Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, Точные решения одномерной задачи Монжа–Канторовича, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 57–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:43:09

УДК 517.98

А. Ю. Плахов

Точные решения одномерной задачи Монжа–Канторовича

Рассматривается задача Монжа–Канторовича о нахождении меры, реализующей перенос массы из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ с наименьшими затратами. Предполагается, что начальное и конечное распределения массы совпадают, а стоимость переноса единичной массы из точки x в точку y выражается нечетной функцией $f(x+y)$, строго вогнутой на $\mathbb{R}_+$. При некоторых допущениях о распределении массы доказано, что оптимальная мера принадлежит некоторому конечно- или счетнопараметрическому семейству мер. Это семейство описано в явном виде; оно зависит только от распределения массы и не зависит от f . При некотором дополнительном ограничении на распределение массы число параметров оказывается конечным и задача сводится к минимизации функции нескольких переменных. Рассматриваются примеры различных распределений массы.

Библиография: 4 названия.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс на прямой состоит в минимизации функционала

$$\mathcal{F}(\nu) = \iint_{\mathbb{R}^2} c(x, y) d\nu(x, y), \quad \nu \in \mathcal{M}(\lambda, \mu), \quad (1)$$

где c – заданная функция двух переменных, λ и μ – борелевские меры на прямой, $\lambda(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}) < \infty$, и $\mathcal{M}(\lambda, \mu)$ – множество борелевских мер ν на $\mathbb{R}^2$ таких, что $\nu(J \times \mathbb{R}) = \lambda(J)$, $\lambda(\mathbb{R} \times J) = \mu(J)$ для любого борелевского множества $J \subset \mathbb{R}$. Хорошо известно (см., например, [1]), что если функция c полунепрерывна снизу, то существует мера $\nu_* \in \mathcal{M}(\lambda, \mu)$, на которой $\mathcal{F}$ достигает минимума.

К настоящему времени точные решения задачи минимизации (1) известны лишь для некоторых частных случаев, а именно:

- (а) $c(x, y) = h(x - y)$, где h – строго выпуклая функция или $h(\xi) = |\xi|^p$, $p \geq 1$ (обзор соответствующих результатов см., например, в [2]);
- (б) $c(x, y) = h(|x - y|)$, где h – положительная строго вогнутая функция [2];
- (в) меры λ и μ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, $c(x, y) = h(x - y)$ или $c(x, y) = h(x + y)$, функция h имеет три интервала монотонности [3];
- (г) $c(x, y) = h(x - y)$, где h – гладкая вогнутая функция, носители μ и λ – замкнутые ограниченные сегменты, $\mu = l_{\#}(\lambda)$, $l(x) = -x + b$, $b \in \mathbb{R}$ [4].

В нашей работе эта задача рассматривается при следующих допущениях:

- (i) $c(x, y) = f(x + y)$, где f — нечетная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, строго вогнутая при $x \geq 0$;
- (ii) $\lambda = \mu$, причем λ имеет компактный носитель, состоящий из конечного числа отрезков, и мера любого одноточечного множества равна нулю.

Мы опишем семейство мер на $\mathbb{R}^2$, зависящих от конечного или счетного числа параметров, и докажем, что оптимальная мера ν_* принадлежит этому семейству. Семейство определяется мерой λ и не зависит от f . При некотором дополнительном ограничении на λ число параметров оказывается конечным и задача сводится к минимизации функции нескольких переменных.

Далее символ spt обозначает носитель соответствующей меры, т.е. наименьшее замкнутое множество полной меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Меру $\nu \in \mathcal{M}(\lambda, \mu)$ назовем *c-регулярной*, если для любых двух точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ из $\text{spt } \nu$ справедливо неравенство

$$c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2) \leq c(x_1, y_2) + c(x_2, y_1). \quad (2)$$

Хорошо известен тот факт, что в случае, если функция c непрерывна, любая оптимальная мера является регулярной (см., например, [1]). В частности, он справедлив и для рассматриваемого нами случая, когда $c(x, y) = f(x + y)$ и $\lambda = \mu$.

Определим знакопеременную борелевскую меру $\tilde{\lambda}$ на $\mathbb{R}_+ :=]0, +\infty[$ формулой

$$\tilde{\lambda}(B) = \lambda(B) - \lambda(-3B),$$

где $B \subset \mathbb{R}_+$ — произвольное борелевское множество, $-3B := \{-3x : x \in B\}$, и обозначим через λ_+ и λ_- верхнюю и нижнюю вариации $\tilde{\lambda}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конечное или счетное семейство интервалов $\{I_i\}$ назовем *допустимым*, если

$$(a) \ I_i \subset \mathbb{R}_+ \text{ и } \overline{I_i} \cap \overline{I_j} = \emptyset \text{ при } i \neq j; \quad (3)$$

$$(б) \text{ если } a_i > 0, \text{ то } \tilde{\lambda}(I_i) = 0 \text{ и } \mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i I_i) \subset \text{spt } \lambda_+; \quad (4)$$

(в) при любом i и при

$$x \in \begin{cases}]a_i, b_i[, & \text{если } a_i > 0, \\]-3b_i, b_i[, & \text{если } a_i = 0, \end{cases}$$

справедливо

$$\lambda([-3b_i, -2b_i - x]) \leq \lambda([x, b_i]) \leq \lambda([-3b_i, -2a_i - x]). \quad (5)$$

Здесь обозначено $I_i =]a_i, b_i]$, $0 \leq a_i < b_i \leq +\infty$.

Из второго соотношения в (4) с учетом ограниченности множества $\text{spt } \lambda_+$ следует, что один из интервалов допустимого семейства имеет вид $I_r =]a_r, +\infty[$. Для $i = r$ первое неравенство в (5) превращается в тривиальное неравенство $\lambda([x, b_r]) \geq 0$. В случае, если $a_r = 0$, семейство состоит из одного интервала $I_r = \mathbb{R}_+$, а значит, $\mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i I_i) = \emptyset$. Далее, один из интервалов семейства может

иметь вид $I_l =]0, b_l[$, таким образом, $a_l = 0$; в противном случае считаем, что набор индексов $\{i\}$ не содержит индекса l . Подставляя в (5) $x = 0$ и $i = l$, получаем $\lambda(]0, b_l[) \leq \lambda(]-3b_l, 0[)$, откуда $\tilde{\lambda}(I_l) \leq 0$.

Пусть $\mathcal{J} = \{I_i\}$ – некоторое семейство интервалов, удовлетворяющее условию (3). Определим множества $G_i = G_i \mathcal{J}$ формулами:

$$G_l = \{(x, y) : x, y \in \text{spt } \lambda \cap]-3b_l, b_l[, \lambda([x, b_l[) = \lambda(]-3b_l, y])\}; \quad (6)$$

при $i \neq l$ $G_i = G_i^D \cup G_i^L$, где

$$G_i^D = \{(x, y) : x \in \text{spt } \lambda \cap I_i, y \in \text{spt } \lambda \cap (-3I_i), \lambda([x, b_i[) = \lambda(]-3b_i, y])\}, \quad (7)$$

а G_i^L – множество, симметричное G_i^D относительно прямой $\{x = y\}$.

Далее, определим $G_{(0)} = G_{(0)}(\mathcal{J})$ согласно $G_{(0)} = G_{(0)}^D \cup G_{(0)}^L$, где

$$G_{(0)}^D = \left\{ (x, y) : y = -3x, x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right), y \in \text{spt } \lambda \right\};$$

а $G_{(0)}^L$ – множество, симметричное $G_{(0)}^D$ относительно прямой $\{x = y\}$.

Зададим $G^+ = G^+(\mathcal{J})$ и $G^- = G^-(\mathcal{J})$ согласно

$$G^+ = \left\{ (x, x) : x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right) \right\},$$

$$G^- = G_{(0)} \cup \left(\bigcup_i G_i' \right),$$

где G' обозначает множество предельных точек множества G .

Наконец, определим множество $G_{\mathcal{J}}$ формулой

$$G_{\mathcal{J}} = \overline{G^+} \cup G^-.$$

Это определение иллюстрирует рис. 1. На нем $\mathcal{J} = \{I_l, I_c, I_r\}$; множество G^+ есть объединение отрезков C_1C_2 и C_3C_4 , $G_{(0)}^D$ есть объединение отрезков D_1D_2 и D_3D_4 , а $G_{(0)}^L$ есть объединение отрезков L_1L_2 и L_3L_4 . Множества G_l , G_c^D , G_r^D , G_c^L и G_r^L обозначены на рис. 1. Множество G^- совпадает с кривой D_5L_5 . Интервалы I_l , I_c , I_r и множество $G_{\mathcal{J}}$ выделены жирными линиями. Мера λ такова, что $\text{spt } \lambda$ совпадает с ортогональной проекцией кривой D_5L_5 на ось Ox , справедливы соотношения (6) и (7) для $i = c, r$ и для любого интервала $J \subset \mathbb{R} \setminus (I_l \cup I_c \cup I_r)$ справедливо $\lambda(J) > \lambda(-3J)$.

Пунктирные линии на рис. 1 либо параллельны одной из координатных осей, либо образуют с ней угол $\pi/4$. Условие (5) из определения 2 применительно к семейству интервалов $\mathcal{J} = \{I_l, I_c, I_r\}$ эквивалентно геометрическому условию, состоящему в том, что множества G_l , G_c^D и G_c^L находятся внутри соответствующих

Рис. 1

пунктирных четырехугольников, а множества G_r^D и G_r^L находятся внутри соответствующей пары пунктирных линий.

Отметим, что данное семейство $\mathcal{J}$ при данной мере λ является допустимым. В самом деле, условие (3) очевидно; условие (4) является следствием непрерывности кривой D_5L_5 , а условие (5) вытекает из того, что упомянутое выше геометрическое условие выполнено.

ЛЕММА 1. *Для любого допустимого семейства $\mathcal{J} = \{I_i\}$ существует единственная мера $\nu_{\mathcal{J}} \in \mathcal{M}(\lambda, \lambda)$ такая, что $\text{spt } \nu_{\mathcal{J}} = G_{\mathcal{J}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество G^+ принадлежит лучу $\{x = y > 0\}$, а G^- принадлежит полуплоскости $\{x + y \leq 0\}$; последнее следует из определения множеств $G_{(0)}$ и G_i и из второго неравенства в (5). Кроме того, если $l \in \{i\}$, то $G^+ \subset \{x = y \geq b_l\}$, а $G_l \subset]-3b_l, b_l[\times]-3b_l, b_l[$. Определим отображения $\pi_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, формулами $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$; они инъективны на множестве, полученном из G^- удалением счетного числа точек.

Из условий на меру $\nu \in \mathcal{M}(\lambda, \lambda)$ с носителем $G_{\mathcal{J}}$ следует, что для любого борелевского множества $A \subset G_{(0)}^D \cup (\bigcup_{i \neq l} G_i^D) \cup G_l$ справедливо

$$\nu(A) = \lambda(\pi_2(A)), \quad (8)$$

для $A \subset G_{(0)}^L \cup (\bigcup_{i \neq l} G_i^L)$ справедливо

$$\nu(A) = \lambda(\pi_1(A)), \quad (9)$$

а для любого $B \subset G^+$ имеет место

$$\nu(B) = \lambda(\pi_1(B)) - \nu(\pi^D B), \quad (10)$$

где $\pi^D B := \pi_1^{-1}(\pi_1(B)) \cap G_{(0)}^D$.

Соотношения (8)–(10) однозначно определяют меру $\nu_{\mathcal{J}} \in \mathcal{M}(\lambda, \lambda)$ с носителем $G_{\mathcal{J}}$; неравенство $\nu_{\mathcal{J}}(A) \geq 0$, справедливое для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^2$, вытекает из соотношения (10), определения множеств G^+ и $G_{(0)}^D$ и из второго соотношения в (4).

Основной результат настоящей статьи заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Мера ν c -регулярна, если и только если*

$$\nu = \nu_{\mathcal{J}}$$

для некоторого допустимого семейства интервалов $\mathcal{J}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть мера ν_* оптимальна, тогда $\nu_* = \nu_{\mathcal{J}}$ для некоторого допустимого семейства интервалов $\mathcal{J}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположим, что $\text{spt } \lambda_+$ состоит из m непересекающихся отрезков; тогда число интервалов $I_i, i \neq l$, в допустимом семействе не превосходит m , причем равенство $\lambda(I_i) = 0$ в (4) задает соотношение между левым и правым концами отрезка $I_i, i \neq l, r$, и жестко фиксирует левый конец I_r . Таким образом, в силу теоремы 1 множество c -регулярных мер есть объединение конечного числа k -параметрических семейств, $k \leq m - 1$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы состоит из цепочки лемм 2–9.

ЛЕММА 2. *В случае $c(x, y) = f(x + y)$ неравенство (2) справедливо, если и только если*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \geq 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $x_1 = x_2$ справедливы как (2), так и (11), поэтому достаточно рассмотреть случай $x_1 \neq x_2$.

Учитывая, что f непрерывна, вогнута на $\mathbb{R}_+$ и выпукла на $\mathbb{R}_- :=]-\infty, 0[$, получаем, что f' определена всюду, кроме счетного числа значений, монотонно убывает на $\mathbb{R}_+$ и возрастает на $\mathbb{R}_-$ и f служит для нее первообразной. Поэтому неравенство (2) может быть записано в виде

$$\int_{y_1}^{y_2} (f'(x_2 + \eta) - f'(x_1 + \eta)) d\eta \leq 0; \quad (12)$$

делая замену переменных $\xi = \eta + (x_1 + x_2)/2$ и обозначив

$$h(\xi) = \frac{f'(\xi + \Delta x) - f'(\xi - \Delta x)}{\Delta x},$$

перепишем (12) в виде

$$\Delta x \cdot \int_{\sigma-\Delta y}^{\sigma+\Delta y} h(\xi) d\xi \leq 0. \quad (13)$$

Здесь обозначено $\Delta x = (x_2 - x_1)/2$, $\Delta y = (y_2 - y_1)/2$, $\sigma = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2)/2$. Учитывая, что функция $h(\xi)$ нечетна и отрицательна при $\xi > 0$, нетрудно видеть, что (13) справедливо, если и только если $\Delta x \Delta y \sigma \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\nu \in \mathcal{M}(\lambda, \lambda)$, то $\text{spt } \nu$ не содержит изолированных точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\nu \in \mathcal{M}(\lambda, \lambda)$. Тогда $x \in \text{spt } \lambda$, если и только если существует y такое, что $(x, y) \in \text{spt } \nu$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{I}$ – допустимое семейство интервалов; тогда мера $\nu_{\mathcal{I}}$ $\mathcal{I}$ -регулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что для любых двух точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) из $G^+ \cup G^-$ выполняется неравенство (11).

Из определения множеств G^+ и G^- следует, что если обе точки принадлежат G^+ , справедливы неравенства $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$ и $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \geq 0$, а если обе точки принадлежат G^- , справедливо $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \leq 0$ и $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \leq 0$; таким образом, неравенство (11) выполнено.

Остается рассмотреть случай $(x_1, y_1) \in G^+$, $(x_2, y_2) \in G^-$. Есть две возможности: либо

- (а) $(x_2, y_2) \in G_{(0)}$, либо
- (б) $(x_2, y_2) \in G'_i$ для некоторого i .

(а) $(x_2, y_2) \in G_{(0)} = G_{(0)}^D \cup G_{(0)}^L$. Предположим, что $(x_2, y_2) \in G_{(0)}^D$; случай $(x_2, y_2) \in G_{(0)}^L$ рассматривается аналогично. Имеем $y_2 = -3x_2 < 0$, $x_1 = y_1 > 0$, отсюда $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) = 2(x_1 - x_2)^2(x_1 + 3x_2) \geq 0$.

(б) $(x_2, y_2) \in G'_i$. В этом случае имеем либо $(x_2, y_2) \in (G_i^D)'$, $i \neq l$, либо $(x_2, y_2) \in (G_i^L)'$, $i \neq l$, либо $(x_2, y_2) \in G'_l$. Положим $(x_2, y_2) \in (G_i^D)'$, $i \neq l$; остальные случаи рассматриваются аналогично. Имеем $(x_2, y_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{(k)}, y^{(k)})$, $(x^{(k)}, y^{(k)}) \in G_i^D$ и $(x^{(k)}, y^{(k)}) \neq (x_2, y_2)$. Из определения G_i^D и условия (5) следует, что

$$\lambda([-3b_i, -2b_i - x^{(k)}]) \leq \lambda([-3b_i, y^{(k)}]) \leq \lambda([-3b_i, -2a_i - x^{(k)}]) \quad (14)$$

для любого k . Из (14) следует, что

$$-2b_i - x_2 \leq y_2 \leq -2a_i - x_2. \quad (15)$$

В самом деле, допустив, что $y_2 < -2b_i - x_2$, подберем точки $(x^{(k)}, y^{(k)})$, $(x^{(j)}, y^{(j)})$ такие, что $y^{(k)} \neq y^{(j)}$ и $\max\{y^{(k)}, y^{(j)}\} < \min\{-2b_i - x^{(k)}, -2b_i - x^{(j)}\}$. В силу (14) имеем $\lambda([y^{(k)}, -2b_i - x^{(k)}]) = 0 = \lambda([y^{(j)}, -2b_i - x^{(j)}])$, а значит, одна из точек $y^{(k)}$, $y^{(j)}$ является внутренней для интервала нулевой меры и, следовательно, не принадлежит $\text{spt } \lambda$. Полученное противоречие доказывает первое неравенство в (15); второе доказывается аналогично.

Далее, имеем $x_1 = y_1 > y_2$ и $x_1 \notin I_i$, следовательно, $x_1 \leq a_i$ или $x_1 \geq b_i$. В первом случае с учетом (15) получаем $x_1 < x_2$ и $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \leq 0$, а во втором $-x_1 > x_2$ и $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \geq 0$. В обоих случаях неравенство (11) выполнено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть J_1 и J_2 – открытые интервалы. Множество G назовем X -образным формата $J_1 \times J_2$, если

$$G \cap (J_1 \times \mathbb{R}) \subset J_1 \times \overline{J_2}, \quad G \cap (\mathbb{R} \times J_2) \subset \overline{J_1} \times J_2.$$

Заметим, что одно и то же множество может быть X -образным сразу нескольких форматов.

На рис. 2 любое множество, содержащееся в заштрихованной области, является X -образным формата $J \times J'$.

Рис. 2

ЛЕММА 4. Если $\nu \in \mathcal{M}(\lambda, \lambda)$ и множество $\text{spt } \nu$ X -образно формата $J_1 \times J_2$, то $\lambda(J_1) = \lambda(J_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\lambda(J_1) = \nu(J_1 \times \mathbb{R}) = \nu(J_1 \times J_2) = \nu(\mathbb{R} \times J_2) = \lambda(J_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим

$$\text{spt}^+ \nu := \text{spt } \nu \cap \{x + y > 0\}; \quad \text{spt}^- \nu := \text{spt } \nu \cap \{x + y \leq 0\}.$$

В следующих леммах 5–9 мера ν s -регулярна.

ЛЕММА 5. Для любого x каждое из множеств $\text{spt}^+ \nu \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$, $\text{spt}^+ \nu \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$, $\text{spt}^- \nu \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$, $\text{spt}^- \nu \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$ содержит не более двух точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение для множества $\text{spt}^+ \nu \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$; для остальных множеств доказательства аналогичны. Достаточно доказать, что если $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in \text{spt}^+ \nu$ и $y_1 < y_2$, то $\{x_1\} \times]y_1, y_2[$ не пересекается с $\text{spt}^+ \nu$.

Пусть $x + y > 0$, $y_1 < y < y_2$, $x \neq x_1$. Имеем $x_1 + y_1 + x + y > 0$, $x_1 + y_2 + x + y > 0$, $(y_1 - y)(y_2 - y) < 0$, следовательно, по крайней мере одна из величин $(x_1 - x)(y_1 - y)(x_1 + y_1 + x + y)$, $(x_1 - x)(y_2 - y)(x_1 + y_2 + x + y)$ отрицательна. Значит, неравенство (11) не выполняется для одной из пар точек $\{(x_1, y_1), (x, y)\}$, $\{(x_1, y_2), (x, y)\}$. Используя лемму 2 и учитывая s -регулярность меры ν , получаем $(x, y) \notin \text{spt } \nu$.

Таким образом, имеем $\nu(\{(x, y) : x + y > 0, y_1 < y < y_2, x \neq x_1\}) = 0$. С другой стороны, $\nu(\{(x, y) : x = x_1\}) = \lambda(\{x_1\}) = 0$. Отсюда следует, что $\nu(A) = 0$, где $A = (\mathbb{R} \times]y_1, y_2[) \cap \{x + y > 0\}$ – открытое множество, а поскольку множество $\{x_1\} \times]y_1, y_2[$ целиком принадлежит A , то оно не пересекается с $\text{spt } \nu$.

ЛЕММА 6. (а) Если $(x, y) \in \text{spt}^+ \nu$, то

$$\lambda([-x - 2y, x]) = \lambda([-y - 2x, y]).$$

(б) Если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{spt}^+ \nu$, $x_1 < x_2$, то

$$\begin{aligned} \lambda([x_1, x_2]) &\geq \lambda([-y_2 - 2x_2, -y_1 - 2x_1]), \\ \lambda([y_1, y_2]) &\geq \lambda([-x_2 - 2y_2, -x_1 - 2y_1]). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Обозначим

$$\begin{aligned} B_r &=]x, +\infty[\times]-y - 2x, y[, & B_u &=]-x - 2y, x[\times]y, +\infty[, \\ B_{Ld} &=]-\infty, -x - 2y[\times]-\infty, y[, & B_{Dl} &=]-\infty, x[\times]-\infty, -y - 2x[. \end{aligned}$$

Для точки $(x', y') \in B_r \cup B_u \cup B_{Ld} \cup B_{Dl}$ устанавливается неравенство

$$(x' - x)(y' - y)(x' + y' + x + y) < 0$$

с помощью простого перебора случаев $(x', y') \in B_j$, $j = r, u, Ld, Dl$. Тем самым в силу леммы 2 и допущения $(x, y) \in \text{spt} \nu$, ν c -регулярна, имеем $(x', y') \notin \text{spt} \nu$. Отсюда следует, что $\text{spt} \nu \subset A(x, y) := \mathbb{R}^2 \setminus (B_r \cup B_u \cup B_{Ld} \cup B_{Dl})$. Множество $A(x, y)$ X -образно формата $]-x - 2y, x[\times]-y - 2x, y[$, следовательно, и $\text{spt} \nu$ X -образно того же формата; отсюда, учитывая лемму 4, получаем утверждение (а).

(б) Из доказательства утверждения (а) следует, что $\text{spt} \nu \subset A := A(x_1, y_1) \cap A(x_2, y_2)$. Обозначим $J_1 =]-x_2 - 2y_2, -x_1 - 2y_1[$, $J_2 =]x_1, x_2[$, $J'_1 =]-y_2 - 2x_2, -y_1 - 2x_1[$, $J'_2 =]y_1, y_2[$. Непосредственной проверкой устанавливается, что

$$\begin{aligned} A \cap (J_1 \times \mathbb{R}) &= J_1 \times J'_2, & A \cap (J_2 \times \mathbb{R}) &= (J_2 \times J'_1) \cup (J_2 \times J'_2), \\ A \cap (\mathbb{R} \times J'_1) &= J_2 \times J'_1, & A \cap (\mathbb{R} \times J'_2) &= (J_1 \times J'_2) \cup (J_2 \times J'_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lambda(J_2) &= \nu(J_2 \times \mathbb{R}) = \nu((J_2 \times J'_1) \cup (J_2 \times J'_2)) \geq \nu(J_2 \times J'_1) = \nu(\mathbb{R} \times J'_1) = \lambda(J'_1), \\ \lambda(J'_2) &= \nu(\mathbb{R} \times J'_2) = \nu((J_1 \times J'_2) \cup (J_2 \times J'_2)) \geq \nu(J_1 \times J'_2) = \nu(J_1 \times \mathbb{R}) = \lambda(J_1). \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda(J_2) \geq \lambda(J'_1)$ и $\lambda(J'_2) \geq \lambda(J_1)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7. Пусть $(x_1, y_1) \in \text{spt}^+ \nu$. Если $x_1 > y_1$, то существует точка $(x_2, y_2) \in \text{spt}^+ \nu$ такая, что $y_2 \in]y_1, x_1[$, а если $x_1 < y_1$, то существует точка $(x_2, y_2) \in \text{spt}^+ \nu$ такая, что $x_2 \in]x_1, y_1[$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы; доказательство второго полностью аналогично.

Допустим противное, т.е. $x_1 > y_1$ и

$$\text{spt } \nu \cap (\mathbb{R} \times]y_1, x_1[) \subset \text{spt}^- \nu. \quad (16)$$

Пусть $y \in \text{spt } \nu \cap]y_1, x_1[$, тогда найдется x такое, что $(x, y) \in \text{spt } \nu \cap (\mathbb{R} \times]y_1, x_1[)$. В силу (16) имеем $x+y \leq 0$, следовательно, $x \leq -y < -y_1 < x_1$. Применяя лемму 2 к паре точек $\{(x, y), (x_1, y_1)\}$, получаем

$$x + y + x_1 + y_1 \leq 0. \quad (17)$$

Отсюда и из условий $x_1 + y_1 > 0$ и $y > y_1$ следует, что $x + y < 0$ и $x < -x_1 - 2y_1$.

Покажем, что множество $\text{spt } \nu$ X -образно формата $]x, -x_1 - 2y_1[\times]y_1, y[$. В самом деле, в силу (16) любая точка $(x', y') \in \text{spt } \nu \cap (\mathbb{R} \times]y_1, y[)$ принадлежит $\text{spt}^- \nu$, следовательно, $x' + y' \leq 0$, а значит, $x + y + x' + y' < 0$. Кроме того, имеем $y' - y < 0$. Применяя лемму 2 к паре точек $\{(x, y), (x', y')\}$, получаем $x' - x \geq 0$. Далее, имеем $x' \leq -y' < -y_1 < x_1$ и $y' > y_1$. Применяя лемму 2 к паре точек $\{(x_1, y_1), (x', y')\}$, получаем $x' + y' + x_1 + y_1 \leq 0$, отсюда $x' \leq -x_1 - y_1 - y' < -x_1 - 2y_1$. Таким образом, $x' \in [x, -x_1 - 2y_1]$, следовательно, $(x', y') \in [x, -x_1 - 2y_1] \times]y_1, y[$.

Пусть теперь $(x'', y'') \in \text{spt } \nu \cap (]x, -x_1 - 2y_1[\times \mathbb{R})$. Имеем $x'' - x_1 < -2x_1 - 2y_1 < 0$. Допустив, что $y'' < y_1$, получим $x'' + y'' < -x_1 - y_1$, следовательно, $(x'' - x_1)(y'' - y_1)(x'' + y'' + x_1 + y_1) < 0$, что противоречит лемме 2. Значит, $y'' \geq y_1$. С другой стороны, имеем $x'' - x > 0$, $x'' + y'' + x + y < 0$. Применяя лемму 2 к паре точек $\{(x, y), (x'', y'')\}$, получаем $y'' - y < 0$. Тем самым, $y'' \in [y_1, y]$, а значит, $(x'', y'') \in [x, -x_1 - 2y_1] \times]y_1, y[$. Таким образом, доказана X -образность множества $\text{spt } \nu$, а следовательно,

$$\lambda([x, -x_1 - 2y_1]) = \lambda([y_1, y]). \quad (18)$$

Наконец, в силу леммы 6, (а) имеем $\lambda([-x_1 - 2y_1, x_1]) = \lambda([-y_1 - 2x_1, y_1])$, откуда

$$\lambda([-y_1 - 2x_1, -x_1 - 2y_1]) = \lambda([y_1, x_1]). \quad (19)$$

Из (17)–(19) следует цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \lambda([y, x_1]) &= \lambda([y_1, x_1]) - \lambda([y_1, y]) = \lambda([-y_1 - 2x_1, -x_1 - 2y_1]) - \lambda([x, -x_1 - 2y_1]) \\ &\leq \lambda([-y_1 - 2x_1, -x_1 - 2y_1]) - \lambda([-x_1 - y_1 - y, -x_1 - 2y_1]) \\ &= \lambda([-y_1 - 2x_1, -x_1 - y_1 - y]), \end{aligned}$$

таким образом,

$$\lambda([y, x_1]) \leq \lambda([-y_1 - 2x_1, -x_1 - y_1 - y]). \quad (20)$$

С другой стороны, существует последовательность точек $(x_i, y_i) \neq (x_1, y_1)$ из $\text{spt}^+ \nu$, $i \geq 2$, сходящаяся к (x_1, y_1) . Учитывая (16), получаем, что начиная с некоторого значения i справедливо $y_i \leq y_1$. Используя лемму 5, выберем эту последовательность таким образом, что $y_i < y_1$, $x_i < x_1$. Отсюда немедленно получаем, что

$$\lambda([x_1 - \varepsilon, x_1]) > 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (21)$$

Без ограничения общности будем считать, что $x_i \in]y_1, x_1[$. Согласно лемме 6, (б)

$$\lambda([x_i, x_1]) \geq \lambda([-y_1 - 2x_1, -y_i - 2x_i]). \quad (22)$$

С другой стороны, подставляя в (20) x_i вместо y , получаем

$$\lambda([x_i, x_1]) \leq \lambda([-y_1 - 2x_1, -x_1 - y_1 - x_i]). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что для любого i

$$\lambda([-x_1 - y_1 - x_i, -y_i - 2x_i]) = 0,$$

а значит, открытое множество $\mathcal{A} = \bigcup_i]-x_1 - y_1 - x_i, -y_i - 2x_i[$ имеет нулевую меру. Таким образом, имеем

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{R} \setminus \text{spt } \lambda \quad \text{и} \quad \inf \mathcal{A} = -y_1 - 2x_1. \quad (24)$$

Согласно условию $\mathbb{R} \setminus \text{spt } \lambda$ есть объединение конечного числа интервалов; отсюда и из (24) заключаем, что для некоторого $a > 0$

$$\lambda([-y_1 - 2x_1, -y_1 - 2x_1 + a]) = 0.$$

Снова используя (23) и учитывая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_1$, заключаем, что для некоторого i справедливо $\lambda([x_i, x_1]) = 0$, что противоречит (21).

ЛЕММА 8. $\text{spt}^+ \nu$ принадлежит прямой $\{x = y\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное и рассмотрим точку $(x_1, y_1) \in \text{spt}^+ \nu$, $x_1 \neq y_1$. Без ограничения общности положим $x_1 > y_1$. Определим по индукции последовательность точек $(x_i, y_i) \in \text{spt}^+ \nu$, $i \geq 1$, удовлетворяющих условию $x_i > y_i$. Пусть точка (x_i, y_i) определена для некоторого i , тогда по определению $y_{i+1} := \sup\{y \in]y_i, x_i[: \text{существует } x \text{ такое, что } (x, y) \in \text{spt}^+ \nu\}$. Соответствующее множество непусто в силу леммы 7. Положим $x_{i+1} := \sup\{x : (x, y_{i+1}) \in \text{spt}^+ \nu\}$. Имеем $x_{i+1} > x_i$; в противном случае мы имели бы $x_{i+1} = x_i$ и согласно лемме 7 существовала бы точка $(x, y) \in \text{spt}^+ \nu$ такая, что $y \in]y_{i+1}, x_i[$, что противоречит выбору y_{i+1} .

Определенные таким образом последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ являются монотонно возрастающими и ограниченными, следовательно, существуют пределы $x_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, $y_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i$. Учитывая определение y_{i+1} и y_{i+2} и неравенство $y_{i+2} > y_{i+1}$, получаем $y_{i+2} \geq x_i$. Таким образом, справедливы неравенства $y_{i+1} \leq x_i \leq y_{i+2}$, а значит, $x_\infty = y_\infty$.

Далее, используя, что x_∞ является пределом монотонно возрастающей последовательности точек $x_i \in \text{spt } \lambda$ и что $\text{spt } \lambda$ состоит из конечного числа отрезков, заключаем, что $[x_\infty - \varepsilon, x_\infty] \subset \text{spt } \lambda$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно, для достаточно больших значений i справедливо $\lambda([y_i, x_i]) > 0$. В силу утверждения (а) леммы 6 имеем

$$\lambda([-y_i - 2x_i, -x_i - 2y_i]) = \lambda([y_i, x_i]) > 0. \quad (25)$$

Обе последовательности $-y_i - 2x_i$, $-x_i - 2y_i$ монотонно убывают и сходятся к $-3x_\infty$; снова используя, что $\text{spt } \lambda$ состоит из конечного числа отрезков, заключаем, что для некоторого $\omega > 0$ справедливо $[-3x_\infty, -3x_\infty + \omega] \subset \text{spt } \lambda$.

Согласно лемме 6, (б) имеем

$$\lambda([y_i, y_{i+1}]) \geq \lambda([-x_{i+1} - 2y_{i+1}, -x_i - 2y_i]); \quad (26)$$

кроме того, в силу неравенства $y_i < y_{i+1} \leq x_i$ имеем

$$\lambda([y_i, x_i]) \geq \lambda([y_i, y_{i+1}]). \quad (27)$$

Из (25)–(27) вытекает, что

$$\lambda([-y_i - 2x_i, -x_i - 2y_i]) \geq \lambda([-x_{i+1} - 2y_{i+1}, -x_i - 2y_i]),$$

а значит, для достаточно больших значений i

$$-y_i - 2x_i \leq -x_{i+1} - 2y_{i+1}. \quad (28)$$

Из (28) следует, что

$$\sum_1^\infty (x_i - y_i) \geq \sum_1^\infty (x_{i+1} + 2y_{i+1} - x_i - 2y_i) = 3x_\infty - x_1 - 2y_1. \quad (29)$$

С другой стороны, положив $x_0 := y_1$, имеем

$$\begin{aligned} x_\infty - y_1 &= \sum_1^\infty (y_{i+1} - y_i) \geq \sum_1^\infty \left(\frac{y_{i+1} - x_{i-1}}{2} + x_{i-1} - y_i \right) \\ &= \sum_1^\infty \frac{y_{i+1} - x_{i-1}}{2} + \sum_1^\infty \frac{x_{i-1} - y_i}{2} + \sum_1^\infty \frac{x_i - y_{i+1}}{2} = \frac{1}{2} \sum_1^\infty (x_i - y_i). \end{aligned} \quad (30)$$

Из (29) и (30) вытекает, что $3x_\infty - x_1 - 2y_1 \leq 2(x_\infty - y_1)$, следовательно, $x_\infty \leq x_1$, что противоречит монотонному возрастанию последовательности $\{x_i\}$.

ЛЕММА 9. *Любая s -регулярная мера ν имеет вид $\nu = \nu_{\mathcal{J}}$, где $\mathcal{J}$ – допустимое семейство интервалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 8 имеем $\text{spt}^+ \nu \subset \{x = y > 0\}$; кроме того, $\text{spt}^+ \nu \cup \{(0, 0)\}$ замкнуто. Следовательно, множество $\text{spt}^+ \nu$ может быть представлено в виде

$$\text{spt}^+ \nu = \left\{ (x, x) : x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right) \right\},$$

где $I_i =]a_i, b_i[$ образуют конечное или счетное семейство открытых непересекающихся интервалов, содержащихся в $\mathbb{R}_+$. Множество $\text{spt}^+ \nu$ не содержит изолированных точек, следовательно, $\bar{I}_i \cap \bar{I}_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тем самым, семейство $\mathcal{J} := \{I_i\}$ удовлетворяет условию (3).

Покажем, что $\mathcal{J}$ является допустимым семейством интервалов и что $\nu = \nu_{\mathcal{J}}$. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

(i) Если $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i \bar{I}_i \right)$, то $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \text{spt}^- \nu \subset \{(x, -3x)\}$.

Если левый конец одного из интервалов совпадает с нулем, то, как и раньше, будем обозначать этот интервал $I_l =]0, b_l[$, т.е. $a_l = 0$. В противном случае считаем, что l не принадлежит семейству индексов $\{i\}$.

(ii) Если $i \neq l$, то $\lambda([a_i, b_i]) = \lambda([-3b_i, -3a_i])$.

(iii) Если $\tilde{a}_i < x < b_i$, где $\tilde{a}_i = a_i$, $i \neq l$, $\tilde{a}_i = -3b_i$, $i = l$, $u(x, y) \in \text{spt}^- \nu$, то

$$\lambda([x, b_i]) = \lambda([-3b_i, y]).$$

(iv) Если $x = a_i$, $i \neq l$, или $x = b_i$, то $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap \text{spt}^- \nu \subset \{(x, -3x)\}$.

(v) Если $l \in \{i\}$, то

$$]-\infty, -3b_l] \times]-\infty, -3b_l]) \cap \text{spt}^- \nu = \emptyset, \quad (31)$$

а если $l \notin \{i\}$, то

$$]-\infty, 0] \times]-\infty, 0]) \cap \text{spt}^- \nu \subset \{(0, 0)\}. \quad (32)$$

(i) Пусть $x \in \mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i \bar{I}_i)$, тогда существуют последовательности $\{x'_i\}, \{x''_i\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i I_i)$ такие, что $x'_i < x < x''_i$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} x'_i = x = \lim_{i \rightarrow \infty} x''_i$. Предположим, что $(x, y) \in \text{spt}^- \nu$; тогда $y \leq -x < 0$, а следовательно, $y < x'_i$ и $y < x''_i$. Применяя лемму 2 к паре точек (x, y) , (x'_i, x'_i) и используя неравенства $x > x'_i$ и $y < x'_i$, получаем $x + y + 2x'_i \leq 0$, а применяя лемму 2 к паре точек (x, y) , (x''_i, x''_i) и используя неравенства $x < x''_i$, $y < x''_i$, получаем $x + y + 2x''_i \geq 0$. Таким образом, имеем

$$-x - 2x''_i \leq y \leq -x - 2x'_i.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем $y = -3x$, тем самым (i) доказано.

(ii) Пусть $(x, y) \in \text{spt} \nu$, $a_i < x < b_i$, тогда в силу определения I_i имеем $(x, y) \in \text{spt}^- \nu$. Справедливо $y \leq -x < 0$, следовательно, $y < a_i$ и $y < b_i$. Применяя лемму 2 к паре точек (x, y) , (a_i, a_i) и учитывая неравенства $x > a_i$, $y < a_i$, получаем $x + y + 2a_i \leq 0$; а применяя лемму 2 к паре точек (x, y) , (b_i, b_i) и учитывая неравенства $x < b_i$, $y < b_i$, получаем $x + y + 2b_i \geq 0$. Следовательно, $-3b_i < y < -3a_i$. Тем самым доказано, что $(I_i \times \mathbb{R}) \cap \text{spt} \nu \subset I_i \times (-3I_i)$.

Далее, пусть $-3b_i < y < -3a_i$. Если $x < a_i$, то $(x - a_i)(y - a_i)(x + y + 2a_i) < 0$, а если $x > b_i$, то $(x - b_i)(y - b_i)(x + y + 2b_i) < 0$, следовательно, в обоих случаях $(x, y) \notin \text{spt} \nu$. Таким образом, мы получили, что $(\mathbb{R} \times (-3I_i)) \cap \text{spt} \nu \subset I_i \times (-3I_i)$. Тем самым доказано, что $\text{spt} \nu$ крестообразно формата $I_i \times (-3I_i)$, а значит, $\lambda(I_i) = \lambda(-3I_i)$.

(iii) Пусть $\tilde{a}_i < x < b_i$ и $(x, y) \in \text{spt}^- \nu$, тогда $y \leq b_i$. В самом деле, в противном случае при $i \neq l$ имеем $x + y > 0$, что противоречит включению $(x, y) \in \text{spt}^- \nu$, а при $i = l$ имеем $(x - b_l)(y - b_l)(x + y + 2b_l) < 0$, что противоречит лемме 2 и включению $(x, y), (b_l, b_l) \in \text{spt} \nu$.

Рассмотрим точку $(x', y') \in \text{spt} \nu$ такую, что $-3b_i < y' < y$ и либо $x' > b_i$, либо $x' < x$. Если $x' > b_i$, то $(x' - b_i)(y' - b_i)(x' + y' + 2b_i) < 0$, а если $x' < x$, то $(x' - x)(y' - y)(x' + y' + x + y) < 0$. Эти неравенства противоречат утверждению

леммы 2 и включению $(x, y), (b_i, b_i), (x', y') \in \text{spt } \nu$; отсюда заключаем, что $\text{spt } \nu \cap ((-\infty, x] \cup]b_i, +\infty[) \times]-3b_i, y[) = \emptyset$.

Рассмотрим теперь точку $(x'', y'') \in \text{spt } \nu$ такую, что $x < x'' < b_i$ и либо $y'' < -3b_i$, либо $y'' > y$. В силу определения интервалов I_i имеем $(x'', y'') \in \text{spt } \nu$. Если $y'' < -3b_i$, то $(x'' - b_i)(y'' - b_i)(x'' + y'' + 2b_i) < 0$, а если $y'' > y$, то $(x'' - x)(y'' - y)(x'' + y'' + x + y) < 0$. Оба неравенства противоречат лемме 2 и включению $(x, y), (b_i, b_i), (x'', y'') \in \text{spt } \nu$. Следовательно, $\text{spt } \nu \cap (]x, b_i[\times ((-\infty, -3b_i] \cup]y, +\infty[)) = \emptyset$. Тем самым $\text{spt } \nu$ X -образно формата $]x, b_i[\times]-3b_i, y[$, а значит, $\lambda([x, b_i[) = \lambda(]-3b_i, y])$.

(iv) Пусть $x = a_i, i \neq l$, или $x = b_i, (x, y) \in \text{spt } \nu$. В силу замечания 2 существует последовательность точек $(x_n, y_n) \in \text{spt } \nu$, сходящаяся к (x, y) . Выберем ее таким образом, чтобы $x_n \notin \{a_i, b_i\}$. Используя (i)–(iii), получаем $y_i + 3x_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, следовательно, $y = -3x$.

(v) Пусть $l \in \{i\}, x \leq -3b_l, y \leq -3b_l$. Имеем $(b_l, b_l) \in \text{spt } \nu, (x - b_l)(y - b_l) \times (x + y + 2b_l) < 0$, следовательно, $(x, y) \notin \text{spt } \nu$.

Пусть $l \notin \{i\}, x \leq 0, y \leq 0, (x, y) \neq (0, 0)$. Найдем точку $(x', x') \in \text{spt } \nu$ такую, что $0 < x' < |x + y|/2$. Тогда $(x - x')(y - x')(x + y + 2x') < 0$, следовательно, $(x, y) \notin \text{spt } \nu$. Тем самым утверждение (v) доказано.

Из (i) и (iv) следует, что

$$\left(\left(\mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right) \right) \times \mathbb{R} \right) \cap \text{spt } \nu \subset \left\{ (x, y) : y = -3x, x \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right) \right\}, \quad (33)$$

а из (iii) следует, что

$$(\tilde{I}_i \times \mathbb{R}) \cap \text{spt } \nu \subset \{(x, y) : x \in \tilde{I}_i, \lambda([x, b_i[) = \lambda(]-3b_i, y])\}, \quad (34)$$

где

$$\tilde{I}_i = \begin{cases} I_i, & \text{если } i \neq l, \\]-3b_l, b_l[, & \text{если } i = l. \end{cases}$$

Аналогично устанавливаются включения

$$\left(\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right) \right) \right) \cap \text{spt } \nu \subset \{(x, y) : x = -3y, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_i I_i \right)\}, \quad (35)$$

$$(\mathbb{R} \times \tilde{I}_i) \cap \text{spt } \nu \subset \{(x, y) : y \in \tilde{I}_i, \lambda([y, b_i[) = \lambda(]-3b_i, x])\}. \quad (36)$$

Согласно замечанию 2 $\text{spt } \nu$ не содержит изолированных точек, значит, изолированные точки $\text{spt } \nu$ содержатся в $\text{spt } \nu$. Отсюда следует, что единственной изолированной точкой $\text{spt } \nu$ может быть $(0, 0)$. Учитывая, кроме того, соотношения (31)–(36) и замечание 3, заключаем, что

$$\text{spt } \nu \subset G^- \cup \overline{G^+},$$

а в силу определения семейства $\mathcal{I}$ имеем

$$\text{spt } \nu = G^+. \quad (37)$$

Тем самым справедливо

$$\text{spt } \nu \subset G_{\mathcal{J}}. \quad (38)$$

Докажем обратное включение. Заметим, что $G^- \subset (G^- \cap \{y < \tilde{b}\}) \cup (G^- \cap \{x < \tilde{b}\}) \cup \{(0, 0)\}$, где $\tilde{b} = b_l$, если $l \in \{i\}$, и $\tilde{b} = 0$, если $l \notin \{i\}$, и покажем, что

$$G^- \cap \{y < \tilde{b}\} \subset \text{spt } \nu, \quad G^- \cap \{x < \tilde{b}\} \subset \text{spt } \nu. \quad (39)$$

Обозначим через y^α те значения y , для которых пересечение $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap G^-$ состоит из двух точек; обозначим эти точки (x_1^α, y^α) и (x_2^α, y^α) , $x_1^\alpha < x_2^\alpha$. Имеем $\lambda([x_1^\alpha, x_2^\alpha]) = 0$, следовательно, x_1^α и x_2^α принадлежат конечному множеству $\partial(\text{spt } \lambda)$ и число точек y^α также конечно. Для значений y , не совпадающих с y^α , множество $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap G^-$ содержит не более одной точки.

Пусть $(x, y) \in G^-$, $y < \tilde{b}$, $y \notin \{y^\alpha\}$. Согласно (38) имеем

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap \text{spt } \nu \subset (\mathbb{R} \times \{y\}) \cap G_{\mathcal{J}} = (\mathbb{R} \times \{y\}) \cap G^- = \{(x, y)\}.$$

С другой стороны, согласно замечанию 3 имеем $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap \text{spt } \nu \neq \emptyset$. Следовательно, $(x, y) \in \text{spt } \nu$. Если же $y = y^\alpha$, то (x, y) есть предельная точка $\text{spt } \nu$, а значит, также принадлежит $\text{spt } \nu$.

Тем самым доказано первое соотношение в (39); второе доказывается аналогично. Кроме того, непосредственной проверкой устанавливается, что $(0, 0) \in G_{\mathcal{J}}$, если и только если $(0, 0) \in \text{spt } \nu$. Таким образом, доказано, что

$$G^- \subset \text{spt } \nu.$$

Далее, из (37) и замкнутости $\text{spt } \nu$ следует, что

$$\overline{G^+} \subset \text{spt } \nu.$$

Тем самым получаем $G_{\mathcal{J}} \subset \text{spt } \nu$, а значит, в силу (38)

$$G_{\mathcal{J}} = \text{spt } \nu.$$

Используя лемму 1, получаем $\nu = \nu_{\mathcal{J}}$.

Остается проверить, что семейство $\mathcal{J}$ удовлетворяет условиям (3), (4) и (5) и, тем самым, является допустимым. Условие (3) уже установлено. Первое соотношение в (4) совпадает с утверждением (ii). Далее, пусть J — произвольный интервал, имеющий непустое пересечение с $\mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i I_i)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{[C]} &:= \{(x, x) : x \in A\}, & A^{[D]} &:= \{(x, -3x) : x \in A\}, \\ A^{[L]} &:= \{(-3x, x) : x \in A\}. \end{aligned}$$

Имеем $\nu(J^{[C]}) = \nu(\check{J}^{[C]}) > 0$, где $\check{J} := J \cap (\mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i I_i))$. С другой стороны, справедливо

$$\begin{aligned} \lambda(\check{J}) &= \nu(\check{J} \times \mathbb{R}) = \nu(\check{J}^{[C]}) + \nu(\check{J}^{[D]}), \\ \lambda(-3\check{J}) &= \nu(\mathbb{R} \times (-3\check{J})) = \nu(\check{J}^{[D]}). \end{aligned}$$

Отсюда $\tilde{\lambda}(\check{J}) = \lambda(\check{J}) - \lambda(-3\check{J}) = \nu(\check{J}^{[C]})$, следовательно, $\tilde{\lambda}(\check{J}) > 0$. Тем самым доказано, что $\mathbb{R}_+ \setminus (\bigcup_i I_i) \subset \text{spt } \lambda_+$, и второе соотношение в (4) установлено.

Наконец, докажем неравенства (5). Напомним, что интервалы $\tilde{I}_i$ определены после формулы (34). Пусть $x \in \tilde{I}_i \cap \text{spt } \lambda$. Найдем y такое, что $(x, y) \in \text{spt}^- \nu$. Если $i \neq l$, то $(a_i, a_i) \in \text{spt } \nu$ и $x - a_i > 0$, $y - a_i < 0$, следовательно, согласно лемме 2 $x + y + 2a_i \leq 0$. Если же $i = l$, то $x + y \leq 0$. Далее, $(b_i, b_i) \in \text{spt } \nu$ и $x - b_i < 0$, $y - b_i < 0$, следовательно, $x + y + 2b_i \geq 0$. Таким образом, имеем

$$-x - 2b_i \leq y \leq -x - 2a_i. \quad (40)$$

Из (40) и утверждения (ii) следует (5).

Рассмотрим теперь произвольное значение $x \in \tilde{I}_i$ и обозначим $x' = \inf \{ \xi \geq x : \xi \in \text{spt } \lambda \}$. Если $x' < b_i$, имеем

$$\lambda([x, b_i]) = \lambda([x', b_i]) \leq \lambda([-3b_i, -2a_i - x']) \leq \lambda([-3b_i, -2a_i - x]).$$

Если же $x' = b_i$, то $\lambda([x, b_i]) = 0$. Тем самым второе неравенство в (5) доказано.

Первое неравенство в (5) при $i = l$ становится тривиальным. Если $i \neq l$, обозначим $x'' = \sup \{ \xi \leq x : \xi \in \text{spt } \lambda \}$. Если $x'' > a_i$, имеем

$$\lambda([x, b_i]) = \lambda([x'', b_i]) \geq \lambda([-3b_i, -2b_i - x'']) \geq \lambda([-3b_i, -2b_i - x]).$$

Если же $x'' = a_i$, то

$$\lambda([x, b_i]) = \lambda([a_i, b_i]) = \lambda([-3b_i, -3a_i]) \geq \lambda([-3b_i, -2b_i - x]).$$

Тем самым установлено первое неравенство в (5) и доказано, что $\mathcal{J}$ есть допустимое семейство интервалов.

Утверждение теоремы является непосредственным следствием лемм 3 и 9.

§3. Примеры

Применим полученные результаты к некоторым частным случаям, связанным с различными λ .

ПРИМЕР 1. Пусть $\lambda_- = 0$, т.е. $\lambda(B) \geq \lambda(-3B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^2$. В этом случае существует единственная s -регулярная мера ν_* , которая и есть решение задачи минимизации (1). Она сосредоточена на объединении трех лучей:

$$\text{spt } \nu_* \subset \{(x, y) : x = y \geq 0, \text{ или } y = -3x \leq 0, \text{ или } x = -3y \leq 0\},$$

причем

$$\nu_*(A^{[D]}) = \nu_*(A^{[L]}) = \lambda(-3A), \quad \nu_*(A^{[C]}) = \lambda(A) - \lambda(-3A)$$

для произвольного борелевского множества $A \subset \mathbb{R}_+$; определение множеств $A^{[D]}$, $A^{[L]}$ и $A^{[C]}$ дано при доказательстве леммы 9. Минимальное значение функционала $\mathcal{F}$ равно

$$\mathcal{F}(\nu_*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(2x) d\lambda(x), \quad \text{где } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 3f(x/3), & x < 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\lambda_+ = 0$, т.е. $\lambda(B) \leq \lambda(-3B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^2$. В этом случае c -регулярная мера ν_* также единственна и является решением задачи минимизации. Обозначим

$$g(x) := \min\{y : \lambda(]-\infty, x]) = \lambda([y, +\infty[)\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

тогда для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^2$ имеем

$$\begin{aligned} \nu_*(B) &= \lambda(\{x : (x, g(x)) \in B\}), \\ \mathcal{F}(\nu_*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + g(x)) d\lambda(x). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Пусть мера λ имеет функцию плотности ρ , положительную и монотонно неубывающую на отрезке $[-\alpha, \beta]$ и равную нулю вне этого отрезка, причем $\beta > \alpha/3 > 0$. Тогда мера λ задается функцией плотности $\tilde{\rho}(x) = \rho(x) - 3\rho(-3x)$, отрицательной при $0 < x < a_0$, положительной при $a_0 < x \leq \beta$ и равной нулю при $x > \beta$, где $0 \leq a_0 \leq \alpha/3$.

Рассмотрим два случая.

а) $\lambda([-\alpha, 0]) \geq \lambda([0, \beta])$. Согласно (4) концы интервалов из допустимого семейства, отличные от нуля, принадлежат $[a_0, \beta]$ и никакой из интервалов не содержится целиком в $[a_0, \beta]$. Кроме того, согласно (3) никакие два конца интервалов не совпадают. Отсюда следует, что любое допустимое семейство интервалов либо совпадает с $\{\mathbb{R}_+\}$, либо имеет вид $\{I_l, I_r\}$, где $I_l =]0, b_l[$, $I_r =]a_r, +\infty[$, $a_0 \leq b_l < a_r \leq \beta$. Снова используя (4), получаем $a_r = \beta$. Для того чтобы убедиться, что, обратно, любое семейство приведенного вида является допустимым, достаточно проверить справедливость соотношения (5) для интервалов $\mathbb{R}_+$ и $]0, b_l[$. Подставляя в это соотношение b вместо b_i , где $b \in [a_0, \beta[$ или $b = +\infty$, и 0 вместо a_i , получаем

$$\lambda(]-3b, -2b - x]) \leq \lambda(]x, b[) \leq \lambda(]-3b, -x]), \quad x \in]-3b, b[. \quad (41)$$

Первое неравенство в (41) получается интегрированием обеих частей неравенства $\rho(\xi - 3b) \leq \rho(\xi + x)$ по интервалу $[0, b - x]$, если b конечно, и очевидно, если $b = +\infty$. Второе неравенство в (41) при $x = 0$ следует из равенства

$$\lambda(]0, b[) - \lambda(]-3b, 0]) = [\lambda(]0, \beta[) - \lambda(]-3\beta, 0])] - \int_b^\beta \tilde{\rho}(\xi) d\xi,$$

в правой части которого выражение в квадратных скобках отрицательно, а подынтегральная функция положительна. Таким образом,

$$\lambda(]0, b[) \leq \lambda(]-3b, 0]). \quad (42)$$

При $x \in [0, b[$ оно вытекает из (42) и неравенства $\lambda([0, x]) \geq \lambda([-x, 0])$; имеем

$$\lambda(]x, b[) \leq \lambda(]-3b, -x]). \quad (43)$$

Прибавляя к обеим частям (43) слагаемое $\lambda([-x, x])$, получаем

$$\lambda([-x, b[) \leq \lambda([-3b, x]);$$

таким образом, второе неравенство в (41) справедливо при $-b \leq x \leq 0$. Наконец, при $x \in]-3b, -b[$ это неравенство очевидно.

Таким образом, заключаем, что семейства интервалов $\mathcal{I}_0 = \{\mathbb{R}_+\}$ и $\mathcal{I}_t = \{]0, t[,]\beta, +\infty[\}$, $t \in [a_0, \beta[$, и только они, являются допустимыми.

Определим функцию $g(x)$ как в предыдущем примере и

$$g_t(x) := \min\{y : \lambda([-3t, x]) = \lambda([y, t])\}, \quad x \in]-3t, t[.$$

Тогда мера $\nu_{\mathcal{I}_0}$ задается формулой

$$\nu_{\mathcal{I}_0}(B) = \lambda\{x : (x, g(x)) \in B\} \quad \text{для любого борелевского множества } B \subset \mathbb{R}^2$$

и

$$\mathcal{F}(\nu_{\mathcal{I}_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + g(x)) d\lambda(x).$$

Мера $\nu_{\mathcal{I}_t}$ задается формулами:

$$\nu_{\mathcal{I}_t}(B) = \lambda\{x : (x, g_t(x)) \in B\}$$

для борелевских множеств $B \subset]-\infty, t[\times]-\infty, t[$,

$$\nu_{\mathcal{I}_t}(B) = \lambda\{-3x : (x, -3x) \in B\}$$

для борелевских множеств $B \subset [t, +\infty[\times]-\infty, t[$,

$$\nu_{\mathcal{I}_t}(B) = \lambda\{-3x : (-3x, x) \in B\}$$

для борелевских множеств $B \subset]-\infty, t[\times [t, +\infty[$,

$$\nu_{\mathcal{I}_t}(B) = \tilde{\lambda}(\{x : (x, x) \in B\})$$

для борелевских множеств $B \subset [t, +\infty[\times [t, +\infty[$

и

$$\mathcal{F}(\nu_{\mathcal{I}_t}) = \int_{-3t}^t f(x + g_t(x)) d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-3t, t]} \tilde{f}(2x) d\lambda(x),$$

где функция $\tilde{f}$ как в примере 1.

б) $\lambda([-\alpha, 0]) < \lambda([0, \beta])$. Рассуждая аналогично случаю а), приходим к выводу, что все допустимые семейства интервалов имеют вид $\mathcal{I}_t = \{]0, t[,]\beta, +\infty[\}$, $t \in [a_0, b_0]$, где b_0 определяется формулой $\lambda([0, b_0]) = \lambda([-\alpha, 0])$. Мера $\nu_{\mathcal{I}_t}$ и значение $\mathcal{F}(\nu_{\mathcal{I}_t})$ определяются так же, как и в случае а).

В частном случае, если $\rho(x) = 1$ при $x \in [-\alpha, \beta]$, имеем $a_0 = \alpha/3$; при $\alpha/3 < \beta \leq \alpha$ получаем случай а), а при $\beta > \alpha$ — случай б), причем $b_0 = \alpha$. Соответствующие значения $\mathcal{F}$ равны

$$\mathcal{F}(\nu_{\mathcal{I}_0}) = -(\alpha + \beta)f(\alpha - \beta);$$

$$\mathcal{F}(\nu_{\mathcal{I}_t}) = \int_t^\beta f(2x) dx - (\alpha + t)f(\alpha - t).$$

Таким образом, задача минимизации сводится к минимизации функции одной переменной.

Автор выражает свою благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. *Rachev S. T., Rüschendorf L.* Mass transportation problems. V. 1: Theory. New York: Springer, 1998.
2. *McCann R. J.* Exact solutions to the transportation problem on the line // Proc. Roy. Soc. Lond. A. Math. Phys. Eng. Sci. 1999. V. 455. P. 1341–1380.
3. *Uckelmann L.* Optimal couplings between one-dimensional distributions // Distributions with given marginals and moment problems / ed. V. Benes, J. Stepan. Dordrecht: Kluwer, 1997. P. 275–281.
4. *Левин В. Л.* Решение задач Монжа и Монжа–Канторовича. Теория и примеры // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 1. С. 7–10.

Aveiro University, Португалия
E-mail: plakhov@mat.ua.pt

Поступила в редакцию
11.11.2003