Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шерстюков, Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 9, 139–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:44:41

УДК 517.547.2

В. Б. Шерстюков

Распределение нулей канонических произведений и весовой индекс конденсации

Рассматриваются канонические произведения с симметричными вещественными нулями. Изучается вопрос об измеримости последовательности нулей в терминах весового индекса конденсации. Выделен естественный класс весовых функций, для которых конечность индекса конденсации гарантирует измеримость последовательности нулей. Показана точность основного условия, характеризующего упомянутый класс.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: каноническое произведение, измеримая последовательность нулей, индекс конденсации.

DOI: 10.4213/sm8446

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность положительных чисел вида

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \quad (1.1)$$

Предполагаем, что Λ имеет конечную положительную *верхнюю плотность*

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}, \quad 0 < \overline{\Delta}(\Lambda) < +\infty. \quad (1.2)$$

Нижняя плотность последовательности Λ , т.е. число

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}, \quad (1.3)$$

может не совпадать с верхней плотностью, и такие последовательности называют *неизмеримыми*. Если $\underline{\Delta}(\Lambda) = \overline{\Delta}(\Lambda)$, то существует обычный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/\lambda_n)$, который называют *плотностью* последовательности Λ и обозначают $\Delta(\Lambda)$. В таком случае последовательность Λ считается *измеримой*.

Рассмотрим каноническое произведение

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.4)$$

построенное по последовательности Λ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00281).

Справедливы следующие факты (см. [1; гл. I, §§ 2, 4, гл. II, § 4]). Каноническое произведение (1.4) определяет целую функцию экспоненциального типа σ , где $0 < \sigma \leq \pi \overline{\Delta}(\Lambda)$. Для индикатора функции $L(\lambda)$ верна оценка

$$h_L(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} \geq \sigma |\sin \theta|. \quad (1.5)$$

Функция $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \overline{\Delta}(\Lambda) = \Delta(\Lambda),$$

т.е. когда последовательность Λ измерима. При этом тип и индикатор вычисляются точно:

$$\sigma = \pi \Delta(\Lambda), \quad h_L(\theta) = \sigma |\sin \theta| = \pi \Delta(\Lambda) |\sin \theta|.$$

Поскольку функции вполне регулярного роста представляют значительный интерес для приложений (см. [1], [2]), то при работе с произведением (1.4) важно учитывать наличие или отсутствие плотности у последовательности Λ .

Будем изучать связь между измеримостью последовательности нулей канонического произведения (1.4) и поведением в нулях производной $L'(\lambda)$. Для этого используем важную характеристику – *весовой индекс конденсации*. Напомним основные сведения, связанные с данным понятием.

В известной монографии по рядам экспонент В. Бернштейн исследовал различные характеристики типа разреженности и сгущаемости для числовых последовательностей (см. [3; гл. II, §§ 7, 8]). В связи с этим он использовал некое (нетривиальное) понятие *индекса конденсации* и показал (см. [3; приложение II]), что для измеримой последовательности Λ вида (1.1), выражающей нули канонического произведения (1.4), индекс конденсации вычисляется по правилу

$$\delta(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \neq n} \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2} \right|. \quad (1.6)$$

Через некоторое время А. Ф. Леонтьев обратил внимание на универсальный характер величины (1.6), перенес на нее название “индекс конденсации”. Поэтому далее *стандартным индексом конденсации* будем называть именно величину (1.6), вычисленную для числовой последовательности (1.1) конечной верхней плотности (1.2).

Характеристики, подобные $\delta(\Lambda)$, встречались во многих работах, посвященных теории рядов Дирихле, вопросам интерполяции и аналитического продолжения (см., например, [4]–[10]). В частности, в [7], [8] показано, что величина (1.6) всегда неотрицательна, и найден диапазон изменения $\delta(\Lambda)$, если заданы верхняя плотность (1.2) и положительный шаг

$$h(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0 \quad (1.7)$$

последовательности Λ .

Заметим, кстати, что еще В. Бернштейн установил в [3; приложение II], что у измеримой последовательности Λ вида (1.1) с положительным шагом $h(\Lambda)$ индекс конденсации $\delta(\Lambda)$ равен нулю. Затем, в связи с работами А. Ф. Леонтьева

(см. [11; § 2], [12; задача 2]), возник обратный вопрос: будет ли измеримой всякая последовательность (1.1) с конечной верхней плотностью $\overline{\Delta}(\Lambda)$ при условии, что $\delta(\Lambda) = 0$? Ответ на вопрос оказался отрицательным – в работе [13] А. В. Братищев предложил конструкцию примера неизмеримой последовательности (1.1) с конечной верхней плотностью $\overline{\Delta}(\Lambda)$, положительным шагом $h(\Lambda)$ и нулевым индексом конденсации $\delta(\Lambda)$. Эта конструкция не является явной (она содержит элементы, трудно воплощаемые на практике), но после работы [13] стало ясно, что даже при дополнительном ограничении (1.7) нельзя охарактеризовать наличие плотности у последовательности Λ в терминах стандартного индекса конденсации $\delta(\Lambda)$. Потребовалось модифицировать понятие индекса конденсации так, чтобы с помощью новой характеристики можно было твердо гарантировать измеримость последовательности Λ .

Итак, пусть Λ – последовательность положительных чисел, подчиненная условиям (1.1), (1.2), и $L(\lambda)$ – каноническое произведение (1.4). Пусть $\omega(r)$ – положительная функция, определенная при $r \geq a$ с фиксированным $a > 0$. *Индексом ω -конденсации* (или *весовым индексом конденсации*) последовательности Λ назовем значение

$$\delta(\omega, \Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \quad (1.8)$$

Похожие характеристики встречались и ранее. Так, А. Ф. Леонтьев (см. [1; гл. II, § 6]) использовал величину

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n \ln \lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Затем в работах А. М. Гайсина (см., например, [14], [15]), посвященных решению некоторых проблем Пойа, вводилось специальное понятие весовой конденсации, фактически эквивалентное определению (1.8).

В нашей задаче применение весового индекса конденсации выглядит весьма естественным. Поясним это на примере простого перехода от стандартного индекса (1.6) к чуть более общему индексу

$$\delta_p(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \quad (1.9)$$

с фиксированным показателем $p > 0$. Индекс (1.9) есть частный случай основного определения (1.8) с весовой функцией $\omega(r) = r^p$. При $p = 1$ согласно утверждению А. В. Братищева (см. [13]) существуют неизмеримые последовательности Λ , у которых величина $\delta_1(\Lambda) = \delta(\Lambda)$ конечна и даже равна нулю. Нетрудно убедиться, что при $p > 1$ индекс (1.9) равен нулю всякий раз, когда стандартный индекс конечен, и, в частности, конструкция А. В. Братищева снова дает неизмеримые последовательности Λ с $\delta_p(\Lambda) = 0$. Но, оказывается, при $0 < p < 1$ картина принципиально меняется: любая последовательность Λ с индексом $\delta_p(\Lambda) < +\infty$ будет измеримой. Этот результат есть проявление общего правила, действующего для индексов ω -конденсации с вогнутыми функциями $\omega(r)$.

Точнее, рассматриваем *весовые функции* $\omega(r)$ со свойствами:

- (i) $\omega(r) > 0$ определена, непрерывна и строго возрастает при $r \geq a > 0$;
- (ii) $\omega(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$;
- (iii) $\omega(r)$ вогнута (не обязательно строго) при $r \geq a$, т.е.

$$\omega\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \geq \frac{\omega(r_1) + \omega(r_2)}{2} \quad \text{для любых } r_1, r_2 \geq a.$$

Значение $a > 0$ может быть своим для каждой функции $\omega(r)$.

При выполнении (i)–(iii) вопрос о том, достаточно ли условие $\delta(\omega, \Lambda) < +\infty$ для измеримости последовательности Λ , решается в терминах сходимости некого интеграла от $\omega(r)$, напоминающего интеграл из теории квазианалитических функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) удовлетворяет условию

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2} dr < +\infty. \quad (1.10)$$

Тогда всякая последовательность Λ вида (1.1), имеющая конечную верхнюю плотность (1.2) и удовлетворяющая условию

$$\delta(\omega, \Lambda) < +\infty, \quad (1.11)$$

будет измеримой.

Подчеркнем, что теорема 1 не требует ограничения (1.7) на шаг последовательности Λ . Стоит оговориться также, что условие (1.11) фигурирует в теореме как достаточное, его необходимость отнюдь не утверждается: в отличие от классического случая не исключено существование измеримых последовательностей Λ с шагом $h(\Lambda) > 0$, у которых $\delta(\omega, \Lambda) = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В противоположность стандартному индексу конденсации весовой индекс может оказаться строго отрицательным (см. [16]; ср. с [7]). Другими словами, возможно, что $\delta(\omega, \Lambda) < 0$. Тогда из определения (1.8) следует соотношение

$$|L'(\lambda_n)| \geq e^{\varepsilon\omega(\lambda_n)}, \quad n \geq n_0,$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Учитывая свойство (ii) функции $\omega(r)$, получаем, что $|L'(\lambda_n)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но это, как показано в [17; следствие теоремы 2], влечет измеримость последовательности Λ .

Требование (1.10), предъявляемое к весовой функции $\omega(r)$, является ключевым для теоремы 1. Его точность будет установлена при дополнительном предположении о правильном изменении $\omega(r)$. Напомним (см. [18]), что положительная измеримая при $r \geq a$ функция $\omega(r)$ называется *правильно меняющейся* (на бесконечности), если существует такое число $p \in \mathbb{R}$, что для каждого значения $t > 0$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t^p. \quad (1.12)$$

Известно, что соотношение (1.12) является равномерным по $t \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$. Число p называют *порядком* правильно меняющейся функции $\omega(r)$. Правильно меняющаяся функция нулевого порядка называется *медленно меняющейся*.

Точность требования (1.10) на весовую функцию $\omega(r)$ в теореме 1 подтверждает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) правильно меняется на бесконечности и удовлетворяет условию

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2} dr = +\infty. \quad (1.13)$$

Тогда найдется неизмеримая последовательность Λ вида (1.1) с положительным шагом (1.7), имеющая конечную верхнюю плотность (1.2) и удовлетворяющая условию (1.11). Более того, для любых чисел α, β , связанных соотношением $0 \leq \alpha < \beta$, означенную неизмеримую последовательность Λ можно конструктивно построить так, чтобы

$$\underline{\Delta}(\Lambda) = \alpha < \beta = \overline{\Delta}(\Lambda), \quad (1.14)$$

причем

$$\delta(\omega, \Lambda) = 0 \quad (1.15)$$

и $\delta(\Lambda) = 0$ для стандартного индекса конденсации (1.6).

Отметим типичные примеры допустимых весовых функций. Так, ясно, что $\omega(r) = \ln r$ и такие функции, как $\omega(r) = r^p$ при $0 < p < 1$ или

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q} \quad (1.16)$$

при $q > 1$, удовлетворяют условиям теоремы 1. Если же $0 < q \leq 1$, то весовая функция (1.16) дает расходящийся интеграл (1.13) и подпадает под требования теоремы 2. Кроме того, простейшая весовая функция $\omega(r) = r$, определяющая стандартный индекс конденсации (1.6), также принадлежит случаю теоремы 2, и вместо неявной конструкции А. В. Братищева (см. [13]) возникает целая серия конкретных примеров с дополнительным условием (1.14).

Конечно, большинство встречающихся на практике весовых функций обладают правильным изменением. Тем не менее стоит иметь в виду, что из (i)–(iii), вообще говоря, не вытекает свойство правильного изменения функции $\omega(r)$ независимо от того, какому из требований (1.10) или (1.13) она подчинена. Например, можно построить (см. §6) функцию $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), подчиненную требованию (1.13), так, чтобы при любом $t > 1$ выполнялось соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = 1 < t = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)}. \quad (1.17)$$

Такая функция ведет себя весьма нерегулярно, хотя и удовлетворяет всем предположениям теоремы 2, кроме (1.12). Для подобных “нерегулярных” весов вопрос о существовании неизмеримых последовательностей Λ вида (1.1), имеющих конечную верхнюю плотность (1.2) и удовлетворяющих условию (1.11),

остается открытым. Отметим, наконец, что если весовая функция $\omega(r)$ удовлетворяет всем без исключения предположениям теоремы 2, то она является правильно меняющейся функцией первого порядка, т.е. для $\omega(r)$ соотношение (1.12) выполняется с $p = 1$.

Таким образом, обе теоремы являются “рабочими” и имеют свои области применения.

Приступим к доказательству сформулированных утверждений.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Более слабый вариант теоремы 1 при дополнительных ограничениях на функцию $\omega(r)$, каноническое произведение (1.4) и величину $\delta(\omega, \Lambda)$ был установлен в теореме 2 из работы автора [19]. Сейчас мы докажем результат в полном объеме, серьезно усовершенствовав схему рассуждений из [19].

Итак, пусть Λ – последовательность вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2). Построим каноническое произведение (1.4). Выберем весовую функцию $\omega(r)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, и определим величину $\delta(\omega, \Lambda)$ формулой (1.8). Предположим, что выполнено условие (1.11). Согласно замечанию 1 в случае $\delta(\omega, \Lambda) < 0$ последовательность Λ будет измеримой.

Сосредоточимся на случае $\delta(\omega, \Lambda) \geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(r)}{\ln r} = \infty. \quad (2.1)$$

Действительно, если условие (2.1) не выполнено, заменим $\omega(r)$ новой функцией $\omega_0(r) = \omega(r) + \ln^2(er/a)$. Элементарный анализ показывает, что новая функция обладает теми же свойствами (i)–(iii) и (1.10), что и исходный вес $\omega(r)$. Условие

$$0 \leq \delta(\omega, \Lambda) < +\infty \quad (2.2)$$

также сохранится после замены $\omega(r)$ на $\omega_0(r)$. Чтобы убедиться в этом, запишем

$$\frac{1}{\omega_0(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \frac{\omega(\lambda_n)}{\omega_0(\lambda_n)} \cdot \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}, \quad \lambda_n \geq a, \quad (2.3)$$

и воспользуемся следующим простым фактом. Для любых двух последовательностей x_n, y_n таких, что

$$0 \leq x_n \leq 1, \quad y_n \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n < +\infty,$$

справедливо соотношение

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n < +\infty. \quad (2.4)$$

Применим (2.4) к (2.3), полагая

$$x_n = \frac{\omega(\lambda_n)}{\omega_0(\lambda_n)} = \frac{\omega(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n) + \ln^2(e\lambda_n/a)}, \quad y_n = \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Учитывая определение весового индекса конденсации, получим

$$0 \leq \delta(\omega_0, \Lambda) \leq \delta(\omega, \Lambda) < +\infty.$$

Итак, при замене $\omega(r)$ на $\omega_0(r)$ все предположения теоремы 1 сохраняются. Поэтому мы вправе продолжить рассуждения, считая (2.1), (2.2) выполненными.

Используем метод работы с каноническим произведением (1.4), предложенный А. Ю. Поповым в [7]. При $r \geq 0$ положим

$$d(r) = \min_{n \in \mathbb{N}} |r - \lambda_n|, \quad L^*(r) = \frac{|L(r)|}{d(r)},$$

доопределяя $L^*(r)$ в точках λ_n по непрерывности. Для положительной функции $L^*(r)$ введем характеристику

$$\delta^*(\omega, \Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{L^*(r)}, \quad (2.5)$$

вычисляемую по всем значениям $r \rightarrow +\infty$. Поскольку $L^*(\lambda_n) = |L'(\lambda_n)|$, то $\delta^*(\omega, \Lambda) \geq \delta(\omega, \Lambda)$. Но, как показано в [17; теорема 1], для веса $\omega(r)$ в условиях (i)–(iii), (2.1), $\delta(\omega, \Lambda) \geq 0$ на самом деле справедливо равенство

$$\delta^*(\omega, \Lambda) = \delta(\omega, \Lambda). \quad (2.6)$$

Особо подчеркнем, что при выводе (нетривиального) равенства (2.6) существенно используется вогнутость функции $\omega(r)$ (подробности см. в [17]).

Выберем теперь $\varepsilon \in (0, \sigma)$, где $\sigma > 0$ – экспоненциальный тип канонического произведения (1.4). Ясно, что

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L(ir)}{r}, \quad (2.7)$$

поскольку максимум модуля функции $L(\lambda)$ на окружности $|\lambda| = r$ достигается при $\lambda = ir$ и равен $|L(ir)| = L(ir)$, $r > 0$.

Из определения (2.5) и равенства (2.6) следует оценка

$$|L(r)| \geq d(r) \exp\{-(\delta(\omega, \Lambda) + \varepsilon)\omega(r)\}, \quad (2.8)$$

справедливая при $r > r_0(\varepsilon)$. Введем вспомогательную функцию

$$\omega_\varepsilon(r) = (\delta(\omega, \Lambda) + 2\varepsilon)\omega(r).$$

Рассмотрим последовательность положительных чисел $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \sigma - \varepsilon. \quad (2.9)$$

Составим бесконечное произведение

$$F_\varepsilon(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\varepsilon_n \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

Функции вида (2.10) активно используются в различных вопросах анализа, начиная с работ А. Ингама [20] и Н. Левинсона [21]. Как известно (см. [22], [23; § 3.3]), формула (2.10) корректно определяет четную целую функцию $F_\varepsilon(\lambda)$

экспоненциального типа $\leq \sigma - \varepsilon$, причем условия (i), (ii), (1.10) позволяют подобрать последовательность (2.9) так, чтобы выполнялась оценка

$$|F_\varepsilon(r)| \leq \exp(-\omega_\varepsilon(r)) = \exp\{-(\delta(\omega, \Lambda) + 2\varepsilon)\omega(r)\}, \quad r > r_1(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Скорость стремления функции (2.10) к нулю вдоль вещественной прямой, характеризующая оценкой (2.11), является в определенном смысле максимально возможной, что имеет принципиальное значение для доказательства теоремы 1. Функция $F_\varepsilon(\lambda)$ положительна на мнимой оси и обладает свойствами

$$\varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \leq \sigma - \varepsilon, \quad h_{F_\varepsilon}(\theta) \leq (\sigma - \varepsilon)|\sin \theta|.$$

Нам понадобится одно полезное уточнение. Покажем, что существует обычный предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} = \sigma - \varepsilon. \quad (2.12)$$

Действительно, при любых $r > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$F_\varepsilon(ir) = \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}(\varepsilon_n r) \geq \prod_{n=1}^m \operatorname{ch}(\varepsilon_n r).$$

Поскольку $\ln \operatorname{ch}(\varepsilon_n r) > \varepsilon_n r - \ln 2$, то

$$\frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \geq \frac{1}{r} \sum_{n=1}^m \ln \operatorname{ch}(\varepsilon_n r) > \sum_{n=1}^m \varepsilon_n - \frac{m \ln 2}{r}.$$

Тем самым,

$$\varliminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \geq \sum_{n=1}^m \varepsilon_n$$

для любого $m \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$\varliminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \sigma - \varepsilon \geq \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r}.$$

Соотношение (2.12) известно, но не всегда отмечается явно, поэтому здесь приведено короткое обоснование. Таким образом, экспоненциальный тип функции (2.10) в точности равен $\sigma - \varepsilon$, и его можно вычислить через обычный предел (2.12) по мнимой оси. Соответственно для индикатора справедливо равенство $h_{F_\varepsilon}(\theta) = (\sigma - \varepsilon)|\sin \theta|$. Учитывая оценку (1.5), получаем соотношение

$$h_{F_\varepsilon}(\theta) \leq h_L(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.13)$$

Функция $F_\varepsilon(\lambda)$ играет ключевую роль в последующих рассуждениях. Условия (2.11)–(2.13) считаем выполненными.

Покажем, что функцию $L(\lambda)$ можно оценить через $F_\varepsilon(\lambda)$ снизу на мнимой оси. Следуя идее из [17], определим мероморфную функцию $F_\varepsilon(\lambda)/L(\lambda)$ и обоснуем ее разложение в ряд простых дробей:

$$\frac{F_\varepsilon(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm\Lambda,$$

точнее, рассмотрим разность

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{F_\varepsilon(\lambda)}{L(\lambda)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} \quad (2.14)$$

и установим, что $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$. Поставленная задача будет решена в несколько этапов.

Дадим вначале оценки, нужные для эффективной работы с рядом, фигурирующим в (2.14). Из соотношения (2.11) и определения (1.8) следует, что при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$|F_\varepsilon(\lambda_n)| \leq \exp(-\omega_\varepsilon(\lambda_n)) = \exp\{-(\delta(\omega, \Lambda) + 2\varepsilon)\omega(\lambda_n)\},$$

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} \leq \exp\{(\delta(\omega, \Lambda) + \varepsilon)\omega(\lambda_n)\}.$$

Условие (2.1) позволяет для любого $p > 0$ подобрать номер, начиная с которого

$$\omega(\lambda_n) \geq \frac{p}{\varepsilon} \ln \lambda_n.$$

Поэтому

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \leq \exp\{-\varepsilon\omega(\lambda_n)\} \leq \frac{1}{\lambda_n^p}, \quad n \geq N_p. \quad (2.15)$$

Кроме того, начиная с некоторого номера

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{2\overline{\Delta}(\Lambda)}{n} \quad (2.16)$$

по определению верхней плотности (1.2).

Покажем теперь, что ряд, фигурирующий в (2.14), сходится равномерно на компактах области $\mathbb{C} \setminus \pm\Lambda$. Возьмем произвольный компакт K , не содержащий точек из $\pm\Lambda$, и пусть $d > 0$ – расстояние от K до $\pm\Lambda$. Используя оценку (2.15) с $p = 3$, а затем оценку (2.16), получаем для всех $\lambda \in K$ и достаточно больших n соотношение

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{\lambda_n}{|\lambda^2 - \lambda_n^2|} \leq \frac{1}{\lambda_n^3} \cdot \frac{\lambda_n}{d^2} = \frac{1}{(d\lambda_n)^2} \leq \frac{A}{n^2}, \quad A \equiv \left(\frac{2\overline{\Delta}(\Lambda)}{d}\right)^2.$$

Такая оценка гарантирует равномерную сходимость на K ряда, фигурирующего в (2.14). Тем самым, функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$, определенная формулой (2.14), является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \pm\Lambda$, причем особенности в точках $\pm\lambda_n$ будут не выше полюсов первого порядка. Но вычеты в этих точках равны нулю. Поэтому $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция переменной λ .

Покажем, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ является функцией экспоненциального типа. Это потребует некоторых усилий. Сначала положим

$$\Psi_\varepsilon(\lambda) = L(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} L(\lambda), \quad (2.17)$$

учитывая связь

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{F_\varepsilon(\lambda) - \Psi_\varepsilon(\lambda)}{L(\lambda)}, \quad \Psi_\varepsilon(\lambda) = F_\varepsilon(\lambda) - L(\lambda)\Phi_\varepsilon(\lambda), \quad (2.18)$$

из которой ясно, что функция $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ тоже является целой. Следуя [1; гл. II, § 4], рассмотрим функции

$$L_n(\lambda) = \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сравнивая с (1.4), имеем

$$\frac{\lambda_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2} L(\lambda) = -\frac{1}{\lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right) = -\frac{L_n(\lambda)}{\lambda_n}.$$

Но тогда от (2.17) можно перейти к записи

$$\Psi_\varepsilon(\lambda) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{L_n(\lambda)}{\lambda_n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.19)$$

При всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливы оценки

$$|L_n(\lambda)| = \prod_{k \neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right| \leq \prod_{k \neq n} \left(1 + \frac{|\lambda|^2}{\lambda_k^2} \right) \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|\lambda|^2}{\lambda_k^2} \right) = L(i|\lambda|).$$

Возьмем значение σ_0 , большее экспоненциального типа σ канонического произведения (1.4). Тогда при всех n и некотором $B_0 > 0$ будет выполнено

$$|L_n(\lambda)| \leq L(i|\lambda|) \leq B_0 e^{\sigma_0 |\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.20)$$

Применяя оценку (2.15) с $p = 1$, а затем оценку (2.16), запишем для больших n соотношение

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\lambda_n^2} \leq \frac{(2\overline{\Delta}(\Lambda))^2}{n^2}.$$

Мажорируя таким образом в (2.19) и учитывая (2.20), заключаем, что

$$|\Psi_\varepsilon(\lambda)| \leq B e^{\sigma_0 |\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

с некоторой константой $B > 0$. Следовательно, целая функция $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип. Для дальнейшего удобно сразу оценить ее индикатор.

Введем множество кругов

$$U_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{n^2} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n. \quad (2.21)$$

Если $\lambda \notin \pm U$, то

$$\frac{1}{|\lambda^2 - \lambda_n^2|} = \frac{1}{|\lambda - \lambda_n| |\lambda + \lambda_n|} \leq n^4, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Поэтому при $\lambda \notin \pm U$ для функции $\Psi_\varepsilon(\lambda)$, определенной формулой (2.17), выполнено соотношение

$$|\Psi_\varepsilon(\lambda)| \leq 2|L(\lambda)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \lambda_n n^4.$$

Числовой ряд сходится. Действительно, используя оценку (2.15) с $p = 7$, а затем оценку (2.16), получаем при достаточно больших n , что

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \lambda_n n^4 \leq \frac{1}{\lambda_n^7} \cdot \lambda_n n^4 = \frac{n^4}{\lambda_n^6} \leq \frac{(2\bar{\Delta}(\Lambda))^6}{n^2}. \quad (2.23)$$

В итоге

$$|\Psi_\varepsilon(\lambda)| \leq C|L(\lambda)|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm U, \quad (2.24)$$

с некоторой константой $C > 0$. Но фиксированный луч $\arg \lambda = \theta$, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, пересекает не более чем конечное число кругов $\pm U_n$. Принимая во внимание непрерывность индикаторов, выводим из (2.24) общую оценку

$$h_{\Psi_\varepsilon}(\theta) \leq h_L(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.25)$$

Вернемся теперь к функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$.

Рассмотрим соотношения (2.18). Фигурирующие там целые функции $L(\lambda)$, $F_\varepsilon(\lambda)$, $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ имеют экспоненциальный тип. Поэтому целая функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ тоже имеет экспоненциальный тип (см. [2; гл. I, § 9]).

Оценим индикатор функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$, основываясь на информации об индикаторах функций $L(\lambda)$, $F_\varepsilon(\lambda)$, $\Psi_\varepsilon(\lambda)$. Нужный результат будет извлечен из второго соотношения (2.18), но для того, чтобы корректно применить правило “индикатор произведения равен сумме индикаторов”, придется установить, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть функция вполне регулярного роста (см. [2; гл. III, § 4]). С этой целью покажем, что функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ ограничена на вещественной оси.

Воспользуемся идеей, восходящей к Б. Я. Левину. Следуя [24], назовем множество $S \subset \mathbb{R}$ *относительно плотным по мере* на $\mathbb{R}$, если существуют такие положительные числа l и δ , что для любого отрезка длины l на $\mathbb{R}$ лебегова мера пересечения S с этим отрезком не меньше, чем δ . Положим $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$, где множество U определено в (2.21). Поскольку сумма диаметров кругов $\pm U_n$ конечна и равна $\sum_{n=1}^{\infty} (4/n^2) = 2\pi^2/3$, то S будет относительно плотным по мере на $\mathbb{R}$, например со значениями $l = \pi^2$ и $\delta = \pi^2/3$.

Дадим оценку $|\Phi_\varepsilon(\lambda)|$ для $\lambda \in S = \mathbb{R} \setminus \pm U$. Из определения (2.14) ясно, что функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ является четной, а множество $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$ симметрично. Используя специфику множества U , нетрудно убедиться, что

$$\mathbb{R}_+ \cap (\mathbb{R} \setminus \pm U) = \mathbb{R}_+ \setminus U, \quad (2.26)$$

т.е. достаточно брать $\lambda = r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$. Согласно (2.18) имеем

$$\Phi_\varepsilon(r) = \frac{F_\varepsilon(r)}{L(r)} - \frac{\Psi_\varepsilon(r)}{L(r)}, \quad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U. \quad (2.27)$$

Соотношение (2.24) с учетом выполнения (2.26) гарантирует, что слагаемое $\Psi_\varepsilon(r)/L(r)$ ограничено в $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Проверим, что величина $F_\varepsilon(r)/L(r)$ тоже ограничена в $\mathbb{R}_+ \setminus U$.

Если значение r велико, то условие (2.1) обеспечивает оценку

$$\omega(r) \geq \frac{3}{\varepsilon} \ln r.$$

Вспоминая (2.8) и (2.11), запишем неравенство

$$\frac{|F_\varepsilon(r)|}{|L(r)|} \leq \frac{1}{d(r)} e^{-\varepsilon\omega(r)} \leq \frac{1}{d(r)r^3}, \quad (2.28)$$

верное при достаточно больших $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \Lambda \subset \mathbb{R}_+ \setminus U$. Оценим величину $1/d(r)$ на множестве $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Напомним, что

$$d(r) = \min_{n \in \mathbb{N}} |r - \lambda_n|.$$

С каждым достаточно большим $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ свяжем номер $n = n(r)$ так, чтобы $\lambda_n < r < \lambda_{n+1}$, причем будем выбирать r настолько большим, чтобы номера $n(r)$ заведомо превышали номер, начиная с которого применима оценка (2.16). По определению функции $d(r)$ возможны две ситуации: либо $d(r) = r - \lambda_n$, либо $d(r) = \lambda_{n+1} - r$.

Допустим, что $d(r) = r - \lambda_n$. Поскольку точка r не попадает в круг U_n , то $r - \lambda_n \geq 1/n^2$ (см. (2.21)). Но тогда из (2.16) следует, что

$$\frac{1}{d(r)} = \frac{1}{r - \lambda_n} \leq n^2 \leq (2\overline{\Delta}(\Lambda)\lambda_n)^2 < 4(\overline{\Delta}(\Lambda))^2 r^2.$$

Допустим теперь, что $d(r) = \lambda_{n+1} - r$. Тогда $\lambda_{n+1} - r \leq r - \lambda_n < r$, откуда $\lambda_{n+1} < 2r$. Поскольку точка r не попадает в круг U_{n+1} , то $\lambda_{n+1} - r \geq 1/(n+1)^2$. Вновь используя (2.16), получаем

$$\frac{1}{d(r)} = \frac{1}{\lambda_{n+1} - r} \leq (n+1)^2 \leq (2\overline{\Delta}(\Lambda)\lambda_{n+1})^2 < (4\overline{\Delta}(\Lambda)r)^2 = 16(\overline{\Delta}(\Lambda))^2 r^2.$$

Совмещая найденные оценки, можем утверждать, что

$$\frac{1}{d(r)} = O(r^2), \quad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \quad r \rightarrow +\infty.$$

С учетом полученного соотношения из (2.28) заключаем, что

$$\frac{|F_\varepsilon(r)|}{|L(r)|} \rightarrow 0, \quad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.29)$$

Тем самым, величина $F_\varepsilon(r)/L(r)$ ограничена в $\mathbb{R}_+ \setminus U$.

Итак, оба слагаемых в формуле (2.27) ограничены в $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Но тогда модуль четной функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ ограничен на множестве $S = \mathbb{R} \setminus \pm U$, относительно плотном по мере на $\mathbb{R}$. Поскольку $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа, то согласно утверждению Б. Я. Левина (см. [24; основная лемма]) величина $|\Phi_\varepsilon(\lambda)|$ ограничена на вещественной прямой¹. Последнее, в свою очередь, гарантирует, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста (см. [2; гл. V, § 4, теорема 11]). Теперь можно оценить индикатор функции $\Phi_\varepsilon(\lambda)$.

¹В работе [24] содержится формулировка нужного утверждения и коротко изложена история вопроса. Сам результат был получен Б. Я. Левиным в начале 1970-х гг., но его полное доказательство опубликовано лишь в 1984 г. в труднодоступном препринте ФТИНТ АН УССР. Более общее утверждение на основе исходной идеи Б. Я. Левина доказано в [25; теорема 3] для полисубгармонических функций конечной степени; см. также [26].

На основании второго соотношения (2.18) имеем

$$h_{L\Phi_\varepsilon}(\theta) = h_{F_\varepsilon - \Psi_\varepsilon}(\theta) \leq \max\{h_{F_\varepsilon}(\theta), h_{\Psi_\varepsilon}(\theta)\},$$

причем $\max\{h_{F_\varepsilon}(\theta), h_{\Psi_\varepsilon}(\theta)\} \leq h_L(\theta)$ в силу оценок (2.13) и (2.25). Поскольку $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста, то

$$h_{L\Phi_\varepsilon}(\theta) = h_L(\theta) + h_{\Phi_\varepsilon}(\theta).$$

В результате $h_L(\theta) + h_{\Phi_\varepsilon}(\theta) \leq h_L(\theta)$ и $h_{\Phi_\varepsilon}(\theta) \leq 0$ при всех $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Отсюда следует, что $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ есть целая функция нулевого экспоненциального типа. Но, как уже установлено, величина $|\Phi_\varepsilon(\lambda)|$ ограничена на вещественной прямой. По принципу Фрагмена–Линделёфа функция $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ будет тождественной константой.

Покажем, что эта константа равна нулю, т.е. что $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$. Достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\Phi_\varepsilon(r) \rightarrow 0, \quad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.30)$$

где U – множество кругов из (2.21). По определению (2.14) имеем

$$\Phi_\varepsilon(r) = \frac{F_\varepsilon(r)}{L(r)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{r^2 - \lambda_n^2}.$$

Согласно (2.29) первое слагаемое $F_\varepsilon(r)/L(r)$ стремится к нулю, когда $r \rightarrow +\infty$ по множеству $\mathbb{R}_+ \setminus U$. Проверим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{r^2 - \lambda_n^2} \rightarrow 0, \quad r \in \mathbb{R}_+ \setminus U, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.31)$$

Используя определение кругов (2.21) и рассуждая, как при выводе (2.22), (2.23), получаем для всех $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ и достаточно больших n соотношение

$$\frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{\lambda_n}{|r^2 - \lambda_n^2|} \leq \frac{(2\overline{\Delta}(\Lambda))^6}{n^2}. \quad (2.32)$$

Возьмем произвольное малое число $\eta > 0$. Основываясь на (4.6), подберем номер N таким, чтобы для всех $r \in \mathbb{R}_+ \setminus U$ выполнялась оценка

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{2\lambda_n}{|r^2 - \lambda_n^2|} < \frac{\eta}{2}.$$

Для выбранного N при достаточно больших r можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^N \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{2\lambda_n}{|r^2 - \lambda_n^2|} < \frac{\eta}{2}.$$

Итак, если r принадлежит множеству $\mathbb{R}_+ \setminus U$ и достаточно велико, то

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \frac{2\lambda_n}{r^2 - \lambda_n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{2\lambda_n}{|r^2 - \lambda_n^2|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\lambda_n)|}{|L'(\lambda_n)|} \frac{2\lambda_n}{|r^2 - \lambda_n^2|} < \eta.$$

Отсюда прямо следует (2.31). В результате устанавливаем (2.30) и то, что $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$.

Из полученного соотношения $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$ уже нетрудно вывести требуемую оценку снизу для $L(\lambda)$. Действительно, подставляя $\Phi_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$ в (2.18), приходим к тождеству $\Psi_\varepsilon(\lambda) \equiv F_\varepsilon(\lambda)$. Поэтому (2.24) переписывается в виде

$$|F_\varepsilon(\lambda)| \leq C |L(\lambda)|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \pm U.$$

Отсюда с учетом расположения кругов (2.21) получаем оценку на мнимой оси

$$L(ir) \geq DF_\varepsilon(ir),$$

заведомо справедливую при $r \geq 1$ с константой $D = 1/C > 0$. Используя полученную оценку и учитывая существование предела (2.12), имеем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L(ir)}{r} \geq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln F_\varepsilon(ir)}{r} = \sigma - \varepsilon.$$

Поскольку число $\varepsilon \in (0, \sigma)$ выбиралось произвольно, то

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L(ir)}{r} \geq \sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L(ir)}{r}.$$

Здесь последнее равенство записано на основании (2.7). Итак, существует обычный предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L(ir)}{r} = \sigma. \quad (2.33)$$

Для завершения доказательства воспользуемся тауберовой теоремой Валирона.

Теорема Валирона (см. [27; теорема 4.2.1]) гласит: если целая функция $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ имеет только отрицательные нули $(-z_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$0 < z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = +\infty,$$

и существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(r)|}{r^\rho} = \frac{\pi}{\sin \pi \rho},$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z_n^\rho} = 1.$$

Построим по последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ функцию $f(z)$, полагая

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\pi}{\sigma \lambda_n} \right)^2 z \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу (1.1), (1.2) последняя формула корректно определяет целую функцию $f(z)$ порядка $\rho = 1/2$ с отрицательными нулями $-z_n$, где

$$z_n = \left(\frac{\sigma \lambda_n}{\pi} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(r)|}{\sqrt{r}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (\frac{\pi}{\sigma \lambda_n})^2 r)}{\sqrt{r}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L(\frac{i\pi\sqrt{r}}{\sigma})}{\sqrt{r}} = \pi$$

согласно (1.4), (2.33). Применяя теорему Валирона, получаем

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{z_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{\sigma \lambda_n},$$

т.е. Λ – измеримая последовательность с плотностью σ/π .

Теорема 1 доказана.

§ 3. Формула для вычисления весового индекса конденсации

Получим вначале общую формулу для вычисления весового индекса конденсации, представляющую определенный самостоятельный интерес. Для произвольной последовательности Λ вида (1.1) введем *считающую функцию* $n_{\Lambda}(r)$ по правилу

$$n_{\Lambda}(r) = \sum_{\lambda_n \leq r} 1, \quad r > 0.$$

Обозначим при фиксированном $r > 0$ через $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\nu_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ занумерованную в порядке возрастания последовательность

$$\Lambda_r = \{\lambda_n : n \neq n_{\Lambda}(r), n \neq n_{\Lambda}(r) + 1\}$$

и положим

$$n_{\Lambda_r}(r) = \sum_{\nu_n \leq r} 1, \quad \varphi_r(r) = \frac{n_{\Lambda_r}(r)}{r}.$$

Дадим важное интегральное представление для величины (1.8).

ЛЕММА 1. Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) удовлетворяет условию (2.1). Пусть Λ – последовательность вида (1.1), имеющая конечную верхнюю плотность (1.2) и неотрицательный индекс ω -конденсации (1.8). Тогда справедлива формула

$$\delta(\omega, \Lambda) = 2 \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\omega(r)} \int_0^{\infty} \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) и последовательности Λ вида (1.1) выполнены условия (2.1), $\delta(\omega, \Lambda) \geq 0$, (1.2). Тогда имеет место равенство (2.6). Определим при каждом $r > 0$ по указанному выше правилу последовательность $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\nu_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ и рассмотрим функцию

$$G(r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{r^2}{\nu_n^2} \right|, \quad r > 0.$$

В работе [7] А. Ю. Попов отметил, что

$$\ln L^*(r) = \ln G(r) + O(\ln r), \quad r \rightarrow +\infty,$$

и вывел представление

$$\ln \frac{1}{G(r)} = 2r \int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt.$$

В силу указанных соотношений с учетом (2.6), (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \delta(\omega, \Lambda) &= \delta^*(\omega, \Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{L^*(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{G(r)} + O\left(\frac{\ln r}{\omega(r)}\right) \right\} \\ &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(r)} \ln \frac{1}{G(r)} = 2 \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\omega(r)} \int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt. \end{aligned}$$

Получили формулу (3.1). Лемма доказана.

Простейшая весовая функция $\omega(r) = r$ обладает свойствами (i)–(iii) и удовлетворяет условию (2.1), причем $\delta(\omega, \Lambda) = \delta(\Lambda) \geq 0$ для всякой последовательности Λ вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2). Поэтому для любой такой последовательности из (3.1) получаем доказанную А. Ю. Поповым (в [7] при условии (1.7), а в диссертации [8] – в общей ситуации) формулу для вычисления стандартного индекса конденсации

$$\delta(\Lambda) = 2 \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt. \quad (3.2)$$

При работе с представлением (3.1) возникают технические трудности, вызванные переходом от последовательности Λ к “скользящей” последовательности Λ_r . Поскольку вычислять (или оценивать) весовой индекс конденсации удобнее в исходных терминах, мы дадим подходящую версию формулы (3.1) при естественных ограничениях на лакуарность последовательности Λ и правильность изменения функции $\omega(r)$.

Понадобится следующее техническое утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\omega(r)$ правильно меняется на бесконечности и удовлетворяет условию

$$\omega(r) = O(r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.3)$$

а последовательность Λ вида (1.1) такова, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\omega(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Тогда справедливы соотношения

$$\lambda_{n+1} \sim \lambda_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

$$\lambda_{n+2} - \lambda_{n-1} = o(\omega(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (3.3), (3.4) находим

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 + o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right) = 1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

что дает (3.5). Используя равномерный характер соотношения (1.12), определяющего правильное изменение функции $\omega(r)$, имеем

$$\begin{aligned}\omega(\lambda_{n+1}) &= \omega\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\lambda_n\right) = \omega((1+o(1))\lambda_n) = O(\omega(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty, \\ \omega(\lambda_{n-1}) &= \omega\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\lambda_n\right) = \omega((1+o(1))\lambda_n) = O(\omega(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Отсюда легко получаем (3.6), записав

$$\begin{aligned}\lambda_{n+2} - \lambda_{n-1} &= (\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \\ &= o(\omega(\lambda_{n+1})) + o(\omega(\lambda_n)) + o(\omega(\lambda_{n-1})) = o(\omega(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Отметим, что всякая функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) удовлетворяет условию (3.3) и даже более сильному условию существования предела

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(r)}{r} = k \geq 0. \quad (3.7)$$

Дадим теперь вариант формулы (3.1), применимый для вычисления $\delta(\omega, \Lambda)$ с правильно меняющимся весом $\omega(r)$. По считающей функции $n_\Lambda(r)$ последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ определим функцию $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$ и введем сокращенное обозначение $I_{n,r}$ для интервалов вида $(\lambda_{n-1}/r, \lambda_{n+2}/r)$, $r > 0$, $n \geq 2$.

Следующая лемма является основным результатом текущего параграфа.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) удовлетворяет условию (2.1) и правильно меняется на бесконечности. Пусть Λ – последовательность вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2), удовлетворяющая условиям (1.7), (3.4) и имеющая неотрицательный индекс ω -конденсации (1.8). Тогда справедлива формула

$$\delta(\omega, \Lambda) = 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\omega(r)} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы 3 для индекса ω -конденсации последовательности Λ справедливо представление (3.1), от которого и будем отталкиваться. Преобразуем интеграл в формуле (3.1). Для этого используем связь между функциями $\varphi_r(rt)$ и $\varphi(rt)$, порожденными последовательностями Λ_r и Λ соответственно.

Пусть $n \geq 2$ и $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$. Тогда по определению последовательности Λ_r справедливо соотношение

$$n_{\Lambda_r}(rt) = \begin{cases} n_\Lambda(rt), & 0 \leq t < \frac{\lambda_{n-1}}{r}, \\ n - 1, & \frac{\lambda_{n-1}}{r} \leq t < \frac{\lambda_{n+2}}{r}, \\ n_\Lambda(rt) - 2, & t \geq \frac{\lambda_{n+2}}{r}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\varphi_r(rt) = \begin{cases} \varphi(rt), & 0 \leq t < \frac{\lambda_{n-1}}{r}, \\ \frac{n-1}{rt}, & \frac{\lambda_{n-1}}{r} \leq t < \frac{\lambda_{n+2}}{r}, \\ \varphi(rt) - \frac{2}{rt}, & t \geq \frac{\lambda_{n+2}}{r}. \end{cases}$$

В частности, $\varphi_r(r) = (n-1)/r$, так как $\lambda_{n-1}/r \leq \lambda_{n-1}/\lambda_n < 1 < \lambda_{n+1}/r$. Кроме того, $\varphi(r) = n/r$. Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} &= \begin{cases} \frac{\varphi(rt) - \frac{n-1}{r}}{t^2 - 1}, & 0 \leq t < \frac{\lambda_{n-1}}{r}, \\ -\frac{n-1}{r} \cdot \frac{1}{t(t+1)}, & \frac{\lambda_{n-1}}{r} \leq t < \frac{\lambda_{n+2}}{r}, \\ \frac{\varphi(rt) - \frac{2}{rt} - \frac{n-1}{r}}{t^2 - 1}, & t \geq \frac{\lambda_{n+2}}{r}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{t^2 - 1}, & 0 \leq t < \frac{\lambda_{n-1}}{r}, \\ \left(\frac{1}{r} - \varphi(r)\right) \frac{1}{t(t+1)}, & \frac{\lambda_{n-1}}{r} \leq t < \frac{\lambda_{n+2}}{r}, \\ \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1 - \frac{2}{t}}{t^2 - 1}, & t \geq \frac{\lambda_{n+2}}{r}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt &= \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt \\ &+ \frac{1}{r} \left(\int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{dt}{t^2 - 1} + \int_{I_{n,r}} \frac{dt}{t(t+1)} - \int_{\lambda_{n+2}/r}^{+\infty} \frac{2 dt}{t(t^2 - 1)} \right) - \varphi(r) \int_{I_{n,r}} \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt \\ &+ \frac{1}{2r} \left(\ln \frac{(r - \lambda_{n-1})(r + \lambda_{n+2})}{(r + \lambda_{n-1})(\lambda_{n+2} - r)} + 2 \ln \frac{\lambda_{n+2}(r + \lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r + \lambda_{n+2})} - 2 \ln \frac{\lambda_{n+2}^2}{\lambda_{n+2}^2 - r^2} \right) \\ &- \varphi(r) \ln \frac{\lambda_{n+2}(r + \lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r + \lambda_{n+2})} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt + \frac{1}{2r} \ln \frac{(r^2 - \lambda_{n-1}^2)(\lambda_{n+2}^2 - r^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} \\ &- \varphi(r) \ln \frac{\lambda_{n+2}(r + \lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r + \lambda_{n+2})}. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \geq 2$, справедливо соотношение

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt = \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt + \frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r) \ln B(r). \quad (3.9)$$

Здесь функции $A(r) = A_\Lambda(r)$ и $B(r) = B_\Lambda(r)$ определены для $r \geq \lambda_2$ так, что их сужения на промежутки $[\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \geq 2$, задаются соответственно формулами

$$A(r) = \frac{(r^2 - \lambda_{n-1}^2)(\lambda_{n+2}^2 - r^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2}, \quad B(r) = \frac{\lambda_{n+2}(r + \lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}(r + \lambda_{n+2})}.$$

Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\omega(r)} \left(\frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r) \ln B(r) \right) = 0. \quad (3.10)$$

Поскольку $\omega(r)$ правильно меняется на бесконечности и удовлетворяет условиям (3.3), (3.4), то по лемме 2 выполнены соотношения (3.5), (3.6). Кроме того, из (1.7) вытекает оценка

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Учтем еще, что верхнюю плотность (1.2) можно вычислять по формуле

$$\overline{\Delta}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r),$$

и поэтому

$$0 < \varphi(r) < 2\overline{\Delta}(\Lambda), \quad (3.12)$$

если r достаточно велико. Переходя к обоснованию (3.10), дадим двусторонние оценки величин $A(r)$, $B(r)$ при $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$, $n \geq 2$.

Сначала оценим $A(r)$. С одной стороны, из (3.3), (3.5), (3.6) получаем

$$\begin{aligned} A(r) &< \frac{(\lambda_{n+1}^2 - \lambda_{n-1}^2)(\lambda_{n+2}^2 - \lambda_n^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} < \frac{(\lambda_{n+2}^2 - \lambda_{n-1}^2)^2}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} \\ &= \left(\frac{(\lambda_{n-1} + \lambda_{n+2})o(\omega(\lambda_n))}{\lambda_{n-1}\lambda_{n+2}} \right)^2 \sim \left(o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right) \right)^2 = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, (3.5) и (3.11) дают

$$A(r) > \frac{(\lambda_n^2 - \lambda_{n-1}^2)(\lambda_{n+2}^2 - \lambda_{n+1}^2)}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} \geq h^2 \frac{(\lambda_{n-1} + \lambda_n)(\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2})}{(\lambda_{n-1}\lambda_{n+2})^2} \sim \frac{4h^2}{\lambda_n^2},$$

когда $n \rightarrow \infty$. Поэтому при больших n будет выполнено

$$-3 \ln \lambda_n < \ln A(r) < 0, \quad r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}). \quad (3.13)$$

Теперь оценим $B(r)$. С одной стороны, из (3.3), (3.5), (3.6) получаем

$$\begin{aligned} B(r) &< \frac{\lambda_{n+2}(\lambda_{n-1} + \lambda_{n+1})}{\lambda_{n-1}(\lambda_n + \lambda_{n+2})} < \frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n-1}} = 1 + \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ &= 1 + \frac{o(\omega(\lambda_n))}{\lambda_{n-1}} = 1 + o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$B(r) > \frac{\lambda_{n+2}(\lambda_{n-1} + \lambda_n)}{\lambda_{n-1}(\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2})} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n+2} + \lambda_n\lambda_{n+2}}{\lambda_{n-1}\lambda_{n+2} + \lambda_{n-1}\lambda_{n+1}} > 1.$$

Поэтому при больших n справедлива оценка

$$0 < \ln B(r) < o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right), \quad r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}). \quad (3.14)$$

Сочетая оценки (3.12)–(3.14), для всех достаточно больших $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{r}{\omega(r)} \left| \frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r) \ln B(r) \right| &\leq \frac{1}{2\omega(r)} |\ln A(r)| + \varphi(r) \frac{r}{\omega(r)} |\ln B(r)| \\ &= -\frac{1}{2\omega(r)} \ln A(r) + \varphi(r) \frac{r}{\omega(r)} \ln B(r) < \frac{3}{2} \frac{\ln r}{\omega(r)} + 2\bar{\Delta}(\Lambda) \frac{r}{\omega(r)} o\left(\frac{\omega(\lambda_n)}{\lambda_n}\right). \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.1), (3.5) и правильное изменение функции $\omega(r)$, приходим к (3.10).

Применив (3.10) к (3.9), получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\omega(r)} \int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\omega(r)} \int_0^\infty \frac{\varphi_r(rt) - \varphi_r(r)}{t^2 - 1} dt \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\omega(r)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt + \frac{\ln A(r)}{2r} - \varphi(r) \ln B(r) \right\} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\omega(r)} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt. \end{aligned}$$

С учетом (3.1) отсюда получаем (3.8).

Лемма 3 доказана.

В частном случае $\omega(r) = r$ для любой последовательности Λ вида (1.1) со свойством (1.2), подчиненной дополнительным требованиям (1.7), (3.5), мы получаем из (3.8) формулу вычисления $\delta(\Lambda)$, аналогичную (3.2), но записанную в терминах считающей функции самой последовательности Λ , а не последовательности Λ_r . А именно

$$\delta(\Lambda) = 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt.$$

Сформулируем еще одно важное следствие из леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) удовлетворяет условию (2.1) и правильно меняется на бесконечности. Пусть Λ – неизмеримая последовательность вида (1.1), имеющая конечную верхнюю плотность (1.2) и удовлетворяющая условиям (1.7), (3.4). Тогда справедлива формула (3.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $\omega(r)$ обладает свойством (ii), а последовательность Λ неизмерима, то обобщенный индекс конденсации $\delta(\omega, \Lambda)$ неотрицателен (см. начало доказательства теоремы 1 из § 2). Остается применить лемму 3.

§ 4. Модифицированная весовая функция

Пусть вес $\omega(r)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 2. В этом параграфе по функции $\omega(r)$ будет построена модифицированная весовая функция $\mu(r)$. Для удобства ссылок сформулируем отдельно соответствующее техническое утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию (1.13). Тогда найдется функция $\mu(r)$ с теми же свойствами (i)–(iii), удовлетворяющая условию

$$\int_a^\infty \frac{\mu(r)}{r^2} dr = +\infty, \quad (4.1)$$

аналогичному (1.13), непрерывно дифференцируемая при $r \geq a$ и удовлетворяющая дополнительным условиям

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\mu'(r)}{\mu(r)} = 1, \quad (4.2)$$

$$\mu(r) = o(\omega(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.3)$$

При этом $\mu(r)$ обладает при каждом $t > 0$ свойством

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(tr)}{\mu(r)} = t, \quad (4.4)$$

являясь правильно меняющейся на бесконечности функцией порядка $p = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.13) существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a = r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$, что

$$\int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\omega(r)}{r^2} dr \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

При этом можно считать, что

$$r_{n+1} \geq 2r_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Функцию $\mu(r)$ зададим при $r \geq a$ по правилу

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \omega(r), \quad r \in [r_1, r_2), \\ \mu(r) &= \frac{1}{n} \omega(r) + \sum_{k=2}^n \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k}, \quad r \in [r_n, r_{n+1}), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Непрерывность функции $\omega(r)$ в точках r_n дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mu(r_2 - 0) &= \omega(r_2) = \frac{1}{2} \omega(r_2) + \frac{1}{2} \omega(r_2) = \mu(r_2) = \mu(r_2 + 0); \\ \mu(r_{n+1} - 0) &= \frac{1}{n} \omega(r_{n+1}) + \sum_{k=2}^n \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k}, \quad n \geq 2; \\ \mu(r_{n+1} + 0) &= \frac{1}{n+1} \omega(r_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k} \\ &= \frac{1}{n} \omega(r_{n+1}) + \sum_{k=2}^n \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Поэтому $\mu(r_{n+1} - 0) = \mu(r_{n+1} + 0)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и функция $\mu(r)$ непрерывна в точках r_n , $n \in \mathbb{N}$. Непрерывность $\mu(r)$ в остальных точках промежутка $r \geq a$ вытекает из непрерывности $\omega(r)$ при $r \geq a$. Положительность и возрастание $\mu(r)$ при $r \geq a$ следуют из аналогичных свойств веса $\omega(r)$. Следовательно, $\mu(r)$ обладает свойством (i). Условие (4.1) выполнено согласно (4.5) в силу оценки

$$\int_a^\infty \frac{\mu(r)}{r^2} dr = \sum_{n=1}^\infty \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\mu(r)}{r^2} dr \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{\omega(r)}{r^2} dr \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}.$$

Из возрастания $\mu(r)$ и условия (4.1) следует, что $\mu(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$, т.е. свойство (ii).

Так как функция $\omega(r)$ вогнута при $r \geq a$, то на промежутке $r > a$ существуют односторонние производные ω'_- и ω'_+ , $\omega'_-(r) \geq \omega'_+(r)$, и $\omega'_\pm(r)$ убывают при $r > a$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \mu'_\pm(r) &= \frac{1}{n} \omega'_\pm(r), & r \in (r_n, r_{n+1}), \\ \mu'_-(r_{n+1}) &= \frac{1}{n} \omega'_-(r_{n+1}) \geq \frac{1}{n} \omega'_+(r_{n+1}) \geq \frac{1}{n+1} \omega'_+(r_{n+1}) = \mu'_+(r_{n+1}), \\ \mu'_\pm(r) &= \frac{1}{n+1} \omega'_\pm(r), & r \in (r_{n+1}, r_{n+2}). \end{aligned}$$

Следовательно, односторонние производные $\mu'_\pm(r)$ существуют при $r > a$ и являются убывающими функциями, что влечет вогнутость $\mu(r)$ на промежутке $r \geq a$.

Итак, построенная функция $\mu(r)$ обладает свойствами (i)–(iii) и удовлетворяет условию (4.1).

Для дальнейшего потребуется установить, что порядок p исходной правильно меняющейся функции $\omega(r)$ равен 1, т.е. что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t \quad (4.7)$$

при любом $t > 0$. С этой целью представим $\omega(r)$ в виде

$$\omega(r) = r^{pl}(r), \quad (4.8)$$

где $l(r)$ – медленно меняющаяся функция, и воспользуемся тем, что для любого $\delta > 0$ выполняются соотношения (см. [18; п. 1.5])

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^\delta l(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-\delta} l(r) = 0. \quad (4.9)$$

В силу вогнутости $\omega(r)$ при $r \geq a$ функция $\omega(r)/r$ убывает, стремясь к неотрицательному пределу при $r \rightarrow +\infty$. Иначе говоря, справедливо соотношение (3.7). Все ясно, если в (3.7) значение k больше нуля. Рассмотрим содержательный случай

$$\omega(r) = o(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.10)$$

Тогда, с одной стороны, условия (4.8), (4.9) показывают, что $p \leq 1$, а, с другой стороны, при $p < 1$ они вступают в противоречие с требованием расходимости интеграла (1.13).

Теперь из (4.7) и определения $\mu(r)$ получаем (4.4).

Убедимся в справедливости (4.3). Записав соотношение

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{\omega(r)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(r_n)} \sum_{k=2}^n \frac{\omega(r_k)}{(k-1)k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(r_n)} \sum_{k=1}^n \frac{\omega(r_k)}{k},$$

воспользуемся неравенством Иенсена

$$\sum_{k=1}^n \frac{\omega(r_k)}{k} \leq \omega\left(\sum_{k=1}^n \frac{r_k}{k}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

справедливым для вогнутой функции $\omega(r)$. Согласно (4.6) имеем

$$r_k \leq \frac{r_n}{2^{n-k}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\omega(r_k)}{k} \leq \omega\left(\frac{r_n}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}\right) \leq \omega\left(\frac{3r_n}{n}\right), \quad n \geq n_0.$$

Здесь учтены возрастание $\omega(r)$ и асимптотическая формула

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Последнюю легко вывести из теоремы Штольца. Действительно, полагая

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}, \quad b_n = \frac{2^{n+1}}{n},$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - (n+1)/n} = 1.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{\omega(r)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(3r_n/n)}{\omega(r_n)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(\varepsilon r_n)}{\omega(r_n)}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда, привлекая (4.7), получаем (4.3).

Для завершения доказательства леммы осталось наделить функцию $\mu(r)$ необходимой гладкостью, обеспечив выполнение условия (4.2) и сохранив все отмеченные выше свойства. Этого можно достичь различными способами, например применить к обратной функции $\mu^{-1}(r)$ результаты Г.Г. Брайчева о сглаживании выпуклых функций (см. [28; ч. II, гл. 3, §2]). По-видимому, самый простой путь состоит в замене функции $\mu(r)$ на непрерывно дифференцируемую при $r \geq a$ функцию

$$\tilde{\mu}(r) = \int_a^r \frac{\mu(t)}{t} dt. \quad (4.11)$$

Действительно, в силу (4.4) по теореме Караматы (см., например, [29; теорема 1.5.11]) имеем

$$\tilde{\mu}(r) \sim \mu(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Но тогда правило Лопиталья дает

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\tilde{\mu}'(r)}{\tilde{\mu}(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{\tilde{\mu}(r)} = 1,$$

подтверждая наличие у $\tilde{\mu}(r)$ свойства (4.2). Благодаря простоте конструкции (4.11) проверка того, что $\tilde{\mu}(r)$ наследует свойства $\mu(r)$, прописанные в лемме 5, не вызывает затруднений. Сохраняя за новой функцией $\tilde{\mu}(r)$ старое обозначение $\mu(r)$, завершаем доказательство.

Лемма 5 доказана.

Отметим несколько полезных свойств модифицированной весовой функции.

ЛЕММА 6. Пусть $\mu(r)$ – модифицированная весовая функция, построенная в лемме 5. Тогда для каждого $\delta \in (0, 1)$ функция $r^{-\delta}\mu(r)$ при достаточно больших r строго возрастает к $+\infty$, вследствие чего

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{\ln^s r} = +\infty, \quad s > 0. \quad (4.12)$$

Кроме того, при $r \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические соотношения

$$\mu(r) = o(r), \quad (4.13)$$

$$\int_a^r \frac{\mu(t)}{t} dt \sim \mu(r), \quad \int_a^r \frac{\mu(t)}{t^2} dt = o(\ln r), \quad \int_a^r \frac{\mu(t) \ln t}{t^2} dt = o(\ln^2 r). \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, (4.2) влечет

$$\left(\frac{\mu(r)}{r^\delta} \right)' = \frac{r\mu'(r) - \delta\mu(r)}{r^{\delta+1}} = \frac{(1-\delta)\mu(r) + o(\mu(r))}{r^{\delta+1}} > 0$$

при любом $\delta \in (0, 1)$ и всех достаточно больших r . Это указывает на строгое возрастание при больших r функции $r^{-\delta}\mu(r)$ (к $+\infty$ в силу (4.1)). Отсюда, в частности, следует (4.12). Соотношение (4.13) получаем из (3.7), (4.3).

Первое из соотношений (4.14) уже отмечалось в более общей ситуации при рассмотрении функции (4.11). Но теперь в силу (4.2) оно совсем просто выводится применением правила Лопиталья:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^r t^{-1}\mu(t) dt}{\mu(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{r\mu'(r)} = 1.$$

Привлекая еще (4.13), аналогично проверяем оставшиеся соотношения (4.14):

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^r t^{-2}\mu(t) dt}{\ln r} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{r} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^r t^{-2}\mu(t) \ln t dt}{\ln^2 r} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{2r} = 0. \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Для доказательства теоремы 2 потребуется заменить исходную весовую функцию $\omega(r)$ на модифицированную весовую функцию $\mu(r)$ и по новой функции $\mu(r)$ построить специальную неизмеримую последовательность Λ с конечным неотрицательным индексом μ -конденсации. Оценивая величину $\delta(\mu, \Lambda)$, удобно иметь для нее в распоряжении “рабочую” формулу. Наконец, важно убедиться, что при указанной замене весовой индекс конденсации последовательности Λ , отвечающий исходной функции $\omega(r)$, окажется равным нулю. Перечисленным целям служит следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть $\mu(r)$ – модифицированная весовая функция, построенная в лемме 5. Пусть Λ – неизмеримая последовательность вида (1.1), имеющая конечную верхнюю плотность (1.2), положительный шаг (1.7) и удовлетворяющая условию

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\mu(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

аналогичному условию (3.4). Тогда справедлива формула

$$\delta(\mu, \Lambda) = 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\mu(r)} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt, \quad (4.16)$$

где обозначено $I_{n,r} = (\lambda_{n-1}/r, \lambda_{n+1}/r)$ и $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$. Если при этом индекс μ -конденсации последовательности Λ удовлетворяет условию

$$\delta(\mu, \Lambda) < +\infty, \quad (4.17)$$

то выполняется (1.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 5 функция $\mu(r)$ и последовательность Λ удовлетворяют всем требованиям леммы 4. Поэтому справедлива формула (4.16), аналогичная формуле (3.8).

Пусть теперь выполняется (4.17). Как уже отмечалось в доказательстве леммы 4, неизмеримость Λ влечет оценку снизу $\delta(\mu, \Lambda) \geq 0$. Следовательно,

$$0 \leq \delta(\mu, \Lambda) < +\infty. \quad (4.18)$$

Покажем, что $\delta(\omega, \Lambda) = 0$. Для этого запишем

$$\frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \frac{\mu(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n)} \cdot \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}, \quad \lambda_n \geq a, \quad (4.19)$$

и воспользуемся следующим элементарным фактом. Для любых двух последовательностей x_n, y_n таких, что

$$x_n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad y_n \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n < +\infty,$$

справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0. \quad (4.20)$$

Применим (4.20) к (4.19), полагая

$$x_n = \frac{\mu(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n)}, \quad y_n = \frac{1}{\omega(\lambda_n)} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}.$$

Учитывая определение весового индекса конденсации и условия (4.3), (4.18), получим $\delta(\omega, \Lambda) = 0$, т.е. выполнено (1.15). Лемма доказана.

После проделанной подготовительной работы приступим к основному.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Для упрощения весьма громоздкого доказательства теоремы 2 разобьем его на несколько смысловых этапов.

I. Пусть весовая функция $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii) правильно меняется на бесконечности и подчинена требованию (1.13). Применяя лемму 5, заменим $\omega(r)$ на модифицированную весовую функцию $\mu(r)$ с теми же свойствами (i)–(iii), подчиненную требованию (4.1), непрерывно дифференцируемую при $r \geq a$ и удовлетворяющую дополнительным условиям (4.2), (4.3).

II. Выберем произвольно числа $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha < \beta$. По новой весовой функции $\mu(r)$ построим последовательность Λ вида (1.1) с положительным шагом (1.7) так, чтобы выполнялись условия (1.14), (1.15).

Опишем способ построения заявленной последовательности. Вначале возьмем положительную непрерывно дифференцируемую при $r \geq a$ функцию $h(r)$, обладающую свойствами

$$h'(r) = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\beta} = \lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) < \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} h(r) = \frac{1}{\alpha} \quad (5.2)$$

(при $\alpha = 0$ в (5.2) имеем $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} h(r) = +\infty$). В качестве такой функции при $\alpha > 0$ подойдет, например,

$$h(r) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2\left(\int_a^r \frac{\mu(t)}{t^2} dt\right).$$

Действительно, функция $\Omega(r) = \int_a^r \frac{\mu(t)}{t^2} dt$ благодаря требованию (4.1) непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$ на промежутке $r \geq a$. Следовательно, обратная функция $\Omega^{-1}(r)$ непрерывно возрастает от a до $+\infty$ на промежутке $r \geq 0$. Полагая

$$r_n = \Omega^{-1}(\pi n), \quad R_n = \Omega^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

получим

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(r_n) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2(\Omega(r_n)) = \frac{1}{\beta}, \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} h(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(R_n) = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2(\Omega(R_n)) = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$h'(r) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin(2\Omega(r)) \frac{\mu(r)}{r^2} = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Если же $\alpha = 0$, то аналогичные простые соображения показывают, что условиям (5.1), (5.2) удовлетворяет, к примеру, функция

$$h(r) = \frac{1}{\beta} + \sqrt{\Omega(r)} \sin^2 \sqrt{\Omega(r)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если требование (4.1) не выполнено, то функцию $h(r)$ с нужными свойствами (5.1), (5.2) выбрать уже нельзя, поскольку в этом случае из оценки (5.1) будет следовать (абсолютная) сходимость интеграла

$$\int_a^\infty h'(t) dt = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r h'(t) dt,$$

т.е. существование предела $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r)$.

Последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ строим так. Первый ее член $\lambda_1 > a$ задаем произвольно, а остальные члены определяем из рекуррентных соотношений

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + h(\lambda_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $h(r)$ – взятая выше функция со свойствами (5.1), (5.2).

Отметим некоторые свойства последовательности Λ . Ясно, что Λ имеет положительный шаг:

$$h(\Lambda) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} h(\lambda_n) \geq \varliminf_{r \rightarrow +\infty} h(r) = \frac{1}{\beta} > 0.$$

Покажем, что выполнено условие (4.15). Для этого рассмотрим два возможных случая: $\alpha > 0$ и $\alpha = 0$. В первом случае функция $h(r)$ согласно (5.2) ограничена сверху, откуда

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = h(\lambda_n) = O(1) = o(\mu(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Во втором случае, учитывая последовательно условия (5.1), (4.14) и (4.12), имеем

$$h(r) = O\left(\int_a^r h'(t) dt\right) = O\left(\int_a^r \frac{\mu(t)}{t^2} dt\right) = o(\ln r) = o(\mu(r)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = h(\lambda_n) = o(\mu(\lambda_n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь мы проверим, что для последовательности Λ выполнены соотношения (1.14). При всех $r \geq a$ можем записать

$$r = \sum_{\lambda_n \leq r} h(\lambda_n) + O(\ln r) = \int_a^r h(t) dn_\Lambda(t) + O(\ln r).$$

Интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$r = h(r)n_\Lambda(r) - \int_a^r n_\Lambda(t) h'(t) dt + O(\ln r),$$

или, с учетом обозначения $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$, к соотношению

$$1 = h(r)\varphi(r) - \frac{1}{r} \int_a^r \varphi(t) t h'(t) dt + O\left(\frac{\ln r}{r}\right).$$

Получили формулу

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)} \left(1 + \frac{1}{r} \int_a^r \varphi(t) t h'(t) dt \right) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.3)$$

В остаточном члене нет $h(r)$, так как эта функция отграничена от нуля при $r \rightarrow +\infty$. Покажем, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = \alpha$, $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = \beta$, откуда и будет следовать (1.14).

Свойства (4.13), (4.14), (5.1) функции $\mu(r)$ дают

$$\int_a^r \varphi(t) t h'(t) dt = O\left(\int_a^r \frac{\mu(t)}{t} dt\right) = O(\mu(r)) = o(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Поэтому из (5.3) имеем

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)} + o(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

В силу (5.2) отсюда следуют соотношения

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{h(r)} = \alpha, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{h(r)} = \beta,$$

равносильные (1.14).

Теперь из (5.3) мы выведем более “гладкое” представление

$$\varphi(r) = \tilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{\ln^2 r}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (5.4)$$

в котором функция $\tilde{\varphi}(r)$ непрерывно дифференцируема при $r \geq a$. Обозначим

$$\psi(r) = \frac{1}{h(r)} \left(1 + \frac{1}{r} \int_a^r \varphi(t) t h'(t) dt \right)$$

и перепишем (5.3) в виде

$$\varphi(r) = \psi(r) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.5)$$

В этом представлении функция $\psi(r)$ непрерывна, а остаток $O(\ln r/r)$ интегрируем на $[a, b]$ при любом $b > a$. Подставим (5.5) в (5.3):

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{h(r)} \left(1 + \frac{1}{r} \int_a^r \psi(t) t h'(t) dt + \frac{1}{r} \int_a^r O\left(\frac{\ln t}{t}\right) t h'(t) dt \right) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right) \\ &= \frac{1}{h(r)} \left(1 + \frac{1}{r} \int_a^r \psi(t) t h'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{r} \int_a^r \frac{\mu(t) \ln t}{t^2} dt\right) + O\left(\frac{\ln r}{r}\right) \\ &= \tilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{\ln^2 r}{r}\right). \end{aligned}$$

Здесь через $\tilde{\varphi}(r)$ обозначена непрерывно дифференцируемая при $r \geq a$ функция

$$\tilde{\varphi}(r) = \frac{1}{h(r)} \left(1 + \frac{1}{r} \int_a^r \psi(t) t h'(t) dt \right),$$

использовано (5.1) и учтено (4.14).

Доказав справедливость представления (5.4), перейдем к оценке логарифмической производной входящей в него функции $\tilde{\varphi}(r)$. Вспоминая ограниченность функции $\psi(r)$, отграниченность на бесконечности от нуля функции $h(r)$, а также пользуясь определением $\tilde{\varphi}(r)$ и свойствами (4.13), (4.14), (5.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\varphi}'(r)}{\tilde{\varphi}(r)} &= \frac{1}{\tilde{\varphi}(r)} \left[\frac{1}{h(r)} \left(1 + \frac{1}{r} \int_a^r \psi(t) t h'(t) dt \right) \right]' \\ &= -\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{h(r) r^2 \tilde{\varphi}(r)} \left(\psi(r) r^2 h'(r) - \int_a^r \psi(t) t h'(t) dt \right) \\ &= O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right) + O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right) = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Подведем итог этапа II доказательства теоремы 2. Построенная на этом этапе последовательность Λ неизмерима, имеет положительный шаг и удовлетворяет (3.4). Порожденная считающей функцией этой последовательности функция $\varphi(r)$ допускает представление (5.4):

$$\varphi(r) = \tilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{\ln^2 r}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty,$$

с непрерывно дифференцируемой при $r \geq a$ функцией $\tilde{\varphi}(r)$, обладающей при $r \rightarrow +\infty$ свойствами

$$\frac{\tilde{\varphi}'(r)}{\tilde{\varphi}(r)} = O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right), \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}(r) = \alpha, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}(r) = \beta. \quad (5.6)$$

III. Покажем, что справедливо (4.17), т.е. индекс μ -конденсации построенной на этапе II последовательности Λ конечен. Поскольку выполнены все условия леммы 7, то величину $\delta(\mu, \Lambda)$ можно вычислять по формуле (4.16). Для облегчения работы сначала оценим вклад остаточного члена из (5.4), имеющего вид $O(\ln^2 r/r)$, в формулу (4.16):

$$\delta(\mu, \Lambda) = 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\mu(r)} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\varphi(rt) - \varphi(r)}{t^2 - 1} dt.$$

Считаем, что $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$, и выписываем все оценки для интеграла

$$\begin{aligned} &\frac{r}{\mu(r)} \int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{O(\ln^2 rt/(rt)) + O(\ln^2 r/r)}{|t^2 - 1|} dt \\ &= \frac{1}{\mu(r)} O\left(\int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{\ln^2 rt}{t|t^2 - 1|} dt + \ln^2 r \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{dt}{|t^2 - 1|} \right). \end{aligned}$$

Во-первых, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\ln^2 r}{\mu(r)} O\left(\int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{dt}{|t^2 - 1|} \right) = \frac{\ln^2 r}{\mu(r)} O\left(\int_0^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{1 - t^2} + \int_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{\ln^2 r}{\mu(r)} O\left(\int_0^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{1 - t^2} + \int_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} \right) = O\left(\frac{\ln^3 r}{\mu(r)}\right). \end{aligned}$$

Во-вторых, при тех же r можем записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(r)} O\left(\int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{\ln^2 r t}{t|t^2 - 1|} dt\right) &= \frac{1}{\mu(r)} O\left(\int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{\ln^2 r + \ln^2 t}{t|t^2 - 1|} dt\right) \\ &= \frac{\ln^2 r}{\mu(r)} O\left(\int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{dt}{t|t^2 - 1|}\right) + \frac{1}{\mu(r)} O\left(\int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{\ln^2 t}{t|t^2 - 1|} dt\right). \end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2 r}{\mu(r)} O\left(\int_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{t(1-t^2)} + \int_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)}\right) \\ = \frac{\ln^2 r}{\mu(r)} O\left(\int_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{t(1-t^2)} + \int_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)}\right) = O\left(\frac{\ln^3 r}{\mu(r)}\right). \end{aligned}$$

Оценивая второе слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(r)} O\left(\int_{[\lambda_1/r, +\infty) \setminus I_{n,r}} \frac{\ln^2 t}{t|t^2 - 1|} dt\right) \\ = \frac{1}{\mu(r)} O\left(\int_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r} \frac{\ln^2 t}{t(1-t^2)} dt + \int_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t(t^2-1)} dt\right) \\ = \frac{1}{\mu(r)} O\left(\ln^2 r \int_{\lambda_1/r}^{\lambda_{n-1}/r} \frac{dt}{t(1-t^2)} + \int_{\lambda_{n+2}/r}^{\infty} \frac{dt}{t(t+1)}\right) = O\left(\frac{\ln^3 r}{\mu(r)}\right). \end{aligned}$$

Согласно (4.12) имеем $\ln^3 r = o(\omega(r))$ при $r \rightarrow +\infty$. Поэтому при подсчете $\delta(\mu, \Lambda)$ можно в соотношение (4.16) вместо $\varphi(r)$ подставлять $\tilde{\varphi}(r)$, т.е. использовать формулу

$$\delta(\mu, \Lambda) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})} \frac{r}{\mu(r)} \int_{\mathbb{R}_+ \setminus I_{n,r}} \frac{\tilde{\varphi}(rt) - \tilde{\varphi}(r)}{t^2 - 1} dt, \quad (5.7)$$

в которой $\tilde{\varphi}(r)$ удовлетворяет (5.6).

IV. Применение формулы (5.7) потребует знания специальных фактов теории правильно меняющихся функций. Все сведения, приведенные здесь для удобства чтения, заимствованы с незначительными изменениями из известного руководства [18].

Пусть $\nu(r)$ – определенная при $r > 0$ положительная возрастающая к $+\infty$ функция такая, что для некоторых $\gamma, b > 0$ функция $r^{-\gamma}\nu(r)$ убывает (не обязательно строго) на промежутке $r \geq b$. Положительная измеримая функция $l(r)$, заданная при $r > 0$, называется *медленно меняющейся с остаточным членом* $\nu(r)$, если при любом $t > 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\frac{l(rt)}{l(r)} = 1 + O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Класс таких функций $l(r)$ обозначаем далее $\mathcal{K}(\nu)$. Известен следующий критерий.

ТЕОРЕМА 3 (см. [18; дополнения, теорема А.1.3]). Положительная измеримая функция $l(r)$ принадлежит классу $\mathcal{K}(\nu)$ тогда и только тогда, когда найдутся число $c > 0$ и положительная дифференцируемая при $r \geq c$ функция $\tilde{l}(r)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{r\tilde{l}'(r)}{\tilde{l}(r)} = O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \frac{l(r)}{\tilde{l}(r)} = 1 + O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Для оценки интегралов, содержащих медленно меняющиеся функции, часто используют готовые асимптотические формулы. Приведем здесь два необходимых в дальнейшем результата, предоставляющих формулы такого рода.

ТЕОРЕМА 4 (см. [18; дополнения, теорема А.2.1]). Пусть функция $f(t)$ измерима при $t \geq 1$ и для некоторого $s > 0$ сходится интеграл

$$\int_1^\infty t^s |f(t)| dt.$$

Если $l \in \mathcal{K}(\nu)$, то при всех $r \geq r_0$ сходится интеграл

$$\int_1^\infty l(rt) |f(t)| dt$$

и справедлива асимптотическая формула

$$\int_1^\infty f(t) \frac{l(rt)}{l(r)} dt = \int_1^\infty f(t) dt + O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

ТЕОРЕМА 5 (см. [18; дополнения, теорема А.2.4]). Пусть функция $f(t)$ измерима при $0 \leq t \leq 1$ и $l \in \mathcal{K}(\nu)$. Пусть также функция $t^\delta l(t)$ при некотором $\delta > \gamma$ ограничена на каждом отрезке $[0, d]$, $d > 0$, и сходится интеграл

$$\int_0^1 t^{-\delta} |f(t)| dt.$$

Тогда при всех $r > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^1 l(rt) |f(t)| dt$$

и справедлива асимптотическая формула

$$\int_0^1 f(t) \frac{l(rt)}{l(r)} dt = \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Формулы из теорем 4 и 5 можно переписать следующим образом:

$$\int_1^\infty (l(rt) - l(r)) f(t) dt = O\left(\frac{l(r)}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty; \quad (5.8)$$

$$\int_0^1 (l(rt) - l(r)) f(t) dt = O\left(\frac{l(r)}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.9)$$

Ясно, что в теоремах 4 и 5, а следовательно, и в формулах (5.8), (5.9), число 1 как один из пределов интегрирования может быть заменено любым положительным числом.

V. Займемся непосредственно проверкой соотношения (4.17), опираясь на формулу (5.7). Положим $\nu(r) = r/\mu(r)$. Тогда функция $r^{-\gamma}\nu(r) = r^{1-\gamma}/\mu(r)$ убывает для каждого $0 < \gamma < 1$ при больших r согласно лемме 6. Поскольку для функции $\tilde{\varphi}(r)$, описываемой соотношениями (5.6), выполнено

$$\frac{r\tilde{\varphi}'(r)}{\tilde{\varphi}(r)} = r O\left(\frac{\mu(r)}{r^2}\right) = O\left(\frac{\mu(r)}{r}\right) = O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right), \quad r \rightarrow +\infty,$$

то $\tilde{\varphi}(r)$ по теореме 3 медленно меняется с остаточным членом $\nu(r)$. Полагая в теоремах 4 и 5 $f(t) = 1/(t^2 - 1)$, выводим следующие оценки (см. формулы (5.8), (5.9) и комментарий к ним):

$$\nu(r) \int_{1+\xi}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(rt) - \tilde{\varphi}(r)}{t^2 - 1} dt = O(1), \quad \nu(r) \int_0^{1-\xi} \frac{\tilde{\varphi}(rt) - \tilde{\varphi}(r)}{t^2 - 1} dt = O(1),$$

где ξ – фиксированное число из $(0, 1)$. Для доказательства того, что правая часть формулы (5.7) конечна, осталось оценить при $r \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ интегралы

$$\nu(r) \int_{1-\xi}^{\lambda_{n-1}/r} \frac{\tilde{\varphi}(rt) - \tilde{\varphi}(r)}{t^2 - 1} dt, \quad \nu(r) \int_{\lambda_{n+1}/r}^{1+\xi} \frac{\tilde{\varphi}(rt) - \tilde{\varphi}(r)}{t^2 - 1} dt.$$

Выберем последовательность $r_n \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, на которой достигается супремум в (5.7), и обозначим

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{r_n} \in \left[\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}}, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right], \quad q_n = \frac{\lambda_{n+2}}{r_n} \in \left[\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}}, \frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_n} \right].$$

В силу (5.6) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \nu(r_n) \int_{1-\xi}^{p_n} \frac{\tilde{\varphi}(r_n t) - \tilde{\varphi}(r_n)}{t^2 - 1} dt &= O\left(\nu(r_n) r_n \max_{r_n(1-\xi) \leq \tau \leq r_n} |\tilde{\varphi}'(\tau)| \int_{1-\xi}^{p_n} \frac{t-1}{t^2-1} dt\right) \\ &= O\left(\frac{\nu(r_n) \mu(r_n)}{r_n}\right) \int_{1-\xi}^1 \frac{t-1}{t^2-1} dt = O(1). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, но с дополнительным учетом того, что $\mu(r)$ – правильно меняющаяся функция порядка $p = 1$, находим

$$\begin{aligned} \nu(r_n) \int_{q_n}^{1+\xi} \frac{\tilde{\varphi}(r_n t) - \tilde{\varphi}(r_n)}{t^2 - 1} dt &= O\left(\nu(r_n) r_n \max_{r_n \leq \tau \leq r_n(1+\xi)} |\tilde{\varphi}'(\tau)| \int_{q_n}^{1+\xi} \frac{t-1}{t^2-1} dt\right) \\ &= O\left(\frac{\nu(r_n) \mu(r_n(1+\xi))}{r_n}\right) \int_1^{1+\xi} \frac{t-1}{t^2-1} dt \\ &= O\left(\frac{\mu(r_n(1+\xi))}{\mu(r_n)}\right) = O(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки, приходим к (4.17). По лемме 7 выполняется условие (1.15). Как следствие, $\delta(\Lambda) = 0$ для стандартного индекса конденсации (1.6).

Теорема 2 доказана.

§ 6. Заключительные замечания

Сделаем некоторые дополнения к теоремам 1 и 2, полезные для понимания сути дела. Начнем с простого примера весовой функции, подпадающей под действие теоремы 1, но не имеющей правильного изменения.

ПРИМЕР 1. Приведем пример функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), удовлетворяющей условию (1.10), которая не является правильно меняющейся на бесконечности. Функцию $\omega(r)$ определим при $r \geq 2$ так, чтобы

$$\omega(2^{2m-1}) = 16 \cdot 3^{m-3}, \quad \omega(2^{2m}) = 3^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

а на каждом из отрезков вида $2^{2m-1} \leq r \leq 2^{2m}$ и $2^{2m} \leq r \leq 2^{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, зададим $\omega(r)$ линейно. Построенная кусочно линейная непрерывная функция $\omega(r)$ будет удовлетворять условиям (i), (ii). Покажем, что выполнено (iii), т.е. $\omega(r)$ вогнута при $r \geq 2$. Для этого достаточно проверить, что убывает последовательность угловых коэффициентов линейных функций, составляющих $\omega(r)$, т.е. при каждом $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{\omega(2^{2m}) - \omega(2^{2m-1})}{2^{2m} - 2^{2m-1}} > \frac{\omega(2^{2m+1}) - \omega(2^{2m})}{2^{2m+1} - 2^{2m}} > \frac{\omega(2^{2m+2}) - \omega(2^{2m+1})}{2^{2m+2} - 2^{2m+1}}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\omega(2^{2m}) - \omega(2^{2m-1})}{2^{2m} - 2^{2m-1}} &= \frac{3^m - 16 \cdot 3^{m-3}}{2^{2m-1}} = \frac{22}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^m, \\ \frac{\omega(2^{2m+1}) - \omega(2^{2m})}{2^{2m+1} - 2^{2m}} &= \frac{16 \cdot 3^{m-2} - 3^m}{2^{2m}} = \frac{7}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^m, \\ \frac{\omega(2^{2m+2}) - \omega(2^{2m+1})}{2^{2m+2} - 2^{2m+1}} &= \frac{22}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^{m+1} = \frac{11}{18} \left(\frac{3}{4}\right)^m. \end{aligned}$$

Поскольку $22/27 > 7/9 > 11/18$, то $\omega(r)$ удовлетворяет условию (iii). Но функция $\omega(r)$ не является правильно меняющейся на бесконечности, так как не существует предела

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(2r)}{\omega(r)}.$$

Действительно,

$$\frac{\omega(2^{2m})}{\omega(2^{2m-1})} = \frac{27}{16}, \quad \frac{\omega(2^{2m+1})}{\omega(2^{2m})} = \frac{16}{9}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно убедиться в справедливости (1.10) для функции $\omega(r)$ из этого примера. В самом деле, по построению

$$\begin{aligned} \omega(r) &= 5 \cdot 3^{m-3} + \frac{22}{2^{2m}} 3^{m-3} r, & 2^{2m-1} \leq r \leq 2^{2m}, \\ \omega(r) &= 2 \cdot 3^{m-2} + \frac{7}{2^{2m}} 3^{m-2} r, & 2^{2m} \leq r \leq 2^{2m+1}, \end{aligned}$$

при каждом $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{\omega(r)}{r^2} dr &= \sum_{m=1}^\infty \left(5 \cdot 3^{m-3} \frac{1}{r} \Big|_{2^{2m}}^{2^{2m-1}} + 2 \cdot 3^{m-2} \frac{1}{r} \Big|_{2^{2m+1}}^{2^{2m}} \right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{22}{2^{2m}} \cdot 3^{m-3} \ln r \Big|_{2^{2m-1}}^{2^{2m}} + \frac{7}{2^{2m}} \cdot 3^{m-2} \ln r \Big|_{2^{2m}}^{2^{2m+1}} \right) \\ &= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{5}{27} \left(\frac{3}{4} \right)^m + \frac{1}{9} \left(\frac{3}{4} \right)^m + \frac{22}{27} \left(\frac{3}{4} \right)^m \ln 2 + \frac{7}{9} \left(\frac{3}{4} \right)^m \ln 2 \right) \\ &= \left(\frac{8}{27} + \frac{43}{27} \ln 2 \right) \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{3}{4} \right)^m = \frac{8 + 43 \ln 2}{9}. \end{aligned}$$

Ясно также, что функцию с указанными в этом примере свойствами можно сделать дифференцируемой, подправляя $\omega(r)$ в окрестностях точек излома.

В связи с примером 1 упомянем работу [30], в которой для произвольной положительной возрастающей непрерывной функции конечного положительного порядка (по поводу шкалы роста см. [31; гл. II, § 1]), принадлежащей классу сходимости (т.е. с условием (1.10)), построена правильно меняющаяся мажоранта из класса сходимости. В частности, весовая функция из нашего примера 1 имеет правильно меняющуюся мажоранту, удовлетворяющую условию (1.10).

ПРИМЕР 2. Приведем более сложный пример, связанный с теоремой 2 и показывающий, что и в случае нарушения требования (1.10) функция со свойствами (i)–(iii) может не иметь правильного изменения на бесконечности.

Конкретнее, приведем пример функции $\omega(r)$ со свойствами (i)–(iii), удовлетворяющей условию (1.13), которая при любом $t > 1$ удовлетворяет соотношению (1.17). Для этого зададим три вспомогательные числовые последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= a > 1, & a_{2k} &= (a_{2k-1})^{\exp(\exp k^2)}, & a_{2k+1} &= k a_{2k}, & k &\in \mathbb{N}; \\ b_1 &> 0, & b_{k+1} &= e^{a_{2k} - a_{2k+1}} \frac{\ln a_{2k+1}}{\ln a_{2k}} b_k, & k &\in \mathbb{N}; \\ c_k &= \frac{e^{a_{2k}}}{\ln a_{2k}} b_k, & k &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Функцию $\omega(r)$ строим в виде

$$\omega(r) = \int_a^r \varepsilon(t) dt, \quad r \geq a, \quad (6.1)$$

где $\varepsilon(r)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ задается так:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{b_k}{\ln r}, & r \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \\ \frac{c_k}{e^r}, & r \in [a_{2k}, a_{2k+1}]. \end{cases}$$

Проверим, что $\varepsilon(r)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varepsilon(r) > 0$ определена, непрерывна и строго убывает при $r \geq a$;
- 2) $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$;
- 3) $\int_a^\infty \frac{\varepsilon(r)}{r} dr = +\infty$.

Действительно, при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\varepsilon(a_{2k} - 0) = \frac{b_k}{\ln a_{2k}}, \quad \varepsilon(a_{2k} + 0) = \frac{c_k}{e^{a_{2k}}}.$$

Учитывая определение последовательности $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, откуда получаем

$$\varepsilon(a_{2k} - 0) = \varepsilon(a_{2k} + 0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично, используя определения последовательностей $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\varepsilon(a_{2k+1} - 0) = \frac{c_k}{e^{a_{2k+1}}} = \frac{e^{a_{2k} - a_{2k+1}}}{\ln a_{2k}} b_k, \quad \varepsilon(a_{2k+1} + 0) = \frac{b_{k+1}}{\ln a_{2k+1}} = \frac{e^{a_{2k} - a_{2k+1}}}{\ln a_{2k}} b_k.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(a_{2k+1} - 0) = \varepsilon(a_{2k+1} + 0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому функция $\varepsilon(r)$ непрерывна при $r \geq a$. Отсюда получаем свойство 1), поскольку положительность и убывание $\varepsilon(r)$ вытекают прямо из определения функции $\varepsilon(r)$ и ее непрерывности.

Свойство 2) есть очевидное следствие определения $\varepsilon(r)$.

Проверим выполнение свойства 3). Для этого достаточно установить расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{\varepsilon(r)}{r} dr = \sum_{k=1}^{\infty} d_k. \quad (6.2)$$

Из определений функции $\varepsilon(r)$ и последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ находим

$$d_k = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{\varepsilon(r)}{r} dr = b_k \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \frac{dr}{r \ln r} = b_k \ln \frac{\ln a_{2k}}{\ln a_{2k-1}} = b_k e^{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Но согласно рекуррентной формуле, задающей $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, имеем

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\ln a_{2k+1}}{e^k \ln a_{2k}} \sim e^{-k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{b_{k+1}}{b_k} e^{2k+1} \sim e^{k+1}, \quad k \rightarrow \infty,$$

и ряд (6.2) расходится.

Итак, функция $\varepsilon(r)$ обладает свойствами 1)–3). Но тогда функция $\omega(r)$, заданная формулой (6.1), обладает свойствами (i)–(iii) и удовлетворяет условию (1.13). Действительно, поскольку $\varepsilon(r)$ непрерывна при $r \geq a$ и положительна при $r > a$, то $\omega(r)$ непрерывно дифференцируема, строго возрастает при $r \geq a$ и также положительна при $r > a$. Далее,

$$\omega(r) = \int_a^r \varepsilon(t) dt \geq \int_a^r \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Так как $\omega'(r) = \varepsilon(r)$ строго убывает (к нулю) при $r \geq a$, то $\omega(r)$ строго вогнута при $r \geq a$. Проверим, наконец, что $\omega(r)$ удовлетворяет условию (1.13). Интегрируя по частям, при всех $R \geq a$ находим

$$\int_a^R \frac{\omega(r)}{r^2} dr = -\frac{\omega(R)}{R} + \int_a^R \frac{\varepsilon(r)}{r} dr.$$

Применяя правило Лопиталя и свойство 2) функции $\varepsilon(r)$, имеем

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\omega(R)}{R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \omega'(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon(R) = 0.$$

С учетом свойства 3) функции $\varepsilon(r)$ теперь получаем (1.13), поскольку

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R \frac{\omega(r)}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R \frac{\varepsilon(r)}{r} dr = +\infty.$$

Осталось убедиться в справедливости соотношения (1.17). Выберем произвольное $t > 1$. Пусть $k \geq [t] + 1$. Тогда $ta_{2k} \in [a_{2k}, a_{2k+1}] = [a_{2k}, k a_{2k}]$ и

$$\omega(ta_{2k}) - \omega(a_{2k}) = \int_{a_{2k}}^{ta_{2k}} \varepsilon(r) dr = c_k \int_{a_{2k}}^{ta_{2k}} e^{-r} dr \sim \frac{c_k}{e^{a_{2k}}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, используя убывание функции $\varepsilon(r)$, имеем

$$\omega(r) = \int_a^r \varepsilon(t) dt \geq \varepsilon(r) (r - 1), \quad r \geq a.$$

Следовательно,

$$\omega(a_{2k}) \geq \varepsilon(a_{2k})(a_{2k} - 1) \sim \frac{b_k a_{2k}}{\ln a_{2k}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(ta_{2k}) - \omega(a_{2k})}{\omega(a_{2k})} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k \ln a_{2k}}{e^{a_{2k}} b_k a_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{2k}} = 0,$$

откуда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(ta_{2k})}{\omega(a_{2k})} \leq 1.$$

Поскольку функция $\omega(r)$ возрастает, то последнее соотношение означает, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = 1, \quad t > 1. \quad (6.3)$$

Теперь проверим, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} = t, \quad t > 1. \quad (6.4)$$

Непосредственно из определения функции $\varepsilon(r)$ вытекает, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon(tr)}{\varepsilon(r)} = 1, \quad t > 1.$$

Применяя обобщенное правило Лопиталя, отсюда получаем

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{t\omega'(tr)}{\omega'(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{t\varepsilon(tr)}{\varepsilon(r)} = t,$$

что дает оценку сверху

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \leq t, \quad t > 1. \quad (6.5)$$

Для вывода оценки снизу воспользуемся очевидным неравенством

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(a_{2k})}{\omega(t^{-1}a_{2k})}. \quad (6.6)$$

Поскольку, начиная с некоторого номера, $t^{-1}a_{2k} \in [a_{2k-1}, a_{2k}]$, то

$$\omega(a_{2k}) - \omega(t^{-1}a_{2k}) = \int_{a_{2k}}^{t^{-1}a_{2k}} \varepsilon(r) dr = b_k \int_{a_{2k}}^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r} \geq \frac{b_k a_{2k}}{\ln a_{2k}} (1 - t^{-1}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \omega(t^{-1}a_{2k}) &= \int_a^{t^{-1}a_{2k}} \varepsilon(r) dr = \int_a^{a_{2k-1}} \varepsilon(r) dr + b_k \int_{a_{2k-1}}^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r} \\ &< b_1 \int_a^{a_{2k-1}} \frac{dr}{\ln r} + b_k \int_a^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r} < \frac{b_1}{\ln a} a_{2k-1} + b_k \int_a^{t^{-1}a_{2k}} \frac{dr}{\ln r}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое при $k \rightarrow \infty$ эквивалентно величине $t^{-1} \frac{b_k a_{2k}}{\ln a_{2k}}$ в силу асимптотики

$$\int_a^R \frac{dr}{\ln r} \sim \frac{R}{\ln R}, \quad R \rightarrow +\infty.$$

Следовательно,

$$\omega(t^{-1}a_{2k-1}) < t^{-1} \frac{b_k a_{2k}}{\ln a_{2k}} + o\left(\frac{b_k a_{2k}}{\ln a_{2k}}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(a_{2k}) - \omega(t^{-1}a_{2k})}{\omega(t^{-1}a_{2k})} \geq \frac{1 - t^{-1}}{t^{-1}} = t - 1.$$

Полученное соотношение перепишем в виде

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(a_{2k})}{\omega(t^{-1}a_{2k})} \geq t, \quad t > 1. \quad (6.7)$$

Сочетая (6.7) с (6.6), получаем, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\omega(tr)}{\omega(r)} \geq t, \quad t > 1. \quad (6.8)$$

Соотношения (6.5), (6.8) дают (6.4). Объединяя (6.4) и (6.3), приходим к (1.17).

В завершение работы вычислим индикатор канонического произведения (1.4), построенного по последовательности Λ из теоремы 2, а также проиллюстрируем теоремы 1 и 2 на модельном примере функции (1.16).

Пусть Λ – неизмеримая последовательность положительных чисел, построенная в ходе доказательства теоремы 2. Пусть $n_\Lambda(r)$ – считающая функция последовательности Λ и $\varphi(r) = n_\Lambda(r)/r$. Тогда справедлива асимптотическая формула, которую мы запишем с огрублением в остаточном члене по сравнению с (5.4):

$$\varphi(r) = \tilde{\varphi}(r) + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Здесь функция $\tilde{\varphi}(r)$ удовлетворяет свойствам (5.6). Такое ослабление формулы (5.4) вполне достаточно для наших целей и несколько упрощает дальнейшие выкладки. Как известно (см., например, [7]), при всех $r > 0$ и $\theta \in (0, \pi/2]$ логарифм модуля канонического произведения (1.4) допускает интегральное представление

$$\frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} = \int_0^\infty G(t, \theta) \varphi(rt) dt \quad (6.9)$$

с ядром

$$G(t, \theta) = \frac{2(1 - t^2 \cos 2\theta)}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1}.$$

Непосредственно проверяется (это проделано в [7]), что

$$\int_0^\infty G(t, \theta) dt = \pi \sin \theta.$$

Поскольку $\tilde{\varphi}(r)$ медленно меняется на бесконечности, то к интегралам, содержащим $\tilde{\varphi}(rt)$, применимы асимптотические формулы типа (5.8), (5.9). Сейчас нас устраивает простой вариант такой асимптотики в форме соотношения из [23; п. 1.2], объединяющего утверждения теорем 2.6 и 2.7 из [18; гл. 2]. Применительно к (6.9) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G(t, \theta) \varphi(rt) dt &= \int_0^\infty G(t, \theta) \tilde{\varphi}(rt) dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \int_0^\infty \frac{G(t, \theta)}{\sqrt{t}} dt \\ &= \tilde{\varphi}(r)(1 + o(1)) \int_0^\infty G(t, \theta) dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом третьего соотношения в (5.6) находим

$$h_L(\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln|L(re^{i\theta})|}{r} = \pi \sin \theta \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}(r) = \pi \beta \sin \theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Полученное равенство означает, что индикатор функции $L(\lambda)$ вычисляется по правилу

$$h_L(\theta) = \pi \beta |\sin \theta| = \sigma |\sin \theta|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

а индикаторная диаграмма является отрезком мнимой оси $[-\sigma i, \sigma i]$.

Наконец, проиллюстрируем теоремы 1 и 2 на “модельном” примере весовых функций

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q}$$

вида (1.16). Всякий вес (1.16) обладает свойствами (i)–(iii), если взять $q > 0$ и $a > e^{q+1}$. При этом сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^\infty \frac{\omega(r)}{r^2} dr = \int_a^\infty \frac{dr}{r(\ln r)^q}$$

зависит от параметра q .

Пусть сначала $q > 1$. Тогда функция (1.16) удовлетворяет условию (1.10). Пусть Λ – последовательность вида (1.1) с конечной верхней плотностью (1.2) такая, что построенное по этой последовательности каноническое произведение (1.4) удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{L'(\lambda_n)} = O(\exp(\lambda_n(\ln \lambda_n)^{-q})), \quad q > 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Тогда по теореме 1 последовательность Λ измерима. Это означает, что величины (1.2), (1.3) совпадают, принимая общее значение $\Delta(\Lambda)$, а каноническое произведение $L(\lambda)$ есть целая функция вполне регулярного роста с типом $\sigma = \pi\Delta(\Lambda)$ и индикатором $h_L(\theta) = \sigma|\sin \theta| = \pi\Delta(\Lambda)|\sin \theta|$.

Пусть теперь $0 < q \leq 1$. Тогда весовая функция (1.16) правильно меняется на бесконечности и удовлетворяет условию (1.13). В данной ситуации применима теорема 2. Выберем произвольно числа α, β , связав их соотношением $0 \leq \alpha < \beta$. В ходе доказательства теоремы 2 (пропускаем этап I и далее до конца доказательства используем исходный вес $\omega(r)$ вместо модифицированного $\mu(r)$) указан способ построения такой последовательности Λ с нижней плотностью α и верхней плотностью β , что порождаемая этой последовательностью целая функция (1.4) удовлетворяет асимптотической формуле вида (6.10) с заданным $0 < q \leq 1$. Зависящая от α, β, q последовательность Λ может быть построена, например, следующим образом. Первый член $\lambda_1 > e$ выбираем произвольно. При $\alpha > 0$ остальные члены $\lambda_n, n = 2, 3, \dots$, последовательно находим по правилу

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \begin{cases} \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2((\ln \lambda_n)^{1-q}), & 0 < q < 1, \\ \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \sin^2(\ln \ln \lambda_n), & q = 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 0$ пользуемся рекуррентными соотношениями

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \begin{cases} \frac{1}{\beta} + (\ln \lambda_n)^\gamma \sin^2((\ln \lambda_n)^\gamma), & 0 < q < 1, \quad \gamma = \frac{1-q}{2}, \\ \frac{1}{\beta} + \sqrt{\ln \ln \lambda_n} \sin^2(\sqrt{\ln \ln \lambda_n}), & q = 1. \end{cases}$$

Все рекуррентные формулы выписаны в соответствии с общими соотношениями из § 5 (этап II доказательства теоремы 2), где вместо модифицированной функции $\mu(r)$ берется исходная весовая функция

$$\omega(r) = \frac{r}{(\ln r)^q}, \quad 0 < q \leq 1.$$

Неизмеримая последовательность Λ имеет наперед заданные плотности, причем ее индекс ω -конденсации конечен, а стандартный индекс конденсации равен нулю.

Немного усложним задачу. Пусть для веса (1.16) при $0 < q \leq 1$ требуется построить неизмеримую последовательность Λ так, чтобы асимптотика (6.10) выполнялась в усиленном варианте – с символом o вместо символа O , т.е.

$$\frac{1}{L'(\lambda_n)} = o(\exp(\lambda_n(\ln \lambda_n)^{-q})), \quad 0 < q \leq 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Существование такой последовательности гарантировано теоремой 2. Для конструктивного построения действуем следующим образом. Сначала заменим функцию $\omega(r)$ на модифицированную функцию $\mu(r)$. Для этого, конечно, можно воспользоваться универсальным правилом, указанным в доказательстве леммы 5. Однако в данной конкретной ситуации проще взять в качестве нового веса функцию

$$\mu(r) = \frac{r}{\ln r \ln \ln r} = o\left(\frac{r}{(\ln r)^q}\right), \quad 0 < q \leq 1, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Затем выпишем искомую последовательность Λ по схеме, изложенной в § 5. Например, требуемую последовательность Λ с нулевой нижней плотностью можно получить, выбрав достаточно большое значение λ_1 и положив

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{\beta} + \sqrt{\ln \ln \ln \lambda_n} \sin^2(\sqrt{\ln \ln \ln \lambda_n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как весовой (1.8), так и стандартный (1.6) индексы конденсации такой последовательности Λ равны нулю. Соответствующее каноническое произведение $L(\lambda)$ имеет индикатор $h_L(\theta) = \pi\beta|\sin \theta|$, но не является функцией вполне регулярного роста.

Автор благодарит А. Ю. Попова и И. В. Тихонова за помощь при подготовке работы.

Список литературы

- [1] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [2] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956, 632 с.; англ. пер.: В. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964, viii+493 pp.
- [3] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris, 1933, xiv+320 с.
- [4] И. Ф. Красичков, “Оценки снизу для целых функций конечного порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **6**:4 (1965), 840–861.
- [5] А. В. Братищев, “Возникновение и развитие понятия индекса конденсации”, *Актуальные вопросы теории функций*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1987, 50–55.
- [6] А. Ю. Попов, “Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 113–138; англ. пер.: А. Yu. Popov, “Extremal problems in the theory of analytic continuation”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 737–761.
- [7] А. Ю. Попов, “Точная оценка индекса конденсации”, *Math. Montisnigri*, **11** (1999), 67–103.

- [8] А. Ю. Попов, *Экстремальные задачи в теории целых функций*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2005, 226 с.
- [9] А. С. Кривошеев, "Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:2 (2004), 71–136; англ. пер.: A. S. Krivosheev, "A fundamental principle for invariant subspaces in convex domains", *Izv. Math.*, **68**:2 (2004), 291–353.
- [10] О. А. Кривошеева, "Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости", *Алгебра и анализ*, **23**:2 (2011), 162–205; англ. пер.: O. A. Krivosheeva, "Singular points of the sum of a series of exponential monomials on the boundary of the convergence domain", *St. Petersburg Math. J.*, **23**:2 (2012), 321–350.
- [11] А. Ф. Леонтьев, "Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:6 (1972), 1282–1295; англ. пер.: A. F. Leont'ev, "On conditions of expandibility of analytic functions in Dirichlet series", *Math. USSR-Izv.*, **6**:6 (1972), 1265–1277.
- [12] А. Ф. Леонтьев, "1.11. Представление функций рядами экспонент", *Исследования по линейным операторам и теории функций*, 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **81**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1978, 255–257; англ. пер.: A. F. Leont'ev, "1.11. The representation of functions by exponential series", *J. Soviet Math.*, **26**:5 (1984), 2275–2278.
- [13] А. В. Братищев, "К одной задаче А. Ф. Леонтьева", *Докл. АН СССР*, **270**:2 (1983), 265–267; англ. пер.: A. V. Bratishchev, "On a problem of A. F. Leont'ev", *Soviet Math. Dokl.*, **27**:3 (1983), 572–574.
- [14] А. М. Гайсин, "Об одной гипотезе Поля", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **58**:2 (1994), 73–92; англ. пер.: A. M. Gaisin, "On a conjecture of Pólya", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:2 (1995), 281–299.
- [15] А. М. Гайсин, "Решение проблемы Поля", *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 39–60; англ. пер.: A. M. Gaisin, "Solution of the Polya problem", *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 825–845.
- [16] В. Б. Шерстюков, "Обобщенный индекс конденсации последовательности положительных чисел", *Исследования по современному анализу и математическому моделированию*, ВНИЦ РАН, Владикавказ, 2008, 75–84.
- [17] В. Б. Шерстюков, "Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент", *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 301–313; англ. пер.: V. B. Sherstyukov, "On a problem of Leont'ev and representing systems of exponentials", *Math. Notes*, **74**:2 (2003), 286–298.
- [18] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985, 142 с.; пер. с англ.: E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, v+112 pp.
- [19] В. Б. Шерстюков, "О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями", *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 621–630; англ. пер.: V. B. Sherstyukov, "On the regularity of growth of canonical products with real zeros", *Math. Notes*, **82**:4 (2007), 555–563.
- [20] А. Е. Ингхам, "A note on Fourier transforms", *J. London Math. Soc.*, **S1-9**:1 (1934), 29–32.
- [21] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940, viii+246 pp.
- [22] W. A. J. Luxemburg, J. Korevaar, "Entire functions and Müntz–Szász type approximation", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **157** (1971), 23–37.
- [23] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005, 504 с.

- [24] Б. Я. Левин, “Почти периодические функции с ограниченным спектром”, *Актуальные вопросы математического анализа*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1978, 112–124.
- [25] В. Э. Кацнельсон, “Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа”, *Матем. сб.*, **92(134)**:1(9) (1973), 34–54; англ. пер.: V. È. Katsnel’son, “Equivalent norms in spaces of entire functions”, *Math. USSR-Sb.*, **21**:1 (1973), 33–55.
- [26] В. Н. Логвиненко, “Условия ограниченности целых функций экспоненциального типа внутри гипероктанта $\mathbb{R}_+^n$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:3 (1989), 644–656; англ. пер.: V. N. Logvinenko, “Boundedness conditions for entire functions of exponential type interior to the hyperoctant $\mathbf{R}_+^n$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **34**:3 (1990), 663–676.
- [27] R. Ph. Boas, Jr., *Entire functions*, Academic Press Inc., New York, 1954, x+276 pp.
- [28] Г. Г. Брайчев, *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций*, Прометей, М., 2005, 232 с.
- [29] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia Math. Appl., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, xx+491 pp.
- [30] В. С. Бойчук, “О некоторых свойствах уточненного порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:2 (1979), 229–236; англ. пер.: V. S. Boïchuk, “Some properties of a refined order”, *Siberian Math. J.*, **20**:2 (1979), 162–167.
- [31] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970, 592 с.; англ. пер.: A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, xvi+488 pp.

Владимир Борисович Шерстюков
(Vladimir B. Sherstyukov)

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: shervb73@gmail.com

Поступила в редакцию
11.11.2014 и 19.01.2015