Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ю. Федоровский, О плотности некоторых модулей полианалитического типа в пространствах суммируемых функций на границах односвязных областей, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 1, 151–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 02:21:00

УДК 517.53

К. Ю. Федоровский

**О плотности
некоторых модулей полианалитического типа
в пространствах суммируемых функций
на границах односвязных областей**

Рассматривается вопрос о плотности в пространстве L^p на единичной окружности при $1 \leq p \leq \infty$ подпространств вида $H^p + \sum_{k=1}^m w_k H^p$, где H^p – стандартные пространства Харди, а $w_1, \dots, w_m$ – заданные функции класса L^∞ . Этот вопрос тесно связан с задачами равномерной и L^p -аппроксимации функций полианалитическими многочленами на границах односвязных областей в $\mathbb{C}$. Полученные результаты формулируются в терминах неванлинновских и d -неванлинновских областей – специальных аналитических характеристик односвязных областей в $\mathbb{C}$, связанных со свойством псевдопродолжения голоморфных ограниченных функций.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: неванлинновская область, d -неванлинновская область, псевдопродолжение, полианалитический многочлен, равномерная аппроксимация и L^p -аппроксимация.

DOI: 10.4213/sm8455

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{R}$ – пространство, состоящее из всех рациональных функций комплексного переменного z , а $\mathcal{R}(E)$ – пространство всех функций из $\mathcal{R}$, полюсы которых лежат вне некоторого подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Кроме того, пусть $C(X)$ – пространство, состоящее из всех непрерывных на компакте $X \subset \mathbb{C}$ комплекснозначных функций, с равномерной нормой.

Начиная с 1970-х годов изучается задача аппроксимации функций рациональными модулями, или, другими словами, задача описания тех компактов X , для которых пространство

$$\{R_0 + \bar{z}^{k_1} R_1 + \dots + \bar{z}^{k_m} R_m : R_0, R_1, \dots, R_m \in \mathcal{R}(X)\}, \quad (1.1)$$

где m и $k_1, \dots, k_m$ – натуральные числа, $k_1 < k_2 < \dots < k_m$, плотно в пространстве $C(X)$ (или в пространствах гладких функций на X). Класс функций (1.1) обладает структурой модуля над $\mathcal{R}(X)$. Так как этот модуль состоит из полианалитических функций (соответствующее определение приводится ниже), то его естественно называть рациональным модулем полианалитического типа. Аппроксимации функций рациональными модулями посвящены, в частности,

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

работы А. Г. О'Фаррелла [1], Д. Вердеры [2], [3], Д. Кармоны [4]–[6], Т. Трента и Дж. Вонга [7], [8]. Начиная со второй половины 1980-х годов большой интерес вызывает также задача о плотности в пространстве $C(X)$ модулей вида

$$\{P_0 + \bar{z}^{k_1} P_1 + \dots + \bar{z}^{k_m} P_m : P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}\}, \quad (1.2)$$

где $\mathcal{P}$ – пространство всех многочленов комплексного переменного. Наиболее известным частным случаем этой задачи является задача о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами, которая возникает в случае $k_j = j$ при $j = 1, \dots, m$. Пространство (1.2) является модулем над $\mathcal{P}$, и его естественно называть полиномиальным модулем полианалитического типа. Достаточно подробный обзор по тематике равномерной аппроксимации функций рациональными и полиномиальными модулями полианалитического типа можно найти в работе [9].

В настоящей работе рассматривается следующая задача, тесно связанная с указанной тематикой. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Через $L^p = L^p(\mathbb{T})$, как обычно, обозначено пространство Лебега на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, рассматриваемое относительно нормированной меры Лебега $\ell(\cdot)$ на $\mathbb{T}$. Напомним, что $d\ell(\zeta) = |d\zeta|/(2\pi)$, и заметим, что $d\zeta = 2\pi i \zeta d\ell(\zeta)$. Всюду в дальнейшем, если иное не оговорено специально, выражение “почти всюду” будет пониматься по отношению к мере $\ell(\cdot)$. Введем также пространства Харди $H^p = H^p(\mathbb{T})$, состоящие из всех функций $f \in L^p$ таких, что $\int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \bar{\zeta}^n d\ell(\zeta) = 0$ при всех целых $n < 0$.

Пусть $m \geq 1$ – натуральное число. Для заданного набора $\{w_1, \dots, w_m\}$ функций класса L^∞ рассмотрим пространства

$$M^p(w_1, \dots, w_m) := H^p + w_1 H^p + \dots + w_m H^p,$$

состоящие из функций вида $h_0 + w_1 h_1 + \dots + w_m h_m$, где $h_0, h_1, \dots, h_m$ – функции класса H^p . В связи с изучением задач об аппроксимативных свойствах полианалитических многочленов естественно возникает следующий вопрос: при каких условиях на функции $w_1, \dots, w_m$ пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ при $p < \infty$ плотно в пространстве L^p , а пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ *-слабо плотно в L^∞ . Заметим, что пространства $M^p(w_1, \dots, w_m)$ обладают структурой модуля над H^∞ , что объясняет название настоящей работы.

В § 2 дается ответ на поставленный вопрос и обсуждается связь возникающих условий с понятиями псевдопродолжимости функций и со структурой подпространств в L^p , инвариантных относительно умножения на z . Далее, в § 2 приводится явный вид пространства $M^2(w_1, \dots, w_m)^\perp$ (ортогонального дополнения к $M^2(w_1, \dots, w_m)$ в пространстве L^2) и обсуждается его представление в терминах, связанных со специальными свойствами операторов Тёплица. Заметим, что использованная в доказательстве соответствующих результатов (теорема 1 и предложения 1 и 2) техника подобна той, которая применялась в [10] при доказательстве критерия равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$, а также в [11], где ряд утверждений этой работы получен в меньшей общности. В § 3 обсуждаются задачи равномерной и L^p -приближаемости функций полианалитическими

многочленами на границах односвязных областей в $\mathbb{C}$, которые тесно связаны с задачей о плотности в L^p пространств $M^p(\bar{\varphi}^{k_1}, \dots, \bar{\varphi}^{k_m})$, где φ – некоторая ограниченная однолистная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция, а $k_1, \dots, k_m$ – натуральные числа.

Отметим, что идею рассмотреть обсуждаемый вопрос в том виде, в котором он сформулирован выше, предложил А. Б. Александров, которому автор выражает свою искреннюю признательность.

§ 2. Плотность пространства $M^p(w_1, \dots, w_m)$ в L^p и псевдопродолжимость

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ обозначим через $H^\infty(\Omega)$ пространство, состоящее из всех голоморфных ограниченных функций в Ω . Нам потребуются также пространства Харди $H^p(\mathbb{D})$ в единичном круге, $1 \leq p \leq \infty$. Напомним, что при $p < \infty$ пространство $H^p(\mathbb{D})$ состоит из всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f таких, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p d\ell(\zeta) = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}^p < \infty.$$

При всех $p > q > 1$ справедливы включения

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D}),$$

где $N(\mathbb{D})$ – класс Неванлинны в $\mathbb{D}$. Напомним, что всякая функция $f \in N(\mathbb{D})$ имеет вид $f = f_1/f_2$, где $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Пусть $f \in H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$. Классическая теорема Фату утверждает, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ существуют угловые (некасательные) предельные значения $f(\zeta)$ функции f в точке ζ . Эти граничные значения определяют функцию из класса $H^p = H^p(\mathbb{T})$, называемую граничной функцией для f . При этом отображение, ставящее функции $f \in H^p(\mathbb{D})$ в соответствие ее граничную функцию, является изометрическим изоморфизмом пространств $H^p(\mathbb{D})$ и H^p . При $p = \infty$ это отображение также является *-слабым гомеоморфизмом. Всюду в дальнейшем функции класса $H^p(\mathbb{D})$ и их граничные функции будут обозначаться одним и тем же символом.

Пусть $\mathbb{U} = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ – внешность единичного круга. Под мерой мы будем понимать конечную комплекснозначную борелевскую меру в $\mathbb{C}$. Через z и $\bar{z}$ будем обозначать не только соответствующие переменные, но и функции: тождественную и $z \mapsto \bar{z}$ соответственно.

2.1. Псевдопродолжение. Для формулировки последующих результатов нам потребуется понятие псевдопродолжения для функций класса L^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что функция $f \in L^\infty$ допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что $v \not\equiv 0$ и для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$f(\zeta) = \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)}. \quad (2.1)$$

Аналогично, f допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$, если найдутся $\tilde{u}, \tilde{v} \in H^\infty(\mathbb{U})$ такие, что $\tilde{v} \not\equiv 0$ и для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ выполнено равенство

$$f(\zeta) = \frac{\tilde{u}(\zeta)}{\tilde{v}(\zeta)}, \quad (2.1')$$

где $\tilde{u}(\zeta)$ и $\tilde{v}(\zeta)$ – предельные значения функций $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ из $\mathbb{U}$.

В связи с приведенным определением псевдопродолжения сделаем несколько замечаний. Во-первых, отметим, что обычное понятие псевдопродолжения (см., например, [12; п. 2.1]) вводится следующим образом. Пусть G и G_1 – две непересекающиеся жордановы области в $\mathbb{C}$ такие, что существует гладкая дуга γ со свойством $\gamma \subset \partial G \cap \partial G_1$. Предположим также, что в области G задана мероморфная функция f , а в области G_1 – мероморфная функция f_1 , причем f и f_1 имеют почти всюду на γ некасательные предельные значения $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$, $\zeta \in \gamma$. Если $f(\zeta) = f_1(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \gamma$, то говорят, что функция f_1 является псевдопродолжением функции f в G_1 через γ . Также говорят, что функция f допускает псевдопродолжение через γ в G_1 . При этом из граничной теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что если псевдопродолжение функции f через γ в G_1 существует, то оно единственно. Отметим также, что если функция f_1 является аналитическим продолжением функции f через γ , то она является и псевдопродолжением для этой функции.

Во-вторых, вводя понятие псевдопродолжения так, как это сделано в определении 1, можно не ограничиваться функциями класса L^∞ , а считать, что $f \in L^1$. Однако автору не известны возможные приложения такой конструкции.

Наконец, заметим, что отношения u/v из (2.1) и $\tilde{u}/\tilde{v}$ из (2.1') – это функции класса Неванлинны (в $\mathbb{D}$ и в $\mathbb{U}$ соответственно). В силу этого обстоятельства свойство псевдопродолжения следует более точно называть свойством *псевдопродолжения неванлинновского типа*, однако мы будем следовать устоявшейся терминологии.

Оказывается, что для функций класса $H^\infty(\mathbb{D})$ свойства псевдопродолжения в $\mathbb{U}$ и в $\mathbb{D}$ связаны следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$ тогда и только тогда, когда функция $\bar{f}$ допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$.*

Это утверждение является простым следствием определения псевдопродолжения. Оно вытекает, например, из предложения 3.1 работы [13]. Для согласования обозначений отметим, что функции $\tilde{u}, \tilde{v}$ из (2.1') связаны с функциями u, v из (2.1) соотношениями

$$\tilde{u}(z) = \overline{u(z^*)}, \quad \tilde{v}(z) = \overline{v(z^*)},$$

где $z^* = 1/\bar{z}$ – это точка, симметричная точке $z \in \mathbb{C}$ относительно единичной окружности $\mathbb{T}$. Функции u, v получаются из функций $\tilde{u}, \tilde{v}$ аналогично.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что функции u и v из соотношения (2.1) не имеют в $\mathbb{D}$ общих нулей, а функции $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ из соотношения (2.1') не имеют общих нулей в $\mathbb{U}$.

2.2. Критерий плотности пространства $M^p(w_1, \dots, w_m)$ в L^p . Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ не плотно в L^p , а пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ не *-слабо плотно в L^∞ тогда и только тогда, когда каждая из функций w_k , $k = 1, \dots, m$, допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай $1 \leq p < \infty$. Пусть пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ не плотно в L^p . Это означает, что найдется функция $g \in L^q$, где $q = p/(p-1)$ – сопряженный показатель, такая, что для любых функций $h_0, h_1, \dots, h_m \in H^p(\mathbb{D})$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{T}} (h_0(\zeta) + w_1(\zeta)h_1(\zeta) + \dots + w_m(\zeta)h_m(\zeta)) \overline{g(\zeta)} d\ell(\zeta) = 0. \quad (2.2)$$

Пусть $n < 0$ – целое число, а $\psi_0 := \bar{g}$. Полагая в равенстве (2.2) $h_0(\zeta) = \zeta^{|n|}$ и $h_1 = \dots = h_m \equiv 0$, получаем, что

$$\int_{\mathbb{T}} \psi_0(\zeta) \bar{\zeta}^n d\ell(\zeta) = 0,$$

откуда вытекает, что $\psi_0 \in H^q$. Рассуждая аналогично, получаем, что функции $\psi_k = w_k \bar{g}$ при $k = 1, \dots, m$ также принадлежат H^q . Таким образом, для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ и для всех $k = 1, \dots, m$ имеют место равенства $\psi_0(\zeta)w_k(\zeta) = \psi_k(\zeta)$. Так как всякая функция класса $H^q(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D})$ может быть представлена как отношение двух функций класса $H^\infty(\mathbb{D})$ и так как $\psi_0(\zeta) \neq 0$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ (это следует из того, что функция $g = \bar{\psi}_0$ определяет ненулевой функционал на пространстве L^p), то найдутся такие функции $u_k, v_k \in H^\infty(\mathbb{D})$, $k = 1, \dots, m$, что $w_k(\zeta) = u_k(\zeta)/v_k(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{Z}$. Таким образом, каждая из функций w_k , $k = 1, \dots, m$, допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$.

Обратно, пусть функции w_k , $k = 1, \dots, m$, допускают псевдопродолжение в $\mathbb{D}$, и пусть функции $u_k, v_k \in H^\infty(\mathbb{D})$ взяты из определения 1 (для w_k). Определим функцию $g = \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ и рассмотрим соответствующий ей функционал на пространстве L^p . Легко проверяется, что этот функционал аннулирует пространство $M^p(f_1, \dots, f_m)$. В самом деле,

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k=0}^m w_k(\zeta) h_k(\zeta) \right) \overline{g(\zeta)} d\ell(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{T}} h_k(\zeta) u_k(\zeta) V_k(\zeta) d\zeta = 0$$

для любых функций $h_0, h_1, \dots, h_m \in H^p(\mathbb{T})$, где $w_0 \equiv 1$, $u_0 = v_0 \equiv 1$ и $V_k = v_0 v_1 \dots v_m / v_k$.

Остается рассмотреть случай $p = \infty$. Обозначим $w_0 \equiv 1$ и будем рассуждать так же, как и в предыдущем случае. Пусть пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ не *-слабо плотно в L^∞ . В этом случае существует мера μ на $\mathbb{T}$ такая, что равенство

$$\int_{\mathbb{T}} (w_0(\zeta)h_0(\zeta) + w_1(\zeta)h_1(\zeta) + \dots + w_m(\zeta)h_m(\zeta)) d\mu(\zeta) = 0 \quad (2.3)$$

выполнено для любых функций $h_0, h_1, \dots, h_m$ класса $H^\infty(\mathbb{D})$. Зафиксируем $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ и положим в равенстве (2.3) $h_k(z) = z^n$, где $n \geq 0$ целое, а

$h_j \equiv 0$ при $j \in \{0, 1, \dots, m\} \setminus \{k\}$. В этом случае из равенства (2.3) вытекает, что $\int_{\mathbb{T}} \zeta^n w_k(\zeta) d\mu(\zeta) = 0$ при всех целых $n \geq 0$, т.е. мера $w_k \mu$ ортогональна всем многочленам комплексного переменного. Применяя классическую теорему братьев Риссов получаем, что существует функция $\psi_k \in H^1(\mathbb{D})$ такая, что $w_k \mu = \psi_k \ell$. При $k = 0$ это равенство имеет вид $\mu = \psi_0 \ell$, а так как μ – ненулевая мера, то $\psi_0 \not\equiv 0$.

Так как $w_k \mu = \psi_k \ell$ при всех $k = 0, 1, \dots, m$, а $w_0 \equiv 1$, то для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ имеют место равенства $w_k(\zeta)\psi_0(\zeta) = \psi_k(\zeta)$. Так как $\psi_0 \not\equiv 0$, то $w_k = \psi_k/\psi_0$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Остается заменить отношение ψ_k/ψ_0 функций класса $H^1(\mathbb{D})$ на отношение u_k/v_k подходящих функций класса $H^\infty(\mathbb{D})$. Итак, в случае, когда пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ не $*$ -слабо плотно в L^∞ , каждая из функций w_k , $k = 1, \dots, m$, допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$.

Обратно, пусть функции w_k , $k = 1, \dots, m$, допускают псевдопродолжение в $\mathbb{D}$, и пусть функции $u_k, v_k \in H^\infty(\mathbb{D})$ взяты из определения 1 (для w_k). Определим меру μ на $\mathbb{T}$ равенством $\mu = z v_1 \cdots v_m \ell$. Для любого $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ и для любой функции $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ имеем

$$\int_{\mathbb{T}} w_k(\zeta) h(\zeta) d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} h(\zeta) u_k(\zeta) V_k(\zeta) d\zeta = 0,$$

где $V_k = v_0 v_1 \cdots v_m / v_k$, а $u_0 = v_0 = w_0 \equiv 1$. Таким образом, мера μ ортогональна $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ и, следовательно, пространство $M^\infty(w_1, \dots, w_m)$ не $*$ -слабо плотно в L^∞ .

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Обсудим утверждение, содержащееся в теореме 1, еще с одной точки зрения. Пусть $\mathcal{X} \subset L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, – (замкнутое) подпространство, инвариантное относительно умножения на z , т.е. $z\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$, и пусть $z\mathcal{X} \neq \mathcal{X}$. По теореме об инвариантных подпространствах для идеальных банаховых пространств (см. [14; лекция I]) всякое такое пространство имеет вид $\mathcal{X} = \theta H^p$, где θ – такая измеримая функция, что $|\theta(\zeta)| = 1$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Заметим, что пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ инвариантно относительно умножения на z и что $zM^p(w_1, \dots, w_m) \neq M^p(w_1, \dots, w_m)$. Таким образом, существует измеримая функция θ такая, что $|\theta| = 1$ почти всюду на $\mathbb{T}$ и для любых функций $h_0, h_1, \dots, h_m \in H^p$ найдется функция $\psi \in H^p$ такая, что

$$h_0 + w_1 h_1 + \cdots + w_m h_m = \theta \psi.$$

Полагая в этом равенстве $h_0 \equiv 1$, $h_j \equiv 0$ при $j = 1, \dots, m$, и $h_k \equiv 1$, $h_j \equiv 0$ при $j \in \{0, 1, \dots, m\} \setminus \{k\}$, найдем такие функции ψ_0 и ψ_k класса H^p , что $1 = \theta \psi_0$, а $w_k = \theta \psi_k$. Так как $|\theta| = 1$ почти всюду на $\mathbb{T}$, то $\psi_0 \not\equiv 0$ и, следовательно, для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство $w_k(\zeta) = \psi_k(\zeta)/\psi_0(\zeta)$. Как и раньше, остается заменить отношение ψ_k/ψ_0 на отношение подходящих функций класса $H^\infty(\mathbb{D})$. Таким образом, если пространство $M^p(w_1, \dots, w_m)$ не плотно в L^p , то каждая из функций w_k , $k = 1, \dots, m$, допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$.

2.3. Строение пространства $M^2(w_1, \dots, w_m)^\perp$. Утверждение теоремы 1 допускает несложное, но полезное уточнение в случае, когда $p = 2$. В этом

случае L^2 – это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} d\ell(\zeta),$$

и L^2 раскладывается в прямую сумму подпространств:

$$L^2 = H^2 \oplus \overline{H}_0^2,$$

где $H_0^2 = \{h \in H^2 : h(0) = 0\}$, а $\overline{H}_0^2 = \{\bar{h} : h \in H_0^2\}$.

Имеет место следующий простой факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $w_1, \dots, w_m \in L^\infty$. Тогда

$$M^2(w_1, \dots, w_m)^\perp = \{f \in \overline{H}_0^2 : \bar{w}_k f \in \overline{H}_0^2, k = 1, \dots, m\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f \in L^2$ ортогональна к $M^2(w_1, \dots, w_m)$, и пусть $k \in \{1, \dots, m\}$. Тогда для любой функции $h \in H^2$ выполнены равенства $\langle f, h \rangle = 0$ и $\langle f, w_k h \rangle = 0$. Первое из этих равенств непосредственно означает, что $f \in \overline{H}_0^2$. Из второго равенства вытекает, что $\langle \bar{w}_k f, h \rangle = 0$, а следовательно, $\bar{w}_k f \in \overline{H}_0^2$. Обратно, пусть функция $b \in \overline{H}_0^2$ такова, что $\bar{w}_j b \in \overline{H}_0^2$ при всех $j = 1, \dots, m$. Тогда для любых функций $h_0, h_1, \dots, h_m \in H^2$ верно равенство

$$\left\langle b, h_0 + \sum_{j=1}^m w_j h_j \right\rangle = \langle b, h_0 \rangle + \sum_{j=1}^m \langle \bar{w}_j b, h_j \rangle = 0,$$

откуда вытекает, что $b \in M^2(w_1, \dots, w_m)^\perp$.

Примеры, иллюстрирующие приведенные выше утверждения, будут приведены в §3, так как они связаны с обсуждаемой там задачей аппроксимации функций полианалитическими многочленами.

Приведем еще одну конструкцию, которая связывает структуру пространства $M^2(\bar{g})^\perp$ при $g \in H^\infty$ со специальными свойствами оператора Тёплица T_g . Напомним, что оператор Тёплица $T_g : H^2 \rightarrow H^2$ определяется следующим образом: $T_g f = P(gf)$, где P – это ортогональный проектор из L^2 в H^2 . Пусть операторы $X_g : \overline{H}_0^2 \rightarrow H^2$ и $Y_g : \overline{H}_0^2 \rightarrow \overline{H}_0^2$ определены таким образом, что операторная (2×2) -матрица

$$\begin{pmatrix} T_g & X_g \\ 0 & Y_g \end{pmatrix},$$

соответствующая разложению $L^2 = H^2 \oplus \overline{H}_0^2$, представляет оператор умножения на g в L^2 . Имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $g \in H^\infty$. Тогда:

- 1) пространства $\{b \in \overline{H}_0^2 : gb \in \overline{H}_0^2\}$ и $\{h \in H^2 : \bar{g}h \in H^2\}$ тривиальны и нетривиальны одновременно;
- 2) $\{b \in \overline{H}_0^2 : gb \in \overline{H}_0^2\} = \ker[Y_g, Y_g^*]$, где через $[A, B]$ обозначается коммутатор $AB - BA$ операторов A и B , через A^* – оператор, сопряженный к A , а $\{h \in H^2 : \bar{g}h \in H^2\} = \ker[T_g^*, T_g]$.

Кроме того, возможность псевдопродолжения функции g в $\mathbb{U}$ (или, что эквивалентно, возможность псевдопродолжения $\bar{g}$ в $\mathbb{D}$) эквивалентна тому, что $\ker[T_g^*, T_g] \neq \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим утверждение 1). Пусть существует ненулевая функция $b \in \overline{H}_0^2$ такая, что $gb \in \overline{H}_0^2$. В этом случае функция h , определенная соотношением $h(z) = \overline{b(z)}$, принадлежит пространству H_0^2 , а $\bar{g}h = \overline{gb} \in H_0^2$, так как $gb \in \overline{H}_0^2$. Обратно, пусть найдется ненулевая функция $h \in H^2$ такая, что $\bar{g}h \in H^2$. В этом случае функция $h_1 = zh \in H_0^2$ обладает тем свойством, что $\bar{g}h_1 \in H_0^2$. Функция b , определенная равенством $b(z) = \overline{h_1(z)}$, лежит в $\overline{H}_0^2$, а $gb = \overline{h_1\bar{g}} \in \overline{H}_0^2$, так как $\bar{g}h_1 \in H_0^2$.

Докажем утверждение 2). Пусть $M_g: f \mapsto gf$ – оператор умножения на g в L^2 . Тогда $M_g^*M_g - M_gM_g^* = 0$. Записывая это равенство в виде соответствующих операторных (2×2) -матриц, получаем

$$\begin{pmatrix} T_g^*T_g - T_gT_g^* - X_gX_g^* & T_g^*X_g - X_gY_g^* \\ X_g^*T_g - Y_gX_g^* & X_g^*X_g + Y_g^*Y_g - Y_gY_g^* \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует, что

$$T_g^*T_g - T_gT_g^* = X_gX_g^*, \quad Y_gY_g^* - Y_g^*Y_g = X_g^*X_g.$$

Из последних равенств непосредственно вытекает, что

$$\ker[T_g^*, T_g] = \ker X_g^*, \quad \ker[Y_g, Y_g^*] = \ker X_g.$$

Вычислим ядра операторов X_g и X_g^* . Представим функцию $f \in L^2$ в виде вектора (h, b) , где $h = Pf \in H^2$ и $b = f - h \in \overline{H}_0^2$. Тогда $M_gf = (T_g h + X_g b, Y_g b)$ и $M_g^*f = (T_g^* h, X_g^* h + Y_g^* b)$. Если функция $h \in H^2$ такова, что $h \in \ker X_g^*$, то $M_g^*(h, 0) = (T_g^* h, 0)$, т.е. $\bar{g}h \in H^2$. Аналогично, для функции $b \in \overline{H}_0^2$ со свойством $b \in \ker X_g$ получаем, что $M_g(0, b) = (0, Y_g b)$, т.е. $gb \in \overline{H}_0^2$.

Остается проверить последнее утверждение. Пусть $\ker[T_g^*, T_g] \neq \{0\}$. Так как $\ker[T_g^*, T_g] = \{h \in H^2 : \bar{g}h \in H^2\}$, то существуют две ненулевые функции $\psi_1, \psi_2 \in H^2$ такие, что $\bar{g}\psi_1 = \psi_2$. То есть для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство $\overline{g(\zeta)} = \psi_2(\zeta)/\psi_1(\zeta)$, из которого (достаточно заменить отношение ψ_2/ψ_1 на подходящее отношение функций класса H^∞) следует возможность псевдопродолжения функции $\bar{g}$ в $\mathbb{D}$. А это согласно предложению 1 эквивалентно возможности псевдопродолжения g в $\mathbb{U}$. Обратно, пусть g допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$. Тогда в силу предложения 1 найдутся две функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что $v \neq 0$ и $\overline{g(\zeta)} = u(\zeta)/v(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Но это означает, что $v \in H^2$ и $\bar{g}v = u \in H^2$, т.е. $v \in \ker[T_g^*, T_g]$.

§ 3. Аппроксимация полианалитическими многочленами

Пусть n – натуральное число. Напомним, что функция f называется полианалитической порядка n (или, короче, n -аналитической) на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, если $\bar{\partial}^n f = 0$ в Ω , где

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

– оператор Коши–Римана, а $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Всякая n -аналитическая в Ω функция f представима в виде $f(z) = \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z) + \dots + \bar{z} f_1(z) + f_0(z)$, где $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ – голоморфные в Ω функции.

Полианалитическим многочленом порядка n (или n -аналитическим многочленом) называется многочлен P от переменных x и y , удовлетворяющий всюду в $\mathbb{C}$ уравнению $\bar{\partial}^n P = 0$. Любой n -аналитический многочлен представим в виде $\bar{z}^{n-1}P_{n-1}(z) + \dots + \bar{z}P_1(z) + P_0(z)$, где $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ – многочлены комплексного переменного z . Обозначим через $\mathcal{P}_n$ пространство всех n -аналитических многочленов. Тогда пространство $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1$ состоит из обычных многочленов комплексного переменного, а

$$\mathcal{P}_n = \bar{z}^{n-1}\mathcal{P} + \dots + \bar{z}\mathcal{P} + \mathcal{P}.$$

Наряду с полианалитическими многочленами общего вида мы будем рассматривать полианалитические многочлены с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного. Пусть m и $k_1 < \dots < k_m$ – натуральные числа. Определим класс

$$\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m}) := \bar{z}^{k_m}\mathcal{P} + \dots + \bar{z}^{k_1}\mathcal{P} + \mathcal{P},$$

состоящий из $(k_m + 1)$ -аналитических многочленов, которые могут содержать только степени $k_1, \dots, k_m$ переменного $\bar{z}$. Всюду в дальнейшем, говоря о возможности аппроксимации функций полианалитическими многочленами, мы будем иметь в виду возможность ее аппроксимации многочленами класса $\mathcal{P}_n$ или $\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m})$ в зависимости от контекста.

Рассмотрим задачи о плотности полианалитических многочленов в пространствах непрерывных и суммируемых функций на нигде не плотных компактах в комплексной плоскости. Если такой компакт X имеет связное дополнение, то пространство $\mathcal{P}_n$ плотно в $C(X)$ (это вытекает, например, из классической теоремы Лаврентьева). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать компакты X , имеющие несвязное дополнение. Более того, мы ограничимся случаем, когда $X = \Gamma$, где Γ – это граница ограниченной односвязной области G в $\mathbb{C}$. В этом случае сохраняются все основные сложности и особенности рассматриваемой задачи, а многие конструкции становятся заметно проще и нагляднее. Необходимо отметить, что задача о плотности полианалитических многочленов класса $\mathcal{P}_n$ в пространстве $\{f \in C(X) : \bar{\partial}^n f = 0 \text{ на } X^\circ\}$ решена для существенно более широкого класса компактов в $\mathbb{C}$, чем границы односвязных областей (подробнее см. [9]).

Все основные утверждения в этом параграфе относятся к случаю, когда рассматриваемая область G является областью Каратеодори. Напомним это понятие. Ограниченная односвязная область G называется *областью Каратеодори*, если $\partial G = \partial G_\infty$, где G_∞ – это неограниченная связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$. Легко проверяется, что любая область Каратеодори является односвязной и обладает свойством $G = (\bar{G})^\circ$. Нам потребуются специальные аналитические характеристики плоских односвязных областей, которые вводятся и кратко обсуждаются в п. 3.1.

3.1. Неванлинновские и d -неванлинновские области. Пусть $d \geq 1$ – натуральное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ограниченная односвязная область $G \subset \mathbb{C}$ называется d -неванлинновской, если существуют две функции $u, v \in H^\infty(G)$ такие, что $v \neq 0$ и равенство

$$\bar{z}^d = \frac{u(z)}{v(z)} \quad (3.1)$$

выполняется почти всюду на ∂G в смысле конформного отображения. Это означает, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство

$$\overline{\varphi(\zeta)}^d = \frac{(u \circ f)(\zeta)}{(v \circ f)(\zeta)}$$

угловых граничных значений, где φ – некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область G .

При $d = 1$ это понятие было введено в [10; определение 3] и в [13; определение 2.1], причем соответствующие области называются неванлинновскими, а при $d > 1$ – в [15; определение 1]. Определение d -неванлинновской области корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора φ . В силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова отношение u/v определено в G (для d -неванлинновской области G) единственным образом. Более того, без ограничения общности можно считать, что функции u и v из определения d -неванлинновской области не имеют общих нулей в G . Заметим также, что если d -неванлинновская область G является жордановой областью со спрямляемой границей, то равенство (3.1) может пониматься непосредственно как равенство угловых граничных значений почти всюду на ∂G . Это равенство можно аналогично понимать и на любой спрямляемой жордановой дуге $\gamma \subset \partial G$, обладающей тем свойством, что всякая точка $a \in \gamma$ не является предельной точкой для множества $\partial G \setminus \gamma$. Ясно также, что всякая неванлинновская область является d -неванлинновской для любого натурального $d > 1$.

Наиболее простой пример неванлинновской области – это единичный круг $\mathbb{D}$. В самом деле, всюду на $\mathbb{T}$ имеет место равенство $\bar{z} = 1/z$.

Приведем пример области, не являющейся d -неванлинновской для любого натурального $d \geq 1$. Возьмем два вещественных числа a и b , $a > b > 0$, с условием $\sqrt{a^2 - b^2} = 1$ и рассмотрим область $D_{a,b}$, ограниченную эллипсом $\Gamma_{a,b} = \{z = x + iy : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$. Легко показать, что во всех точках $z \in \Gamma_{a,b}$ имеет место равенство

$$\bar{z} = (a^2 + b^2)z - 2ab\sqrt{z^2 - 1},$$

где рассматривается ветвь корня, определенная вне отрезка $[-1, 1] \subset D_{a,b}$ и удовлетворяющая условию $\sqrt{a^2 - b^2} = 1$. Отсюда вытекает, что для любого натурального числа $d \geq 1$ имеет место равенство

$$\bar{z}^d = Q_1(z) + Q_2(z)\sqrt{z^2 - 1},$$

где Q_1 и Q_2 – некоторые многочлены комплексного переменного (зависящие от a , b и d). Из последнего равенства и из граничной теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что равенство (3.1) для области $D_{a,b}$ невозможно.

Пусть $\Gamma'_{a,b}$ – это кривая, являющаяся образом эллипса $\Gamma_{a,b}$ при отображении $z \mapsto 1/z$, а $D'_{a,b}$ – область, ограниченная кривой $\Gamma'_{a,b}$. Эта область – овал Ньюмена – хорошо известна в теории квадратурных областей. Непосредственно проверяется, что для всех точек $z \in \Gamma'_{a,b}$ имеет место равенство

$$\bar{z} = \frac{z}{a^2 + b^2 - 2iab\sqrt{z^2 - 1}},$$

причем дробь, стоящая в правой части, имеет в области $D'_{a,b}$ только полюсы (точки ± 1 , являющиеся точками ветвления этой функции, лежат вне области $D'_{a,b}$). Таким образом, равенство (3.1) для области $D'_{a,b}$ справедливо при $d = 1$ и, следовательно, область $D'_{a,b}$ является неванлинновской.

Приведем, наконец, пример области, которая является d -неванлинновской при некотором заданном $d > 1$, но не является неванлинновской (см. [15]). Пусть $d \geq 2$, $a > 1$, и пусть $\varphi_{a,d} = \sqrt[d]{a - z}$, где рассматривается ветвь многозначной функции $\sqrt[d]{a - z}$, определенная вне луча $[a, +\infty)$ и равная $\sqrt[d]{a}$ при $z = 0$. Рассмотрим область $D_a^d = \varphi_{a,d}(\mathbb{D})$. На границе этой области выполняется соотношение

$$\bar{z} = \sqrt[d]{\frac{a^2 - az^d - 1}{a - z^d}}.$$

Так как функция, стоящая в правой части этого равенства, имеет точку ветвления в области D_a^d , то D_a^d не является неванлинновской областью. Однако на ∂D_a^d выполнено равенство

$$\bar{z}^d = \frac{a^2 - az^d - 1}{a - z^d},$$

из которого следует, что D_a^d – это d -неванлинновская область.

Обсудим вопрос о том, когда d -неванлинновская область будет неванлинновской. Для этого нам потребуется связь между d -неванлинновскими областями и теорией модельных пространств. Напомним, что функция $\theta \in H^\infty$ называется *внутренней*, если $|\theta(\zeta)| = 1$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Класс всех внутренних функций обозначим символом $\mathcal{J}$. Определим пространство

$$K_\theta := H^2 \ominus \theta H^2.$$

В силу известной теоремы Берлинга пространства K_θ (при всех $\theta \in \mathcal{J}$) и только они являются инвариантными подпространствами для оператора обратного сдвига $f \mapsto (f(z) - f(0))/z$ в пространстве H^2 . Пространства K_θ называют модельными подпространствами; соответствующий термин был предложен Н.К. Никольским (см. [14]) и объясняется выдающейся ролью, которую эти пространства играют в функциональной модели Нады-Фойаша.

Имеет место следующее утверждение (см. [16; теорема 1], [17; теоремы А и В] и [15; теорема 3]).

ТЕОРЕМА А. Пусть G – это ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, и пусть φ – некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на G . Тогда:

1) область G является d -неванлинновской тогда и только тогда, когда φ^d допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$;

2) если G является d -неванлинновской областью, то существует $\theta \in \mathcal{J}$ такая, что $\varphi^d \in K_\theta$;

3) пусть $\theta \in \mathcal{J}$; если функция f ограничена и однолистка в $\mathbb{D}$, а $f^d \in K_\theta$, то f конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на d -неванлинновскую область $f(\mathbb{D})$.

Отметим, что практически все известные на сегодняшний день свойства и примеры неванлинновских областей (см. [16], [17], а также [9]) получены на основе результатов, приведенных в теореме А.

Для ответа на вопрос о том, при каких условиях d -неванлинновская область будет неванлинновской, необходимо уметь “извлекать корень” в пространствах K_θ . Точнее говоря, пусть известно, что функция $f \in H^\infty$ такова, что $f^k \in K_\theta$ для некоторых натурального числа k и внутренней функции θ . Спрашивается: при каких условиях сама функция f допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$ (и какому пространству K_I , $I \in \mathcal{J}$, принадлежит f в таком случае)? Ответ на этот вопрос дает следующий результат, установленный в [15; теорема 4].

ТЕОРЕМА В. Пусть k – натуральное число, $f \in H^\infty$, и пусть $\theta \in \mathcal{J}$. Пусть $h = f^k \in K_\theta$. Следующие два условия эквивалентны:

- i) функция f допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$;
- ii) найдется $\theta_1 \in \mathcal{J}$ такая, что $(zJ)^{k-1}\theta = \theta_1^k$, где J – это внутренний сомножитель функции $\bar{z}\theta\bar{h}$.

Кроме того, если f допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$, то $f \in K_I$ для некоторой функции $I \in \mathcal{J}$ такой, что I делит θ и θ_1 , а I^k делит $z^{k-1}\theta$ в $\mathcal{J}$.

В связи с формулировкой теоремы В напомним (см., например, [18; гл. II, § 5, теорема 5.5]), что любая функция $f \in H^\infty$ единственным образом представляется в виде произведения $f = e^{ia}IF$, где $a \in \mathbb{R}$, $I \in \mathcal{J}$ (внутренний сомножитель f), а F – внешняя функция. Далее (см. [14; лекция II]), $f \in K_\theta$ тогда и только тогда, когда найдется $g \in H^2$ такая, что $f = \bar{z}\theta\bar{g}$. Кроме того, для любой функции $h \in K_\theta$ имеет место включение $\bar{z}\theta\bar{h} \in K_\theta$.

Заметим также, что если функция f в теореме В допускает псевдопродолжение в $\mathbb{U}$, то $f \in K_\theta \cap K_{\theta_1}$.

Пусть $f = \varphi_{a,k} = \sqrt[k]{a-z}$ при $a > 1$ и $k > 1$. Тогда в обозначениях теоремы В $h = a - z \in K_{z^2}$, $\bar{z}\theta\bar{h} = az - 1$ и $J(z) = (az - 1)(z - a)$. В этом случае условие, обеспечивающее псевдопродолжение функции $\varphi_{a,k}$, имеет вид $(zJ)^{k-1}z^2 = z^{k+1}J^{k-1} = \theta_1^k$ для некоторой $\theta_1 \in \mathcal{J}$, что, очевидно, невозможно.

3.2. Равномерная аппроксимация полианалитическими многочленами на границах односвязных областей. Следующий результат вытекает из [13; теорема 2.2].

ТЕОРЕМА С. Пусть G – область Каратеодори с границей Γ , а $n \geq 2$ – натуральное число. Пространство $\mathcal{P}_n$ плотно в $C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда любая ограниченная (связная) компонента множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ не является неванлинновской областью.

Отметим, что необходимые и достаточные условия приближаемости в этой теореме одинаковы для всех значений порядка полианалитичности $n \geq 2$. Однако в случае компактов общего вида это уже не так: для любого целого $n \geq 2$

существует компакт Y_n со свойством $P_n(Y_n) \neq C(Y_n) = P_{2n}(Y_n)$ (в качестве примера такого компакта можно взять объединение n штук софокусных эллипсов; см. [19]).

Проиллюстрируем утверждение теоремы С рядом примеров: пространство $\mathcal{P}_2$ плотно в $C(\Gamma_{a,b})$, но не плотно в $C(\mathbb{T})$ и $C(\Gamma'_{a,b})$. Далее, пусть G_1 – “рог изобилия”, т.е. область, ограниченная отрезком $[2, 3]$ и двумя спиралями, $z = (1 + e^{-\tau})e^{i\tau}$ и $z = (1 + 2e^{-\tau})e^{i\tau}$, $\tau \in [0, +\infty)$, и пусть $\Gamma_1 = \partial G_1$. Так как Γ_1 содержит аналитически независимые аналитические дуги, то область G_1 не является неванлинновской (см. доказательство предложения 2 в [10]). Множество $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ имеет ровно две ограниченные компоненты, а именно G_1 и $\mathbb{D}$. Так как $\mathbb{D}$ – неванлинновская область, а G_1 – нет, то пространство $\mathcal{P}_n$ (при любом $n \geq 2$) не плотно в $C(\Gamma_1)$. Интересно отметить, что пространство $\mathcal{R}_2(\overline{G}_1) = \{\bar{z}R_1 + R_0, \text{ где } R_0, R_1 \text{ – рациональные функции комплексного переменного с полюсами вне } \overline{G}_1\}$ будет плотно в $C(\Gamma_1)$ (см. [13; теорема 2.2]).

Пусть теперь G_2 – это область, являющаяся образом области G_1 при отображении $(x + iy) \rightarrow (x + iy/2)$, а $\Gamma_2 = \partial G_2$. Множество $\mathbb{C} \setminus \Gamma_2$ имеет ровно две ограниченные компоненты – области G_2 и $D_{1,1/4}$, и обе эти области не являются неванлинновскими. Следовательно, пространство $\mathcal{P}_2$ плотно в $C(\Gamma_2)$.

Из теорем 1 и 5 работы [15] вытекает следующее утверждение о плотности пространств $\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m})$ в $C(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА D. Пусть G – область Каратеодори в $\mathbb{C}$ с границей Γ , и пусть $k_1, \dots, k_m$ – натуральные числа, $k_1 < \dots < k_m$, а d – наибольший общий делитель чисел $k_1, \dots, k_m$. Пространство $\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m})$ плотно в $C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{P}(\bar{z}^d)$ плотно в $C(\Gamma)$. Пространство $\mathcal{P}(\bar{z}^d)$ плотно в $C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда любая ограниченная (связная) компонента множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ не является d -неванлинновской областью.

Пусть $\Gamma_a^d = \partial D_a^d$ (где, как и раньше, $a > 1$ – вещественное число, а $d > 1$ – натуральное). Так как область D_a^d , определенная выше, является d -неванлинновской, но не неванлинновской, то пространство $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(\bar{z})$ плотно в $C(\Gamma_a^d)$, но пространство $\mathcal{P}(\bar{z}^d)$ – нет.

3.3. L^p -аппроксимация полианалитическими многочленами на границах односвязных областей. Перейдем к задаче о плотности полианалитических многочленов в пространствах p -суммируемых функций на Γ при $1 \leq p \leq \infty$. Эти пространства мы будем рассматривать относительно гармонической меры $\omega = \omega(\varphi(0), \cdot, G)$ на Γ , где φ – некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область G . Такая постановка вопроса представляется весьма естественной, кроме того, она позволяет выявить роль свойства псевдопродолжения и понятия неванлинновской области в рассматриваемой задаче. Всюду в дальнейшем в этом пункте мы будем предполагать, что область G является жордановой. В этом случае φ продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{G}$. Отсюда следует, что вопрос о плотности пространства $\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m})$ в $L^p(\omega)$ при $p < \infty$ сводится (в силу плотности многочленов в пространстве H^p) к вопросу о плотности в L^p подпространства $M^p(\bar{\varphi}^{k_1}, \dots, \bar{\varphi}^{k_m})$. Аналогично, вопрос о $*$ -слабой плотности пространства

$\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m})$ в $L^\infty(\omega)$ сводится к вопросу о $*$ -слабой плотности в L^∞ подпространства $M^\infty(\bar{\varphi}^{k_1}, \dots, \bar{\varphi}^{k_m})$. Имеет место следующий результат, являющийся следствием теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G и ω такие, как указано выше, и пусть $k_1, \dots, k_m$ – натуральные числа, $k_1 < \dots < k_m$, а $1 \leq p < \infty$. Тогда пространство $\mathcal{P}(\bar{z}^{k_1}, \dots, \bar{z}^{k_m})$ плотно в $L^p(\omega)$ при $p < \infty$ и $*$ -слабо плотно в $L^\infty(\omega)$ тогда и только тогда, когда G не является d -неванлинновской областью, где d – это наибольший общий делитель чисел $k_1, \dots, k_m$. В частности, при $n \geq 2$ пространство $\mathcal{P}_n$ плотно в $L^p(\omega)$ (и $*$ -слабо плотно в $L^\infty(\omega)$) тогда и только тогда, когда G не является неванлинновской областью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только случай $p < \infty$ (случай $p = \infty$ разбирается аналогично). По теореме 1 пространство $M^p(\bar{\varphi}^{k_1}, \dots, \bar{\varphi}^{k_m})$ не плотно в L^p тогда и только тогда, когда каждая из функций $\bar{\varphi}^{k_j}$, $j = 1, \dots, m$, допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$.

Предположим, что $M^p(\bar{\varphi}^{k_1}, \dots, \bar{\varphi}^{k_m})$ не плотно в L^p . Пусть функции u_j и v_j класса H^∞ взяты из (2.1) для $\bar{\varphi}^{k_j}$, т.е. почти всюду на $\mathbb{T}$ имеет место равенство угловых предельных значений

$$\overline{\varphi(\zeta)}^{k_j} = \frac{u_j(\zeta)}{v_j(\zeta)}.$$

Так как d – это наибольший общий делитель чисел $k_1, \dots, k_m$, то найдутся такие целые числа $s_1, \dots, s_m$, что $d = k_1 s_1 + \dots + k_m s_m$. Тогда для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$\overline{\varphi(\zeta)}^d = \frac{u_1(\zeta)^{s_1} \dots u_m(\zeta)^{s_m}}{v_1(\zeta)^{s_1} \dots v_m(\zeta)^{s_m}},$$

из которого следует, что функция $\bar{\varphi}^d$ допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$. А это по определению означает, что область G является d -неванлинновской.

Так как $k_j = dr_j$, $j = 1, \dots, m$, где r_j – некоторые натуральные числа, то из того, что функция $\bar{\varphi}^d$ допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$, вытекает, что для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ выполнено

$$\overline{\varphi(\zeta)}^{k_j} = \frac{u(\zeta)^{r_j}}{v(\zeta)^{r_j}},$$

где функции $u, v \in H^\infty$ взяты из (2.1) для $\bar{\varphi}^d$, откуда следует, что $\bar{\varphi}^{k_j}$ допускает псевдопродолжение в $\mathbb{D}$ при всех $j = 1, \dots, m$. А в этом случае пространство $M^p(\bar{\varphi}^{k_1}, \dots, \bar{\varphi}^{k_m})$ не плотно в L^p .

Рассмотрим простой пример. Пусть $a > 1$, и пусть ν_a – гармоническая мера на Γ_a^2 . Так как область D_a^2 является 2-неванлинновской, но не неванлинновской, то $\mathcal{P}(\bar{z}^2, \bar{z}^3)$ плотно в пространстве $L^p(\nu_a)$, а $\mathcal{P}(\bar{z}^4, \bar{z}^6)$ – нет. При этом $\mathcal{P}(\bar{z}^2)$ также не плотно в $L^p(\nu_a)$. Пусть теперь $p = 2$, а $w = \bar{\varphi}_{a,2}$. Используя

предложение 2, получаем

$$M^2(w^2)^\perp = \left\{ b \in \overline{H}_0^2 : b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{z}^k, \ c_1 = 0 \right\},$$

$$M^2(w^4, w^6)^\perp = M^2(w^6)^\perp = \left\{ b \in \overline{H}_0^2 : b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{z}^k, \ c_1 = c_2 = c_3 = 0 \right\}.$$

Список литературы

- [1] A. G. O’Farrell, “Annihilators of rational modules”, *J. Functional Analysis*, **19**:4 (1975), 373–389.
- [2] J. Verdera, “Approximation by rational modules in Sobolev and Lipschitz norms”, *J. Funct. Anal.*, **58**:3 (1984), 267–290.
- [3] J. Verdera, “On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator”, *Pacific J. Math*, **159**:2 (1993), 379–396.
- [4] J. J. Carmona Doménech, “A necessary and sufficient condition for uniform approximation by certain rational modules”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **86**:3 (1982), 487–490.
- [5] J. J. Carmona, “Mergelyan’s approximation theorem for rational modules”, *J. Approx. Theory*, **44**:2 (1985), 113–126.
- [6] J. J. Carmona Doménech, “The closure in Lip_α norms of rational modules with three generators”, *Illinois J. Math.*, **29**:3 (1985), 418–431.
- [7] T. Trent, J. L. M. Wang, “Uniform approximation by rational modules on nowhere dense sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1981), 62–64.
- [8] T. T. Trent, J. L. Wang, “The uniform closure of rational modules”, *Bull. London Math. Soc.*, **13**:5 (1981), 415–420.
- [9] М. Я. Мазалов, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “Условия C^m -приближаемости функций решениями эллиптических уравнений”, *УМН*, **67**:6(408) (2012), 53–100; англ. пер.: М. Ya. Mazalov, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “Conditions for C^m -approximability of functions by solutions of elliptic equations”, *Russian Math. Surveys*, **67**:6 (2012), 1023–1068.
- [10] К. Ю. Федоровский, “О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskiy, “Uniform n -analytic polynomial approximations of functions on rectifiable contours in $\mathbb{C}$ ”, *Math. Notes*, **59**:4 (1996), 435–439.
- [11] К. Ю. Федоровский, “Nevanlinna domains in problems of polyanalytic polynomial approximation”, *Analysis and mathematical physics*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2009, 131–142.
- [12] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, “Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **20**:1 (1970), 37–76.
- [13] Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98; англ. пер.: J. J. Carmona, P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiy, “On uniform approximation by polyanalytic polynomials and the Dirichlet problem for bianalytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1469–1492.
- [14] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980, 384 с.; англ. пер.: N. K. Nikol’skii, *Treatise on the shift operator. Spectral function theory*, Grundlehren Math. Wiss., **273**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, xii+491 pp.

- [15] A. B. Baranov, J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Density of certain polynomial modules”, *J. Approx. Theory* (to appear), Available online 27 February 2015.
- [16] К. Ю. Федоровский, “О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей”, *Комплексный анализ и приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 204–213; англ. пер.: K. Yu. Fedorovskii, “On some properties and examples of Nevanlinna domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253** (2006), 186–194.
- [17] А. Д. Баранов, К. Ю. Федоровский, “Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах”, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 3–22; англ. пер.: A. D. Baranov, K. Yu. Fedorovskiy, “Boundary regularity of Nevanlinna domains and univalent functions in model subspaces”, *Sb. Math.*, **202**:12 (2011), 1723–1740.
- [18] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984, 470 с.; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981, xvi+467 pp.
- [19] Д. Д. Кармона, К. Ю. Федоровский, “О зависимости условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 32–38; англ. пер.: J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskii, “On the dependence of uniform polyanalytic polynomial approximations on the order of polyanalyticity”, *Math. Notes*, **83**:1 (2008), 31–36.

Константин Юрьевич Федоровский
(Konstantin Yu. Fedorovskiy)

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана;
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kfedorovs@yandex.ru

Поступила в редакцию
02.12.2014 и 12.07.2015