тип. По предложению 3.2 существует функция $\omega \in \mathcal{L}'$ такая, что

$$\ln |l(z)| \leq \omega(z) \leq \ln^+ |l(z)| + \varepsilon|z| + \text{const}.$$

Непосредственным вычислением можем убедиться, что форма Леви функции $\ln |z|$ неотрицательна, т.е. $\ln |z|$ — плюрисубгармоническая функция. Плюрисубгармонической будет и функция

$$\ln^+ |z| = \max[1, \ln |z|].$$

Пусть $\omega_0(z) = \omega(z) + \varkappa \ln^+ |z|$. Легко видеть, что $\omega_0 \in \mathcal{L}'$ и

$$\ln |l(z)| + \varkappa \ln^+ |z| \leq \omega_0(z) \leq \ln^+ |l(z)| + \varepsilon|z| + \varkappa \ln^+ |z| + \text{const}. \quad (3.20)$$

Обозначим через ω_0^* наименьшую полунепрерывную сверху мажоранту ω_0 . Поскольку функция $\ln^+ |l(z)| + \varepsilon|z| + \varkappa \ln^+ |z|$ полунепрерывна сверху и мажорирует ω_0 , та же функция будет мажорировать и ω_0^* . Таким образом, неравенства (3.20) влекут неравенства

$$\ln |l(z)| + \varkappa \ln^+ |z| \leq \omega_0^*(z) \leq \ln^+ |l(z)| + \varepsilon|z| + \varkappa \ln^+ |z| + \text{const}. \quad (3.21)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int |l(z)|^2 \exp(-2\omega_0^*(z)) d\lambda_z. \quad (3.22)$$

Используя левое неравенство (3.21) и обозначая через $|S(1)|$ площадь $(2n-1)$ -мерной сферы, имеем

$$\begin{aligned} I &\leq \int |l(z)|^2 \exp(-2(\ln |l(z)| + \varkappa \ln^+ |z|)) d\lambda_z = \int \exp(-2\varkappa \ln^+ |z|) d\lambda_z \\ &= \text{const} + \int_{|z| \geq 1} |z|^{-2\varkappa} d\lambda_z = \text{const} + |S(1)| \int_{\rho \geq 1} \frac{1}{\rho^{2\varkappa-2n+1}} d\rho. \end{aligned}$$

По условию $2\varkappa - 2n + 1 > 1$. Поэтому интеграл (3.22) сходится.

Имеем $2\omega^* = (2\omega)^* \in \mathcal{L}'$. Поэтому по теореме Сибони (см. §3, п. 1) существует последовательность многочленов P_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\int \frac{|P_\nu(\xi) - l(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} \exp(-2\omega_0^*(\xi)) d\lambda_\xi \rightarrow 0$$

при $\nu \rightarrow \infty$. Отсюда в силу правого неравенства (3.21) следует

$$I_\nu = \int \frac{|P_\nu(\xi) - l(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)} \exp(-2(\ln^+ |l(\xi)| + \varepsilon|\xi| + \varkappa \ln^+ |\xi|)) d\lambda_\xi \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

при $\nu \rightarrow \infty$.

Пусть φ_i — одна из функций, участвующих в условии (3.1). Положим $\omega_i(\xi) = \ln^+ |l(\xi)| + \ln |\varphi_i(\xi)| + \varepsilon|\xi| + \varkappa \ln^+ |\xi|$ и перепишем интеграл I_ν в виде

$$I_\nu = \int \frac{|P_\nu(\xi) - l(\xi)|^2 |\varphi_i(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} \exp(-2\omega_i(\xi)) d\lambda_\xi. \quad (3.24)$$

Если $|l| \geq 1$, то $\ln^+ |l| + \ln |\varphi_i| = \ln |\varphi_i l|$; если $|l| \leq 1$, то $\ln^+ |l| + \ln |\varphi_i| = \ln |\varphi_i|$. Таким образом, во всех случаях

$$\ln^+ |l| + \ln |\varphi_i| \leq \max[\ln |\varphi_i l|, \ln |l|].$$

Отсюда в силу (3.18) и (3.19) имеем

$$\begin{aligned} \omega_i(\xi) &= \ln^+ |l(\xi)| + \ln |\varphi_i(\xi)| + \varepsilon|\xi| + \varkappa \ln^+ |\xi| \\ &\leq H_{K_i}(\xi) + \varepsilon|\xi| + \varkappa \ln^+ |\xi| \leq H_{K'_i}(\xi) + \text{const}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Полагаем

$$I_{\nu,i} = \int \frac{|P_\nu(\xi)\varphi_i(\xi) - l(\xi)\varphi_i(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} \exp(-2H_{K'_i}(\xi)) d\lambda_\xi.$$

Из (3.24), (3.25) следует, что $I_{\nu,i} \leq \text{const} I_\nu$, а из (3.23) — что $I_{\nu,i} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Далее, обозначим через $B(z, 1)$ шар с центром в z радиуса 1, а через $|B(1)|$ — его объем. Имеем

$$\begin{aligned} I_{\nu,i} &\geq \int_{B(z,1)} \frac{|P_\nu(\xi)\varphi_i(\xi) - l(\xi)\varphi_i(\xi)|^2}{1 + |\xi|^2} \exp(-2H_{K'_i}(\xi)) d\lambda_\xi \\ &\geq \exp(-2 \max_{B(z,1)} H_{K'_i}(\xi)) \cdot \left(\max_{B(z,1)} (1 + |\xi|^2) \right)^{-1} \\ &\quad \times \int_{B(z,1)} |P_\nu(\xi)\varphi_i(\xi) - l(\xi)\varphi_i(\xi)|^2 d\lambda_\xi. \end{aligned}$$

В силу субгармоничности $|P_\nu\varphi_i - l\varphi_i|^2$ имеем

$$\int_{B(z,1)} |P_\nu\varphi_i - l\varphi_i|^2 d\lambda \geq |B(1)| |P_\nu(z)\varphi_i(z) - l(z)\varphi_i(z)|^2;$$

в силу полуаддитивности $H_{K'_i}$ имеем

$$\max_{B(z,1)} H_{K'_i}(\xi) = \max_{|\zeta| \leq 1} H_{K'_i}(z + \zeta) \leq H_{K'_i}(z) + c,$$

где $c = \max_{|\zeta| \leq 1} H_{K'_i}(\zeta)$; наконец,

$$\max_{B(z,1)} (1 + |\zeta|^2) = 1 + (|z| + 1)^2 \leq \text{const} \cdot (1 + |z|^2).$$

Из вышеизложенного следует

$$I_{\nu,i} \geq \text{const} \cdot \exp\left(-2\left(H_{K'_i}(z) + \frac{1}{2} \ln(1 + |z|^2)\right)\right) |P_\nu(z)\varphi_i(z) - l(z)\varphi_i(z)|^2.$$

Поскольку $K'_i \in \Omega_i$, существует промежуточный компакт K''_i , $K'_i \in K''_i \in \Omega_i$, такой, что

$$H_{K'_i}(z) + \frac{1}{2} \ln(1 + |z|^2) \leq H_{K''_i}(z) + \text{const}.$$

Таким образом,

$$I_{\nu,i} \geq \text{const} \cdot \exp(-2H_{K''_i}(z)) |P_\nu(z)\varphi_i(z) - l(z)\varphi_i(z)|^2.$$

Это неравенство справедливо при любом z . Следовательно,

$$\|P_\nu\varphi_i - l\varphi_i\|_{K''_i}^2 = \sup \left| \frac{P_\nu(z)\varphi_i(z) - l(z)\varphi_i(z)}{\exp H_{K''_i}(z)} \right|^2 \leq \text{const} \cdot I_{\nu,i}.$$

Поскольку $I_{\nu,i} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, последовательность $P_\nu\varphi_i$ сходится к $l\varphi_i$ по норме $\|\cdot\|_{K''_i}$, а поскольку $K''_i \in \Omega_i$, сходимость будет иметь место в топологии $P(\Omega_i)$. Остается отметить, что вышеприведенное рассуждение справедливо для любого $i = 1, \dots, N$.

§ 4. Аппроксимационная теорема

Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ – система выпуклых областей в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{H} = H(\Omega_1) \times \dots \times H(\Omega_q)$. В настоящем параграфе завершается доказательство аппроксимационной теоремы.

АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА. *Инвариантное подпространство W решений $f \in \mathcal{H}$ однородного уравнения векторной свертки $S * f = 0$ допускает спектральный синтез.*

1. Обильность главных подмодулей. Пусть Ω – система $\{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$ выпуклых областей в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{P} = P(\Omega_1) \times \dots \times P(\Omega_q)$.

Мы рассматриваем $\mathcal{P}$ как модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Всякий главный подмодуль в $\mathcal{P}$ является обильным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ – элемент в $\mathcal{P}$, I – главный подмодуль, порожденный элементом φ . Подмодуль I будет обильным (см. §2, п. 3), если всякий элемент в $\mathcal{P}$ вида $l\varphi$, где l – целая функция, аппроксимируется в топологии $\mathcal{P}$ элементами вида $p\varphi$, где p – многочлены. Включения $\varphi \in \mathcal{P}$, $l\varphi \in \mathcal{P}$ равносильны $2q$ включениям

$$\varphi_1, l\varphi_1 \in P(\Omega_1), \quad \dots, \quad \varphi_q, l\varphi_q \in P(\Omega_q).$$

По теореме 3.1 существует последовательность многочленов p_n такая, что $p_n\varphi_i \rightarrow l\varphi_i$ в топологии $P(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, q$. Это равносильно тому, что $p_n\varphi \rightarrow l\varphi$ в топологии $\mathcal{P}$. Теорема 4.1 доказана.

2. Завершение доказательства аппроксимационной теоремы. По предположению 2.2 аннуляторный подмодуль I инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{H}$ решений $f \in \mathcal{H}$ уравнения векторной свертки $S * f = 0$ – главный. По теореме 4.1 этот подмодуль является обильным и, наконец, по теореме двойственности (§1, п. 6) подпространство W допускает спектральный синтез. Аппроксимационная теорема доказана.

Список литературы

1. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodique // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. № 4. P. 857–929.
2. Ehrenpreis L. Mean periodic functions // Amer. J. Math. 1955. V. 77. № 2. P. 293–328.
3. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955–1956. V. 6. P. 271–354.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Однородные уравнения типа свертки на выпуклых областях // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. С. 29–31.
5. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
6. Юлмухаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 2. С. 312–315.
7. Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6(288). С. 3–58.
8. Юлмухаметов Р. С. Асимптотика плюрисубгармонических функций // Препринт. Уфа, 1986.
9. Юлмухаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // Препринт. Уфа, 1990.

10. *Sibony N.* Approximation polynomiale ponderee dans un domaine d'holomophy de $\mathbb{C}^n$ // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1976. V. 26. №2. P. 71–99.
11. *Себастьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. Сб. пер. 1957. Т. 1. №1. С. 60–77.
12. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
13. *Красичков-Терновский И. Ф.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II // Матем. сб. 1997. Т. 188. №6. С. 57–98.
14. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №4. С. 101–130.
15. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теория двойственности // Матем. сб. 1998. Т. 189. №9. С. 143–160.
16. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111. №1. С. 3–41.

Институт математики с ВЦ РАН, Уфа
E-mail: kra@imat.rb.ru

Поступила в редакцию
25.06.2003