Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Сыпченко, Д. С. Тимонина, Замкнутые геодезические на кусочно гладких поверхностях вращения постоянной кривизны, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 5, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:47:28

УДК 514.774.8+514.76

И. В. Сыпченко, Д. С. Тимонина

Замкнутые геодезические на кусочно гладких поверхностях вращения постоянной кривизны

Доказана теорема о структуре изломов обобщенных геодезических на кусочно гладких поверхностях в двумерном и n -мерном случаях. В качестве примеров найдены все простые замкнутые геодезические: на цилиндре (с основаниями); на поверхности, образованной объединением двух сферических шапочек; на поверхности, образованной объединением двух конусов. В последнем случае исследованы на устойчивость замкнутые геодезические (в естественном конечномерном классе возмущений) и найдены сопряженные точки и индексы геодезических. Эта задача связана с сопряженными точками на кусочно гладких бильярдах и поверхностях вращения.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: риманова геометрия, кусочно гладкая поверхность вращения, замкнутые геодезические, сопряженные точки.

DOI: 10.4213/sm8445

§ 1. Введение

Изучению замкнутых геодезических на гладких римановых многообразиях посвящена обширная литература. Исследования в этом направлении были начаты Дарбу, Адамаром, Пуанкаре и Биркгофом в XIX–XX вв. Адамар изучал замкнутые геодезические на двумерных поверхностях отрицательной кривизны. Дарбу первым начал исследовать проблему: на каких поверхностях все геодезические замкнуты? В 1905 г. Пуанкаре выдвинул гипотезу о существовании трех замкнутых несамопересекающихся геодезических на гладкой выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$. Вариационный подход к вопросу о замкнутых геодезических на односвязных многообразиях принадлежит Дж. Биркгофу (см. [1]). Он доказал, что на римановом многообразии, гомеоморфном сфере, существует хотя бы одна замкнутая геодезическая. Большой вклад в эту тематику был сделан Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом.

Случай негладких поверхностей исследовался в работе А. Д. Александрова [2] и работах А. В. Погорелова, где в числе прочего было доказано существование хотя бы одной замкнутой геодезической (которая, однако, может быть вырожденной). Активно изучался вопрос о замкнутых геодезических на простейших негладких поверхностях, а именно на многогранниках. В частности, В. Ю. Протасов в [3] полностью описал замкнутые геодезические на произвольном тетраэдре. Г. Штейнгауз в [4] доказал, что через каждую точку куба проходят четыре различные замкнутые геодезические.

Укажем лишь некоторые известные труды, где изучается проблема замкнутых геодезических: А. Пуанкаре [5], В. Клинггенберг [6], А. Бессе [7], Р. Ботт [8], С. И. Альбер [9], Д. В. Аносов [10], Г. Буземан [11], Дж. Вольф [12], Д. Громол, В. Клинггенберг, В. Мейер [13], Дж. Милнор [14], К. Г. Якоби [15]. Много внимания было уделено существованию и количеству различных простых замкнутых геодезических, их устойчивости и неустойчивости. В последние годы значительное развитие получили исследования замкнутых геодезических на двумерных поверхностях Бертрана; см., например, работы Е. А. Кудрявцевой, Д. А. Федосеева и О. А. Загрядского [16]–[18]. Много работ было посвящено оценке числа простых замкнутых геодезических и вычислению их индексов на различных римановых многообразиях.

Большой интерес представляет изучение замкнутых геодезических на кусочно гладких многообразиях, например на кусочно гладких двумерных поверхностях постоянной кривизны. В важном частном случае постоянной нулевой кривизны большое число исследований посвящено описанию замкнутых геодезических на выпуклых многогранниках. Одним из далеко идущих современных обобщений этой задачи является проблема классификации так называемых замкнутых локально минимальных сетей на многогранниках. Такую локально минимальную сеть можно представлять себе как “разветвленную геодезическую”, состоящую из прямолинейных отрезков, соединяющих трехкратные точки ветвления – вершины минимальной сети. В этом весьма развитом научном направлении укажем на работы А. О. Иванова и А. А. Тужилина [19], [20], а также Н. П. Стрелковой [21], [22]. Хороший и компактный обзор представлен, в частности, в книге А. А. Тужилина и А. Т. Фоменко [23]. Задача описания замкнутых геодезических на выпуклых многогранниках общего вида очень сложна и пока далека от решения.

А. Т. Фоменко и А. А. Ошемков поставили задачу описания замкнутых кусочно гладких геодезических (возможно, с самопересечениями) на замкнутых двумерных кусочно гладких поверхностях вращения постоянной кривизны. Точнее, такие поверхности могут включать в себя куски как нулевой, так и положительной и отрицательной постоянной кривизны. Изломы метрики происходят на окружностях-параллелях. Будем считать, что поверхность образована вращением плоской кусочно гладкой кривой вокруг вертикальной оси OZ . Надо отметить, что хотя такие поверхности можно сколь угодно близко аппроксимировать гладкими поверхностями, геодезический поток кусочно гладкой поверхности может не являться “пределом” геодезического потока аппроксимирующей гладкой поверхности. Дело в том, что при приближении к линии излома метрики скалярная (гауссова) кривизна аппроксимирующей метрики стремится к бесконечности, что сказывается на поведении геодезических. Поэтому задача описания замкнутых геодезических на кусочно гладких поверхностях требует развития новых методов. В настоящей работе описаны, в частности (теоремы 4–6), все простые замкнутые кусочно гладкие геодезические для некоторых интересных примеров поверхностей вращения нулевой и положительной постоянной кривизны, где геодезические понимаются как локально кратчайшие.

В связи с этим была поставлена задача о построении теории полей Якоби и сопряженных точек вдоль кусочно гладких геодезических на кусочно гладких

поверхностях (например, на поверхностях вращения). Это позволит вычислять индексы кусочно гладких геодезических, т.е. оценивать степень их неустойчивости (см., например, § 4). Как известно, в случае гладких многообразий нулевой и отрицательной кривизны сопряженных точек нет. Интересно, что для кусочно гладких многообразий нулевой кривизны сопряженные точки на кусочно гладких геодезических в некоторых случаях появляются. Такие примеры предъявлены в настоящей статье для поверхностей вращения (§ 5). Это указывает на интересный новый эффект, порождаемый именно кусочной гладкостью поверхности.

Как известно, геодезической поток римановой метрики гладких поверхностей вращения интегрируем, т.е. является гамильтоновой системой, интегрируемой по Лиувиллю. Общие топологические свойства интегрируемых геодезических потоков и их слоений Лиувилля изучались, в частности, в работах А. Т. Фоменко, В. В. Козлова, А. В. Болсинова, Т. З. Нгуена, В. С. Матвеева [24]–[30].

Как отметили А. Т. Фоменко и Е. А. Кудрявцева, для интегрируемых геодезических потоков и для двумерных интегрируемых локально плоских биллиардов существует связь между “границами” проекций торов Лиувилля на базу кокасательного расслоения с сопряженными точками вдоль геодезических. Это будет изложено в других публикациях.

Поведение геодезических на гладких участках поверхностей полностью описывается соответствующей гладкой метрикой. Поэтому особый интерес представляет поведение геодезических при пересечении гиперповерхностей негладкости. В § 2 (теоремы 1, 2) доказан многомерный критерий, описывающий характер излома геодезической при ее пересечении гиперповерхности излома метрики, где геодезические понимаются как локально кратчайшие. В двумерном случае этот критерий позволил описать все замкнутые геодезические на некоторых кусочно гладких поверхностях вращения нулевой и положительной кривизны, образующих параметрические семейства поверхностей вращения (теоремы 4–6). Для некоторых из этих геодезических доказана неустойчивость (теорема 7) и найдены пары сопряженных точек (теоремы 8–11).

Авторы выражают благодарность А. Т. Фоменко и А. А. Ошемкову за постановку задачи и Е. А. Кудрявцевой за многочисленные и важные обсуждения.

§ 2. Определения и утверждения

Пусть дано гладкое компактное риманово многообразие M с заданной на нем римановой метрикой G , гладко зависящей от точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кривую γ , проходящую через точку P многообразия M , назовем *локально кратчайшей в точке P* , если можно найти такое $\varepsilon > 0$, что для произвольных точек A и B на γ из ε -окрестности P участок кривой γ между A и B имеет наименьшую длину (вычисленную в метрике G) среди всех кривых, соединяющих A и B .

Регулярную кривую $\gamma(s)$, где s – натуральный параметр, назовем *геодезической*, если она является локально кратчайшей во всех точках $\gamma(s)$.

На касательной плоскости к $\mathbf{M}$ в точке P построим экспоненциальное отображение $H_P = \exp_P: T_P\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$. Так как $\mathbf{M}$ компактно, то для каждого вектора $\mathbf{v}$ из $T_P\mathbf{M}$ существует единственная кривая $\gamma_{\mathbf{v}}(s)$ – геодезическая на $\mathbf{M}$, выходящая из P с касательным вектором $\mathbf{v}$, т.е. $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = P$, $\gamma'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$. Тогда H_P переводит вектор $\mathbf{v} \in T_P\mathbf{M}$ в точку на кривой $\gamma_{\mathbf{v}}(1) \in \mathbf{M}$.

Обозначим через $H_{P,\varepsilon}$ сужение экспоненциального отображения H_P на $D_{P,\varepsilon} \subset T_P\mathbf{M}$ – открытый диск радиуса ε .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [31]). *Можно найти $\varepsilon > 0$ такое, что $H_{P,\varepsilon}$ задает локальные координаты в некоторой окрестности точки P . Другими словами, $H_{P,\varepsilon} = H_P|_{D_{P,\varepsilon}}$ является диффеоморфизмом $D_{P,\varepsilon}$ на $H_P(D_{P,\varepsilon})$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из предложения 1 и теоремы о неявных функциях следует, что существует обратное отображение $H_{P,\varepsilon}^{-1} \in C^\infty: H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon}) \rightarrow D_{P,\varepsilon}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $P \in \mathbf{M}$, в $T_P\mathbf{M}$ фиксирован ортонормированный базис $(\mathbf{e}_i)$ и $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ – линейные координаты в $T_P\mathbf{M}$, соответствующие этому базису. Локальные координаты в окрестности $H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon})$ точки P , заданные отображением $\xi \mapsto \mathbf{x} \circ H_{P,\varepsilon}^{-1}(\xi)$, $\xi \in H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon})$, называются *нормальными координатами с центром в точке P , порожденными базисом $(\mathbf{e}_i)$* .

Окрестность $D_{P,\varepsilon}$ нуля и окрестность $O_\varepsilon(P) := H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon})$ точки P называются *нормальными ε -окрестностями точек 0 и P соответственно*.

Пусть теперь даны $(\mathbf{M}_1, \mathbf{G}_1)$, $(\mathbf{M}_2, \mathbf{G}_2)$ – гладкие компактные римановы многообразия с краем, причем задана изометрия краев $h: \partial\mathbf{M}_1 \rightarrow \partial\mathbf{M}_2$. Рассмотрим многообразие

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 / (x \sim h(x), x \in \partial\mathbf{M}_1),$$

полученное отождествлением точек на $\partial\mathbf{M}_1$ и $\partial\mathbf{M}_2$. После отождествления не будем различать $\partial\mathbf{M}_1$ и $\partial\mathbf{M}_2$; обозначим через Ω полученную гиперповерхность в $\mathbf{M}$ (она является регулярной на каждом $\mathbf{M}_i$). По построению $\mathbf{G}_1|_{T\Omega} = \mathbf{G}_2|_{T\Omega}$, т.е. в каждой точке $P \in \Omega$ данные метрики совпадают на $T_P\Omega$.

Обобщим понятие геодезической на случай кусочной гладкости. Пусть γ_1 – геодезическая в $\mathbf{M}_1$, выходящая из некоторой точки $P_1 \in \mathbf{M}_1$, и пусть она пересекается с Ω в точке $R \in \Omega$. Аналогично, γ_2 – геодезическая, выходящая из точки R и ведущая в точку $P_2 \in \mathbf{M}_2$, которая пересекается с Ω (а значит, и с γ_1) в той же точке R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Кусочно гладкую кривую $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ назовем *обобщенной геодезической* на $\mathbf{M}$, если она является локально кратчайшей в каждой своей точке.

Поясним, что для внутренних точек на γ_1 и γ_2 определение остается прежним, а в точке R понимается в следующем смысле: найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любых точек $P_1 \in \gamma_1$ и $P_2 \in \gamma_2$ из соответствующих ε -полуокрестностей точки R сумма длин соответствующих отрезков геодезических будет минимальной в классе кусочно гладких кривых с концами в P_1 и P_2 и точкой негладкости на Ω .

2.1. Двумерный случай. Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, $\dim \mathbf{M} = 2$, $\Omega = \zeta(s)$ – натурально параметризованная кривая. Пусть также $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ – кусочно гладкая кривая, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \zeta(s_0)$, $\varphi_i(s_0)$ – угол между γ_i и ζ в точке $\zeta(s_0)$, вычисленный в метрике $\mathbf{G}_i$, $i \in \{1, 2\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $0 < \varphi_i(s_0) < \pi$, $i = 1, 2$. Тогда γ – обобщенная геодезическая тогда и только тогда, когда:*

- 1) γ_i – геодезическая в метрике $\mathbf{G}_i$, $i \in \{1, 2\}$;
- 2) $\varphi_1(s_0) = \varphi_2(s_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть γ – обобщенная геодезическая, а значит, реализует минимум длин в описанном классе кривых.

Сведем задачу к локальной. В произвольной точке $P'_1 \in \gamma_1$ на $T_{P'_1}\mathbf{M}_1$ можно выбрать $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(P'_1) > 0$ и построить экспоненциальное отображение $H_{\varepsilon_1} = H_{P'_1, \varepsilon_1} : D_{P'_1, \varepsilon_1} \rightarrow \widetilde{\mathbf{M}}_1$ так, что $H_{P'_1, \varepsilon_1}$ – диффеоморфизм из $D_{P'_1, \varepsilon_1}$ на $H_{P'_1, \varepsilon_1}(D_{\varepsilon_1})$. Здесь $\widetilde{\mathbf{M}}_1$ – гладкое риманово многообразие (без края) такое, что $\mathbf{M}_1 \subset \widetilde{\mathbf{M}}_1$. Выберем точку P'_1 на γ_1 так близко к ζ , чтобы точка $\zeta(s_0)$ содержалась в “ ε_1 -полуокрестности” $O_{\varepsilon_1}(P'_1) = H_{P'_1, \varepsilon_1}(D_{P'_1, \varepsilon_1}) \cap \mathbf{M}_1$ точки P'_1 . Аналогично выбираем точку P'_2 на кривой γ_2 и число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(P'_2) > 0$.

Заметим, что в силу определения 3 утверждение о том, что γ – обобщенная геодезическая, равносильно тому, что участки γ_i от P_1 до $\zeta(s_0)$ и от P_2 до $\zeta(s_0)$ являются геодезическими и для любых точек $P'_1 \in \gamma_1$ и $P'_2 \in \gamma_2$ участок γ от P'_1 до P'_2 является обобщенной геодезической. Таким образом, определение обобщенной геодезической не зависит от выбора точек на ней, поэтому теорему можно доказывать для сужения γ на участок между любыми точками из отрезков γ_i между P_i и $\zeta(s_0)$, в частности, для P'_1 и P'_2 , выбранных описанным образом (рис. 1).

Рис. 1

Пусть $l_i(s) = l_i(P'_i, s)$ – длины участков геодезических в $O_{\varepsilon_i}(P'_i)$ от P'_i до $\zeta(s)$, $i = 1, 2$, вычисленные каждая в своей метрике, $l(s) = l_1(s) + l_2(s)$ (по лемме 2 ниже такой участок геодезической существует и единствен при достаточно

малом $|s - s_0|$). По определению условие, что γ является обобщенной геодезической, означает, что γ пересекает ζ в точке $\zeta(s_0)$, где s_0 – точка локального минимума функции $l(s)$.

ЛЕММА 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $l(s)$ – гладкая функция при $s \in (s_0 - \varepsilon_0, s_0 + \varepsilon_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие гладкости $l(s)$ следует из гладкости каждой из $l_1(s)$ и $l_2(s)$; докажем лемму для l_1 . Согласно условию новой задачи экспоненциальное отображение $H_{P'_1, \varepsilon_1}$ в точке P'_1 и обратное к нему $H_{P'_1, \varepsilon_1}^{-1}$ – суть диффеоморфизмы между $D_{P'_1, \varepsilon_1}$ и $H_{P'_1, \varepsilon_1}(D_{P'_1, \varepsilon_1})$, а значит, их сужения на $D_{P'_1, \varepsilon_1} \cap H_{P'_1, \varepsilon_1}^{-1}(\mathbf{M}_1)$ и $O_{\varepsilon_1}(P'_1) = H_{P'_1, \varepsilon_1}(D_{P'_1, \varepsilon_1}) \cap \mathbf{M}_1$ – тоже диффеоморфизмы между соответствующими областями.

Далее, для любого s такого, что $\zeta(s)$ попадает в $D_{P'_1, \varepsilon_1}$, найдется единственный касательный вектор $\xi_s \in D_{P'_1, \varepsilon_1}$ такой, что $H_{P'_1, \varepsilon_1}(\xi_s) = \zeta(s)$. Тогда по построению экспоненциального отображения

$$l_1(s) = l_1(P'_1, s) = \sqrt{\langle \xi_s, \xi_s \rangle_{P'_1}}, \quad (2.1)$$

где длина вектора ξ_s вычислена в метрике $\mathbf{G}_1$ в точке P'_1 . Если ξ^k , $k = 1, \dots, n$, – координаты в D_{ε_1} , то $\xi^k \circ H_{P'_1, \varepsilon_1}^{-1}$ – координаты в $H_{P'_1, \varepsilon_1}(D_{P'_1, \varepsilon_1})$. Значит (так как скалярное произведение – гладкая функция в $D_{P'_1, \varepsilon_1}$, кривая $\zeta(s)$ гладкая, $H_{P'_1, \varepsilon_1}$ – диффеоморфизм и $\xi_s = H_{P'_1, \varepsilon_1}^{-1}(\zeta(s))$), $l_1(s)$ гладкая в $H_{P'_1, \varepsilon_1}(D_{P'_1, \varepsilon_1})$. Аналогично доказывается гладкость $l_2(s)$.

Возьмем теперь $\varepsilon_0 = \min_{i=1,2} \{\varepsilon - l_i(s_0)\}$; тогда из неравенства треугольника следует, что $\zeta(s) \in D_{P'_i, \varepsilon_1}$, $i = 1, 2$, для любого $s \in (s_0 - \varepsilon_0, s_0 + \varepsilon_0)$. Для таких s обе $l_i(s)$ – гладкие функции, а значит, $l(s)$ тоже гладкая в интервале $(s_0 - \varepsilon_0, s_0 + \varepsilon_0)$. Лемма доказана.

Таким образом, мы имеем право дифференцировать l по s , и, значит, имеет место равенство $l'(s_0) = l'_1(s_0) + l'_2(s_0) = 0$. Будем искать значение производной

$$\frac{dl_1(s_0)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{l_1(s_0 + \Delta s) - l_1(s_0)}{\Delta s}.$$

Значение $l'_2(s)$ вычисляется аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Число ε_0 в лемме 1 зависит от выбора точек P'_i , $i = 1, 2$. Более того, $O_{\varepsilon_0}(R) \cap \mathbf{M}_i \subset O_{\varepsilon_i}(P'_i)$ по построению ε_0 .

Пусть Δs – такое малое приращение параметра s , что $|\Delta s| < \varepsilon_0$; тогда соединим точку P'_1 с $\zeta(s_0 + \Delta s)$ геодезической в $O_{\varepsilon_1}(P'_1)$, длина которой равна $l_1(s_0 + \Delta s)$. Пусть для определенности $\varphi_1(s_0) < \pi/2$; случай $\varphi_1(s_0) \geq \pi/2$ рассматривается аналогично. Отложим от точки P'_1 на построенной геодезической дугу длины $l_1(s_0)$, получим точку $\hat{P}_1(s_0 + \Delta s)$. Тогда для любого $s \in [s_0, s_0 + \Delta s]$ получаем точку $\hat{P}_1(s)$; эти точки образуют часть геодезической окружности.

Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2 (Гаусс; см. [31]). *Пусть $\varepsilon > 0$, как в предложении 1, и $P \in \mathbf{M}$, $S_{\varepsilon'} \subset D_{P_1, \varepsilon_1} \subset T_P \mathbf{M}$ – сфера радиуса $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ в касательной плоскости, целиком содержащаяся в нормальной ε -окрестности нуля (см. определение 2),*

$\Sigma_{\varepsilon'} = H_{P, \varepsilon_1}(S_{\varepsilon'})$ – геодезическая сфера с центром в точке P на $\mathbf{M}$. Пусть Q – произвольная точка $\Sigma_{\varepsilon'}$. Тогда целиком лежащая в нормальной ε -окрестности точки P геодезическая, соединяющая точки P и Q , единственна. Более того, эта геодезическая приходит на геодезическую сферу $\Sigma_{\varepsilon'}$ под прямым углом, т.е. геодезическая перпендикулярна любой регулярной кривой, проходящей через Q и лежащей в $\Sigma_{\varepsilon'}$.

Рис. 2

Из леммы Гаусса следует, что для любого $s \in (s_0 - \varepsilon_0, s_0 + \varepsilon_0)$ геодезическая в $O_{\varepsilon_1}(P'_1)$, проходящая через P'_1 и $\hat{P}_1(s)$, перпендикулярна геодезической окружности, в частности, это верно и для двух геодезических, проходящих через точки P'_1 , $\hat{P}_1(s_0)$ и P'_1 , $\hat{P}_1(s_0 + \Delta s)$. Получим криволинейный треугольник

$$\hat{P}_1(s_0)\hat{P}_1(s_0 + \Delta s)\zeta(s_0 + \Delta s)$$

(рис. 2). Устремим Δs к нулю (см. [32]):

$$l'_1(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{l_1(s_0 + \Delta s) - l_1(s_0)}{\Delta s} = \cos \varphi_1(s_0). \quad (2.2)$$

Аналогично доказывается, что

$$l'_2(s_0) = \cos(\pi - \varphi_2(s_0)) = -\cos \varphi_2(s_0).$$

Таким образом,

$$0 = l'(s_0) = l'_1(s_0) + l'_2(s_0) = \cos \varphi_1(s_0) - \cos \varphi_2(s_0). \quad (2.3)$$

Следовательно, $\cos \varphi_1(s_0) = \cos \varphi_2(s_0)$, а значит, $\varphi_1 = \varphi_2$ в точке s_0 . Необходимость в теореме 1 доказана.

Докажем достаточность. Пусть $\varphi_1(s_0) = \varphi_2(s_0)$ в точке s_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть (для фиксированного $i \in \{1, 2\}$) регулярные кривые $\xi_1, \xi_2 \subset \mathbf{M}_i$ имеют концы в одних и тех же точках (оба конца лежат в одном $\mathbf{M}_i$). Параметризуем $\xi_i(s)$ параметрами $s \in [0, 1]$, пропорциональными

натуральному, такими, что $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, $\xi_1(1) = \xi_2(1)$. Пусть $\rho_i(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния между точками на $\mathbf{M}_i$, ассоциированная с $\mathbf{G}_i$. Тогда назовем *расстоянием между кривыми* ξ_1 и ξ_2 число

$$\rho_i(\xi_1, \xi_2) = \max_{s \in [0,1]} \rho_i(\xi_1(s), \xi_2(s)).$$

Напомним: точки P'_i выбраны так, чтобы нашлись такие $\varepsilon_i = \varepsilon_i(P'_i) > 0$, что $H_{P'_i, \varepsilon_i} = H_{P'_i, \varepsilon_i}|_{D_{P'_i, \varepsilon_i}}$ – диффеоморфизмы из $D_{P'_i, \varepsilon_i}$ (нормальных ε_i -окрестностей нуля в $T_{P'_i} \mathbf{M}_i$) и $\zeta(s_0) \in H_{P'_i, \varepsilon_i}(D_{P'_i, \varepsilon_i})$, $\varepsilon_0 = \min_{i=1,2} \{\varepsilon_i - l_i(s_0)\}$. Будем далее обозначать через γ_i участок кривой γ_i от P'_i до $\zeta(s_0)$.

Докажем, что в условиях теоремы 1 кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ является обобщенной геодезической, точнее, существует такое $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$, что для любых точек $P'_i \in O_{\tilde{\varepsilon}}(\zeta(s_0)) \cap \gamma_i$ точка s_0 – точка минимума функции $l(s) = l(P'_1, P'_2, s) := l_1(P'_1, s) + l_2(P'_2, s)$ в классе кривых с концами в P'_i и расстоянием до γ , не превышающим $\tilde{\varepsilon}$. Для начала докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathbf{M}$ – гладкое n -мерное компактное риманово многообразие с метрикой $\mathbf{G}$, $P \in \mathbf{M}$, $O_\varepsilon(P)$ – нормальная ε -окрестность точки P (см. предложение 1 и определение 2), (y^k) – нормальные координаты в $O_\varepsilon(P)$, $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}(P)$.

Для любого числа $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ рассмотрим координаты $(y_{\tilde{\varepsilon}}^k) = (\tilde{\varepsilon}^{-1} y^k)$ в $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ и метрику $\mathbf{G}^{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\varepsilon}^{-2} \mathbf{G}$, конформную $\mathbf{G}$. Тогда для любого $p \in \mathbb{N}$ верно следующее:

$$\|\mathbf{G}_{kl}^{\tilde{\varepsilon}} - \mathbf{G}_{kl}^0\|_{C^p(O_{\tilde{\varepsilon}}(P))} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad k, l \in \{1, \dots, n\},$$

где $\mathbf{G}_{kl}^{\tilde{\varepsilon}}$ и $\mathbf{G}_{kl}^0$ – координатные представления метрик $\mathbf{G}^{\tilde{\varepsilon}}$ и $\mathbf{G}^0$ в координатах $(y_{\tilde{\varepsilon}}^k)$ и (y^k) соответственно.

Другими словами, для любой точки из $\mathbf{M}$ существуют малая $\tilde{\varepsilon}$ -нормальная окрестность и нормальные координаты в ней такие, что некоторая метрика, конформная $\mathbf{G}$, в данных координатах достаточно хорошо приближается евклидовой в C^p -норме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon]$ подействуем на единичный в метрике $\mathbf{G}(P)$ диск $D_{P,1} \subset T_P \mathbf{M}$ гомотетией $h_{\tilde{\varepsilon}}$ с коэффициентом $\tilde{\varepsilon}$ и получим диск $D_{P,\tilde{\varepsilon}} \subset T_P \mathbf{M}$. Так как $0 < \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$, то $D_{P,\tilde{\varepsilon}} \subset D_{P,\varepsilon}$, а значит, экспоненциальное отображение $H_{P,\tilde{\varepsilon}}$ – диффеоморфизм $D_{P,\tilde{\varepsilon}}$ на $H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon})$. Следовательно, существует сквозное отображение

$$F = F_{P,\tilde{\varepsilon}} := H_{P,\tilde{\varepsilon}} \circ h_{P,\tilde{\varepsilon}}: D_{P,1} \rightarrow H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon})$$

– диффеоморфизм. Также в каждой точке $\mathbf{v} \in D_{P,1} \subset T_P \mathbf{M}$ определено отображение $dF|_{\mathbf{v}}: T_{\mathbf{v}}(T_P \mathbf{M}) \rightarrow T_{F(\mathbf{v})} \mathbf{M}$ касательных пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Векторное пространство $V = T_P \mathbf{M}$ и касательное к нему $T_{\mathbf{v}} V$ – это разные объекты, однако существует канонический изоморфизм между этими пространствами. Поэтому в дальнейшем не будем их различать и будем отождествлять их с V , помня, что $V \cong T_{\mathbf{v}} V$.

В $H_{P,\varepsilon}(D_{P,\varepsilon})$ задана метрика $\mathbf{G}$; перенесем ее назад на $D_{P,1}$ при помощи отображения F^* , определенного следующим образом:

$$(F^*(\mathbf{G}))|_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \mathbf{G}|_{F(\mathbf{v})}(dF|_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_1), dF|_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_2)),$$

где $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in D_{P,1} \subset T_P\mathbf{M}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Пусть B – билинейная форма в 0 (например, $\langle \cdot, \cdot \rangle$) на векторном пространстве V . Тогда обозначим через $\tilde{B}$ поле билинейных форм на V , полученное из B перенесением с помощью сдвигов $\tau_{\mathbf{v}}$, т.е. $\tilde{B}|_{\mathbf{v}} = (\tau_{-\mathbf{v}})^*B$, $\mathbf{v} \in V$.

Пусть $\tilde{\mathbf{G}}^0$ – постоянная в $D_{P,1}$ метрика, полученная “разнесением” из начала координат метрики $F^*(\mathbf{G}|_P)$. Перенесем ее диффеоморфизмом F^{-1} на нормальную $\tilde{\varepsilon}$ -окрестность $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ точки P . Таким образом, получим евклидову метрику $\mathbf{G}^0$ в $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$, которая в любой точке $Q \in O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ имеет вид

$$\mathbf{G}^0|_Q = ((F^{-1})^*(\tilde{\mathbf{G}}_0))|_{F^{-1}(Q)}. \quad (2.4)$$

Введем в $D_{P,\tilde{\varepsilon}}$ линейные координаты $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, отвечающие ортонормированному базису $(\mathbf{e}_k)$, и перенесем их на $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$; получим отвечающие им нормальные координаты (см. определение 2) $y^j = x^j \circ H_{P,\tilde{\varepsilon}}^{-1}$.

Таким образом, в координатах $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ метрика $\mathbf{G}$ имеет представление $\mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y})$ и является гладкой матричнозначной функцией, для которой в $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ можно записать разложение в ряд Тейлора ее и ее производных r -го порядка в P :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y}) &= \mathbf{G}_{kl}(P) + y^j \mathbf{G}_{kl,j}(P) + \frac{y^j y^p}{2} \mathbf{G}_{kl,jp}(P) + \frac{y^j y^p y^q}{3!} \mathbf{G}_{kl,jpq}(P) + \dots \\ &= \mathbf{G}_{kl}(P) + O(\mathbf{y}), \\ \frac{\partial}{\partial y^m} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y}) &= \mathbf{G}_{kl,m}(P) + y^j \mathbf{G}_{kl,jm}(P) + \frac{y^p y^q}{2} \mathbf{G}_{kl,mpq}(P) + \dots \\ &= \mathbf{G}_{kl,m}(P) + O(\mathbf{y}), \\ \frac{\partial}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y}) &= \mathbf{G}_{kl,nm}(P) + y^p \mathbf{G}_{kl,mpn}(P) + y^q \mathbf{G}_{kl,mnq} + \dots \\ &= \mathbf{G}_{kl,nm}(P) + O(\mathbf{y}), \\ \frac{\partial}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial y^s} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y}) &= \mathbf{G}_{kl,mns}(P) + O(\mathbf{y}), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial^r}{\partial y^{j_1} \dots \partial y^{j_r}} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y}) &= \mathbf{G}_{kl,j_1, \dots, j_r}(P) + O(\mathbf{y}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее, введем в $D_{P,\tilde{\varepsilon}}$ координаты $x_{\tilde{\varepsilon}}^j = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} x^j$ и координаты

$$y_{\tilde{\varepsilon}}^j := x_{\tilde{\varepsilon}}^j \circ H_{P,\tilde{\varepsilon}}^{-1} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} y^j, \quad \frac{\partial y^k}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{k'}} = \tilde{\varepsilon} \delta_{k'}^k. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Последнее равенство имеет место, так как отображение $x_{\tilde{\varepsilon}}^j \circ H_{P,\tilde{\varepsilon}}^{-1}$ как композиция справа линейно по своему левому аргументу.

Определим в координатах $\mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}} = (y_{\tilde{\varepsilon}}^j)$ метрику $\mathbf{G}^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}}) := \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} \mathbf{G}(\mathbf{y})$. Тогда

$$\mathbf{G}_{k'l'}^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}}) = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} \frac{\partial y^k}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{k'}} \frac{\partial y^l}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{l'}} \mathbf{G}_{kl}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}_{k'l'}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}_{k'l'}(\tilde{\varepsilon} \mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}}). \quad (2.7)$$

Из формул (2.5) и (2.7) в $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{k'l'}^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}}) &= \mathbf{G}_{k'l'}(P) + \tilde{\varepsilon} y_{\tilde{\varepsilon}}^j \mathbf{G}_{k'l',j}(P) + \dots \\ &= \mathbf{G}_{k'l'}(P) + O(\tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbf{G}_{k'l'}(P) \quad \text{при } \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{m'}} \mathbf{G}_{k'l'}^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}}) &= \frac{\partial y^m}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{m'}} \frac{\partial}{\partial y^m} \mathbf{G}_{k'l'}(\mathbf{y}) = \tilde{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y^{m'}} \mathbf{G}_{k'l'}(\mathbf{y}) \\ &= \tilde{\varepsilon} (\mathbf{G}_{k'l',m'}(P) + O(\tilde{\varepsilon} \mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}})) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial^r}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{j'_1} \dots \partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{j'_r}} \mathbf{G}_{k'l'}^{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}}) &= \frac{\partial y^{j_1}}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{j'_1}} \dots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial y_{\tilde{\varepsilon}}^{j'_r}} \frac{\partial^r}{\partial y^{j_1} \dots \partial y^{j_r}} \mathbf{G}_{k'l'}(\mathbf{y}) \\ &= \tilde{\varepsilon}^r (\mathbf{G}_{k'l',j'_1, \dots, j'_r}(P) + O(\tilde{\varepsilon} \mathbf{y}_{\tilde{\varepsilon}})) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Перенесем метрику $\mathbf{G}^{\tilde{\varepsilon}}$ в диск $D_{P,1}$ при помощи диффеоморфизма $F = F_{P,\tilde{\varepsilon}}$; получим $\tilde{\mathbf{G}}^{\tilde{\varepsilon}} := F^*(\mathbf{G}^{\tilde{\varepsilon}})$. Перенесем также координаты $\mathbf{y}$ и получим $\tilde{\mathbf{y}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Координаты $\tilde{\mathbf{y}}$ являются на $D_{P,1}$ стандартными по отношению к базису $(\mathbf{e}_i)$ и не зависят от выбора $\tilde{\varepsilon}$.

Таким образом, по построению метрики $\tilde{\mathbf{G}}^{\tilde{\varepsilon}}$, из определения 4 евклидовой метрики $\mathbf{G}^0$ и формулы (2.5) следует, что для любого $p \in \mathbb{N}$, любых $k, l \in \{1, \dots, n\}$ и любой точки $\mathbf{v} \in D_{P,1}$

$$\|\tilde{\mathbf{G}}_{kl}^{\tilde{\varepsilon}}|_{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{G}}_{kl}^0|_{\mathbf{v}}\|_{C^p} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\mathbf{G}}_{kl}^{\tilde{\varepsilon}}$ и $\tilde{\mathbf{G}}_{kl}^0$ – координатные представления метрик $\tilde{\mathbf{G}}^{\tilde{\varepsilon}}$ и $\tilde{\mathbf{G}}^0$ в стандартных координатах $\tilde{\mathbf{y}}$ на диске $D_{P,1}$.

Таким образом, метрика $\tilde{\mathbf{G}}^{\tilde{\varepsilon}}$ близка к $\tilde{\mathbf{G}}^0$ в C^p -норме. Значит, по построению метрики $\mathbf{G}^{\tilde{\varepsilon}}$ и $\mathbf{G}^0$ в $O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ также близки: для любого числа $\delta > 0$ и любого натурального p найдется достаточно малое $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon]$, при котором (и при любом меньшем, чем $\tilde{\varepsilon}$) для произвольной точки $Q \in O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ (а значит, $F_{P,\tilde{\varepsilon}}^{-1}(Q) \in D_{P,1}$) выполнено

$$\|\mathbf{G}_{kl}^{\tilde{\varepsilon}}|_Q - \mathbf{G}_{kl}^0|_Q\|_{C^p} < \delta, \quad k, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Лемма 3 доказана.

Применим лемму 3 для $\mathbf{M}_i$, $i \in \{1, 2\}$, в точке $R = \zeta(s_0)$ в нормальных $\tilde{\varepsilon}$ -полукрестностях данной точки.

ЛЕММА 4. *Найдется число $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что для любой точки $P'_i \in O_{\tilde{\varepsilon}}(R) \cap \gamma_i$, $i \in \{1, 2\}$, функция $\varphi_1(s) := \varphi(P'_1, s)$ убывает, а $\varphi_2(s) := \varphi(P'_2, s)$ возрастает при $s \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$. Более того, во всем интервале $(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$ окрестности $\varphi'_1(s) < 0$, а $\varphi'_2(s) > 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В лемме 4 и далее $\varphi(P'_i, s)$ – угол между кривой $\Omega = \zeta(s)$ и геодезической в $O_{\tilde{\varepsilon}}(R) \cap \mathbf{M}_i$ с концами в точках P'_i и $\zeta(s)$, вычисленной в метрике $\mathbf{G}_i$, $i \in \{1, 2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Докажем лемму для $\varphi_1(s)$; для $\varphi_2(s)$ доказательство аналогичное. В $\tilde{\varepsilon}$ -окрестности числа s_0 рассмотрим “евклидово приближение” угла $\varphi_1(s_0 + t\tilde{\varepsilon})$ – угол $\tilde{\varphi}_1(t) = \angle \tilde{P}_1(t, 0)O$ в диске $D_{R,1}$, вычисленный в метрике $\mathbf{G}^0$. В евклидовых координатах (x, y) в диске $D_{R,1}$, в которых $\zeta'(0) = (1, 0)$ и $\tilde{P}_1 = (x_0, y_0)$, имеем точку $\tilde{P}_1 = F^{-1}(P'_1) \in D_{R,1}$,

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \operatorname{arccctg} \frac{t - x_0}{|y_0|}, \quad (2.10)$$

следовательно, $\tilde{\varphi}'_1(t) < 0$ и $\tilde{\varphi}_1(t)$ убывает.

Из курса функционального анализа известен следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\tilde{P}_1 \in D_{R,1}$ (фиксированная точка в диске $D_{R,1}$, не являющаяся центром диска), $\tilde{\mathbf{G}}^0$ – евклидова метрика в диске $D_{P,1}$, $\tilde{\zeta}_0(t)$ – натурально параметризованный диаметр диска, не содержащий $\tilde{P}_1$, $\tilde{\zeta}'_0(0) = \tilde{\zeta}'(s_0)$.

Пусть задано $\{\tilde{\mathbf{G}}^\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, – параметрическое семейство метрик в диске.

Пусть также задано семейство кривых $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t) = \{\tilde{\zeta}_\varepsilon : (-1, 1) \rightarrow D_{R,1}\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$.

Наконец, пусть $\varphi^\varepsilon_1(t)$ – угол между кривой $\tilde{\zeta}_\varepsilon$ и геодезической в $(D_{R,1}, \tilde{\mathbf{G}}^\varepsilon)$ с концами в точках $\tilde{P}_1$ и $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, вычисленный в метрике $\tilde{\mathbf{G}}^\varepsilon$.

Тогда найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что из того, что

$$\|\tilde{\mathbf{G}}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{G}}^0\|_{C^k} + \|\tilde{\zeta}_\varepsilon - \tilde{\zeta}_0\|_{C^1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

следует, что

$$\|\tilde{\varphi}_1 - \varphi^\varepsilon_1\|_{C^1} = \sup_{t \in (-1, 1)} \max\{|\tilde{\varphi}_1(t) - \varphi^\varepsilon_1(t)|, |\tilde{\varphi}'_1(t) - \varphi'^\varepsilon_1(t)|\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Иначе говоря, если метрики близки в любой C^k -норме, то найдется такое k , при котором близость метрик влечет за собой близость углов в норме C^1 .

Применим предложение 2 к: диску $D_{R,1}$; точке $\tilde{P}_1 \in D_{R,1}$ такой, что $P''_1 := F_{R,\varepsilon}(\tilde{P}_1) \in \gamma_1$; евклидовой метрике $\tilde{\mathbf{G}}^0_1$ в $D_{R,1}$, полученной из метрики $\mathbf{G}_1(R)$ описанным в лемме 3 способом; семейству метрик $\tilde{\mathbf{G}}^\varepsilon_1(y_{1,\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{G}_1(y_1) \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}^0_1$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$ по лемме 3) в диске $D_{R,1}$, где $y_{1,\varepsilon}$ – координаты из формулы (2.6) для $\mathbf{M} := \mathbf{M}_1$, $P := R$; семейству кривых $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\zeta}(s_0 + \varepsilon t) \rightarrow \tilde{\zeta}_0(t)$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$), $t \in (-1, 1)$ (рис. 3). Так как $\tilde{\varphi}'_1 < 0$ на $(-1, 1)$ (см. (2.10)), то в силу

Рис. 3

предложения 2 $(\varphi_1^{\tilde{\varepsilon}})' < 0$ на $(-1, 1)$ и функция $\varphi_1^{\tilde{\varepsilon}}(t)$ убывает на $(-1, 1)$ при любом достаточно малом $\tilde{\varepsilon} > 0$.

Из конформности метрик $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_1^{\tilde{\varepsilon}}$ следует равенство углов $\varphi_1(s_0 + \varepsilon t)$, $\varphi_1^{\tilde{\varepsilon}}(t)$ при любом $t \in (-1, 1)$, а значит, $\varphi_1'(s) > 0$ и $\varphi(s)$ возрастает на $(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$.

Зафиксируем на γ_1 новую точку $P_1'' := F_{R, \tilde{\varepsilon}}(\tilde{P}_1) \in \gamma_1 \cap O_{\tilde{\varepsilon}}(R)$, переобозначим через γ_1 участок кривой γ от P_1'' до $\zeta(s_0)$ и локализуем задачу на этот участок. Тогда $\varphi_1(s) = \varphi(P_1'', s)$, $s \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$. В частности, $\varphi_1(s)$ убывает, а $\varphi_2(s)$ возрастает (доказывается аналогично) при $s \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$.

Лемма 4 доказана.

Согласно формуле (2.2) для произвольного $s \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$ выполнено

$$l'(s) = l'_s(P_1'', P_2'', s) = (l_1(P_1'', s) + l_2(P_2'', s))'_s = \cos \varphi_1(P_1'', s) - \cos \varphi_2(P_2'', s).$$

Значит, согласно лемме 4 функция $l'(s)$ возрастает на $(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$ и имеет на этом интервале не более одного нуля:

$$l''(s) = -\sin \varphi_1(P_1'', s)(\varphi_1'(P_1'', s) - \varphi_2'(P_2'', s)) > 0, \quad s \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon}). \quad (2.11)$$

По условию теоремы 1 s_0 — нуль функции $l'(s)$, и по доказанному этот нуль единственный, а значит, s_0 в данном интервале доставляет единственный минимум $l(s)$. Таким образом, мы доказали, что длина $l(s_0)$ минимальна в классе кусочно гладких кривых с концами в P_i'' и расстоянием до γ , не превышающим $\tilde{\varepsilon}$.

ЛЕММА 5. *Условие минимальности $l(s_0)$ в классе кусочно гладких кривых с концами в P_i'' и расстоянием до γ , не превышающим $\tilde{\varepsilon}$, равносильно тому, что γ локально кратчайшая в точке $\zeta(s_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Как уже было доказано, свойство локальной кратчайшести не зависит от выбора точки на кривой, поэтому возьмем точки P_i'' так, чтобы $l_i(P_i'', s_0)$ не превышала $\tilde{\varepsilon}/3$. Предположим, что существуют такие геодезические $\tilde{\gamma}_i$ в $\mathbf{M}_i$ с концами

в точках P'_i и $\zeta(s_0)$, что $\bar{l}(s_0) < l(s_0)$, и $\bar{\gamma}_i$ не лежат целиком в $O_{\tilde{\varepsilon}}(R) \cap \mathbf{M}_i$. Тогда существуют Q_i – точки пересечения $\bar{\gamma}_i$ с соответствующей $(\partial O_{\tilde{\varepsilon}}(R)) \cap \mathbf{M}_i$. Так как окрестности нормальные, а $\bar{\gamma}_i$ – геодезические, то

$$\bar{l}_i(s_0) \geq \bar{l}_i(P'_i, Q_i) = \tilde{\varepsilon}, \quad \bar{l}(s_0) = \bar{l}_1(s_0) + \bar{l}_2(s_0) \geq 2\tilde{\varepsilon}.$$

Значит, для произвольной кривой $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$, построенной описанным выше способом, $l(s_0) = l_1(s_0) + l_2(s_0) = 2\tilde{\varepsilon}/3 < 2\tilde{\varepsilon} \leq \bar{l}(s_0)$; противоречие. Следовательно, γ локально кратчайшая в точке $\zeta(s_0)$, а значит, это обобщенная геодезическая в смысле определения 3. Лемма доказана.

Таким образом, из того, что s_0 доставляет единственный локальный минимум в $(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$, и леммы 5 следует достаточность в теореме 1.

Теорема 1 полностью доказана.

2.2. Многомерный случай. Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, $\dim \mathbf{M} = n$, $\mathbf{G}_i$ – гладкая метрика на $\mathbf{M}_i$, $i \in \{1, 2\}$, Ω – гиперповерхность “стыка” $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, регулярная на каждом из $\mathbf{M}_i$, $\Omega = \partial \mathbf{M}_i$. Пусть γ_i – натурально параметризованные кривые на $\mathbf{M}_i$, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = R \in \Omega$. Рассмотрим вектор $\mathbf{v}_i = \text{pr}_i(\dot{\gamma}_i(t_i)) \in T_R \Omega$, $|\mathbf{v}_i| \leq 1$, в касательном пространстве к Ω в точке R , полученный ортогональной проекцией $\text{pr}_i: T_R \mathbf{M}_i \rightarrow T_R \Omega$ в смысле метрики $\mathbf{G}_i(R)$ вектора скорости кривой γ_i в точке R на касательное пространство к краю $\mathbf{M}_i$ (т.е. к гиперповерхности Ω) в точке R .

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что длина вектора $\mathbf{v}_i \in T_R \Omega$ в смысле общей метрики на гиперповерхности Ω меньше 1. Тогда γ – обобщенная геодезическая тогда и только тогда, когда:*

- 1) γ_i – геодезическая в метрике $\mathbf{G}_i$, $i \in \{1, 2\}$;
- 2) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ (условие совпадения двух касательных векторов к гиперповерхности Ω в точке R).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала вспомогательную формулу (см. (2.14) ниже). Предположим, что $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ и γ_i – геодезические в метрике $\mathbf{G}_i$. Как и в доказательстве теоремы 1, локализуем задачу: возьмем P'_i так близко к Ω , что $R = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ содержится в ε_i -нормальных окрестностях точек P'_i . В точке R выберем $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ – ортонормированный базис в $T_R \Omega$. Покажем, что в произвольных координатах $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{n-1})$ на Ω выполняется (2.14). Для этого покажем, что при любом $i \in \{1, 2\}$ существуют координаты $\mathbf{s}_i = (s_i^1, \dots, s_i^{n-1})$ на Ω , в которых $(\mathbf{e}_i)$ является координатным базисом, и выполняется равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_i^j} l_i(P'_i, \mathbf{s}_i) \Big|_{\mathbf{s}_i=0} &= (-1)^{i-1} \langle \text{pr}_i(\dot{\gamma}_i(t_i), \mathbf{e}_j) \rangle_{\mathbf{G}_i(R)} \\ &= (-1)^{i-1} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_i(R)}, \quad j = 1, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (2.12)$$

тогда из равенства (2.12) будет следовать доказываемое утверждение (2.14).

Пусть $P'_1 = \gamma_1(t)$, $R = \gamma_1(t_1)$; тогда $R = H_{P_1, \varepsilon_1}(\mathbf{w}_1)$, где $\mathbf{w}_1 := t_1 \gamma'_1(t)$ – вектор из пространства $T_{P_1} \mathbf{M}_1$. Рассмотрим в точке R двумерную плоскость $\text{span}(\gamma'_1(t_1), \mathbf{e}_j)$, а в точке $\mathbf{w}_1$ – прообраз $\Pi'_j := (dH_{P_1, \varepsilon_1}(\mathbf{w}_1))^{-1}(\text{span}(\gamma'_1(t_1), \mathbf{e}_j))$

этой плоскости при изоморфизме $dH_{P_1, \varepsilon_1}(\mathbf{w}_1)$. Пусть Π_j – двумерная плоскость в $T_{P_1} \mathbf{M}_1$, содержащая $\mathbf{w}_1$ и такая, что $T_{\mathbf{w}_1} \Pi_j = \Pi'_j$ (такая плоскость существует, единственна и содержит вектор $\mathbf{w}_1$). Положим

$$\mathbf{N}_1^j = \mathbf{N}^j := H_{P_1, \varepsilon_1}(\Pi_j \cap D_{P_1, \varepsilon_1}), \quad \zeta_j^1 = \mathbf{N}_1^j \cap \Omega.$$

Тогда $\mathbf{M}_1^j$ регулярны, так как являются образом евклидовой плоскости при диффеоморфизме H_{P_1, ε_1} . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j \in \text{span}(\gamma_1'(t_1), \mathbf{e}_j) &= (dH_{P_1, \varepsilon_1}(\mathbf{w}_1))(\Pi'_j) = (dH_{P_1, \varepsilon_1}(\mathbf{w}_1))(T_{\mathbf{w}_1} \Pi_j) \\ &= T_{H_{P_1, \varepsilon_1}(\mathbf{w}_1)} \mathbf{N}_1^j = T_R \mathbf{N}_1^j. \end{aligned}$$

Будем доказывать формулу (2.12) для $\mathbf{M}_1$; доказательство для $\mathbf{M}_2$ аналогично. Из курса дифференциальной геометрии известен следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть регулярные гиперповерхность Ω и двумерная поверхность $\mathbf{N}$ гладкого многообразия $\mathbf{M}$ трансверсально пересекаются в точке R (по некоей регулярной кривой $\Omega \cap \mathbf{N}$). Пусть $\mathbf{e}$ – касательный вектор к $\mathbf{M}$ в точке R , принадлежащий и касательному пространству к Ω в точке R , и касательному пространству к $\mathbf{N}$ в точке R . Тогда вектор $\mathbf{e}$ принадлежит касательному пространству к кривой пересечения $\zeta = \Omega \cap \mathbf{N}$ в точке R .

Таким образом, $\mathbf{e}_j$ является касательным вектором к кривой $\zeta_j^1 := \Omega \cap \mathbf{N}_1^j$ в точке R . Введем в окрестности точки R на Ω локальные координаты $\mathbf{s}_1 = (s_1^1, \dots, s_1^{n-1})$ такие, что $\mathbf{s}_1(R) = 0$. Кривые ζ_j^1 , $j = 1, \dots, n-1$, являются координатными линиями $\zeta_j^1(s_1^j) = (0, \dots, 0, s_1^j, 0, \dots, 0)$ с натуральным параметром s_1^j и вектором скорости $\mathbf{e}_j$ в точке R (это возможно, так как $|\mathbf{e}_j| = 1$). По построению $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ является координатным базисом в точке R . Так как поверхность $\mathbf{N}_1^j$ регулярна и состоит из геодезических метрики $(\mathbf{M}_1, \mathbf{G}_1)$, выходящих из точки P'_1 , то функция расстояния $l_1(0, \dots, 0, s_1^j, 0, \dots, 0)$ (между точками P'_1 и $(0, \dots, 0, s_1^j, 0, \dots, 0)$ в метрике $(\mathbf{M}_1, \mathbf{G}_1)$) равна функции расстояния $l_1^j(s_1^j)$ (между точками P'_1 и $\zeta_j^1(s_1^j) = (0, \dots, 0, s_1^j, 0, \dots, 0)$ в метрике $(\mathbf{N}_1^j, \mathbf{G}_1|_{\mathbf{N}_1^j})$). Поэтому

$$\left. \frac{\partial}{\partial s_1^j} l_1(s_1^1, \dots, s_1^{n-1}) \right|_{\mathbf{s}_1=0} = (l_1^j)'(s_1^j)|_{s_1^j=0}, \quad (2.13)$$

где $l_1^j(s_1^j) := l_1(P'_1, s_1^j)$ – длина дуги геодезической от точки P'_1 до $\zeta_j^1(s_1^j)$.

Теперь можем применить теорему 1: имеются регулярная двумерная поверхность $\mathbf{N}_1^j$ с краем, кривая $\zeta_j^1 \subset \mathbf{N}_1^j$, кривая γ_1 – геодезическая на $\mathbf{N}_1^j$, $P'_1 \in \gamma_1$, точка $R = \gamma_1 \cap \zeta_j^1$ (рис. 4). Тогда, как и в доказательстве теоремы 1, из леммы 2 (леммы Гаусса) и (2.13) следует, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial s_1^j} l_1(s_1^1, \dots, s_1^{n-1}) \right|_{\mathbf{s}=0} = (l_1^j)'(0) = \cos(\varphi_1^j(0)_{\mathbf{G}_1(R)}),$$

где $\varphi_1^j(s_1^j)$ – угол между касательными векторами к кривым γ_1 и ζ_j^1 в точке $\zeta_j^1(s_1^j)$, вычисленный в смысле метрики $\mathbf{G}_1(R)$. Но касательный вектор к ζ_j^1

Рис. 4

в точке R – это вектор $\mathbf{e}_j$, а значит,

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1^j(0)_{\mathbf{G}_1(R)}) &= \langle \dot{\gamma}_1(t_1), \dot{\zeta}_j^{-1}(0) \rangle_{\mathbf{G}_1(R)} = \langle \dot{\gamma}_1(t_1), \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_1(R)} \\ &= \langle \text{pr}_1(\dot{\gamma}_1(t_1)), \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_1(R)} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_1(R)}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_2^j} l_2(s_2^1, \dots, s_2^{n-1}) &= (l_2^j)'(0) = -\cos(\varphi_2^j(0)_{\mathbf{G}_2(R)}) \\ &= -\langle \text{pr}_2(\dot{\gamma}_2(t_2)) \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_2(P)} = -\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_2(R)}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (2.12) доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для $\mathbf{M}_2$ аналогичные кривые $\zeta_j^2 = \mathbf{N}_2^j \cap \Omega$ (а потому и локальные координаты $\mathbf{s}_2 = (s_2^1, \dots, s_2^{n-1})$) будут, вообще говоря, иными, чем для $\mathbf{M}_1$.

Пусть $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{n-1})$ – какие-нибудь локальные координаты на Ω такие, что $\mathbf{s}(R) = 0$ и $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ является координатным базисом в точке R . Тогда из полученной формулы (2.12) сразу получаем аналогичную формулу в локальных координатах $\mathbf{s}$ на Ω :

$$\frac{\partial}{\partial s^j} (l_i)(0) = (-1)^{i-1} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{G}_i(R)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (2.14)$$

Докажем необходимость в теореме 2. Пусть $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ – обобщенная геодезическая (из чего, по определению обобщенной геодезической, следует, что γ_i – геодезические в метриках $\mathbf{G}_i$). Так как γ – обобщенная геодезическая, то в произвольных координатах $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{n-1})$ на Ω , для которых $(\mathbf{e}_j)$ является координатным базисом и $\mathbf{s}(R) = 0$, выполнено

$$\left. \frac{\partial}{\partial s^j} (l_1(\mathbf{s}) + l_2(\mathbf{s})) \right|_{\mathbf{s}=0} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (2.15)$$

Отсюда и из формулы (2.14) следует, что в координатах $\mathbf{s}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (\cos \varphi_1^1(0)\mathbf{G}_1(R), \dots, \cos \varphi_1^{n-1}(0)\mathbf{G}_1(R)) \\ &= (\cos \varphi_2^1(0)\mathbf{G}_2(R), \dots, \cos \varphi_2^{n-1}(0)\mathbf{G}_2(R)) = \mathbf{v}_2.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Из равенства векторов в каких-то координатах следует их равенство в произвольных координатах, что доказывает утверждение теоремы 2. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть γ_i – геодезические в метрике $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Доказательство достаточности в теореме 2 полностью аналогично доказательству достаточности в теореме 1.

Из формулы (2.14) и равенства $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ получаем формулу (2.15). Из неравенства (2.11) следует, что выполнен его n -мерный аналог: матрица Гессе

$$\left. \frac{\partial^2 l(P'_1, P'_2, \mathbf{s})}{\partial s^j \partial s^k} \right|_{\mathbf{s}=0}$$

положительно определена. Отсюда следует, что существует $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что кривая γ с концами в $P'_1, P'_2 \in O_{\tilde{\varepsilon}}(P)$ имеет минимальную длину в классе кусочно гладких кривых с концами в P'_1 и P'_2 и расстоянием до γ , не превышающим $\tilde{\varepsilon}$. Двумерная лемма 5 обобщается на многомерный случай, в доказательстве надо только заменить двумерную область (нормальную $\tilde{\varepsilon}$ -окрестность точки P'_i) на n -мерную (образ n -мерного диска радиуса $\tilde{\varepsilon}$ при экспоненциальном отображении $H_{P'_i, \tilde{\varepsilon}}$). Таким образом, локальная минимальность длины γ влечет за собой то, что γ – обобщенная геодезическая.

Теорема 2 полностью доказана.

§ 3. Классификация простых замкнутых геодезических на некоторых поверхностях

Пусть две гладкие ограниченные поверхности $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ пересекаются по гладкой замкнутой кривой ζ , и пусть из точки на ζ выпущена геодезическая под углом α в сторону $\mathbf{M}_1$. Для наличия симметрии предположим, что $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ суть поверхности вращения, а ζ – окружность длины l , перпендикулярная оси вращения. Нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (вторая теорема Клеро). *Для любой геодезической γ на гладкой поверхности вращения выполняется равенство*

$$\rho \cos \varphi = c(\gamma),$$

где $c(\gamma)$ – константа на геодезической, ρ – расстояние от произвольной точки $P \in \gamma$ до оси вращения, φ – угол между γ и параллелью в точке P .

Из теоремы 3, в частности, следует, что угол α , под которым геодезическая выпущена с ζ , равен углу, под которым она снова пришла на эту окружность.

Более того, доказанная в настоящей работе теорема 1 предоставляет правило пересчета угла между γ и ζ после прохождения геодезической точки негладкости и попадания из $\mathbf{M}_1$ на $\mathbf{M}_2$. Мы будем рассматривать только поверхности, вложенные в $\mathbb{R}^3$, и индуцированные метрики, поэтому и фактическая величина угла α будет сохраняться при всех прохождениях геодезической через точки негладкости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть геодезическая γ пересекает окружность “стыка” под углом $\alpha \in (0, \pi)$. Тогда условие замкнутости γ на $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ равносильно тому, что

$$l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = pl, \quad p \in \mathbb{Q}, \quad (3.1)$$

где $l_i(\alpha)$ – длина меньшей дуги окружности ζ , отсекаемой звеном γ_i геодезической в $\mathbf{M}_i$. Если при этом для любого $i \in \{1, 2\}$ звено γ_i от первого до второго пересечения окружности лежит в секторе, ограниченном диаметрами, проведенными из начальной и конечной точек, то имеет место следующий критерий: γ замкнута и не имеет самопересечений тогда и только тогда, когда

$$l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = \frac{l}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

т.е. сумма длин дуг окружности, отсеченных звеньями геодезической, делит длину окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи некоторого диффеоморфизма f отобразим обе поверхности на двумерный диск – внутренность окружности ζ . Тогда получим диаграмму, где точки пересечения γ с окружностью переходят в себя, а участки геодезических – в дуги, соединяющие “соседние” пары точек, причем каждую кривую будем “красить” в цвет $\mathbf{M}_1$ или $\mathbf{M}_2$; таким образом, цвета соседних дуг будут чередоваться.

Из сохранения угла α и симметричности поверхностей вращения следует равенство длин соответствующих дуг окружности ζ , отсекаемых на диаграмме кривыми одного цвета. В таком случае окружность делится на чередующиеся дуги длин $l_1(\alpha)$ и $l_2(\alpha)$. Условие того, что γ замыкается через конечное число обходов, означает, что существуют такие натуральные a и b , что $a(l_1(\alpha) + l_2(\alpha)) = bl$, $a, b \in \mathbb{N}$, или

$$l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = pl, \quad p = \frac{b}{a}.$$

Так как f – диффеоморфизм, условие несамопересекаемости геодезической равносильно отсутствию пересечений у дуг одного цвета. Далее, пусть существует $P \in \mathbf{M}_1$ – точка самопересечения γ ; тогда при f точка P переходит в некоторую точку на диске, а пересекающиеся участки γ – в участки пересекающихся дуг. Так как каждое звено лежит в своем секторе, а никакие два сектора не пересекаются и каждый определяется крайними точками соответствующих дуг на ζ , то условие несамопересекаемости равносильно тому, что никакие две пары точек на ζ не зацеплены. Иначе говоря, длина ζ кратна сумме длин $l_1(\alpha) + l_2(\alpha)$. Предложение доказано.

Таким образом, вычислив для конкретных поверхностей в зависимости от параметра α длины $l_1(\alpha)$ и $l_2(\alpha)$, можно понять, является ли геодезическая, выпущенная под таким углом, замкнутой.

3.1. Простые замкнутые геодезические на объединении двух сферических шапочек. Пусть исследуемая поверхность сконструирована следующим образом: две сферы рассекли горизонтальной плоскостью, одну – на широте θ_1 , а вторую – на широте θ_2 , выбрали половинки, не содержащие экватор, и склеили по окружности сечения ζ так, чтобы получившаяся поверхность была выпукла¹. Выпустим из точки на окружности геодезическую на участок сферы широты θ_1 под углом α , и, как мы уже знаем, этот угол будет сохраняться. Опишем сначала качественно поведение геодезических на построенной поверхности. Известно, что геодезические на сфере – дуги больших окружностей, значит, наша кусочно гладкая геодезическая будет состоять из звеньев – дуг центральных сечений поочередно первой и второй сферы, и чем меньше угол α , тем ближе она к кривой ζ . Таким образом, чтобы не было самопересечений, необходимо, чтобы на ζ “укладывалось” целое число звеньев, значит, необходимо решить следующую задачу: вычислить $l_1(\alpha)$ – длину дуги между точками пересечения ζ с участком большой окружности, составляющей с ζ на широте θ_1 угол α .

Вычислим угол α' между данной окружностью и экватором сферы; он также будет являться углом между горизонтальной плоскостью и плоскостью сечения сферы, содержащей данную геодезическую (рис. 5). Радиус сферы вычисляется по формуле $R = r / \cos \theta_1 = 1 / \cos \theta_1$; тогда по теореме 3

$$R \cos \alpha' = \frac{1}{\cos \theta_1} \cos \alpha' = 1 \cdot \cos \alpha,$$

или, окончательно,

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cos \theta_1. \quad (3.3)$$

Рис. 5

¹Для простоты считаем, что размеры подобраны таким образом, что радиус получившейся окружности ζ есть $r = 1$.

Вычислим высоту – расстояние между плоскостями, содержащими экватор и окружность ζ :

$$h = r \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_1,$$

и ортогонально спроецируем верхнюю плоскость на нижнюю. Таким образом, расстояние x от диаметра до хорды вычисляется из прямоугольного треугольника с углом α' между плоскостями:

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \alpha'}. \quad (3.4)$$

Наконец, для вычисления угла Ω , опирающегося на нужную нам дугу, в треугольнике со сторонами из двух радиусов r и хорды применим теорему синусов, вычисляя его площадь S :

$$S = \frac{1}{2} r^2 \sin \Omega = x \sqrt{1 - x^2} \implies \sin \Omega = 2x \sqrt{1 - x^2}. \quad (3.5)$$

В итоге уравнения (3.3)–(3.5) дают систему для нахождения угла Ω

$$\begin{cases} \cos \alpha' = \cos \alpha \cos \theta_1, \\ x = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \alpha'}, \\ \sin \Omega = 2x \sqrt{1 - x^2}. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\sqrt{1/(\cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1) - 1}} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1}/(\cos \alpha \cos \theta_1)} \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1}}, \\ \sin \Omega &= 2 \frac{\cos \alpha \sin \theta_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \theta_1}{1 - \cos^2 \theta_1 \cos^2 \alpha}} \\ &= 2 \frac{\cos \alpha \sin \theta_1}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 \cos^2 \alpha} \\ &= 2 \frac{\cos \alpha \sin \theta_1}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= 2 \frac{\cos \alpha \sin \theta_1 \sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1} = \frac{\sin \theta_1 \sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \theta_1}. \end{aligned}$$

Так как ζ – окружность единичного радиуса, то искомая длина дуги есть $l_1(\alpha) = \Omega$; аналогично находим длину $l_2(\alpha)$. Заметим, что при $\alpha \in (0, \pi/2)$ $l_i(\alpha)$ – строго монотонно возрастающие по α функции, значит, их сумма тоже монотонно возрастает.

Таким образом, с учетом предложения 4 доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. *Множество различных замкнутых несамопересекающихся геодезических на описанной поверхности счетно, а именно, для любого натурального n существует единственное решение $\alpha_n \in (0, \pi/2)$, для которого $l_1(\alpha_n) + l_2(\alpha_n) = 1/n$, и данный угол однозначно определяет замкнутую геодезическую с точностью до вращения.*

3.2. Простые замкнутые геодезические на цилиндре, ограниченном двумя плоскостями. Пусть дан цилиндр высоты h и радиуса r , а из точки на основании цилиндра под углом α к основанию выпущена геодезическая. Метрики на боковой поверхности цилиндра и на “крышках” плоские, геодезические на цилиндре – винтовые линии (прямые на развертке), геодезические на дисках – отрезки хорд; из теоремы 1 мы знаем, что хорды одной и той же геодезической составляют угол α с касательной к окружности (см. п. 3.1). Построим для цилиндра диаграмму аналогичным предыдущему слу-

Рис. 6

чаю способом (рис. 6). Тогда $l_1(\alpha)$ – длина дуги окружности, ограниченной хордой, составляющей угол α с касательной, $l_1(\alpha) = 2\alpha r$, а $l_2(\alpha) = h \operatorname{ctg} \alpha$ – длина дуги, “пробегаемой” на окружности, пока геодезическая идет по боковой поверхности цилиндра. С учетом предложения 4 получаем уравнение на замкнутость и несамопересекаемость

$$2(h \operatorname{ctg} \alpha + 2\alpha r) = \frac{2\pi r}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

$$k \operatorname{ctg} \alpha + 2\alpha = \frac{\pi}{n}, \quad (3.7)$$

где величина $k = h/r$ характеризует конфигурацию цилиндра. Исследуем поведение функции $g(\alpha) := k \operatorname{ctg} \alpha + 2\alpha$. Ее производная на отрезке $[0, \pi/2]$ вычисляется по формуле $g' = -k/\sin 2\alpha + 2$. Если $k \geq 2$, то g строго монотонно убывает, минимум g на отрезке будет достигаться в точке $\alpha = \pi/2$: $g(\pi/2) = \pi$, значит, уравнение (3.6) имеет только одно решение при $n = 1$ и не имеет решения при других n . Решение $\alpha = \pi/2$ соответствует четырехзвенной замкнутой геодезической, составленной из двух образующих цилиндра и двух диаметров. Пусть $k < 2$. Тогда $\alpha_0 = \arcsin(k/2)$ – точка минимума g . Найдем минимальное значение g :

$$g_k(\alpha_0) = k \operatorname{ctg} \arcsin \frac{k}{2} + 2 \arcsin \frac{k}{2} = \sqrt{k(2-k)} + 2 \arcsin \frac{k}{2} := f(k).$$

Исследуем на количество решений уравнение $f(k) = \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{2-2k}{2\sqrt{(2-k)k}} + \frac{1}{\sqrt{1-k/2}} = \frac{1-k}{\sqrt{(2-k)k}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}\sqrt{1-k/2}} \\ &= \frac{1-k}{\sqrt{(2-k)k}} + \frac{1}{\sqrt{2-k}\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{2-k}}{\sqrt{k}} > 0. \end{aligned}$$

Получаем, что на $[0, 2]$ функция $f(k)$ монотонно возрастает от 0 до π ; поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ существует решение уравнения $g_k(\alpha_0) = \pi/n$, т.е. минимум $g_k(\alpha)$ достигается в точке π/n .

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k = h/r$ – отношение высоты цилиндра к его радиусу. Тогда при любом значении k существует замкнутая геодезическая без самопересечений, образованная образующими цилиндра и диаметрами дисков, и при этом:

- 1) если $k \geq 2$, то других замкнутых несамопересекающихся геодезических нет;
- 2) если $k < 2$, то при любом фиксированном значении k (т.е. при любой заданной конфигурации цилиндра) число замкнутых геодезических без самопересечений конечно: существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что всем таким n , что $1 \leq n < n_0$, отвечают две различные замкнутые несамопересекающиеся геодезические, имеющие $4n$ звеньев; при $n = n_0$ – одна с $4n_0$ звеньями, при $n > n_0$ замкнутых несамопересекающихся геодезических с $4n$ звеньями нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Различными считаем геодезические, составляющие различные углы с основанием цилиндра, с точностью до вращения относительно оси цилиндра.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. При уменьшении k (т.е. при “расширении” цилиндра) число n_0 возрастает. Таким образом, чем шире цилиндр, тем больше существует на нем замкнутых геодезических без самопересечений с различным числом звеньев, причем максимально возможное количество звеньев геодезической растет.

3.3. Простые замкнутые геодезические на поверхности, образованной двумя конусами. Рассмотрим поверхность, состоящую из двух конусов, соединенных по основанию. Пусть R – радиус основания, r_1, r_2 – длины образующих конусов, γ_1, γ_2 – углы разверток конусов. Найдём все замкнутые простые (т.е. самонепересекающиеся) геодезические на этой поверхности. Для этого докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6. Рассмотрим конус конечной высоты и геодезическую, выпущенную под углом α к основанию конуса. Пусть угол развертки конуса равен γ .

Тогда если $\alpha > \gamma/2$, то геодезическая имеет самопересечения. При $\alpha \leq \gamma/2$ самопересечения отсутствуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим развертку конуса. Пусть $\gamma \geq \pi$ (рис. 7; жирным выделена геодезическая). Тогда с точностью до симметрий и поворотов достаточно рассмотреть геодезические, выходящие из точки A и составляющие угол от 0 до $\pi/2$ с основанием конуса. Так как геодезические на развертке конуса – это прямые на плоскости, то такие геодезические не будут иметь самопересечений, и утверждение теоремы доказано для $\gamma \geq \pi$.

Пусть $\gamma < \pi$, и пусть ABC – развертка конуса. С точностью до симметрий и поворотов достаточно рассмотреть геодезические, выходящие из точки A и составляющие угол от 0 до $\pi/2$ с основанием конуса. Если геодезическая не

Рис. 7

пересекает сторону CB , то она не имеет самопересечений, так как является хордой окружности на развертке. Этот случай соответствует $\alpha \leq \gamma/2$.

Если же геодезическая пересекает сторону CB , то она имеет самопересечения. Для этого достаточно доказать, что за конечное число обходов конуса она пересечет его основание.

Рис. 8

Пусть геодезическая пересекает сторону CB . Тогда продолжим ее после пересечения с CB на копию развертки, что иллюстрирует ее дальнейшее поведение. Продолжаем этот процесс до ее пересечения с дугой окружности (рис. 8; жирным выделена геодезическая). Так как “продолженная” геодезическая пересечет дугу окружности (поскольку является просто хордой), то она самопересечется. Этот случай соответствует $\alpha > \gamma/2$.

Лемма доказана.

Определим характеристику k поверхности следующим образом:

$$k := \frac{\pi R}{r_1 + r_2} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2(\gamma_1 + \gamma_2)},$$

где R – радиус основания, r_1, r_2 – длины образующих. Пусть γ_1, γ_2 – углы разверток конусов.

ТЕОРЕМА 6. *Рассмотрим два случая.*

1) Пусть оба угла γ_1, γ_2 больше или равны π .

Тогда для любой характеристики k поверхности и для любого натурального числа n существует угол $\alpha \in (0, \pi/2)$ такой, что геодезическая, выпущенная

под этим углом α к окружности пересечения конусов, имеет $2n$ звеньев, является замкнутой и не имеет самопересечений. Причем геодезическая определяется углом α единственным образом с точностью до поворотов. Других замкнутых несамопересекающихся геодезических нет. Более того, связь между углом α и количеством звеньев такова: $\alpha = k/n$.

2) Пусть хотя бы один из углов γ_1, γ_2 меньше π .

Тогда для любой характеристики k поверхности и для любого натурального числа $n \geq 2k/\min \gamma_i$ существует угол $\alpha \in (0, \pi/2)$ такой, что геодезическая, выпущенная под этим углом α к окружности пересечения конусов, имеет $2n$ звеньев, является замкнутой и не имеет самопересечений. Причем геодезическая определяется углом α единственным образом с точностью до поворотов. Других замкнутых несамопересекающихся геодезических нет.

Более того, связь между углом α и количеством звеньев такова: $\alpha = k/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Известно, что геодезические на конусе – это прямые на его развертке. Имеем $l_1(\alpha) = 2\alpha r_1$, $l_2(\alpha) = 2\alpha r_2$ – длины дуг окружностей, ограниченных хордой, составляющей угол α с основанием. Пользуясь предложением 4, получаем $2\alpha r_1 + 2\alpha r_2 = 2\pi R/n$. Отсюда $\alpha = k/n$.

2) Из леммы 6 следует, что при $\alpha \geq \gamma_i/2$ геодезическая, выпущенная под таким углом, будет иметь самопересечения. Следовательно, будем рассматривать те геодезические, у которых угол с основанием меньше $\gamma_i/2$ для любого i . Дальнейшие рассуждения повторяют случай 1) теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Утверждение теоремы 6 остается верным, когда один из углов γ_i (или сразу оба) равен 2π .

§ 4. Исследование геодезических на устойчивость

Теперь исследуем найденные геодезические на поверхности, образованной двумя одинаковыми конусами (см. п. 3.3), на устойчивость в определенном классе возмущений. Для этого напомним следующие определения и докажем следующие леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Геодезическая называется *неустойчивой*, если индекс формы второй вариации функционала длины больше 0 (см. [32]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Индексом симметричной квадратичной формы называется число отрицательных собственных чисел.

ЛЕММА 7. Рассмотрим поверхность, состоящую из двух одинаковых конусов, соединенных по основанию. Пусть R – радиус основания, r – длина образующих конусов. Положим $R = 1$. Рассмотрим на этой поверхности следующую замкнутую кривую, состоящую из $2n$ звеньев. Первые $2n - 1$ звеньев – геодезические на конусах, выпущенные под углом $\alpha + \varepsilon_i$ к основанию $i = 1, \dots, 2n - 1$ (соответственно). Последнее звено – геодезическая на конусе, замыкающая первое звено. Обозначим длину такой кривой через $l(\varepsilon)$, где

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1})$. Тогда

$$l(\varepsilon) = 2r \sin(\alpha + \varepsilon_1) + 2r \sin(\alpha + \varepsilon_2) + \dots + 2r \sin(\alpha + \varepsilon_{2n-1}) \\ + 2r \sin \frac{2\pi - 2r(\alpha + \varepsilon_1) - \dots - 2r(\alpha + \varepsilon_{2n-1})}{2r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые $2n - 1$ звеньев – хорды на развертке конуса, выпущенные под углом $\alpha + \varepsilon_i$ к касательной (соответственно). Их длины равны $2r \sin(\alpha + \varepsilon_i)$ соответственно. Эти хорды заматают дугу окружности, по длине равную $2(\alpha + \varepsilon_i)r$. Тогда последнее звено заматает дугу окружности, по длине равную $2\pi - 2(\alpha + \varepsilon_1)r - \dots - 2(\alpha + \varepsilon_{2n-1})r$. Значит, оно образует с основанием угол

$$\frac{2\pi - 2(\alpha + \varepsilon_1)r - \dots - 2(\alpha + \varepsilon_{2n-1})r}{2r}.$$

Следовательно, длина последнего звена равна

$$2r \sin \frac{2\pi - 2(\alpha + \varepsilon_1)r - \dots - 2(\alpha + \varepsilon_{2n-1})r}{2r}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 7. Рассмотрим поверхность, состоящую из двух одинаковых конусов, соединенных по основанию, и замкнутую геодезическую на ней без самопересечений. Пусть R – радиус основания, r – длина образующих конусов. Пусть геодезическая имеет $2n$ звеньев. Положим $R = 1$. Рассмотрим следующий класс возмущений: “пошевелим” геодезическую, изменив угол α независимо на изломах геодезической на малую величину ε_i , $i \leq 2n - 1$; получившиеся углы равны $\alpha + \varepsilon_i$ соответственно. Чтобы выпущенная геодезическая осталась замкнутой, соединим конец $(2n - 1)$ -го звена с началом первого. Тогда наша геодезическая неустойчива в данном классе возмущений, и ее индекс равен $2n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6 известно, что геодезическая имеет с основанием конусов угол $\alpha = \pi/(2nr)$.

Ясно, что длина возмущенной кривой будет полностью определяться компонентами $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1})$. Обозначим ее $l(\varepsilon)$. По лемме 7

$$l(\varepsilon) = 2r \sin(\alpha + \varepsilon_1) + 2r \sin(\alpha + \varepsilon_2) + \dots + 2r \sin(\alpha + \varepsilon_{2n-1}) \\ + 2r \sin \frac{2\pi - 2r(\alpha + \varepsilon_1) - \dots - 2r(\alpha + \varepsilon_{2n-1})}{2r}, \\ \frac{\partial l}{\partial \varepsilon_i}(\varepsilon) = 2r \cos(\alpha + \varepsilon_i) - 2r \cos \frac{2\pi - 2r(\alpha + \varepsilon_1) - \dots - 2r(\alpha + \varepsilon_{2n-1})}{2r}.$$

С учетом того, что $\alpha = \pi/(2nr)$, получаем

$$\frac{\partial l}{\partial \varepsilon_i}(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, 2n - 1, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \varepsilon_i^2}(\varepsilon) = -2r \sin(\alpha + \varepsilon_i) - 2r \sin \frac{2\pi - 2r(\alpha + \varepsilon_1) - \dots - 2r(\alpha + \varepsilon_{2n-1})}{2r},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j}(\varepsilon) &= -2r \sin \frac{2\pi - 2r(\alpha + \varepsilon_1) - \dots - 2r(\alpha + \varepsilon_{2n-1})}{2r}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \varepsilon_i^2}(0) &= -2r \sin(\alpha) - 2r \sin \frac{2\pi - 2r(2n-1)\alpha}{2r}, \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j}(0) &= -2r \sin \frac{2\pi - 2r(2n-1)\alpha}{2r} \quad \text{при } \alpha = \frac{\pi}{2rn}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \varepsilon_i^2}(0) = -4r \sin \frac{\pi}{2rn}, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j}(0) = -2r \sin \frac{\pi}{2rn}.$$

Осталось найти знаки собственных чисел такой матрицы. Для этого представим нашу матрицу в виде следующей суммы:

$$-2r \sin \frac{\pi}{2rn} E - 2r \sin \frac{\pi}{2rn} A,$$

где A – матрица, составленная из единиц. Все ее собственные значения – нули, за исключением одного, равного $2n-1$. (Легко угадываются собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям: это $(-c_{n-1} - c_{n-2} - \dots - c_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ и $(c, \dots, c)$ соответственно.) Ортогональными преобразованиями приведем сумму матриц к виду

$$-2r \sin \frac{\pi}{2rn} E - 2r \sin \frac{\pi}{2rn} B,$$

где B – матрица, оставленная из нулей, за исключением числа $2n-1$ в верхнем левом углу. Очевидно, все собственные значения такой суммы матриц имеют знак минус. Отсюда вытекает утверждение теоремы 7.

§ 5. Сопряженные точки на поверхностях

5.1. Сопряженные точки на поверхности, образованной двумя конусами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\Gamma = \Gamma(t)$ – геодезическая на многообразии M , $t \in [0, c]$, где $c > 0$ – действительное число. Пусть $D(t, u)$ – геодезическая деформация Γ , т.е. $D(\cdot, u)$ – геодезическая для любого u , причем $D(t, 0) = \Gamma(t)$ для любого $t \in [0, c]$.

Тогда векторное поле

$$J(t) = \left. \frac{\partial D(t, u)}{\partial u} \right|_{u=0}$$

вдоль $\Gamma(t)$ называется *полем Якоби*.

Если также $J(a) = 0$, $J(b) = 0$, где $a, b \in [0, c]$, и $J(t)$ отлично от тождественного нуля, то точки $\Gamma(a)$ и $\Gamma(b)$ на M называются *сопряженными точками вдоль Γ* .

Теперь найдем сопряженные точки на поверхности, составленной из двух одинаковых конусов, соединенных по основанию.

ТЕОРЕМА 8. Рассмотрим поверхность, состоящую из двух одинаковых конусов, соединенных по основанию. Пусть $R = 1$ – радиус основания, r – длина образующих конусов. Рассмотрим замкнутую геодезическую, выходящую под углом α к окружности основания. Пусть эта геодезическая имеет $2n$ звеньев. Пусть точка, для которой мы ищем сопряженные точки, лежит на окружности стыка конусов. Тогда сопряженных точек к ней столько, сколько звеньев у геодезической (считая саму эту точку), каждая из которых принадлежит соответствующему звену и лежит на расстоянии $\frac{2kr}{2k+1} \sin \alpha$ от последнего пересечения геодезической с окружностью стыка, где $(k+1)$ – номер звена геодезической.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Сопряженные точки в теореме 8 найдены за один оборот геодезической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Сопряженные точки будем искать следующим образом. Выпустим из точки на окружности стыка (где исходная геодезическая пересекает окружность стыка) геодезическую под углом $\alpha + \varepsilon$. Будем уменьшать ε и смотреть, где геодезическая пересекает исходную. Предел точек пересечения и есть сопряженная точка. Для начала поймем, что при достаточно малом ε наши геодезические будут пересекаться в каждом звене. Действительно, $(k+1)$ -е звенья геодезических будут пересекаться, если выполнено неравенство

$$2(\alpha + \varepsilon)rk - 2\alpha rk \leq 2\alpha r.$$

Это неравенство означает, что точка выхода $(k+1)$ -го звена исходной геодезической находится позже (на стыке по ходу геодезических), чем точка входа $(k+1)$ -го звена второй геодезической.

Видим, что при достаточно малых ε неравенство выполнено всегда.

Теперь найдем расстояние от последнего пересечения линии стыка исходной геодезической до точки пересечения с возмущенной геодезической.

Рассмотрим $(k+1)$ -е звено исходной геодезической. Пусть точки A и G – его начало и конец соответственно. Точка C – точка начала $(k+1)$ -го звена возмущенной геодезической. Точка D – вершина конуса. Пусть точка B – точка пересечения геодезических. Выпустим из точки C отрезок геодезической (до пересечения с окружностью стыка) под углом α к окружности стыка. Она пересечет исходную геодезическую в точке E , а окружность стыка – в точке F (рис. 9).

Рис. 9

Угол $\angle ADC$ равен $2\epsilon k$ (как разность углов, замеченных исходной и возмущенной геодезическими). Тогда угол $\angle FEG$ также равен $2\epsilon k$; угол $\angle BEC$ равен $2\epsilon k$ как вертикальный к нему. Значит, угол $\angle ABC$ равен $2\epsilon k + \epsilon$ (так как угол $\angle BCE$ равен ϵ). Из треугольника ADC находим, что AC равен $2r \sin(\epsilon k)$. Угол $\angle BAC$ равен $\alpha - \epsilon k$, т.е. в треугольнике ABC вычислены все углы и одна сторона. Используя теорему синусов, находим

$$AB = \frac{2r \sin(\epsilon k) \sin(\pi - \epsilon k - \epsilon - \alpha)}{\sin(2\epsilon k + \epsilon)}.$$

Теперь найдем предел выражения при $\epsilon \rightarrow 0$. Используя замечательные пределы, находим, что предел расстояния равен $\frac{2kr}{2k+1} \sin \alpha$. Теперь проверим, что это действительно сопряженная точка (проверим определение 7). Найдем длину отрезка, перпендикулярного исходной геодезической и соединяющего найденную точку с возмущенной геодезической. Оно равно

$$\left| \frac{2r \sin(\epsilon k) \sin(\epsilon k + \epsilon + \alpha)}{\sin(2\epsilon k + \epsilon)} - \frac{2kr}{2k+1} \sin \alpha \right| \frac{\sin(2\epsilon k + \epsilon)}{\cos(2\epsilon k + \epsilon)}$$

при $\epsilon > 0$ и равно 0 при $\epsilon = 0$.

Производная этого выражения по ϵ при $\epsilon = 0$ равна 0, следовательно, найденная точка сопряженная.

Теорема 8 доказана.

Теперь найдем сопряженные точки на поверхности, составленной из двух одинаковых конусов, соединенных по основанию, к точке, которая лежит на фиксированном расстоянии от последнего пересечения геодезической окружности стыка.

ТЕОРЕМА 9. *Рассмотрим поверхность, состоящую из двух одинаковых конусов, соединенных по основанию. Пусть $R = 1$ – радиус основания, r – длина образующих конусов. Рассмотрим замкнутую геодезическую, выходящую под углом α к окружности основания. Пусть эта геодезическая имеет $2n$ звеньев. Пусть точка, для которой мы ищем сопряженные точки, лежит на расстоянии b от начала соответствующего звена геодезической. Тогда сопряженных точек к ней столько, сколько звеньев у геодезической (считая саму эту точку), каждая из которых принадлежит соответствующему звену и лежит на расстоянии*

$$\frac{(br + 2kr^2 \sin \alpha - 2brk) \sin \alpha}{(2k+1)r \sin \alpha - 2bk}$$

от начала этого звена, где $k+1$ – номер звена геодезической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вершину конуса через E , точку пересечения нашей геодезической с окружностью стыка – через A . Сопряженные точки будем искать следующим образом: из точки на исходной геодезической на расстоянии b от окружности стыка (обозначим эту точку C) выпустим геодезическую, пересекающую окружность стыка в точке B (в этом звене) такую, что угол $\angle AEB$ равен ϵ . Обозначим вторую точку пересечения исходной геодезической с окружностью стыка через F , а вторую точку пересечения возмущенной

геодезической с окружностью стыка – через H . Из точки B выпустим под углом α к окружности стыка геодезическую. Вторую точку пересечения этой геодезической с окружностью стыка обозначим через G (рис. 10).

Рис. 10

Отрезок AB равен $2r \sin(\varepsilon/2)$. Угол $\angle BAC$ равен $\alpha - \varepsilon/2$. Из треугольника ABC то теореме синусов и косинусов находим угол $\angle ACB$:

$$\arcsin \frac{2r \sin(\varepsilon/2) \sin(\alpha - \varepsilon/2)}{\sqrt{4r^2 \sin^2(\varepsilon/2) + b^2 - 4rb \sin(\varepsilon/2) \cos(\alpha - \varepsilon/2)}}.$$

Обозначим это выражение через Y . Следовательно, угол $\angle CBG$ равен $Y - \varepsilon$. Далее, повторяя рассуждения теоремы 8, находим, что искомое расстояние равно

$$\frac{2r \sin(\varepsilon/2 + Yk - \varepsilon k) \sin(\pi + \varepsilon/2 + Yk - \varepsilon k - \alpha - Y - 2Yk + 2\varepsilon k)}{\sin(Y + 2Yk - 2\varepsilon k)},$$

а его предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен

$$\frac{(br + 2kr^2 \sin \alpha - 2brk) \sin \alpha}{(2k + 1)r \sin \alpha - 2bk}.$$

Теорема 9 доказана.

5.2. Сопряженные точки бильярда в диске и на поверхности вращения. Пусть M^n – гладкое риманово многообразие, геодезический поток которого вполне интегрируем по Лиувиллю, или интегрируемый двумерный локально плоский бильярд. Необходимые определения и свойства таких бильярдов см. в [33] и в работе В. В. Фокичевой [34]. Остановимся для определенности на изучении геодезического потока гладкого многообразия M^n .

Как известно, из интегрируемости геодезического потока в смысле Лиувилля (см. [35]–[39]) следует, что кокасательное расслоение T^*M несет на себе структуру слоения Лиувилля, регулярные слои которого являются n -мерными торами (называемыми торами Лиувилля), а особые слои получаются при бифуркациях – перестройках этих торов. А. Т. Фоменко сформулировал вопрос: какова связь между торами Лиувилля интегрируемого геодезического потока и сопряженными точками вдоль геодезических на исходном многообразии M ? Более подробно результаты в этом направлении будут изложены в других публикациях. Здесь же мы рассмотрим частный случай, связанный с темой настоящей статьи.

Как известно, геодезический поток метрики на гладкой поверхности вращения вполне интегрируем по Лиувиллю. Топология замыканий интегральных траекторий (решений системы), т.е. топология соответствующего слоения Лиувилля (трехмерной изоэнергетической поверхности на двумерные торы Лиувилля), подробно изучена в работе Е. И. Кантонистовой [40]. Значительный интерес представляет вопрос о полной интегрируемости геодезического потока (это известно) и слоении Лиувилля в случае кусочно гладкой поверхности вращения (например, составленной из поверхностей постоянной кривизны). Рассматриваемый нами случай кусочно гладкой поверхности, составленной из двух конусов, является интересным частным случаем. Выше мы описали замкнутые геодезические (они оказались неустойчивыми) и оценили снизу их индекс.

Рассмотрим предельный случай, когда высота обоих конусов стремится к нулю и, следовательно, поверхность стремится к плоскому двумерному диску. В этом случае геодезические на “склеенных конусах” превращаются в ломаные траектории на плоском диске, задающие обычный бильярд, с законом отражения на границе диска: угол падения равен углу отражения. При нашем подходе естественно считать, что геодезическая, “ударившись” о граничную окружность, переходит потом на “другую сторону” плоского диска. После каждой точки отражения-преломления) кусочно линейная траектория движется либо по “верхнему” диску, либо по “нижнему”. Спрашивается, что происходит с найденными нами сопряженными точками на “склеенных конусах”, когда конусы “сплющиваются” и превращаются в два плоских диска, склеенных в один диск (верхняя и нижняя “стороны” диска)? В данном примере “предел сопряженных точек” описывается очень естественно.

ТЕОРЕМА 10 (Е.А. Кудрявцева). *Рассмотрим бильярд в диске. Пусть геодезическая не проходит через центр диска. Она касается некоторого внутреннего диска, концентрического с исходным. Тогда сопряженными точками являются точки касания с внутренним диском.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сместим первую точку касания A вдоль границы внутреннего диска на малое расстояние a . Тогда после столкновения с внешним диском такая (смещенная) траектория бильярда опять коснется внутреннего диска в точке на расстоянии порядка a от второй точки касания B . Построенная (смещенная) траектория бильярда состоит из двух отрезков. Возьмем точку $A' = A'(a)$ на первом отрезке (точнее, на содержащей его прямой), ближайшую к точке A (на расстоянии порядка a^2 от A), а на втором отрезке (точнее, на содержащей его прямой) – точку $B' = B'(a)$, ближайшую к точке B (тоже на расстоянии порядка a^2 от B). В качестве (геодезической, или бильярдной) деформации траектории AB рассмотрим бильярдную траекторию $A'B' = A'(a)B'(a)$ (зависящую от параметра a). Тогда производная $A'B'$ по a при $a = 0$ – это якобиево векторное поле вдоль траектории AB , причем в концах траектории оно равно нулю:

$$\left. \frac{d|A'A|}{da} \right|_{a=0} = 0, \quad \left. \frac{d|B'B|}{da} \right|_{a=0} = 0,$$

так как

$$\frac{d(a^2)}{da} = 0 \quad \text{при } a = 0.$$

Поэтому точки A и B сопряжены вдоль билиардной траектории AB . Теорема доказана.

Теперь рассмотрим более общий случай. Найдем сопряженные точки на поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$, профильная кривая которой – кусочно гладкая кривая.

ЛЕММА 8. *Рассмотрим две касающиеся друг друга кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть в некоторой ε -окрестности точки касания кривых дифференцируемы. Тогда в этой ε -окрестности выполняется равенство*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| = O(t^2).$$

ТЕОРЕМА 11 (Е. А. Кудрявцева). *Рассмотрим поверхность вращения $\mathbf{M}$ в $\mathbb{R}^3$ с индуцированной на ней из $\mathbb{R}^3$ метрикой. Пусть радиус-вектор поверхности $\mathbf{M}$ задается формулой $\vec{r}(r, \varphi) = (f(r) \cos \varphi, f(r) \sin \varphi, g(r))$, где (r, φ) – координаты на $\mathbf{M}$, $\zeta(r) := (f(r), g(r))$, $r \in (a, b)$, – кусочно гладкая кривая в плоскости Oxz такая, что $|\zeta| = 1$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Предположим, что существуют такие числа $r_1, r_2 \in (a, b)$, что (рис. 11):*

- 1) выполняется равенство $f(r_1) = f(r_2) =: f_0$;
- 2) выполняется неравенство $f(r)|_{(r_1, r_2)} > f_0$;
- 3) функции $f(r)$ и $g(r)$ дифференцируемы в окрестности точек r_i , $i \in \{1, 2\}$, причем $f'(r_i) \neq 0$ при $i = 1, 2$ (т.е. параллели $\{r_i\} \times S^1$ не являются экватором).

Известно, что тогда существует осциллирующая геодезическая $\gamma(t) = \vec{r}(r(t), \varphi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, на $\mathbf{M}$ в $[r_1, r_2] \times S^1$ такая, что $\min r(t) = r_1$, $\max r(t) = r_2$.

Тогда точки пересечения геодезической $\gamma(t)$ с окружностями

$$S_{r_1} := \vec{r}(\{r_1\} \times S^1), \quad S_{r_2} := \vec{r}(\{r_2\} \times S^1)$$

суть сопряженные точки вдоль $\gamma(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую геодезическую деформацию кривой $\gamma(t)$:

$$\gamma_\varepsilon(t) := \vec{r}(r(t), \varphi(t) + \varepsilon).$$

Ясно, что при такой деформации первая точка касания $A = \gamma(0)$ кривой $\gamma(t)$ с окружностью S_{r_1} сместится вдоль этой окружности на малое расстояние ε . Тогда после пересечения экваторов поверхности $\mathbf{M}$ возмущенная геодезическая γ_ε коснется окружности S_{r_2} в точке на расстоянии порядка ε от первой точки касания $B = \gamma(1)$ геодезической $\gamma(t)$ с окружностью S_{r_2} . Возьмем точку $A' = A'(\varepsilon)$ на возмущенной геодезической $\gamma_\varepsilon(t)$, ближайшую к точке A (на расстоянии порядка ε^2 от A (см. лемму 8)), и точку $B' = B'(\varepsilon)$ на возмущенной геодезической, ближайшую к точке B (тоже на расстоянии порядка ε^2 от B). Сделаем замену параметра t у возмущенной геодезической так, чтобы $\gamma_\varepsilon(0) = A'$, $\gamma_\varepsilon(1) = B'$. Тогда производная геодезической $\gamma_\varepsilon(t)$ по ε при

Рис. 11

$\varepsilon = 0$ – это якобиево векторное поле вдоль дуги AB геодезической $\gamma(t)$, причем в концах геодезической $\gamma_\varepsilon(t)$ оно равно нулю:

$$\left. \frac{d|A'A|}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left. \frac{d|B'B|}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

так как

$$\frac{d(\varepsilon^2)}{d\varepsilon} = 0 \quad \text{при } \varepsilon = 0.$$

Поэтому точки A и B сопряжены вдоль геодезической $\gamma(t)$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] G. D. Birkhoff, “Dynamical systems with two degrees of freedom”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18** (1917), 199–300.
- [2] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, М.–Л., ГИТТЛ, 1950, 428 с.; нем. пер.: A. D. Alexandrow, *Konvexe polyeder*, Math. Lehrbucher und Monogr., **VIII**, Akademie-Verlag, Berlin, 1958, x+419 pp.
- [3] В. Ю. Протасов, “Замкнутые геодезические на поверхности симплекса”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 103–120; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Closed geodesics on the surface of a simplex”, *Sb. Math.*, **198**:2 (2007), 243–260.
- [4] Г. Штейнгауз, *Сто задач*, 4-е изд., М., Наука, 1980, 144 с.; пер. с польск.: H. Steinhaus, *Sto zadań*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1958, 196 pp.
- [5] А. Пуанкаре, “О геодезических линиях на выпуклых поверхностях”, *Избранные труды*, т. 2, М., Наука, 1972, 735–774; пер. с фр.: H. Poincaré, “Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1905), 237–274.

- [6] В. Клингенберг, *Лекции о замкнутых геодезических*, Мир, М., 1982, 416 с.; пер. с англ.: W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren Math. Wiss., **230**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, x+227 pp.
- [7] А. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, М., Мир, 1980, 327 с.; пер. с англ.: A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **93**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, ix+262 pp.
- [8] Р. Ботт, “Многообразия, на которых все геодезические замкнуты”, *Расслоенные пространства и их приложения*, М., ИЛ, 1958, 115–123; пер. с англ.: R. Bott, “On manifolds all of whose geodesics are closed”, *Ann. of Math.* (2), **60**:3 (1954), 375–382.
- [9] С. И. Альбер, “Топология функциональных многообразий и вариационное исчисление в целом”, *УМН*, **25**:4(154) (1970), 57–122; англ. пер.: S. I. Al’ber, “The topology of functional manifolds and the calculus of variations in the large”, *Russian Math. Surveys*, **25**:4 (1970), 51–117.
- [10] Д. В. Аносов, “О типичных свойствах замкнутых геодезических”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:4 (1982), 675–709; англ. пер.: D. V. Anosov, “On generic properties of closed geodesics”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:1 (1983), 1–29.
- [11] Г. Буземан, *Геометрия геодезических*, Физматгиз, М., 1962, 504 с.; пер. с англ.: H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New York, 1955, x+422 pp.
- [12] Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, М., Наука, 1982, 480 с.; пер. с англ.: J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, 3rd ed., Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1972, xv+408 pp.
- [13] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, М., Мир, 1971, 343 с.; пер. с нем.: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Lecture Notes in Math., **55**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1968, vi+287 pp.
- [14] Дж. Милнор, *Теория Морса*, М., Мир, 1965, 184 с.; пер. с англ.: J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud., **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963, vi+153 pp.
- [15] К. Г. Якоби, *Лекции по динамике*, М., ОНТИ, 1936, 272 с.; пер. с нем.: C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, 2. rev. Ausg., C. G. J. Jacobi’s gesammelte Werke, G. Reimer, Berlin, 1884, viii+300 pp.
- [16] О. А. Загрядский, Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев, “Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения”, *Матем. сб.*, **203**:8 (2012), 39–78; англ. пер.: O. A. Zagryadskii, E. A. Kudryavtseva, D. A. Fedoseev, “A generalization of Bertrand’s theorem to surfaces of revolution”, *Sb. Math.*, **203**:8 (2012), 1112–1150.
- [17] О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, “О явном виде метрик Бертрана”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2013, № 5, 46–50; англ. пер.: D. A. Fedoseev, O. A. Zagryadskii, “The explicit form of the Bertrand metric”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **68**:5 (2013), 258–262.
- [18] Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев, “Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения”, *Матем. сб.*, **206**:5 (2015), 105–124.
- [19] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Branching solutions to one-dimensional variational problems*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001, xxii+342 pp.
- [20] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, М.–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003, 424 с.
- [21] Н. П. Стрелкова, “Реализация плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках”, *Докл. РАН*, **435**:4 (2010), 463–465; англ. пер.: N. P. Strelkova, “Realization of plane graphs as closed locally minimal nets on convex polyhedra”, *Dokl. Math.*, **82**:3 (2010), 939–941.

- [22] Н. П. Стрелкова, “Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров”, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011), 141–160; англ. пер.: N. P. Strelkova, “Closed locally minimal nets on tetrahedra”, *Sb. Math.*, **202**:1 (2011), 135–153.
- [23] А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко, *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*, М., Наука, 1991, 175 с.; англ. пер.: A. T. Fomenko, A. A. Tuzhilin, *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*, Transl. Math. Monogr., **93**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+142 pp.
- [24] Нгуен Тьен Зунг, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере”, *УМН*, **45**:6(276) (1990), 91–111; англ. пер.: Nguyen Tien Zung, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable non-degenerate Hamiltonians on a constant energy three-dimensional sphere”, *Russian Math. Surveys*, **45**:6 (1990), 109–135.
- [25] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Application of classification theory for integrable Hamiltonian systems to geodesic flows on 2-sphere and 2-torus and to the description of the topological structure of momentum mapping near singular point”, *J. Math. Sci.*, **78**:5 (1996), 542–555.
- [26] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, *Матем. сб.*, **189**:10 (1998), 5–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, A. T. Fomenko, “Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry”, *Sb. Math.*, **189**:10 (1998), 1441–1466.
- [27] А. В. Болсинов, В. В. Козлов, А. Т. Фоменко, “Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *УМН*, **50**:3(303) (1995), 3–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. V. Kozlov, A. T. Fomenko, “The Maupertuis principle and geodesic flows on the sphere arising from integrable cases in the dynamics of a rigid body”, *Russian Math. Surveys*, **50**:3 (1995), 473–501.
- [28] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “The geodesic flow of an ellipsoid is orbitally equivalent to the integrable Euler case in the dynamics of a rigid body”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **50**:3 (1995), 412–417.
- [29] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:3 (1995), 1–15; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Orbital classification of geodesic flows on two-dimensional ellipsoids. The Jacobi problem is orbitally equivalent to the integrable Euler case in rigid body dynamics”, *Funct. Anal. Appl.*, **29**:3 (1995), 149–160.
- [30] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях*, Библиотека «Регулярная и хаотическая динамика», **2**, М., Едиториал УРСС, 1999, 328 с.
- [31] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Лекции по дифференциальной геометрии и топологии*, М., МГУ, 2012, 176 с.
- [32] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, т. 1–3, 6-е изд., М., УРСС, 2013, 920 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications*, Part I, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1984, xv+464 pp.; Part II, **104**, 1985, xv+430 pp.; Part III, **124**, 1990, x+416 pp.
- [33] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М., Изд-во МГУ, 1991, 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., **89**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171 pp.

- [34] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2012, № 5, 31–34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, “Description of singularities for the “billiard in an ellipse” system”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:5-6 (2012), 217–220.
- [35] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко, “Топология и особенности бильярдов”, *Материалы международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна”*–2014, Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж, 2014, 372–385.
- [36] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.* (в печати).
- [37] В. В. Фокичева, “Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами”, *Матем. сб.*, **205**:8 (2014), 139–160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas”, *Sb. Math.*, **205**:8 (2014), 1201–1221.
- [38] А. Т. Фоменко, “Topological classification of integrable systems and billiards in confocal quadrics”, *13th Serbian Mathematical Congress. Book of abstracts* (Vrnjacka Banja, Serbia, May 22–25, 2014), Faculty of sciences and mathematics, University of Nis, Belgrade, 2014, 82.
- [39] А. Т. Фоменко, “Topological classification of integrable systems and billiards in confocal quadrics”, *XVIII Geometrical Seminar. Book of abstracts* (Vrnjacka Banja, Serbia, May 25–28, 2014), Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Belgrade, 2014, 38–39.
- [40] Е. О. Кантонистова, “Целочисленные решетки переменных действие для обобщенного случая Лагранжа”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2012, № 1, 54–58; англ. пер.: Е. О. Kantonistova, “Integer lattices of the action variables for the generalized Lagrange case”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:1 (2012), 36–40.

Ирина Владимировна Сыпченко
(Irina V. Sypchenko)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: isypchenko@gmail.com

Поступила в редакцию
10.11.2014 и 20.11.2014

Дарья Сергеевна Тимонина
(Dar'ya S. Timonina)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: darik93@yandex.ru