Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Лыков, Экстраполяция операторов, действующих в квазибанаховы пространства, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 1, 93–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 02:39:03

УДК 517.982+517.983+517.988

К. В. Лыков

Экстраполяция операторов, действующих в квазибанаховы пространства

Рассматриваются линейные и сублинейные операторы, действующие из шкалы пространств L_p в некоторое фиксированное квазинормированное пространство. Показано, как с помощью экстраполяционных конструкций, предложенных Б. Яверсом и М. Мильманом в конце 1980-х годов, можно распространять ограниченное действие оператора со шкалы L_p на более широкие пространства. Доказаны теоремы, обобщающие экстраполяционную теорему Яно на случай квазинормированного образа. При дополнительных условиях на квазинорму получены более точные результаты.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: экстраполяция операторов, теорема Яно, симметричное пространство, пространство Лоренца, квазибанахово пространство.

DOI: 10.4213/sm8441

§ 1. Введение

В настоящей работе будут рассматриваться преимущественно операторы, действующие из шкалы пространств $L_p = L_p[0, 1]$, и исследоваться возможность их ограниченного продолжения на другие пространства измеримых функций на отрезке $[0, 1]$. Напомним классическую и исторически первую теорему такого типа, обобщению которой и посвящена работа.

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ЯНО (см. [1]). Пусть T – оператор, определенный на $L_1[0, 1]$, принимающий значения в множестве всех измеримых и почти всюду конечных функций и удовлетворяющий при некотором $B > 0$ условию

$$\text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ в } L_1, \quad \text{то } |Tx(t)| \leq B \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i(t)| \text{ почти всюду.}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-31452-мол-а), Министерства образования и науки РФ в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров (соглашение № 02.В49.21.0005) и в рамках базовой части государственного задания СамГУ (проект № 204).

Предположим, что T действует в пространствах L_p при $p \in (1, p_0)$ и для некоторых положительных C и α

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq C \left(\frac{1}{p-1} \right)^\alpha \quad \text{при всех } p \in (1, p_0).$$

Тогда оператор T действует ограниченно из пространства Лоренца $\Lambda(\psi)$ в L_1 , где

$$\psi(t) := t \log^\alpha \frac{e^\alpha}{t}.$$

В работе [1] Ш. Яно рассмотрел приложения своей теоремы к различным классическим операторам. В то же время для многих важных операторов гармонического анализа их область значений не покрывается пространством L_1 . Поэтому хотелось бы иметь результаты об ограниченности операторов, действующих в более широкие, чем L_1 , пространства.

Во второй половине 1980-х – первой половине 1990-х годов Б. Яверс и М. Мильман заложили фундамент общей теории экстраполяции пространств и операторов (см. [2]–[4], а также более позднюю работу [5]). Они ввели понятие экстраполяционного функтора и исследовали свойства некоторых конкретных экстраполяционных функторов на шкалах пространств. Это позволило заменять семейство оценок на норму оператора, действующего между шкалами пространств, его действием в предельных для этих шкал пространствах. Таким образом, теория экстраполяции решает задачи, в некотором смысле обратные к задачам теории интерполяции. В качестве иллюстрации рассмотрим экстраполяционный функтор суммы, который подробно описан в начале § 3. Пусть даны два семейства банаховых пространств $\{A_\theta\}$ и $\{B_\theta\}$, $\theta \in \Theta$. Если оператор T действует из A_θ в B_θ для каждого $\theta \in \Theta$ и

$$\|T\|_{A_\theta \rightarrow B_\theta} \leq C, \quad \text{где } C \text{ не зависит от } \theta,$$

то при некоторых естественных дополнительных условиях T ограничен из суммы пространств A_θ в сумму пространств B_θ ,

$$T: \sum_{\theta \in \Theta} A_\theta \rightarrow \sum_{\theta \in \Theta} B_\theta.$$

В условиях теоремы Яно оператор T действует из шкалы $\left\{ \frac{1}{(p-1)^\alpha} L_p \right\}_{1 < p < p_0}$ в шкалу $\{L_p\}_{1 < p < p_0}$ с равномерно ограниченной нормой. Следовательно,

$$T: \sum_{1 < p < p_0} \frac{1}{(p-1)^\alpha} L_p = \Lambda(\psi) \rightarrow \sum_{1 < p < p_0} L_p = L_1.$$

Таким образом, теорема Яно (как и множество других подобных экстраполяционных результатов) следует из общей теории экстраполяции. Видно также, что в условиях теоремы Яно достаточно потребовать, чтобы оператор действовал из шкалы L_p в фиксированное банахово пространство Y , но банаховость Y все-таки существенна для прямого применения экстраполяционного функтора суммы. В настоящей работе, используя конструкцию экстраполяционного

функтора суммы, мы тем не менее доказываем экстраполяционные теоремы для операторов, действующих из шкалы пространств L_p в фиксированное квазибанахово пространство, в котором вместо неравенства треугольника выполняется только его более слабый аналог. Эти теоремы обобщают теорему Яно, которая получается из наших результатов в случае, если квазибанахово пространство является банаховым.

По поводу точности теоремы Яно и ее обобщений см. [6], [7]. Развитию теории экстраполяции в шкале пространств L_p посвящены работы [8]–[14]. Обзор по теории экстраполяции в шкале пространств L_p см. в [15]. В работе [16] предложены новые экстраполяционные конструкции, обобщающие классические функторы суммы и пересечения. Общий подход к теории экстраполяции, отличный от подхода Яверса и Мильмана, предложен в [17].

§ 2. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

В работе S всегда будет обозначать пространство всех измеримых и конечных почти всюду функций на $[0, 1]$, $\bar{S}$ – множество всех измеримых функций на $[0, 1]$, допускающих значения $\pm\infty$ на множестве положительной меры (сложение не определяем), а $\bar{S}_+$ – множество неотрицательных функций из $\bar{S}$ (здесь естественным образом определяется сложение, но не разность, которая нам и не нужна).

Напомним определения некоторых классов пространств измеримых функций. В таких пространствах функции, совпадающие почти всюду, обычно отождествляются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство X функций из S называется *идеальным*, если из условий $x \in X$, $y \in S$ и $|y(t)| \leq |x(t)|$ почти всюду следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

Две функции x и y из S называются *равноизмеримыми*, если

$$\mu\{t \in [0, 1] : |x(t)| > \tau\} = \mu\{t \in [0, 1] : |y(t)| > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

Здесь через μ обозначена обычная мера Лебега на $[0, 1]$. Для каждой функции $x \in S$ существует ее перестановка x^* – неотрицательная невозрастающая функция, равноизмеримая с x (см., например, [18; гл. II, § 2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Банахово идеальное пространство X называется *симметричным*, если из условий $x \in X$, $y \in S$ и $y^* = x^*$ вытекает $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Симметричное пространство вместе с каждой функцией x содержит и все равноизмеримые с ней функции. Подробнее с теорией симметричных пространств можно познакомиться по книгам [18]–[20]. Примерами симметричных пространств могут служить пространства L_p и пространства Лоренца $\Lambda(\psi)$, которым отведена ключевая роль в настоящей работе.

Пространство $L_p = L_p[0, 1]$, $p \geq 1$, состоит из всех функций $x \in S$, для которых конечна норма

$$\|x\|_p := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Предельным случаем является пространство L_∞ с нормой

$$\|x\|_\infty := \inf \{C : \mu(t : |x(t)| > C) = 0\}.$$

Если $\psi = \psi(t)$ – возрастающая и вогнутая функция, то пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ состоит из всех функций $x \in S$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} := \int_0^1 x^*(t) d\psi(t).$$

Пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ обладает следующим экстремальным свойством в классе всех симметричных пространств, которое будет использоваться в работе. Если для каждого измеримого $A \subset [0, 1]$ выполняется неравенство $\|\chi_A\|_X \leq \|\chi_A\|_{\Lambda(\psi)}$, где через χ_A обозначена характеристическая функция (индикатор) множества A , то (см. [18; гл. II, теорема 5.5])

$$\Lambda(\psi) \stackrel{1}{\subset} X.$$

Здесь и далее запись

$$Y \stackrel{C}{\subset} X$$

означает, что Y вложено в X и для всех $x \in Y$ выполняется неравенство $\|x\|_X \leq C\|x\|_Y$.

Также мы будем использовать обозначение

$$f(x, y, z, \dots) \stackrel{x}{\asymp} g(x, y, z, \dots),$$

означающее, что для некоторых положительных констант c_1 и c_2 , не зависящих от x ,

$$c_1 f(x, y, z, \dots) \leq g(x, y, z, \dots) \leq c_2 f(x, y, z, \dots).$$

Следующее известное определение дает широкое обобщение понятия нормированного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Векторное пространство Y называется квазинормированным с константой K , если:

- 1) $\|x\|_Y \geq 0$, при этом $\|x\|_Y = 0$ равносильно $x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\|_Y = |\lambda| \|x\|_Y$;
- 3) $\|x + y\|_Y \leq K(\|x\|_Y + \|y\|_Y)$ для некоторого $K \geq 1$.

Квазинормированное пространство Y называется *квазибанаховым*, если оно полно относительно топологии, порожденной квазинормой.

Легко видеть, что в квазинормированном пространстве справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^n y_j \right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{n-1} K^j \|y_j\|_Y + K^{n-1} \|y_n\|_Y \leq \sum_{j=1}^n K^j \|y_j\|_Y.$$

ЛЕММА 1. Пусть Y – квазибанахово пространство с константой K . Если

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \quad \text{в } Y,$$

то

$$\|y\|_Y \leq \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|y_j\|_Y.$$

Обратно, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} K^j \|y_j\|_Y < \infty,$$

то существует $y \in Y$ такой, что $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j = \sum_{j=1}^n y_j + \left(y - \sum_{j=1}^n y_j \right);$$

тогда

$$\|y\| \leq \sum_{j=1}^n K^j \|y_j\| + K^{n+1} \left\| y - \sum_{j=1}^n y_j \right\|.$$

Если $\sum_{j=1}^{\infty} K^j \|y_j\| = \infty$, то доказывать нечего. Пусть

$$\sum_{j=1}^{\infty} K^j \|y_j\| < \infty;$$

тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} K^j \|y_j\| = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем n и $k > n$ такими, что

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} K^j \|y_j\| < \frac{\varepsilon}{2K^2}, \quad \left\| y - \sum_{j=1}^k y_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2K^{n+2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} K^{n+1} \left\| y - \sum_{j=1}^n y_j \right\| &= K^{n+1} \left\| y - \sum_{j=1}^k y_j + \sum_{j=n+1}^k y_j \right\| \\ &\leq K^{n+2} \left\| y - \sum_{j=1}^k y_j \right\| + \sum_{j=n+1}^k K^{j+2} \|y_j\| < K^{n+2} \cdot \frac{\varepsilon}{2K^{n+2}} + K^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2K^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|y\| \leq \sum_{j=1}^n K^j \|y_j\| + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|y_j\| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое неравенство.

Пусть теперь

$$\sum_{j=1}^{\infty} K^j \|y_j\|_Y < \infty.$$

Тогда последовательность $S_n = \sum_{j=1}^n y_j$ фундаментальна, так как

$$\|S_k - S_n\| \leq \sum_{j=n+1}^k K^{j-n} \|y_j\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} K^j \|y_j\| \rightarrow 0.$$

Следовательно, в силу полноты пространства Y существует $y \in Y$ такой, что

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j.$$

Примерами квазибанаховых пространств, не являющихся банаховыми, могут служить пространства L_p при $0 < p < 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что оператор T , действующий из квазибанахова пространства X в квазибанахово пространство Y , *ограничен*, если с некоторой константой $C > 0$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$. Квазинорма оператора, которую мы тем не менее будем называть нормой, определяется выражением

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{\{x: \|x\|_X = 1\}} \|Tx\|_Y.$$

Если ограниченный оператор T линейный, то он будет и непрерывным.

Следующее важное понятие введено Н. Дж. Калтоном (см. [21; определение 3.2, теорема 3.6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Квазибанахово пространство называется *логарифмически выпуклым*, если при некотором $C > 0$ в нем выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\|_Y \leq C \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \log j) \|x_j\|_Y.$$

Пространство $L_{1,\infty}$ с квазинормой

$$\|x\|_{1,\infty} := \sup_{t \in (0,1]} tx^*(t) = \sup_{y>0} y\mu\{t : |x(t)| > y\}$$

является логарифмически выпуклым (см. [21; теорема 3.4] и [22; лемма 2.3]).

§ 3. Абстрактная экстраполяционная теорема

В настоящем параграфе мы сформулируем теорему об ограниченности линейного оператора, действующего из достаточно произвольной шкалы банаховых пространств в фиксированное квазибанахово пространство. Результат является следствием общей теории экстраполяции Б. Яверса и М. Мильмана, но для целей последующих параграфов нам удобно этот результат выделить и сформулировать явно. Напомним сначала определение экстраполяционного функтора суммы.

Предположим, что имеется семейство банаховых пространств $\{A_\theta\}_{\theta \in \Theta}$, равномерно вложенных в банахово пространство $\mathcal{A}$. Это означает, что для всех $\theta \in \Theta$ пространство A_θ вложено в $\mathcal{A}$ как векторное пространство и для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от $\theta \in \Theta$, справедливо неравенство

$$\|a\|_{\mathcal{A}} \leq C \|a\|_{A_\theta} \quad \text{для всех } \theta \in \Theta \text{ и } a \in A_\theta.$$

Экстраполяционный функтор суммы $\sum$ ставит в соответствие каждой такой шкале пространств $\{A_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ новое пространство

$$\sum = \sum_{\theta \in \Theta} A_\theta := \left\{ a \in \mathcal{A} : a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ в } \mathcal{A}, \text{ где } a_j \in A_{\theta_j} \text{ и } \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|_{A_{\theta_j}} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|a\|_{\sum} = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|_{A_{\theta_j}},$$

где инфимум берется по всем представлениям элемента $a \in \sum$ в виде $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Пространство $\sum$ является банаховым пространством, вложенным в $\mathcal{A}$, с той же константой C равномерного вложения пространств A_θ в $\mathcal{A}$ (см. работы Б. Яверса и М. Мильмана [2], [3]). Кроме того, можно показать, что если пространства A_θ и $\mathcal{A}$ обладают дополнительно структурой идеального или симметричного пространства, то такой же структурой будет обладать и пространство $\sum$. Естественно, можно определить и пространство взвешенной суммы

$$\sum_{\theta \in \Theta} C(\theta) A_\theta$$

с произвольной положительной функцией $C(\theta)$, если под $C(\theta)A_\theta$ понимать пространство A_θ с новой нормой $\|\cdot\|'_{A_\theta} := C(\theta)\|\cdot\|_{A_\theta}$. При этом достаточно потребовать вложений A_θ в $\mathcal{A}$ с константами C_θ . Докажем теперь экстраполяционную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть пространства X_j , $j \in \mathbb{N}$, банаховы и вложены непрерывно в банахово пространство $\mathcal{A}$, а линейный оператор T действует ограниченно из каждого пространства X_j в фиксированное квазибанахово пространство Y и

$$\|Tx\|_Y \leq C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j. \quad (3.1)$$

Предположим также, что

$$\|x\|_{\mathcal{A}} \leq CK^j C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j,$$

где C – некоторая положительная константа, K – константа из неравенства треугольника пространства Y , а константы C_j те же, что и в (3.1).

Тогда если оператор T действует непрерывно из пространства $\mathcal{A}$ в какое-нибудь топологическое векторное хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$, в которое непрерывно вложено пространство Y , то оператор T действует ограниченно из пространства

$$X := \sum_{j=1}^{\infty} K^j C_j X_j$$

в пространство Y и $\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вложений пространств X_j в пространство $\mathcal{A}$ с константами $CK^j C_j$ соответственно пространство X определено корректно. Пусть $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $x_j \in X_j$ такова, что

$$x \stackrel{\mathcal{A}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} x_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} K^j C_j \|x_j\|_{X_j} < \|x\|_X + \varepsilon.$$

Тогда последовательность $S_n = \sum_{j=1}^n T x_j$ фундаментальна в Y . Действительно,

$$\|S_k - S_n\|_Y \leq \sum_{j=n+1}^k K^{j-n} \|T x_j\|_Y \leq \sum_{j=n+1}^k K^j C_j \|x_j\|_{X_j} \rightarrow 0 \quad \text{при } k, n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, S_n сходится в пространстве Y . При этом поскольку T непрерывен из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, то $S_n = T \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow Tx$ в $\mathcal{B}$. В силу непрерывности вложения $Y \subset \mathcal{B}$ и отделимости $\mathcal{B}$ последовательность S_n сходится в Y именно к Tx . Тогда по лемме 1

$$\|Tx\|_Y \leq \sum_{j=1}^{\infty} K^j \|T x_j\|_Y \leq \sum_{j=1}^{\infty} K^j C_j \|x_j\|_{X_j} \leq \|x\|_X + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X.$$

В теореме 1 необходимо условие непрерывного действия оператора в некоторое объемлющее Y пространство $\mathcal{B}$. При некоторых дополнительных ограничениях на пространство Y и оператор T от этого условия можно избавиться. Как вариант приведем следующую теорему, в которой оператор даже не обязательно должен быть линейным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространства X_j , $j \in \mathbb{N}$, банаховы и вложены непрерывно в банахово пространство $\mathcal{A}$, а оператор T действует ограниченно из

каждого пространства X_j в фиксированное квазибанахово идеальное пространство Y измеримых функций на некотором пространстве с мерой и

$$\|Tx\|_Y \leq C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j. \quad (3.2)$$

Предположим также, что

$$\|x\|_{\mathcal{A}} \leq CK^j C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j,$$

где C – некоторая положительная константа, K – константа из неравенства треугольника пространства Y , а константы C_j те же, что и в (3.2). Пусть, кроме того, для некоторого $B > 0$ оператор T обладает на множестве $\mathcal{T}, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, свойством

$$\text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ в } \mathcal{A}, \quad \text{то } |Tx(t)| \leq B \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i(t)| \text{ для почти всех } t.$$

Тогда для всех $x \in \mathcal{T} \cap X$, где

$$X := \sum_{j=1}^{\infty} K^j C_j X_j,$$

выполняется $\|Tx\|_Y \leq B \|x\|_X$. В частности, если $X \subset \mathcal{T}$, то оператор T действует ограниченно из X в Y с нормой, не превосходящей B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение почти дословно повторяет доказательство теоремы 1. Отличие в том, из фундаментальности последовательности $S_n = \sum_{j=1}^n Tx_j$ теперь не следует сходимость этой последовательности к Tx . Необходимо воспользоваться дополнительным свойством оператора и идеальностью пространства Y , чтобы получить оценку

$$\|Tx\|_Y \leq B \left\| \sum_{j=1}^{\infty} |Tx_j| \right\|_Y \leq B \sum_{j=1}^{\infty} K^j C_j \|x_j\|_{X_j} \leq B \|x\|_X + B\varepsilon,$$

из которой следует все, что нужно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 2 (так же, как в теореме 7 далее) априори не предполагается, что для $x \in \mathcal{T}$ функция Tx конечна почти всюду. Оператор T предполагается определенным на $\mathcal{T}$ со значениями в $\bar{S}$. Но апостериори оказывается, что при $x \in \mathcal{T} \cap X$ значение оператора Tx принадлежит $Y \subset S$.

§ 4. Суммы пространств L_p и $L_{p,1}$

В настоящем параграфе будут вычислены взвешенные суммы пространств L_p и $L_{p,1}$ на отрезке $[0, 1]$. При этом для дальнейшего нам необходимы не только изоморфизмы пространств, но и дополнительная информация о константах их взаимного вложения. Для двух банаховых пространств X и Y равенство

$X = Y$ будет означать изоморфизм, а для обозначения изометрии будет использоваться выражение $X \equiv Y$. Будем говорить, что вложения $A_\theta \subset B_\theta$ равномерны по $\theta \in \Theta$, если с одной и той же константой $C > 0$ для всех $\theta \in \Theta$ и всех $x \in A_\theta$ справедливо $\|x\|_{B_\theta} \leq C\|x\|_{A_\theta}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\Lambda(\psi_\theta)$, $\theta \in \Theta$, – семейство пространств Лоренца, равномерно вложенных в L_1 . Тогда

$$\sum_{\theta \in \Theta} \Lambda(\psi_\theta) \equiv \Lambda(\psi),$$

где

$$\psi(t) = \inf_{\theta \in \Theta} \psi_\theta(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\Sigma := \sum_{\theta \in \Theta} \Lambda(\psi_\theta).$$

Так как по определению пространства Σ

$$\|\chi_A\|_\Sigma \leq \inf_{\theta \in \Theta} \|\chi_A\|_{\Lambda(\psi_\theta)} = \inf_{\theta \in \Theta} \psi_\theta(\mu(A)) = \psi(\mu(A)) = \|\chi_A\|_{\Lambda(\psi)},$$

то в силу экстремального свойства пространства Лоренца

$$\Lambda(\psi) \overset{1}{\subset} \Sigma. \quad (4.1)$$

Далее, из неравенств

$$\psi(t) \leq \psi_\theta(t)$$

следуют вложения

$$\Lambda(\psi_\theta) \overset{1}{\subset} \Lambda(\psi),$$

откуда, используя определение пространства Σ , получаем

$$\Sigma \overset{1}{\subset} \Lambda(\psi).$$

Вместе с противоположным вложением (4.1) это дает нужное совпадение пространств $\Lambda(\psi)$ и Σ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi(q): [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ – возрастающая функция и

$$\varphi(q + e^{-q}) \leq C\varphi(q)$$

для некоторого $C > 0$ и всех $q \geq 1$. Тогда

$$\sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_p \overset{4eC}{\subset} \sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_{p,1} \equiv \Lambda(\psi) \overset{1}{\subset} \sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_p, \quad (4.2)$$

где

$$\psi(t) := \inf_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) t^{1/p}. \quad (4.3)$$

В частности,

$$\sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_p = \sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_{p,1} = \Lambda(\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < r < +\infty$,

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad r' = \frac{r}{r-1}, \quad p' = r' + e^{-r'}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x\|_{p,1} &= \int_0^1 x^*(t) dt^{1/p} = \frac{1}{p} \int_0^1 x^*(t) t^{-1/p'} dt \leq \frac{\|x\|_r}{p} \left(\int_0^1 t^{-r'/p'} dt \right)^{1/r'} \\ &= \frac{\|x\|_r}{p} \left(\frac{p'}{p' - r'} \right)^{1/r'} = \frac{e\|x\|_r}{p} \left(r' + e^{-r'} \right)^{1/r'} \leq 4e\|x\|_r. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу условия на φ

$$\begin{aligned} \varphi(p') L_{p,1} &\stackrel{1}{\supset} 4e\varphi(p') L_r \stackrel{1}{\supset} 4eC\varphi(r') L_r, \\ \sum_{r'>1} \varphi(r') L_r &\stackrel{4eC}{\subset} \sum_{p'>1+e^{-1}} \varphi(p') L_{p,1} \subset \sum_{p'>1} \varphi(p') L_{p,1}. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку $L_{p,1} \stackrel{1}{\subset} L_p$, то

$$\sum_{p'>1} \varphi(p') L_p \stackrel{1}{\supset} \sum_{p'>1} \varphi(p') L_{p,1}.$$

В итоге

$$\sum_{p'>1} \varphi(p') L_p = \sum_{p'>1} \varphi(p') L_{p,1}.$$

Соотношение

$$\sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_{p,1} \equiv \Lambda(\psi)$$

следует из леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функция φ из условия теоремы 3 удовлетворяет существенно более сильному, чем в теореме, условию

$$\varphi(2q) \leq C\varphi(q)$$

(как, например, функция $\varphi(q) = q^\beta$ в следствии 1 далее), то справедливо также соотношение

$$\sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_{p,\infty} = \sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_{p,1} = \Lambda(\psi).$$

Его можно получить из [4; теорема 5], выбирая в качестве банаховой пары (L_1, L_∞) . Пространство $L_{p,\infty}$ (так называемое слабое пространство L_p) определяется нормой

$$\|x\|_{L_{p,\infty}} := \sup_{t \in (0,1]} t^{1/p-1} \int_0^t x^*(t) dt.$$

При этом $L_p \subset L_{p,\infty}$.

Равенство из следующего следствия хорошо известно. Нам, однако, необходима равномерность по параметру β , поэтому мы даем независимое доказательство равенства, отслеживая константы вложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\beta > 0$. Тогда

$$\sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^\beta L_p = \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^\beta L_{p,1} = \Lambda(\psi_\beta),$$

где

$$\psi_\beta(t) = t \log^\beta \frac{e^\beta}{t}.$$

При этом при любом $0 < \beta_0 < \infty$ взаимные вложения пространств равномерны по $\beta \in (0, \beta_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\varphi = \varphi(q) = q^\beta$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и даже условию из замечания 2, так как

$$\varphi(q + e^{-q}) \leq \varphi(2q) = (2q)^\beta = 2^\beta \varphi(q).$$

Вычислим соответствующую функцию ψ из теоремы 3:

$$\psi(t, \beta) = \inf_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^\beta t^{1/p} = t \inf_{x>1} x^\beta t^{-1/x}.$$

При $t < e^{-\beta}$ критическая точка

$$x_0 = \frac{1}{\beta} \log \frac{1}{t}$$

функции $x^\beta t^{-1/x}$ расположена правее единицы и является точкой минимума. Поэтому

$$\psi(t, \beta) = \begin{cases} t \left(\frac{e}{\beta} \right)^\beta \log^\beta \frac{1}{t} & \text{при } t < e^{-\beta}, \\ 1 & \text{при } t \geq e^{-\beta}. \end{cases}$$

Для этой функции справедливы неравенства

$$t \log^\beta \frac{e^\beta}{t} \leq \beta^\beta \psi(t, \beta) \leq e^\beta t \log^\beta \frac{e^\beta}{t}.$$

Поэтому при $\beta \in (0, \beta_0]$

$$\psi(t, \beta) \stackrel{\beta}{\asymp} \psi_\beta(t).$$

В этом случае нормы соответствующих пространств Лоренца эквивалентны с константой, не зависящей от $\beta \in (0, \beta_0]$. Кроме того, для константы вложения $4eC$ из теоремы 3 имеем $4eC \leq 2^{2+\beta_0}e$. Следовательно, все взаимные вложения пространств из доказываемого следствия равномерны на $(0, \beta_0]$.

В следствии 2 в дискретной сумме пространств L_{p_j} под $p_0 = a^0/(a^0 - 1)$ понимается $p_0 = \infty$. Заметим, что если функция $\varphi(q)$ непрерывна в точке $q = 1$, то добавление в непрерывную сумму

$$\sum_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) L_p$$

слагаемого $\varphi(1)L_\infty$ не меняет норму пространства-суммы. Это следует из того, что $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha > 0$, $a > K \geq 1$ и $p_j = a^j/(a^j - 1)$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^\alpha L_{p_j} = \sum_{j=0}^{\infty} K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^\alpha L_{p_j,1} \equiv \Lambda(\varphi_\theta), \quad (4.4)$$

где $\theta = \log_a K$, и

$$c_1 t \log^{\alpha+\theta} \frac{e^{\alpha+\theta}}{t} \leq \varphi_\theta(t) \leq c_2 a^\alpha t \log^{\alpha+\theta} \frac{e^{\alpha+\theta}}{t},$$

а c_1 и c_2 зависят только от α и K , но не зависят от a при $a > K$. При этом взаимные вложения пространств-сумм в (4.4) равномерны по $a > K$. В частности, если положить

$$\psi_\theta(t) = a^\alpha t \log^{\alpha+\theta} \frac{e^{\alpha+\theta}}{t},$$

то при фиксированных $\alpha > 0$ и $K \geq 1$ будут справедливы равномерные по $a > K$ вложения

$$\Lambda(\psi_\theta) \subset \sum_{j=0}^{\infty} K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^\alpha L_{p_j}, \quad \Lambda(\psi_\theta) \subset \sum_{j=0}^{\infty} K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^\alpha L_{p_j,1}. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем выражение

$$K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^\alpha = \left(a^j\right)^{\log_a K} \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^\alpha = \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)^{\alpha+\theta}.$$

По следствию 1

$$a^\alpha \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\alpha+\theta} L_p = a^\alpha \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\alpha+\theta} L_{p,1} = \Lambda(\psi_\theta) \quad (4.6)$$

с равномерными вложениями при $\theta \in (0, 1)$, или, что равносильно, при $a > K$. Далее будем рассуждать только о суммах пространств L_p , так как случай пространств $L_{p,1}$ аналогичен. Из определения суммы пространств непосредственно

следует, что имеет место вложение

$$\sum_{j=0}^{\infty} K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right)^{\alpha} L_{p_j} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right)^{\alpha+\theta} L_{p_j} \stackrel{1}{\subset} \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha+\theta} L_p. \quad (4.7)$$

Покажем, что имеет место и обратное вложение. Выберем для произвольного $p > 1$ такое целое j , что

$$p_{j+1} = \frac{a^{j+1}}{a^{j+1} - 1} < p \leq p_j = \frac{a^j}{a^j - 1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_{j+1}}{p_{j+1} - 1} \right)^{\alpha+\theta} &= (a^{j+1})^{\alpha+\theta} = a^{\alpha+\theta} (a^j)^{\alpha+\theta} \\ &= a^{\alpha+\theta} \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right)^{\alpha+\theta} \leq a^{\alpha+\theta} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha+\theta} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$a^{\alpha+\theta} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha+\theta} \stackrel{1}{\subset} \left(\frac{p_{j+1}}{p_{j+1} - 1} \right)^{\alpha+\theta} L_{p_{j+1}}.$$

Снова пользуясь определением суммы пространств и учитывая, что

$$a^{\theta} = a^{\log_a K} = K,$$

получаем

$$K a^{\alpha} \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha+\theta} L_p \stackrel{1}{\subset} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right)^{\alpha+\theta} L_{p_j} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} K^j \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right)^{\alpha} L_{p_j}. \quad (4.8)$$

Объединяя теперь равенство (4.6) с вложениями (4.7) и (4.8), получаем все утверждения следствия.

§ 5. Обобщение теоремы Яно на случай квазинормированного образа

В настоящем параграфе мы докажем экстраполяционную теорему, обобщающую теорему Яно на случай, когда оператор действует в квазибанахово пространство. Всюду далее под константой K , как и в § 3, подразумевается константа из неравенства треугольника для квазибанахова пространства Y .

ТЕОРЕМА 4. Пусть Y – квазибанахово пространство, непрерывно вложенное в отдельное топологическое векторное пространство $\mathcal{B}$. Предположим, что линейный оператор T для каждого $p > 1$ ограниченно действует из $L_p[0, 1]$ в Y ,

$$\|T\|_{L_p \rightarrow Y} \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha}, \quad \text{где } C, \alpha > 0 \text{ не зависят от } p, \quad (5.1)$$

и, кроме того, T непрерывно действует из $\Lambda(\psi)$ в $\mathcal{B}$, где

$$\psi(t) := t \log^\alpha \frac{b}{t} \exp \left(A \sqrt{\log \log \frac{b}{t}} \right)$$

с некоторыми $A > 2\sqrt{\alpha \log K}$ и $b > e^{A+\alpha+1}$.

Тогда T ограничено действует из $\Lambda(\psi)$ в Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие $b > e^{A+\alpha+1}$ в теореме 4 нужно для того, чтобы функция $\psi(t)$ была вогнута; это условие обеспечивает корректность определения $\Lambda(\psi)$. Кроме того, при фиксированном A и разных b соответствующие пространства $\Lambda(\psi)$ изоморфны. Напротив, изменение параметра A меняет пространство. Чем меньше A , тем шире пространство $\Lambda(\psi)$ и соответствующий результат точнее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $a > K$. Рассмотрим последовательность $p_j = a^j / (a^j - 1)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. По условию оператор T ограничен из L_{p_j} в Y , и согласно теореме 1 оператор будет действовать ограничено с единичной нормой из пространств

$$\sum_{j=0}^{\infty} K^{j+1} C \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right)^\alpha L_{p_j}$$

в Y . При этом суммируемые пространства, как будет легко понять из дальнейших рассуждений, равномерно вложены в пространство $\Lambda(\psi)$, поэтому применение теоремы 1 корректно. Далее, с помощью следствия 2 мы можем заключить, что с некоторой константой C_1 , не зависящей от θ , для всех $\theta \in (0, 1)$ оператор T действует ограничено из пространства $\Lambda(\psi_\theta)$ в Y и

$$\|Tx\|_Y \leq C_1 \|x\|_{\Lambda(\psi_\theta)} \quad \text{для всех } x \in \Lambda(\psi_\theta), \quad (5.2)$$

где

$$\psi_\theta(t) = a^\alpha t \log^{\alpha+\theta} \frac{e^{\alpha+\theta}}{t}, \quad a = K^{1/\theta}.$$

Снова применяя теорему 1, но уже к соотношениям (5.2), получаем, что для любой последовательности $\theta_j \in (0, 1)$ оператор T действует ограничено из пространства

$$\sum_{j=1}^{\infty} K^j \Lambda(\psi_{\theta_j})$$

в Y . С учетом леммы 2 теперь приходим к выводу, что оператор T действует ограничено из пространства $\Lambda(\psi)$ в Y , где

$$\psi(t) = \inf_{j \in \mathbb{N}} K^j \psi_{\theta_j}(t) = \inf_{j \in \mathbb{N}} K^{j+\alpha/\theta_j} t \log^{\alpha+\theta_j} \frac{e^{\alpha+\theta_j}}{t}.$$

Выберем теперь последовательность θ_j специальным образом. Именно, положим $\theta_j = 1/(uj)$, где $u > 1$. В этом случае

$$\psi(t) = \inf_{j \in \mathbb{N}} K^{j+\alpha u j} t \log^{\alpha+1/(uj)} \frac{e^{\alpha+1/(uj)}}{t}.$$

Так как при $t < e^{-\alpha-1}$

$$\log \frac{1}{t} \leq \log \frac{e^{\alpha+1/(uj)}}{t} \leq \log \frac{e^{\alpha+1}}{t} \leq (\alpha+2) \log \frac{1}{t},$$

то

$$\log^{\alpha+1/(uj)} \frac{1}{t} \leq \log^{\alpha+1/(uj)} \frac{e^{\alpha+1/(uj)}}{t} \leq (\alpha+2)^{\alpha+1} \log^{\alpha+1/(uj)} \frac{1}{t}$$

и, следовательно, при $t < e^{-\alpha-1}$

$$\psi(t) \stackrel{t}{\asymp} t \log^{\alpha} \frac{1}{t} \inf_{j \in \mathbb{N}} K^{j+\alpha u j} \log^{1/(uj)} \frac{1}{t}.$$

Для определения функции $\psi(t)$ осталось вычислить

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} K^{j+\alpha u j} \log^{1/(uj)} \frac{1}{t} \quad \text{при } t < e^{-\alpha-1}.$$

Так как при $x \in [j, j+1]$

$$K^{(1+\alpha u)x} \log^{1/(ux)} \frac{1}{t} \geq \frac{1}{K^{1+\alpha u}} K^{(1+\alpha u)(j+1)} \log^{1/(u(j+1))} \frac{1}{t},$$

то

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} K^{j+\alpha u j} \log^{1/(uj)} \frac{1}{t} \stackrel{t}{\asymp} \inf_{x \geq 1} K^{(1+\alpha u)x} \log^{1/(ux)} \frac{1}{t} \quad \text{при } t < e^{-\alpha-1}.$$

Поэтому достаточно вычислить

$$\inf_{x \geq 1} K^{(1+\alpha u)x} \log^{1/(ux)} \frac{1}{t} = \inf_{0 < y \leq 1/u} L^{1/y} s^y, \quad \text{где } s = \log \frac{1}{t} > \alpha+1, \quad L = K^{\alpha+1/u}.$$

Исследуем функцию $f(y) = L^{1/y} s^y$ на экстремум:

$$f'(y) = L^{1/y} s^y \left(\log s - \frac{\log L}{y^2} \right),$$

следовательно, точка минимума – это $y_0 = \sqrt{\log L / \log s}$. При $s \geq K^{u+\alpha u^2}$, или, что равносильно, при $t \leq e^{-K^{u+\alpha u^2}}$, точка минимума y_0 принадлежит промежутку $(0, 1/u]$. Значит,

$$\inf_{0 < y \leq 1/u} f(y) = f(y_0) = L^{\sqrt{\log s / \log L}} s^{\sqrt{\log L / \log s}} = e^{2\sqrt{\log L \log s}}$$

и

$$\psi(t) \stackrel{t}{\asymp} t \log^{\alpha} \frac{1}{t} \cdot e^{2\sqrt{(\log L) \log \log(1/t)}} \stackrel{t}{\asymp} t \log^{\alpha} \frac{b}{t} \cdot e^{2\sqrt{(\log L) \log \log(b/t)}}$$

при любом $b > 0$ и достаточно малом $t < t_b$. Так как $u > 1$ произвольно, то $A = 2\sqrt{\log L}$ может быть любым числом, большим $2\sqrt{\alpha \log K}$. Следовательно, для любого $A > 2\sqrt{\alpha \log K}$ оператор T действует ограниченно из $\Lambda(\psi)$ в Y , где

$$\psi(t) := t \log^{\alpha} \frac{b}{t} \cdot \exp \left(A \sqrt{\log \log \frac{b}{t}} \right), \quad b > e^{A+\alpha+1}.$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как легко усмотреть из доказательства теоремы 4, условие (5.1) можно заменить на кажущееся более слабым условие

$$\|T\|_{L_{p,1} \rightarrow Y} \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha. \quad (5.3)$$

Однако в силу вложений пространств $L_{p,1} \subset L_p \subset L_{r,1}$, $p > r$, условия (5.1) и (5.3) эквивалентны (см. рассуждение в доказательстве теоремы 3). В формулировке теоремы 4 выбрано условие (5.1) только потому, что пространства L_p используются во многих разделах математики, в отличие от более специальных пространств $L_{p,1}$. То же самое можно сказать о формулировках следующих далее теорем 5, 8 и 9.

ТЕОРЕМА 5. Пусть T – оператор, определенный на множестве $\mathcal{T}$ таком, что $\bigcup_{p>1} L_p \subset \mathcal{T} \subset L_1$, T принимает значения в $\bar{S}$ и удовлетворяет на $\mathcal{T}$ с некоторой константой $B > 0$ условию

$$\text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ в } L_1, \quad \text{то } |Tx(t)| \leq B \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i(t)| \text{ для почти всех } t \in [0, 1].$$

Предположим также, что для некоторого квазибанахова идеального пространства Y и каждого $p > 1$

$$\|T\|_{L_p \rightarrow Y} \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha, \quad \text{где } C, \alpha > 0 \text{ не зависят от } p.$$

Тогда для каждого $A > 2\sqrt{\alpha \log K}$ существует $D > 0$ такое, что

$$\|Tx\|_Y \leq D \|x\|_{\Lambda(\psi)} \quad \text{для всех } x \in \mathcal{T} \cap \Lambda(\psi),$$

где

$$\psi(t) := t \log^\alpha \frac{b}{t} \cdot \exp \left(A \sqrt{\log \log \frac{b}{t}} \right), \quad b > e^{A+\alpha+1}.$$

В частности, если $\Lambda(\psi) \subset \mathcal{T}$, то оператор T действует ограниченно из пространства $\Lambda(\psi)$ в Y .

Рассуждения точно такие же, как в доказательстве теоремы 4, но вместо теоремы 1 нужно использовать теорему 2.

§ 6. Экстраполяция операторов, действующих в логарифмически выпуклое пространство

В настоящем параграфе рассматриваются операторы, действующие в логарифмически выпуклое пространство, т.е. в квазибанахово пространство, в котором с некоторой константой $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\|_Y \leq \gamma \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \log j) \|x_j\|_Y. \quad (6.1)$$

В этом случае можно получить более точные результаты. В то же время класс логарифмически выпуклых пространств охватывает такое важное пространство, как $L_{1,\infty}$ (так называемое слабое пространство L_1); следовательно, экстраполяционные теоремы этого параграфа могут быть применены к оценкам слабого типа. Совершенно аналогично теоремам 1 и 2 доказываются следующие теоремы. Модификация соответствующих доказательств очевидна, и мы это опускаем.

ТЕОРЕМА 6. Пусть пространства X_j , $j \in \mathbb{N}$, банаховы и вложены непрерывно в банахово пространство $\mathcal{A}$, а линейный оператор T действует ограниченно из каждого пространства X_j в фиксированное логарифмически выпуклое пространство Y и

$$\|Tx\|_Y \leq C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j. \quad (6.2)$$

Предположим также, что

$$\|x\|_{\mathcal{A}} \leq C(1 + \log j)C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j,$$

где C – некоторая положительная константа, а константы C_j те же, что и в (6.2).

Тогда если оператор T действует непрерывно из пространства $\mathcal{A}$ в какое-нибудь топологическое векторное хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$, в которое непрерывно вложено пространство Y , то оператор T действует ограниченно из пространства

$$X := \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \log j)C_j X_j$$

в пространство Y и $\|Tx\|_Y \leq \gamma \|x\|_X$ для всех $x \in X$, где γ – константа из определения (6.1) логарифмически выпуклого пространства.

ТЕОРЕМА 7. Пусть пространства X_j , $j \in \mathbb{N}$, банаховы и вложены непрерывно в банахово пространство $\mathcal{A}$, а оператор T действует ограниченно из каждого пространства X_j в фиксированное логарифмически выпуклое идеальное пространство Y измеримых функций на некотором пространстве с мерой и

$$\|Tx\|_Y \leq C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j. \quad (6.3)$$

Предположим также, что

$$\|x\|_{\mathcal{A}} \leq C(1 + \log j)C_j \|x\|_{X_j} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N} \text{ и } x \in X_j,$$

где C – некоторая положительная константа, а константы C_j те же, что и в (6.3). Пусть, кроме этого, для некоторого $B > 0$ оператор T обладает на множестве $\mathcal{T}$, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, свойством

$$\text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ в } \mathcal{A}, \quad \text{то } |Tx(t)| \leq B \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i(t)| \text{ для почти всех } t.$$

Тогда для всех $x \in \mathcal{T} \cap X$, где

$$X := \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \log j) C_j X_j,$$

выполняется $\|Tx\|_Y \leq \gamma B \|x\|_X$, а γ – константа из определения (6.1) логарифмически выпуклого пространства. В частности, если $X \subset \mathcal{T}$, то оператор T действует ограниченно из X в Y с нормой, не превосходящей γB .

Чтобы перейти к операторам, действующим из шкалы пространств L_p , докажем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha} \left(1 + \log \log \frac{ep}{p-1} \right) L_p \\ &= \sum_{p>1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\alpha} \left(1 + \log \log \frac{ep}{p-1} \right) L_{p,1} = \Lambda(\psi), \end{aligned}$$

где

$$\psi(t) \asymp t \log^{\alpha} \frac{e}{t} \cdot \log \log \log \frac{C}{t}$$

при некотором $C > e^e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\varphi(q) := q^{\alpha} \log(e \log eq)$ удовлетворяет условию теоремы 3, так как $\varphi(q)$ возрастает и

$$\begin{aligned} \varphi(q + e^{-q}) &= (q + e^{-q})^{\alpha} \log[e \log(e(q + e^{-q}))] \\ &\leq (q + 1)^{\alpha} \log[e \log(e(q + 1))] \leq 2^{\alpha} q^{\alpha} \log(e \log(eq)^2) \\ &\leq 2^{\alpha} q^{\alpha} \log(e \log(eq))^2 \leq 2^{\alpha+1} q^{\alpha} \log(e \log(eq)) = 2^{\alpha+1} \varphi(q). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 3

$$\sum_{p>1} \varphi(q) L_p = \sum_{p>1} \varphi(q) L_{p,1} = \Lambda(\psi),$$

где $q = p/(p-1)$ и

$$\psi(t) = \inf_{p>1} \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) t^{1/p} = \inf_{q>1} \varphi(q) t^{1-1/q} = t \cdot \inf_{q>1} q^{\alpha} (1 + \log \log eq) t^{-1/q}.$$

Чтобы вычислить инфимум, исследуем функцию

$$f(q) = q^{\alpha} (1 + \log \log eq) t^{-1/q}$$

на экстремум. Вычислим f' :

$$\begin{aligned} f'(q) &= \alpha q^{\alpha-1} (1 + \log \log eq) t^{-1/q} \\ &+ q^{\alpha} \cdot \frac{1}{q \log eq} t^{-1/q} - q^{\alpha} (1 + \log \log eq) \cdot \frac{t^{-1/q} \log \frac{1}{t}}{q^2} \\ &= t^{-1/q} q^{\alpha-1} \left(\alpha \log(e \log eq) + \frac{1}{\log eq} - \frac{\log(e \log eq) \cdot \log \frac{1}{t}}{q} \right), \end{aligned}$$

и знак $f'(q)$ совпадает со знаком выражения

$$\alpha \log(e \log eq) + \frac{1}{\log eq} - \frac{\log(e \log eq) \cdot \log \frac{1}{t}}{q}.$$

Следовательно, минимум функции $f(q)$ при достаточно малом t ($\log(1/t) > \alpha + 1 \iff t < e^{-\alpha-1}$) достигается при q_0 таким, что

$$\log \frac{1}{t} = \alpha q_0 + \frac{q_0}{\log eq_0 \cdot \log(e \log eq_0)}.$$

При этом $t^{-1/q_0} \in [e^\alpha, e^{\alpha+1}]$, т.е. при всех t множитель t^{-1/q_0} в выражении для

$$f(q_0) = t^{-1/q_0} \cdot q_0^\alpha \cdot \log(e \log eq_0)$$

остаётся ограниченным. Также для q_0 выполняются неравенства

$$\frac{1}{\alpha+1} \log \frac{1}{t} \leq q_0 \leq \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{t},$$

следовательно, $q_0^\alpha \asymp \log^\alpha \frac{1}{t}$.

Остается дать оценку для множителя $\log(e(\log eq_0))$ в выражении для $f(q_0)$.

Поскольку

$$q_0 \in \left[\frac{1}{\alpha+1} \log \frac{1}{t}, \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{t} \right],$$

то

$$\log(e \log eq) = 1 + \log \left(1 + \log \left(c \log \frac{1}{t} \right) \right),$$

где $c \in [1/(\alpha+1), 1/\alpha]$. Но

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \log \left(1 + \log \left(\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{t} \right) \right)}{1 + \log \left(1 + \log \left(\frac{1}{\alpha+1} \log \frac{1}{t} \right) \right)} = 1,$$

поэтому

$$f(q_0) \asymp \log^\alpha \frac{e}{t} \cdot \left(1 + \log \left(1 + \log \frac{1}{\alpha} + \log \log \frac{1}{t} \right) \right)$$

и

$$\psi(t) \asymp t \log^\alpha \frac{e}{t} \cdot \log \log \log \frac{C}{t}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} & \sum_{q_n=e^{n-1}, p_n=q_n/(q_n-1), n \in \mathbb{N}} q_n^\alpha (1 + \log n) L_{p_n} \\ &= \sum_{q_n=e^{n-1}, p_n=q_n/(q_n-1), n \in \mathbb{N}} q_n^\alpha (1 + \log n) L_{p_n,1} = \Lambda(\psi), \end{aligned}$$

где

$$\psi(t) \asymp t \log^\alpha \frac{e}{t} \cdot \log \log \log \frac{C}{t}$$

при некотором $C > e^e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать соотношение только для пространств L_p , так как доказательство для $L_{p,1}$ аналогично. При $q \in [e^{n-1}, e^n]$

$$q^\alpha(1 + \log \log eq) \geq e^{\alpha(n-1)}(1 + \log n) \geq \frac{e^{-\alpha}}{2}(e^n)^\alpha(1 + \log(n+1)),$$

и, следовательно, при $p = q/(q-1)$

$$q^\alpha(1 + \log \log eq)L_p \stackrel{2e^\alpha}{\subset} (e^n)^\alpha(1 + \log(n+1))L_{p_{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{q>1} q^\alpha(1 + \log \log eq)L_p \stackrel{2e^\alpha}{\subset} \sum_{q_n=e^{n-1}, p_n=q_n/(q_n-1), n \in \mathbb{N}} q_n^\alpha(1 + \log n)L_{p_n}.$$

Так как обратное включение очевидно, то по предложению

$$\sum_{q_n=e^{n-1}, p_n=q_n/(q_n-1), n \in \mathbb{N}} q_n^\alpha(1 + \log n)L_{p_n} = \Lambda(\psi)$$

с нужной $\psi(t)$.

Из теорем 6 и 7 с помощью следствия 3 очевидным способом получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 8. Пусть Y – логарифмически выпуклое пространство, непрерывно вложенное в некоторое топологическое векторное хаусдорфово пространство $\mathcal{B}$, а T – линейный оператор, действующий непрерывно из пространства $\Lambda(\psi)$,

$$\psi(t) \stackrel{t}{\asymp} t \log^\alpha \frac{b}{t} \cdot \log \log \log \frac{b}{t}, \quad b > e^e,$$

в $\mathcal{B}$.

Тогда если при всех $p > 1$ оператор T действует из L_p в Y с нормой

$$\|T\|_{L_p \rightarrow Y} \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha,$$

то T действует ограниченно из $\Lambda(\psi)$ в Y .

ТЕОРЕМА 9. Пусть Y – логарифмически выпуклое идеальное пространство, $Y \subset S$, T – оператор, определенный на $\Lambda(\psi)$,

$$\psi(t) \stackrel{t}{\asymp} t \log^\alpha \frac{b}{t} \cdot \log \log \log \frac{b}{t}, \quad b > e^e,$$

принимаяющий значения в $\overline{S}$ и удовлетворяющий для некоторого $B > 0$ условию

$$\text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ в } \Lambda(\psi), \text{ то } |Tx(t)| \leq B \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i(t)| \text{ для почти всех } t \in [0, 1].$$

Тогда если при всех $p > 1$ оператор T действует из L_p в Y с нормой

$$\|T\|_{L_p \rightarrow Y} \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha,$$

то T действует ограничено из $\Lambda(\psi)$ в Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ из теорем 8 и 9 совпадает с пространством Орлича L_M (см. [23; теорема 2]), построенным по выпуклой функции

$$M(u) \sim u \log^\alpha u \cdot \log \log \log u.$$

Это пространство обозначается также через $L(\log L)^\alpha \log \log \log L$. При $\alpha = 1$ это пространство известно как пространство Антонова. Для каждой функции из этого пространства ее тригонометрический ряд Фурье сходится почти всюду (см. [24]). По вопросу сходимости ряда Фурье почти всюду см. [25]–[27]. В [27; определение 2.1] предложена специальная конструкция пространства, использующая разложение измеримой функции в сумму ограниченных функций и напоминающая конструкцию экстраполяционной суммы из следствия 3. При этом в [27] не используются пространства L_p или $L_{p,1}$, но при соответствующем выборе параметров, как и в следствии 3, получается пространство $L \log L \log \log \log L$ (см. [27; следствие 2.1]).

§ 7. Примеры операторов и сравнение с известными результатами

В настоящем параграфе на примере теоремы 9 обсуждаются вопросы области применимости, точности и новизны результатов настоящей работы. Относительно результатов из § 5 отметим только, что автору не известны работы, в которых рассматривались бы вопросы экстраполяции операторов из какой-либо шкалы в случае, когда образом является произвольное квазибаначово пространство без специальных ограничений на квазинорму.

В работах [28]–[30] доказаны теоремы, близкие по форме и смыслу к теореме 9, однако имеются некоторые принципиальные отличия, которые требуют пояснений. Во-первых, необходимо отметить, что теоремы из работ [28]–[30] имеют следующее неоспоримое достоинство: они применимы к операторам, имеющим лишь так называемый ограниченный слабый тип (restricted weak type), т.е. к операторам, для которых квазинорма образа контролируется только на характеристических функциях. Это позволяет применить соответствующие экстраполяционные результаты к знаменитой проблеме (идущей от Н. Н. Лузина) об описании класса функций со сходящимся почти всюду рядом Фурье. Во-вторых, в этих работах рассматриваются и пространства функций на множествах неограниченной меры. В то же время в упомянутых работах имеются и ограничения на рассматриваемые операторы, которых нет в настоящей работе автора. Самым существенным из этих ограничений является требование на образ оператора. Именно, в упомянутых работах предполагается, что оператор действует из L_p в пространство $L_{p,\infty}$, которое рассматривается

с квазинормой

$$\|x\|'_{L_{p,\infty}} := \sup_{t \in (0,1]} t^{1/p} x^*(t),$$

и это важно для соответствующих рассуждений. В настоящей работе требуется лишь, чтобы оператор действовал из L_p в общее для всех p пространство Y . Даже в случае $Y = L_{1,\infty}$ разница очевидна, и уже к простейшему одномерному оператору T вида

$$Tx(t) := \frac{1}{t} \int_0^1 x(s) \log s \, ds$$

теоремы из упомянутых работ формально неприменимы, а теорема 9 дает хотя и не точный, но верный результат (в этом примере точный результат легко получить и без теоремы 9). Немного более сложный пример дает оператор

$$Tx(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1} \int_{\Delta_k} x(s) \, ds \cdot f_k(t),$$

где Δ_k – попарно не пересекающиеся подмножества отрезка $[0, 1]$ такие, что $\mu(\Delta_k) = \mu_k$ и $\sum_k \mu_k = 1$, а $f_k \in L_{1,\infty}$. Если

$$\|f_k\|_{L_{1,\infty}} \leq \frac{(1 - \log(\sum_{i=k}^{\infty} \mu_i)) \mu_k}{1 + \log k},$$

то

$$\|Tx\|_{L_{1,\infty}} \leq C \frac{p}{p-1} \|x\|_p, \quad (7.1)$$

и к такому оператору мы можем применить теорему 9.

Обоснуем неравенство (7.1). Для этого заметим сначала, что при $q > 1$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \log \left(\sum_{i=k}^{\infty} \mu_i \right) \right)^q \mu_k \right)^{1/q} \leq \left(\int_0^1 \log^q \frac{e}{t} \, dt \right)^{1/q} \leq Cq$$

согласно известному неравенству для гамма-функции. Далее, используя логарифмическую выпуклость пространства $L_{1,\infty}$ и дважды применяя неравенство Гёльдера (для последовательностей и для интегралов), получим

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{L_{1,\infty}} &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1} \int_{\Delta_k} |x(s)| \, ds \cdot \|f_k\|_{L_{1,\infty}} (1 + \log k) \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1} \int_{\Delta_k} |x(s)| \, ds \cdot \left(1 - \log \left(\sum_{i=k}^{\infty} \mu_i \right) \right) \mu_k \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k^{-1} \int_{\Delta_k} |x(s)| \, ds \right)^p \mu_k \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \log \left(\sum_{i=k}^{\infty} \mu_i \right) \right)^q \mu_k \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} |x(s)|^p \, ds \right)^{1/p} q = C \frac{p}{p-1} \|x\|_p, \end{aligned}$$

и неравенство (7.1) доказано.

Близкий к теореме 9 результат сформулирован в конце работы [31]. Отличие в том, что в [31] требуется, чтобы оператор действовал с нужным ростом норм из $L_{p,\infty}$ в Y .

Из условий теоремы 9 в случае $Y = L_{1,\infty}$ (как и из условий близких теорем из упомянутых работ) следует, что для рассматриваемого оператора и произвольного множества $A \subset [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\|T\chi_A\|_{L_{1,\infty}} \leq C \|\chi_A\|_{\Lambda(\psi)}, \quad (7.2)$$

где $\psi(t) \asymp t \log^\alpha(b/t)$. Это следует из оценки

$$\|T\chi_A\|_{L_{1,\infty}} \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha \|\chi_A\|_p,$$

в которой нужно перейти к инфимуму по $p > 1$ и воспользоваться результатами вычислений из доказательства следствия 1. Возникает естественный вопрос: какие оценки на норму $\|Tx\|_{L_{1,\infty}}$ можно получить для произвольной функции x , используя оценку (7.2) для характеристических функций и какие-нибудь дополнительные условия на оператор T ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала более общую ситуацию.

Для краткости запись $x \leq y$ для функций $x, y \in \bar{S}$ будет означать, что $x(t) \leq y(t)$ почти всюду на $[0, 1]$. Несложно проверяется следующее утверждение (ср. [18; следствие леммы 5.2]).

ТЕОРЕМА 10. Пусть Y – банахово идеальное пространство, $Y \subset S$, а $\Lambda(\psi)$ – произвольное пространство Лоренца.

Тогда любой оператор, определенный на $\Lambda(\psi)$, принимающий значения в $\bar{S}$ и удовлетворяющий следующим свойствам:

- 1) если $|x| \leq |y| \in \Lambda(\psi)$, то $|Tx| \leq |Ty|$;
- 2) если $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ в $\Lambda(\psi)$, то $|Tx| \leq C \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i|$, $C > 0$;
- 3) $\sup_{A \subset [0,1]} \frac{\|T\chi_A\|_Y}{\psi(\mu A)} < \infty$;

будет ограничено действовать из $\Lambda(\psi)$ в Y .

Оказывается, в теореме 10 нельзя вместо банахова пространства Y поставить никакое квазибанахово ненормируемое пространство. В следующей теореме через $\mathcal{P}$ обозначено множество всех конечнозначных функций, т.е. функций вида

$$x = x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(t),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \subset [0, 1]$. Через μA обозначаем меру Лебега множества A .

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\psi(t)$ – возрастающая непрерывная вогнутая функция на $[0, 1]$, $\psi(0) = 0$, пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ не совпадает с L_1 , а Y – квазибанахово ненормируемое идеальное пространство, $Y \subset S$.

Тогда существует оператор, определенный на L_1 , принимающий значения в $\bar{S}_+$ и удовлетворяющий следующим свойствам:

- 1) если $|x| \leq |y| \in L_1$, то $Tx \leq Ty$;

- 2) если $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ в L_1 , то $Tx \leq \sum_{i=1}^{\infty} Tx_i$;
 3) $\sup_{A \subset [0,1]} \frac{\|T\chi_A\|_Y}{\psi(\mu A)} < \infty$;
 4) $\sup_{x \in \mathcal{D}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_{\Lambda(\psi)}} = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться следующим легко проверяемым свойством квазибанахова пространства: если Y ненормируемо, то существуют последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_0 = 1$, положительных вещественных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ и элементов пространства Y $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|f_i\|_Y = 1$, такие, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \alpha_i f_i \right\|_Y \geq k \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \alpha_i \right). \quad (7.3)$$

Кроме того, поскольку Y – идеальное пространство, то можно считать, что $f_i \geq 0$.

Так как $\Lambda(\psi) \neq L_1$ и $\Lambda(\psi) \neq L_{\infty}$ (по условию ψ непрерывна), то найдется последовательность положительных чисел $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_j < 1,$$

и для всех $j \geq 2$ выполнены условия

$$\psi(\mu_j) \leq \frac{\psi(\mu_{j-1})}{(2K)^j}, \quad (7.4)$$

$$\frac{\mu_j}{\psi(\mu_j)} \leq \frac{\mu_{j-1}}{\psi(\mu_{j-1})(2K)^j}, \quad (7.5)$$

где через K обозначена константа из неравенства треугольника для Y .

Пусть теперь $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность дизъюнктивных подмножеств отрезка $[0, 1]$ таких, что $\mu(E_i) = \mu_i$, где последовательность $\{\mu_i\}$ удовлетворяет условиям (7.4) и (7.5). Пусть также неотрицательные $f_i \in Y$, $\|f_i\|_Y = 1$, удовлетворяют условию (7.3). Тогда оператор T ,

$$Tx := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi(\mu_i)}{\mu_i} \int_{E_i} |x(t)| dt \cdot f_i,$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Свойства 1) и 2) очевидны. Рассмотрим функцию

$$x(t) := \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{\alpha_i}{\psi(\mu_i)} \cdot \chi_{E_i}(t).$$

Тогда

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} \leq \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{\alpha_i}{\psi(\mu_i)} \cdot \psi(\mu_i) = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \alpha_i,$$

но

$$\|Tx\|_Y = \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \alpha_i f_i \right\|_Y \geq k \left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \alpha_i \right),$$

откуда следует свойство 4). Проверим теперь свойство 3).

Пусть $A \subset [0, 1]$ и $\mu := \mu(A)$. Тогда или $\mu > \mu_1$, или существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu \in [\mu_{j+1}, \mu_j]$. В первом случае ($\mu > \mu_1$), используя лемму 1 и свойство (7.4), получим

$$\begin{aligned} \|T\chi_A\|_Y &\leq \sum_{i=1}^{\infty} K^i \left\| \frac{\psi(\mu_i)}{\mu_i} \int_{E_i} dt \cdot f_i \right\|_Y \leq \sum_{i=1}^{\infty} K^i \psi(\mu_i) \\ &\leq \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} \psi(\mu_{i-1}) + K \psi(\mu_1) \leq (K+1) \psi(\mu). \end{aligned}$$

Если же $\mu \in [\mu_{j+1}, \mu_j]$ при некотором $j \in \mathbb{N}$, то оценим $\|T\chi_A\|$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|T\chi_A\|_Y &\leq \sum_{i=j+2}^{\infty} K^i \left\| \frac{\psi(\mu_i)}{\mu_i} \int_{E_i} dt \cdot f_i \right\|_Y + K \left\| \frac{\psi(\mu_{j+1})}{\mu_{j+1}} \int_{E_{j+1}} dt \cdot f_{j+1} \right\|_Y \\ &\quad + K^2 \left\| \frac{\psi(\mu_j)}{\mu_j} \int_{E_j} \chi_A dt \cdot f_j \right\|_Y + \sum_{i=1}^{j-1} K^{i+2} \left\| \frac{\psi(\mu_i)}{\mu_i} \int_{E_i} \chi_A dt \cdot f_i \right\|_Y \\ &\leq \sum_{i=j+2}^{\infty} K^i \psi(\mu_i) + K \psi(\mu_{j+1}) + K^2 \frac{\psi(\mu_j)}{\mu_j} \cdot \mu + \sum_{i=1}^{j-1} K^{i+2} \frac{\psi(\mu_i)}{\mu_i} \cdot \mu. \end{aligned}$$

Далее используем неравенства $\mu_{j+1} \leq \mu \leq \mu_j$ и свойства (7.4) и (7.5):

$$\begin{aligned} \|T\chi_A\|_Y &\leq \sum_{i=j+2}^{\infty} 2^{-i} \psi(\mu_{i-1}) + K \psi(\mu) + K^2 \frac{\psi(\mu)}{\mu} \cdot \mu + K \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\psi(\mu_{i+1})}{2^{i+1} \mu_{i+1}} \cdot \mu \\ &\leq \left(\frac{1}{4} + K + K^2 + \frac{K}{2} \right) \psi(\mu). \end{aligned}$$

Свойство 3) установлено, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В известной работе [32] доказано, что любой оператор вида $Tx = \sup_k |y_k * x|$, где $y_k \in L_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющий для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ оценке

$$\|T\chi_A\|_{L_{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq C \|\chi_A\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

будет действовать ограниченно из L_1 в $L_{1,\infty}$. Аналогичный результат, конечно, верен и в случае пространств функций на отрезке. В [33] приведен пример сублинейного трансляционно-инвариантного оператора, определенного на $L_1[0, 1]$, для которого, напротив, имеет место оценка слабого типа на характеристических функциях, но который не ограничен из L_1 в $L_{1,\infty}$. Из этого примера с помощью несложных рассуждений можно получить оператор, удовлетворяющий аналогичным свойствам при отображении из $L \log L$ в $L_{1,\infty}$, где через $L \log L$ обозначено пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ с $\psi(t) = t \log(e/t)$. Пример сублинейного оператора, который ограничен на характеристических функциях из $L \log L$ в $L_{1,\infty}$, но не ограничен на ступенчатых, приведен также в [34] (без доказательства и со ссылкой на личное сообщение С. В. Конягина). Идея примера из [34] использовалась в доказательстве теоремы 11.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Убирая модули под интегралом в определении оператора T из доказательства теоремы 11 и рассматривая сумму только до конечного n , получаем последовательность конечномерных линейных операторов, равномерно ограниченных на характеристических функциях, но не являющихся таковыми на функциях из $\mathcal{P}$. Причем природа пространства Y уже не важна, это может быть совершенно произвольное квазибанахово ненормируемое пространство.

Из теоремы 11 следует, в частности, что оценки (7.2) недостаточно для ограниченности сублинейного и монотонного оператора T из $\Lambda(\psi)$ в $L_{1,\infty}$. Конечно, при достаточно сильных дополнительных ограничениях на оператор (например, когда оператор конечномерен или дизъюнктен) оценка (7.2) распространяется на все функции из $\Lambda(\psi)$. Но несколько более слабую оценку можно получить и без дополнительных ограничений.

ТЕОРЕМА 12. *Предположим, что $\psi(t)$ и $\psi_1(t) := \psi(t) \cdot \log \log(b/t)$, $b > 0$, – возрастающие вогнутые функции на $[0, 1]$, а Y – логарифмически выпуклое идеальное пространство, $Y \subset S$.*

Тогда любой оператор, определенный на $\Lambda(\psi_1)$, принимающий значения в $\bar{S}$ и удовлетворяющий следующим свойствам:

- 1) *если $|x| \leq |y| \in \Lambda(\psi_1)$, то $|Tx| \leq |Ty|$;*
- 2) *если $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ в $\Lambda(\psi_1)$, то $|Tx| \leq C \sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i|$, $C > 0$;*
- 3) $\sup_{A \subset [0,1]} \frac{\|T\chi_A\|_Y}{\psi(\mu A)} < \infty$;

будет ограничено действовать из $\Lambda(\psi_1)$ в Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала функцию $x \in \Lambda(\psi_1)$ вида

$$x = x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k}(t), \quad (7.6)$$

где $c_k \geq 0$, $\mu(\Delta_k) = 2^{-k+1}$ и $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда из свойства 2) и логарифмической выпуклости пространства Y следует

$$\|Tx\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k |T\chi_{\Delta_k}| \right\|_Y \leq C \sum_{k=1}^{\infty} c_k \|T\chi_{\Delta_k}\|_Y \cdot (1 + \log k),$$

откуда, используя свойство 3) и определение нормы в пространстве Лоренца $\Lambda(\psi_1)$, приходим к оценке

$$\|Tx\|_Y \leq C \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi(2^{-k+1}) \cdot \left(1 + \log \log \frac{2}{2^{-k+1}} \right) \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\|_{\Lambda(\psi_1)}.$$

Для произвольной функции $x_1 \in \Lambda(\psi_1)$ существует функция x вида (7.6) такая, что $|x_1(t)| \leq x(t)$ и $x^*(2t) \leq x_1^*(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда из свойства 1) и ограниченности оператора растяжения в симметричном пространстве (см. [18; гл. II, теорема 4.4]) следует

$$\|Tx_1\|_Y \leq \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_{\Lambda(\psi_1)} \leq 2C \|x_1\|_{\Lambda(\psi_1)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При некоторых дополнительных ограничениях на оператор теорема 12 следует из [35; теорема 2.4], где рассматривается случай произвольного квазибанахова образа.

Итак, ослабляя условия теоремы 9 до условия

$$\|T\chi_A\|_Y \leq C \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha \|\chi_A\|_p,$$

что равносильно неравенству (7.1) при $\psi(t) \asymp t \log^\alpha(b/t)$, мы также можем получить результат об ограниченности оператора из некоторого пространства Лоренца в Y . Однако, сравнивая заключения теорем 9 и 12, мы видим, что в теореме 9 получено пространство $L(\log L)^\alpha \log \log \log L$, а в теореме 12 – только более узкое пространство $L(\log L)^\alpha \log \log L$. В [35; следствие 2.3] показано, что если сублинейный оператор T приближается в некотором специальном смысле (ε, δ) -атолическими операторами $((\varepsilon, \delta)$ -atomic approximable operator), то из условия (7.1) при $\psi(t) \asymp t \log(b/t)$ все-таки можно получить ограниченность оператора из $L \log L \log \log \log L$ в Y . Смысл же теоремы 9 в том, что в ней не требуется никаких дополнительных ограничений на оператор, а используется только информация о его поведении в шкале L_p .

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, а также С. В. Асташкину, С. Я. Новикову, Е. М. Семёнову и Ф. А. Сукочеву за консультации по теме статьи.

Список литературы

- [1] Sh. Yano, “Notes on Fourier analysis (XXIX): An extrapolation theorem”, *J. Math. Soc. Japan*, **3**:2 (1951), 296–305.
- [2] B. Jawerth, M. Milman, *Extrapolation theory with applications*, Mem. Amer. Math. Soc., **89**, no. 440, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, iv+82 pp.
- [3] B. Jawerth, M. Milman, “New results and applications of extrapolation theory”, *Interpolation spaces and related topics* (Haifa, 1990), Israel Math. Conf. Proc., **5**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1992, 81–105.
- [4] M. Milman, *Extrapolation and optimal decompositions with applications to analysis*, Lecture Notes in Math., **1580**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, xii+162 pp.
- [5] G. E. Karadzhov, M. Milman, “Extrapolation theory: new results and applications”, *J. Approx. Theory*, **133**:1 (2005), 38–99.
- [6] Е. И. Бережной, “Точная теорема экстраполяции для пространств Лоренца”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:3 (2013), 520–535; англ. пер.: E. I. Berezhnoi, “A sharp extrapolation theorem for Lorentz spaces”, *Siberian Math. J.*, **54**:3 (2013), 406–418.
- [7] Е. И. Бережной, “Можно ли усилить экстраполяционную теорему Яно?”, *Функц. анализ и его прил.*, **49**:2 (2015), 82–85; англ. пер.: E. I. Berezhnoi, “Can Yano’s extrapolation theorem be strengthened?”, *Funct. Anal. Appl.*, **49**:2 (2015), 145–147.
- [8] Е. И. Бережной, А. А. Перфильев, “Точная теорема экстраполяции для операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:3 (2000), 66–68; англ. пер.: E. I. Berezhnoi, A. A. Perfil’ev, “A sharp extrapolation theorem for operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **34**:3 (2000), 211–213.
- [9] С. В. Асташкин, “Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p -пространств”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 73–77; англ. пер.: S. V. Astashkin,

- “Some new extrapolation estimates for the scale of L_p -spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 221–224.
- [10] С. В. Асташкин, “Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространств”, *Матем. сб.*, **194**:6 (2003), 23–42; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Extrapolation properties of the scale of L_p -spaces”, *Sb. Math.*, **194**:6 (2003), 813–832.
- [11] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, “Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, “близких” к L_∞ ”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:5 (2006), 974–992; англ. пер.: S. V. Astashkin, K. V. Lykov, “Extrapolatory description for the Lorentz and Marcinkiewicz spaces “close” to L_∞ ”, *Siberian Math. J.*, **47**:5 (2006), 797–812.
- [12] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, “Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:2 (2009), 250–266; англ. пер.: S. V. Astashkin, K. V. Lykov, “Strong extrapolation spaces and interpolation”, *Siberian Math. J.*, **50**:2 (2009), 199–213.
- [13] S. V. Astashkin, K. V. Lykov, M. Mastylo, “On extrapolation of rearrangement invariant spaces”, *Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Applications*, **75**:5 (2012), 2735–2749.
- [14] Е. И. Бережной, “Простое доказательство теоремы экстраполяции для пространств Марцинкевича”, *Матем. заметки*, **93**:6 (2013), 939–943; англ. пер.: E. I. Berezhnoi, “A simple proof of an extrapolation theorem for Marcinkiewicz spaces”, *Math. Notes*, **93**:6 (2013), 923–927.
- [15] S. Astashkin, K. Lykov, “Extrapolation description of rearrangement invariant spaces and related problems”, *Banach and function spaces III (ISBFS 2009)* (Kitakyushu, Japan, 2009), Yokohama Publisher, Yokohama, 2011, 1–52.
- [16] С. В. Асташкин, “Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:2 (2005), 264–289; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Extrapolation functors on a family of scales generated by the real interpolation method”, *Siberian Math. J.*, **46**:2 (2005), 205–225.
- [17] M. J. Carro, J. Martín, “Extrapolation theory for the real interpolation method”, *Collect. Math.*, **53**:2 (2002), 165–186.
- [18] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, 400 с.; англ. пер.: S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, xii+375 pp.
- [19] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, v. II: *Function spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, x+243 pp.
- [20] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988, xiv+469 pp.
- [21] N. J. Kalton, “Convexity, type and the three space problem”, *Studia Math.*, **69**:3 (1980/81), 247–287.
- [22] E. M. Stein, N. J. Weiss, “On the convergence of Poisson integrals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **140** (1969), 35–54.
- [23] G. G. Lorentz, “Relations between function spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12**:1 (1961), 127–132.
- [24] N. Yu. Antonov, “Convergence of Fourier series”, *East J. Approx.*, **2**:2 (1996), 187–196.
- [25] J. Arias-De-Reyna, “Pointwise convergence of Fourier series”, *J. London Math. Soc.* (2), **65**:1 (2002), 139–153.
- [26] J. Arias de Reyna, *Pointwise convergence of Fourier series*, Lecture Notes in Math., **1785**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, xviii+175 pp.
- [27] M. J. Carro, M. Mastylo, L. Rodríguez-Piazza, “Almost everywhere convergent Fourier series”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **18**:2 (2012), 266–286.
- [28] P. Sjölin, F. Soria, “Remarks on a theorem by N. Yu. Antonov”, *Studia Math.*, **158**:1 (2003), 79–97.

- [29] M. J. Carro, “From restricted weak type to strong type estimates”, *J. London Math. Soc.* (2), **70**:3 (2004), 750–762.
- [30] M. J. Carro, J. Martín, “Endpoint estimates from restricted rearrangement inequalities”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **20**:1 (2004), 131–150.
- [31] M. J. Carro, P. Tradacete, “Extrapolation on $L^{p,\infty}(\mu)$ ”, *J. Funct. Anal.*, **265**:9 (2013), 1840–1869.
- [32] K. H. Moon, “On restricted weak type $(1,1)$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **42**:1 (1974), 148–152.
- [33] P. A. Hagelstein, R. L. Jones, “On restricted weak type $(1,1)$: the continuous case”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:1 (2005), 185–190.
- [34] P. A. Hagelstein, “Problems in interpolation theory related to the almost everywhere convergence of Fourier series”, *Topics in harmonic analysis and ergodic theory*, Contemp. Math., **444**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 175–183.
- [35] M. Carro, L. Colzani, G. Sinnamon, “From restricted type to strong type estimates on quasi-Banach rearrangement invariant spaces”, *Studia Math.*, **182**:1 (2007), 1–27.

Константин Владимирович Лыков
(Konstantin V. Lykov)

Институт систем обработки изображений
Российской академии наук, г. Самара;
Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет);
Самарский государственный университет
E-mail: alkv@list.ru

Поступила в редакцию
06.11.2014 и 21.08.2015