Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Поперечники весовых классов Соболева на области с пиком, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 10, 37–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:49:00

УДК 517.982.256

А. А. Васильева

Поперечники весовых классов Соболева на области с пиком

Получены порядковые оценки колмогоровских, гельфандовских и линейных поперечников единичных шаров весовых пространств Соболева на области с пиком в весовом пространстве Лебега. Рассматриваются некоторые предельные условия на параметры, при которых оценки поперечников могут отличаться от оценок в случае единичных весов и области с липшицевой границей.

Библиография: 52 названия.

Ключевые слова: поперечники, области с пиком, весовые пространства Соболева.

DOI: 10.4213/sm8461

§ 1. Введение

Известно (см., например, [1]–[6]), что для областей Ω , имеющих нулевые углы, условия компактности вложения пространства Соболева $\mathcal{W}_p^r(\Omega)$ в пространство $L_q(\Omega)$ отличаются от условий компактности вложения в случае области с липшицевой границей. В связи с этим возникает задача: как особенности границы области влияют на такие характеристики компактного вложения, как поперечники? В работе О. В. Бесова [7] показано, что если область имеет вид

$$\Omega = \left\{ (x', x_d) : 0 < x_d < \frac{1}{2}, \frac{x'}{\varphi(x_d)} \in B^{d-1} \right\},$$

где $B^{d-1} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ – шар радиуса единица с центром в нуле,

$$\varphi(t) = t^\sigma, \quad 1 < p < q < \infty, \quad \sigma > 1, \quad r + (\sigma(d-1) + 1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) > 0,$$

то порядки колмогоровских поперечников единичного шара пространства $\mathcal{W}_p^r(\Omega)$ в пространстве $L_q(\Omega)$ такие же, как для областей с липшицевой границей. Если

$$\varphi(t) = t^\sigma, \quad r + (\sigma(d-1) + 1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) = 0,$$

то при $1 < p < q < \infty$, $\sigma > 1$ компактного вложения нет. Если

$$\varphi(t) = t^\sigma |\log t|^\theta, \quad r + (\sigma(d-1) + 1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) = 0, \quad \theta > 0,$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

то из результатов В. Г. Мазыи и С. В. Поборчого (см. [6]) следует, что вложение компактное. Здесь будут получены порядковые оценки поперечников в этом предельном случае. При малых θ оценки будут отличаться от оценок для областей с липшицевой границей. Кроме того, будет получено обобщение этого результата на случай весовых пространств.

Дадим определение весового пространства Соболева и весового пространства Лебега.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область (открытое связное множество), $g, v: \Omega \rightarrow (0, \infty)$ – измеримые функции. Для каждой измеримой векторнозначной функции $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi = (\psi_k)_{1 \leq k \leq m}$, $p \in [1, \infty]$, положим

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)} = \left\| \max_{1 \leq k \leq m} |\psi_k| \right\|_p = \left(\int_{\Omega} \max_{1 \leq k \leq m} |\psi_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(с соответствующим изменением при $p = \infty$). Пусть $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d := (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, $|\bar{\beta}| = \beta_1 + \dots + \beta_d$. Для каждой обобщенной функции f на Ω обозначим $\nabla^{\bar{\beta}} f = (\frac{\partial^{\bar{\beta}} f}{\partial x^{\bar{\beta}}})_{|\bar{\beta}|=r}$ (частные производные берутся в обобщенном смысле) и обозначим через $m_{r,d}$ число компонент векторнозначной обобщенной функции $\nabla^{\bar{\beta}} f$. Положим

$$W_{p,g}^r(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m_{r,d}} : \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \leq 1, \nabla^{\bar{\beta}} f = g \cdot \psi\}$$

(соответствующую функцию ψ обозначим через $\frac{\nabla^{\bar{\beta}} f}{g}$),

$$\mathcal{W}_{p,g}^r(\Omega) = \text{span } W_{p,g}^r(\Omega),$$

$$\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} = \|f\|_{q,v} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}, \quad L_{q,v}(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{q,v} < \infty\}.$$

Назовем $\mathcal{W}_{p,g}^r(\Omega)$ весовым пространством Соболева. Тогда $\mathcal{W}_{p,1}^r(\Omega) = \mathcal{W}_p^r(\Omega)$ – невесовое пространство Соболева; единичный шар в нем будем обозначать через $W_p^r(\Omega)$. Отметим, что если $g \in L_{p'}^{\text{loc}}(\Omega)$, то $\nabla^{\bar{\beta}} f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^{m_{r,d}})$; здесь и далее $p' = \frac{p}{p-1}$ – сопряженный показатель.

Отметим, что множество $W_{p,g}^r(\Omega)$ содержит пространство полиномов степени не выше $r-1$ (обозначим его через $\mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$). Поэтому задачу о непрерывном (компактном) вложении весового пространства Соболева в $L_{q,v}(\Omega)$ естественно поставить следующим образом: существует ли ограниченное (предкомпактное) в $L_{q,v}(\Omega)$ множество M такое, что $W_{p,g}^r(\Omega) \subset \mathcal{P}_{r-1}(\Omega) + M$?

Свойства весовых пространств Соболева и их обобщений описаны в книгах [8]–[12] и в обзорной статье [13]. В. Г. Мазыя (см. [14]) получил необходимое и достаточное условие вложения $\mathcal{W}_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ в терминах изопериметрических и емкостных неравенств. Ю. Г. Решетняк в [15], [16], О. В. Бесов в [1] и Б. Боярский в [17] показали, что для области Ω с условием Джона или с условием гибкого конуса условие непрерывного вложения $\mathcal{W}_p^r(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ такое же, как для области с липшицевой границей (условие Джона или условие гибкого конуса означает, что область не имеет нулевых внутренних углов; см. определение 1 ниже); в работе [18] этот результат распространен на области с более общим условием распадающегося гибкого конуса. Также интенсивно изучалась задача о вложении весовых и невесовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей, имеющей нулевые углы (см., например, [1]–[6], [19]–[25]).

Пусть $\varphi: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая липшицева функция такая, что $\lim_{z \rightarrow +0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow +0} \varphi'(z) = 0$, $G \subset \mathbb{R}^{d-1}$ – ограниченная область. Обозначим

$$D_{\varphi, G} = \left\{ x = (y, z) \in \mathbb{R}^d : z \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \frac{y}{\varphi(z)} \in G \right\}. \quad (1.1)$$

В [6] был получен критерий непрерывного вложения $\mathcal{W}_p^r(D_{\varphi, G})$ в $L_q(D_{\varphi, G})$, где $G \subset \mathbb{R}^{d-1}$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. В данной статье мы обобщаем этот критерий на случай весовых пространств Соболева с весами, зависящими только от последней переменной (см. теорему 2).

Дадим определение колмогоровского, линейного и гельфандовского поперечников.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ – нормированное пространство, X^* – его сопряженное, $\mathcal{L}_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – семейство подпространств в X размерности не выше n . Обозначим через $L(X, Y)$ пространство линейных непрерывных операторов из X в нормированное пространство Y . Через $\text{rk } A$ обозначим размерность образа оператора $A \in L(X, Y)$, а через $\|A\|_{X \rightarrow Y}$ – его норму.

Колмогоровским n -поперечником центрально-симметричного множества $M \subset X$ в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|_X,$$

линейным n -поперечником –

$$\lambda_n(M, X) = \inf_{A \in L(X, X), \text{rk } A \leq n} \sup_{x \in M} \|x - Ax\|_X,$$

гельфандовским n -поперечником –

$$\begin{aligned} d^n(M, X) &= \inf_{x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*} \sup \{ \|x\| : x \in M, x_j^*(x) = 0, 1 \leq j \leq n \} \\ &= \inf_{A \in L(X, \mathbb{R}^n)} \sup \{ \|x\| : x \in M \cap \ker A \}. \end{aligned}$$

В работе [26] было дано определение строгих s -чисел линейного непрерывного оператора. В частности, числа Колмогорова оператора $A: X \rightarrow Y$ совпадают с колмогоровскими поперечниками $d_n(A(B_X), Y)$ (где B_X – единичный шар пространства X); если оператор компактен, то его аппроксимативные числа совпадают с линейными поперечниками $\lambda_n(A(B_X), Y)$, а числа Гельфанда – с гельфандовскими поперечниками $d^n(A(B_X), Y)$ (см. работу С. Хейнриха [27]). Если X и Y равномерно выпуклые и равномерно гладкие и $A: X \rightarrow Y$ – ограниченный линейный оператор с тривиальным ядром и плотным в Y образом, то числа Гельфанда оператора A также равны $d^n(A(B_X), Y)$ (см. работу Д. Эдмундса и Я. Ланга [28]).

В 1960–1980-е гг. интенсивно изучались задачи об оценке поперечников функциональных классов в L_q и конечномерных шаров B_p^m в l_q^m (см., например, книги [29]–[31], а также статьи [32]–[36]). Здесь l_q^m , $1 \leq q \leq \infty$, – пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_q \equiv \|(x_1, \dots, x_m)\|_{l_q^m} = \begin{cases} (|x_1|^q + \dots + |x_m|^q)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } q < \infty, \\ \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

B_p^m – единичный шар в l_p^m .

Обозначим $\vartheta_l(M, X) = d_l(M, X)$ и $\widehat{q} = q$ при оценке колмогоровских поперечников, $\vartheta_l(M, X) = \lambda_l(M, X)$ и $\widehat{q} = \min\{q, p'\}$ при оценке линейных поперечников, $\vartheta_l(M, X) = d^l(M, X)$ и $\widehat{q} = p'$ при оценке гельфандовских поперечников.

Сформулируем результат об оценках поперечников $\vartheta_n(W_p^r([0, 1]^d), L_q([0, 1]^d))$ при $p \leq q$ (см., например, [32]–[34], [36]).

Всюду далее полагаем $\delta = r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p}$.

Будем использовать следующие обозначения для порядковых неравенств. Пусть X, Y – множества, $f_1, f_2: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$. Обозначим

$$f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y)$$

(или $f_2(x, y) \underset{y}{\gtrsim} f_1(x, y)$), если для любого $y \in Y$ существует $c(y) > 0$ такое, что $f_1(x, y) \leq c(y)f_2(x, y)$ для любого $x \in X$;

$$f_1(x, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x, y),$$

если $f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y)$ и $f_2(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x, y)$.

ТЕОРЕМА А (см. [32]–[34], [36]). Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\delta > 0$. Положим

$$\theta_{p,q,r,d} = \begin{cases} \frac{\delta}{d}, & \text{если } p = q \text{ или } p < q, \widehat{q} \leq 2, \\ \min\left\{\frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\widehat{q}}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}, \frac{\widehat{q}\delta}{2d}\right\}, & \text{если } p < q, \widehat{q} > 2. \end{cases}$$

Кроме того, предположим, что

$$\frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\widehat{q}}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\} \neq \frac{\widehat{q}\delta}{2d} \quad (1.2)$$

в случае $p < q$, $\widehat{q} > 2$. Тогда

$$\vartheta_n(W_p^r([0, 1]^d), L_q([0, 1]^d)) \underset{r,d,p,q}{\asymp} n^{-\theta_{p,q,r,d}}.$$

Такие же оценки выполнены, если вместо куба берется область с липшицевой границей.

О. В. Бесов в статье [7] доказал результат о совпадении порядков поперечников

$$d_n(W_p^r(K_\sigma), L_q(K_\sigma)) \underset{p,q,r,d,\sigma}{\asymp} d_n(W_p^r([0, 1]^d), L_q([0, 1]^d)),$$

где

$$K_\sigma = \{(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) : |(x_1, \dots, x_{d-1})|^{\frac{1}{\sigma}} < x_d < 1\},$$

$$\sigma > 1, \quad r - [\sigma(d-1) + 1] \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ > 0$$

и в случае $p < q$, $\widehat{q} > 2$ выполнено (1.2). Для $r = 1$, $p = q$ и более общих нерегулярных областей оценки аппроксимативных чисел были получены В. Д. Эвансом и Д. Дж. Харрисом в [19].

Также изучались задача об оценке поперечников единичных шаров весовых пространств Соболева и других функциональных пространств и задача об оценке строгих s -чисел соответствующего оператора вложения. Оценка сверху колмогоровских поперечников единичных шаров пространств Соболева на кубе в весовом пространстве L_q впервые была получена М.Ш. Бирманом и М.З. Соломяком (см. [37]) (при $q > \max\{p, 2\}$ оценка не была точной по порядку). Эль Колли в работе [38] нашел порядковые оценки величин $d_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$, где Ω – ограниченная область с гладкой границей, $p = q$, и веса g и v равны степени расстояния до границы Ω ; используя интерполяцию банаховых пространств, Х. Трибель (см. [8]) расширил верхние оценки поперечников $d_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$ на случай $p \leq q$. Для пересечений шаров некоторых пространств Соболева на кубе с весами, являющимися степенью расстояния до границы, порядковые оценки поперечников были получены И.В. Бойковым (см. [39], [40]). В [41] Х. Трибель получил оценки аппроксимативных чисел операторов вложения весовых пространств Соболева с весами, имеющими особенность в точке; этот результат был обобщен в статье [42]. Для весов общего вида колмогоровские и аппроксимативные числа оператора вложения весового пространства Соболева в весовое пространство L_q были получены П.И. Лизоркиным, М.О. Отелбаевым, М.С. Айтеновой и Л.К. Кусаиновой (см. [43]–[46]); здесь в определение весового пространства Соболева входило ограничение не только на норму r -й производной, но и на норму самой функции, которое существенно использовалось.

Дадим определение области с условием Джона.

Обозначим через $AC[t_0, t_1]$ пространство абсолютно непрерывных функций на интервале $[t_0, t_1]$, а через $B_a(x)$ (соответственно $\dot{B}_a(x)$) – замкнутый (соответственно открытый) евклидов шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса a с центром в точке x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, $a > 0$, $x_* \in G$. Скажем, что $G \in \mathbf{FC}(a, x_*)$, если для любого $x \in G$ существуют $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x: [0, T(x)] \rightarrow G$ со следующими свойствами:

- 1) $\gamma_x \in AC[0, T(x)]$, $|\frac{d\gamma_x(t)}{dt}| = 1$ п.в.,
- 2) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
- 3) $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset G$ для любого $t \in [0, T(x)]$.

Будем обозначать $G \in \mathbf{FC}(a)$, если $G \in \mathbf{FC}(a, x_*)$ для некоторого $x_* \in G$. Если $G \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$, то будем говорить, что G удовлетворяет условию Джона.

Для ограниченной области условие Джона эквивалентно условию гибкого конуса (см. определение в [47]). Примерами таких областей являются области с липшицевой границей, снежинка Коха, области вида $\bigcup_{0 < t \leq T} \dot{B}_{ct}(\gamma(t))$, где $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ – кривая с натуральной параметризацией, $c > 0$. Области, имеющие нулевые внутренние углы, условию Джона не удовлетворяют.

Сформулируем основной результат статьи.

Всюду будем обозначать $\log t = \log_2 t$.

Пусть $\Omega = D_{\varphi, G}$, где $G \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $G \in \mathbf{FC}(a, 0)$. Будем рассматривать веса вида $g(y, z) = g_0(z)$, $v(y, z) = v_0(z)$, $\frac{y}{\varphi(z)} \in G$, $0 < z < \frac{1}{2}$. Предположим, что

для любого $0 < z \leq \frac{1}{2}$

$$g_0(z) = z^{-\beta_g} |\log z|^{-\alpha_g} \rho_g(|\log z|), \quad v_0(z) = z^{-\beta_v} |\log z|^{-\alpha_v} \rho_v(|\log z|), \quad (1.3)$$

$$\varphi(z) = z^\sigma |\log z|^\theta \omega(|\log z|), \quad (1.4)$$

где ρ_g, ρ_v, ω — абсолютно непрерывные функции такие, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \rho'_g(t)}{\rho_g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \rho'_v(t)}{\rho_v(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \omega'(t)}{\omega(t)} = 0, \quad (1.5)$$

$$\sigma > 1, \quad r + (\sigma(d-1) + 1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) = \beta_g + \beta_v, \quad \sigma(d-1) + 1 - \beta_v q > 0, \quad (1.6)$$

$$\alpha := \alpha_g + \alpha_v + \theta(d-1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0. \quad (1.7)$$

Для таких весов g, v и такой области Ω получены порядки поперечников множества $W_{p,g}^r(\Omega)$ в пространстве $L_{q,v}(\Omega)$.

Положим

$$\rho(s) := \rho_g(s) \rho_v(s) [\omega(s)]^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})}, \quad (1.8)$$

$\mathfrak{Z} := (p, q, r, d, a, \varphi, g, v)$. Заметим, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \rho'(t)}{\rho(t)} = 0$ и функция $t^{-\alpha} \rho(t)$ убывает при достаточно больших $t > 0$.

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть $p = q$ или $p < q$, $\widehat{q} \leq 2$, $\alpha \neq \frac{\delta}{d}$. Положим $\sigma_* = 0$, если $\alpha > \frac{\delta}{d}$, и $\sigma_* = 1$, если $\alpha < \frac{\delta}{d}$. Тогда

$$\vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \asymp_3 n^{-\min\{\frac{\delta}{d}, \alpha\}} \rho(n^{\sigma_*}).$$

2. Пусть $p < q$ и $\widehat{q} > 2$. Положим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\delta}{d} + \min \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\widehat{q}}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right\}, & \theta_2 &= \frac{\widehat{q}\delta}{2d}, \\ \theta_3 &= \alpha + \min \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\widehat{q}}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right\}, & \theta_4 &= \frac{\widehat{q}\alpha}{2}, \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = 0, & \sigma_3 &= 1, & \sigma_4 &= \frac{\widehat{q}}{2}. \end{aligned}$$

Пусть существует $j_* \in \{1, 2, 3, 4\}$ такое, что $\theta_{j_*} < \min_{j \neq j_*} \theta_j$. Тогда

$$\vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \asymp_3 n^{-\theta_{j_*}} \rho(n^{\sigma_{j_*}}).$$

Если $\alpha > \frac{\delta}{d}$, то из теоремы А следует, что порядки поперечников такие же, как в случае $\Omega = [0, 1]^d$ и единичных весов. При $\alpha < \frac{\delta}{d}$ оценки меняются. В частности, если

$$\begin{aligned} g &\equiv 1, & v &\equiv 1, \\ r + (\sigma(d-1) + 1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) &= 0, & 0 < \theta(d-1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) &< \frac{\delta}{d}, \end{aligned}$$

то порядки поперечников не такие, как в случае $\Omega = [0, 1]^d$.

Структура работы следующая. В § 2 сформулированы известные результаты, которые будут применяться в дальнейшем. В § 3 доказано обобщение результата В. Г. Мазы и С. В. Поборченко (см. [6]) о непрерывном вложении на случай весовых пространств (при дополнительном условии $0 \in G$). В § 4 доказана теорема 1 (а также ее обобщение для более сложных областей с пиком).

§ 2. Предварительные сведения

Для доказательства теоремы вложения весового пространства Соболева на области с пиком нам понадобится критерий ограниченности двухвесового оператора интегрирования на отрезке.

Пусть $t_0 < t_1$, $r > 0$, и пусть $u, w: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – измеримые функции. Положим

$$\tilde{I}_{r,u,w,t_1} f(t) = w(t) \int_t^{t_1} (s-t)^{r-1} u(s) f(s) ds.$$

Критерий непрерывности оператора $\tilde{I}_{r,u,w,t_1}: L_p[t_0, t_1] \rightarrow L_q[t_0, t_1]$ доказан В. Д. Степановым (см. [48]). Сформулируем этот результат для $p \leq q$.

ТЕОРЕМА В (см. [48]). Пусть $r \geq 1$, $1 < p \leq q < \infty$. Тогда

$$\|\tilde{I}_{r,u,w,t_1}\|_{L_p \rightarrow L_q} \asymp_{p,q,r} B_0 + B_1,$$

где

$$B_0 = \sup_{t \in (t_0, t_1)} \left(\int_{t_0}^t (t-x)^{q(r-1)} w^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{t_1} u^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{1-\frac{1}{p}},$$

$$B_1 = \sup_{t \in (t_0, t_1)} \left(\int_{t_0}^t w^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{t_1} (x-t)^{\frac{p}{p-1}(r-1)} u^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Обозначим через $\text{mes } \Omega$ меру Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)$ – пространство полиномов на $\mathbb{R}^d$ степени не выше $r-1$. Для каждого измеримого подмножества $E \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathcal{P}_{r-1}(E) = \{f|_E : f \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Ю. Г. Решетняк (см. [15], [16]) построил интегральное представление для гладких функций на области Ω , удовлетворяющей условию Джона, в терминах их производных порядка r . Отсюда и из результатов С. Л. Соболева (см. [49], [50]) получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА С (см. [15], [16], [49], [50]). Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a, x_*)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \geq 0$. Тогда существует линейный непрерывный оператор $P: L_q(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такой, что для любой функции $f \in \mathcal{W}_p^r(\Omega)$

$$\|f - Pf\|_{L_q(\Omega)} \lesssim_{p,q,r,d,a} (\text{mes } \Omega)^{\frac{\delta}{d}} \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)};$$

кроме того,

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \lesssim_{p,q,r,d,a} (\text{mes } \Omega)^{\frac{\delta}{d}} \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)} + (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \lesssim_{p,q,r,d,a,c} (\text{mes } \Omega)^{\frac{\delta}{d}} \|\nabla^r f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_q(B_{cR}(x_*) \cap \Omega)},$$

$$c > 0, \quad R = \text{diam } \Omega.$$

Для доказательства оценок поперечников множеств $W_{p,g}^r(\Omega)$ нам понадобятся оценки поперечников конечномерных шаров $\vartheta_n(B_p^\nu, l_q^\nu)$, полученные Б. С. Капиным и Е. Д. Глускиным (см. [34], [35]).

ТЕОРЕМА D (см. [34], [35]). Пусть $1 < p < q < \infty$. Тогда

$$d_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \asymp_{q,p} \Phi(n, \nu, p, q), \quad (2.1)$$

$$\lambda_n(B_p^\nu, l_q^\nu) \asymp_{q,p} \Psi(n, \nu, p, q), \quad (2.2)$$

$$d^n(B_p^\nu, l_q^\nu) \asymp_{q,p} \Phi(n, \nu, q', p'), \quad (2.3)$$

где

$$\Phi(n, \nu, p, q) = \begin{cases} \min\{1, (\nu^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\}, & 2 \leq p < q < \infty, \\ \max\{\nu^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min(1, \nu^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}})(1 - \frac{n}{\nu})^{\frac{1}{2}}\}, & 1 < p < 2 < q < \infty, \\ \max\{\nu^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, (1 - \frac{n}{\nu})^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})/(1-\frac{2}{p})}\}, & 1 < p < q \leq 2, \end{cases}$$

$$\Psi(n, \nu, p, q) = \begin{cases} \Phi(n, \nu, p, q), & \text{если } q \leq p', \\ \Phi(n, \nu, q', p'), & \text{если } p' < q. \end{cases}$$

Если $p = q$, то

$$\vartheta_n(B_p^\nu, l_p^\nu) = 1 \quad \text{при} \quad n < \nu \quad (2.4)$$

(см., например, [29; стр. 232], [30]).

Следующее утверждение было доказано в работе [51] (см. формулу (60)).

ЛЕММА 1. Пусть $\Lambda_*: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y\Lambda'_*(y)}{\Lambda_*(y)} = 0. \quad (2.5)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$t^{-\varepsilon} \lesssim_{\varepsilon, \Lambda_*} \frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y)} \lesssim_{\varepsilon, \Lambda_*} t^\varepsilon, \quad 1 \leq y < \infty, \quad 1 \leq t < \infty.$$

Повторим доказательство для оценки сверху (оценка снизу доказывается аналогично). Из (2.5) следует, что найдется y_ε такое, что функция $y^{-\varepsilon}\Lambda_*(y)$ убывает на $[y_\varepsilon, \infty)$. Значит, если $y \geq y_\varepsilon$, $t \geq 1$, то

$$\frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y)} = t^\varepsilon \frac{(ty)^{-\varepsilon}\Lambda_*(ty)}{y^{-\varepsilon}\Lambda_*(y)} \leq t^\varepsilon.$$

Так как функция Λ_* непрерывна, то найдется $C_\varepsilon > 0$ такое, что $\frac{\Lambda_*(x)}{\Lambda_*(y)} \leq C_\varepsilon$ при $x, y \in [1, y_\varepsilon]$. Если $y \in [1, y_\varepsilon]$, $ty > y_\varepsilon$, то

$$\frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y)} \leq C_\varepsilon \frac{\Lambda_*(ty)}{\Lambda_*(y_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \left(\frac{ty}{y_\varepsilon}\right)^\varepsilon \leq C_\varepsilon t^\varepsilon.$$

§ 3. Теорема вложения для весового класса Соболева на области с пиком

Для $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ обозначим через $B_a^{d-1}(y)$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^{d-1}$ радиуса a с центром в точке y . В частности, положим $B^{d-1} = B_1^{d-1}(0)$.

Для $G \subset \mathbb{R}^d$, $x_* \in G$ обозначим

$$\overline{R}_{x_*}(G) = \sup_{x \in G} \|x - x_*\|_{l_2^d}, \quad \underline{R}_{x_*}(G) = \inf_{x \in \partial G} \|x - x_*\|_{l_2^d}$$

(здесь ∂G – граница множества G). Заметим, что если $G \in \mathbf{FC}(a, x_*)$, то

$$\overline{R}_{x_*}(G) \underset{a,d}{\asymp} \underline{R}_{x_*}(G). \quad (3.1)$$

Для $z \in \mathbb{R}$ положим $\eta_z = (0, \dots, 0, z) \in \mathbb{R}^d$.

Пусть $\varphi: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая липшицева функция такая, что $\lim_{z \rightarrow +0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow +0} \varphi'(z) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $a > 0$, $\tau_* > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}_{\varphi, \tau_*}(a)$, если $\Omega = \bigcup_{z \in (0, \tau_*]} \Omega_z$, где $\Omega_z \in \mathbf{FC}(a, \eta_z)$,

$$\kappa_\Omega := \sup_{z \in (0, 1)} \frac{\overline{R}_{\eta_z}(\Omega_z)}{z} < 1, \quad (3.2)$$

$$\underline{c}\varphi(z) \leq \overline{R}_{\eta_z}(\Omega_z) \leq \bar{c}\varphi(z), \quad z \in (0, \tau_*], \quad (3.3)$$

для некоторых $0 < \underline{c} < \bar{c} < \infty$.

Теоремы вложения и оценки поперечников будут доказаны для областей $\Omega \in \mathbf{FC}_{\varphi, \tau_*}(a)$. В силу предложения 1 (см. ниже) те же результаты будут верны для областей вида $D_{\varphi, G}$ с $G \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $G \in \mathbf{FC}(a, 0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $G \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $G \in \mathbf{FC}(a, 0)$, а область $D_{\varphi, G} \subset \mathbb{R}^d$ определена формулой (1.1), то существует линейный изоморфизм $A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ такой, что $A(D_{\varphi, G}) \in \mathbf{FC}_{\varphi, \tau_*}(b)$ для некоторых $b > 0$, $\tau_* > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mu_0 = \text{diam } G$. Из монотонности функции φ следует, что существует единственное $\tau_* \in (0, \frac{1}{2})$ такое, что $\tau_* + \mu_0\varphi(\tau_*) = \frac{1}{2}$. Для $0 < z \leq \tau_*$ положим

$$\Omega_z = \{(y, \zeta) : z - \mu_0\varphi(z) < \zeta < z + \mu_0\varphi(z), y \in \varphi(\zeta)G\}.$$

Так как функция φ липшицева, то при достаточно малом μ_0 выполнено (3.2) и

$$z - \mu_0\varphi(z) > \frac{z}{2}, \quad z \in (0, \tau_*]. \quad (3.4)$$

Сделав гомотетическое преобразование переменных y , можно считать, что эти свойства выполнены. Кроме того, Ω_z удовлетворяет условию (3.3).

Положим

$$D_z = \{(y, \zeta) : z - \mu_0\varphi(z) < \zeta < z + \mu_0\varphi(z), y \in \varphi(\zeta)G\}.$$

Покажем, что существует такое $\tilde{b} = \tilde{b}(a, d, \mu_0, \varphi) > 0$, что $D_z \in \mathbf{FC}(\tilde{b}, \eta_z)$.

В самом деле, пусть $y \in G$, $z - \mu_0\varphi(z) < \zeta < z + \mu_0\varphi(z)$, $x = (\varphi(z)y, \zeta)$. В силу (3.1) существует такое $c = c(a, d) > 0$, что $B_{c\mu_0}^{d-1}(0) \subset G$. Если $y \in B_{c\mu_0}^{d-1}(0)$, то в качестве γ_x из определения 1 берем натуральную параметризацию отрезка $[x, \eta_z]$. Пусть $y \notin B_{c\mu_0}^{d-1}(0)$, $\tilde{\gamma}_y: [0, T(y)] \rightarrow G$ – кривая со свойствами 1–3 из определения 1 для области G . Тогда $T(y) \geq c\mu_0$. Определяем кривую $\gamma_x^*: [0, \varphi(z)T(y)] \rightarrow D_z$ по формуле

$$\gamma_x^*(t) = \left(\varphi(z)\tilde{\gamma}_y\left(\frac{t}{\varphi(z)}\right), \left(1 - \frac{t}{\varphi(z)T(y)}\right)\zeta + \frac{t}{\varphi(z)T(y)}z \right).$$

Так как $|\frac{d\tilde{\gamma}_y}{dt}| = 1$ п.в., $|z - \zeta| \leq \mu_0\varphi(z)$, $T(y) \geq c\mu_0$, то

$$\left| \frac{d\gamma_x^*}{dt} \right| = \sqrt{1 + \frac{|z - \zeta|^2}{T^2(y)\varphi^2(z)}} \subset [1, \sqrt{1 + c^{-2}}].$$

Сделаем линейную замену переменной t , получим эквивалентную натуральную параметризацию, которую обозначим через γ_x .

Определим липшицев гомеоморфизм $\Psi_z: \Omega_z \rightarrow D_z$ по формуле

$$\Psi_z(y, \zeta) = \left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}y, \zeta \right), \quad z - \mu_0\varphi(z) < \zeta < z + \mu_0\varphi(z), \quad y \in \varphi(\zeta)G.$$

Так как функция φ липшицева и неубывающая, $\varphi'(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$ и выполнено (3.4), то $\varphi(\zeta) \underset{\mu_0, \varphi}{\asymp} \varphi(z)$ при всех $z \in (0, \tau_*]$, $z - \mu_0\varphi(z) < \zeta < z + \mu_0\varphi(z)$.

Для $y \in \varphi(\zeta)G$ выполнено $|y| \leq \mu_0\varphi(\zeta)$. Вычислив матрицу Якоби преобразования Ψ_z и его обратного, получаем, что

$$\|\Psi'_z\| \underset{d, \mu_0, \varphi}{\lesssim} 1, \quad \|(\Psi_z^{-1})'\| \underset{d, \mu_0, \varphi}{\lesssim} 1.$$

Отсюда следует, что $\Omega_z \in \mathbf{FC}(b, \eta_z)$ для некоторого $b = b(a, d, \mu_0, \varphi)$. Это завершает доказательство предложения 1.

Без ограничения общности можно считать, что $\tau_* = \frac{1}{2}$. Всюду будем обозначать $\mathbf{FC}_\varphi(a) = \mathbf{FC}_{\varphi, 1/2}(a)$.

Пусть $g_0: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $v_0: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – измеримые функции,

$$\begin{aligned} g_0|_{[1/2, \infty)} &\equiv \text{const}, & v_0|_{[1/2, \infty)} &\equiv \text{const}, \\ g, v: \Omega &\rightarrow (0, \infty), & g(y, z) &= g_0(z), & v(y, z) &= v_0(z). \end{aligned}$$

Кроме того, предположим, что существует $C_* > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \frac{g_0(t)}{g_0(s)} &\leq C_*, \quad \frac{v_0(t)}{v_0(s)} \leq C_*, \quad z \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ t, s &\in \left[\max\left\{\frac{z}{2}, z - \varphi(z)\right\}, z + \varphi(z) \right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Заметим, что $\max\{\frac{z}{2}, z - \varphi(z)\} = z - \varphi(z)$ при достаточно малых z .

Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$. Обозначим

$$\mathfrak{Z}_1 = (p, q, r, d, a, \varphi, \kappa_\Omega, \underline{c}, \bar{c}, C_*).$$

Для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$.

Обозначим $\bar{R}_z = \bar{R}_{\eta_z}(\Omega_z)$, $\underline{R}_z = \underline{R}_{\eta_z}(\Omega_z)$.

Для $0 \leq \tau_- < \tau_+ \leq \frac{1}{2}$ положим $\Omega_{[\tau_-, \tau_+]} = \bigcup_{z \in [\tau_-, \tau_+]} \Omega_z$ (с $\Omega_0 = \emptyset$). Заметим, что $\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}$ является областью.

Следующая теорема является обобщением результата В. Г. Мазы и С. В. Побречного (см. [6]) о вложениях пространств Соболева на области с пиком на случай весов $g(y, z) = g_0(z)$, $v(y, z) = v_0(z)$, удовлетворяющих (3.5).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}_\varphi(a)$, $0 \leq \tau_- < \tau_+ \leq \frac{1}{2}$,

$$\tau_- < \tau_+ - \underline{R}_{\tau_+}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad R = \lambda \underline{R}_{\tau_+}, \quad (3.6)$$

$$\widehat{W}_{p,g;R}^r(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}) = \{f \in W_{p,g}^r(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}) : f|_{B_R(\eta_{\tau_+})} = 0\}. \quad (3.7)$$

Тогда множество $\widehat{W}_{p,g;R}^r(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$ ограничено $L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$ в том и только в том случае, если

$$A_{[\tau_-, \tau_+]} := \max\{A_{0, [\tau_-, \tau_+]}, A_{1, [\tau_-, \tau_+]}\} < \infty,$$

где

$$A_{0, [\tau_-, \tau_+]} = \sup_{t \in (\tau_-, \tau_+)} \left(\int_{\tau_-}^t \varphi^{d-1}(z) v_0^q(z) dz \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{\tau_+} (z-t)^{p'(r-1)} g_0^{p'}(z) \varphi^{\frac{d-1}{1-p}}(z) dz \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_{1, [\tau_-, \tau_+]} = \sup_{t \in (\tau_-, \tau_+)} \left(\int_{\tau_-}^t (t-z)^{q(r-1)} \varphi^{d-1}(z) v_0^q(z) dz \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{\tau_+} g_0^{p'}(z) \varphi^{\frac{d-1}{1-p}}(z) dz \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Кроме того, если $I: \text{span } \widehat{W}_{p,g;R}^r(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}) \rightarrow L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$ – оператор вложения, то $\|I\| \underset{3_{1,\lambda}}{\asymp} A_{[\tau_-, \tau_+]}$.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \tau_0 < \tau_1 \leq \frac{1}{2}$ и $c > 0$ таковы, что

$$\tau_1 - \tau_0 \leq c\varphi(\tau_0), \quad (3.8)$$

и пусть L – константа Липшица функции $\varphi|_{[\tau_0, \tau_1]}$. Тогда $\bigcup_{z \in [\tau_0, \tau_1]} \Omega_z \in \mathbf{FC}(b, \eta_\tau)$ для любого $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, где $b = b(a, d, c, L, \underline{c}, \bar{c}) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $t \in [\tau_0, \tau_1]$

$$\varphi(\tau_0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\tau_0) + L(t - \tau_0) \leq (L \cdot c + 1)\varphi(\tau_0).$$

Поэтому

$$\underline{R}_t \underset{a,d}{\asymp} \bar{R}_t \underset{\underline{c}, \bar{c}, L, c}{\asymp} \varphi(\tau_0). \quad (3.9)$$

Пусть $z \in [\tau_0, \tau_1]$, $x \in \Omega_z$, $\gamma_x: [0, T(x)] \rightarrow \Omega_z$ – кривая из определения 1, $\gamma_x(T(x)) = \eta_z$. Тогда $T(x) \leq a^{-1}\underline{R}_z$. Продолжим кривую γ_x , соединив η_z и η_τ отрезком. Остается применить (3.8) и (3.9). Лемма доказана.

Для $z \in (0, \frac{1}{2}]$ обозначим $G_z = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : (y, z) \in \Omega\}$. Тогда

$$G_z \supset \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : (y, z) \in \Omega_z\} \supset B_{\underline{R}_z}^{d-1}(0),$$

откуда

$$\text{dist}(0, \partial G_z) \geq \underline{R}_z, \quad \text{diam } G_z \geq 2\underline{R}_z. \quad (3.10)$$

Из (3.1) и (3.3) следует, что

$$\underline{R}_z \underset{a,d}{\asymp} \overline{R}_z \geq \underline{c}\varphi(z). \quad (3.11)$$

ЛЕММА 3. Пусть

$$\zeta \in (0, 1), \quad \Omega_\zeta \cap \{(y, z) : y \in \mathbb{R}^{d-1}\} \neq \emptyset. \quad (3.12)$$

Тогда $\varphi(\zeta) \underset{3_1}{\asymp} \varphi(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) и (3.3) следует, что $\overline{R}_\zeta \leq \overline{c}\varphi(\zeta)$ и $\overline{R}_\zeta \leq \kappa_\Omega \zeta$. Далее, $|\zeta - z| \leq \overline{R}_\zeta$. Таким образом, $\zeta - \overline{c}\varphi(\zeta) \leq z \leq \zeta + \overline{c}\varphi(\zeta)$ и $(1 - \kappa_\Omega)\zeta \leq z \leq (1 + \kappa_\Omega)\zeta$. Значит, $z = \zeta + \theta(\zeta)\varphi(\zeta)$, где $\theta(\zeta) \in [-\overline{c}, \overline{c}]$. Так как функция φ липшицева, то

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta + \theta(\zeta)\varphi(\zeta)) = \varphi(\zeta) + \int_0^{\theta(\zeta)\varphi(\zeta)} \varphi'(\zeta + s) ds. \quad (3.13)$$

Напомним, что $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_*(\varepsilon) > 0$ такое, что $\varphi'(t) < \varepsilon$ для п.в. $t \in (0, t_*(\varepsilon))$. Так как

$$\zeta \leq \frac{z}{1 - \kappa_\Omega}, \quad \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} 0, \quad \varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} 0,$$

то существует $z_*(\varepsilon) > 0$ такое, что $\varphi'(\zeta + s) < \varepsilon$ для $s \in [-\overline{c}\varphi(\zeta), \overline{c}\varphi(\zeta)]$, $z \in (0, z_*(\varepsilon)]$; в самом деле, $\zeta - \overline{c}\varphi(\zeta) > 0$ при малых z и

$$\zeta + s \leq \frac{z}{1 - \kappa_\Omega} + \overline{c}\varphi\left(\frac{z}{1 - \kappa_\Omega}\right) \xrightarrow[z \rightarrow +0]{} 0.$$

Значит, в силу (3.13)

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leq \overline{c}\varepsilon\varphi(\zeta).$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2\overline{c}}$ и получим $\frac{\varphi(\zeta)}{2} \leq \varphi(z) \leq \frac{3\varphi(\zeta)}{2}$ для любого $z \in (0, z_*(\frac{1}{2\overline{c}})]$ и ζ , удовлетворяющего (3.12). Для $z > z_*(\frac{1}{2\overline{c}})$ используем соотношение $z \underset{\kappa_\Omega}{\asymp} \zeta$ и учитываем, что функция φ неубывающая. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Выполнены соотношения

$$\text{dist}(0, \partial G_z) \underset{3_1}{\asymp} \varphi(z), \quad \text{diam } G_z \underset{3_1}{\asymp} \varphi(z). \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки снизу следуют из (3.10) и (3.11). Оценки сверху следуют из определения 2 и леммы 3.

ЛЕММА 5. Пусть функции g_0, v_0 удовлетворяют (3.5), $\lambda_* \geq 1$. Тогда

$$g_0(t) \underset{3_1, \lambda_*}{\asymp} g_0(z), \quad v_0(t) \underset{3_1, \lambda_*}{\asymp} v_0(z)$$

для любого $z \in (0, \frac{1}{2}]$ и любого

$$t \in \left[\max \left\{ \frac{z}{2\lambda_*}, z - \lambda_*\varphi(z) \right\}, \min \left\{ z + \lambda_*\varphi(z), \frac{1}{2} \right\} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что для $\lambda_* \geq 1$

$$g_0(t) \underset{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*}{\asymp} g_0(z), \quad v_0(t) \underset{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*}{\asymp} v_0(z), \quad 0 < z \leq \frac{1}{2}, \quad z \leq t \leq \min \left\{ z + \lambda_* \varphi(z), \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.15)$$

Для этого построим последовательность $\{z_{(k)}\}$ по индукции. Положим $z_{(0)} = z$. Пусть построено $z_{(k)} \leq \frac{1}{2}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $z_{(k)} = \frac{1}{2}$, то построение останавливаем. Если $z_{(k)} < \frac{1}{2}$, то полагаем $z_{(k+1)} = \min \{z_{(k)} + \varphi(z_{(k)}), \frac{1}{2}\}$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $z_{(k)} < \frac{1}{2}$. Так как функция φ неубывающая, то $z_{(k)} \geq z_{(k-1)} + \varphi(z)$. Значит, $z_{(k)} \geq z + k\varphi(z)$, и для $k = \lceil \lambda_* \rceil$ получаем $z_{(k)} \geq z + \lambda_* \varphi(z)$. Остается заметить, что

$$g_0(t) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} g_0(z_{(j-1)}), \quad v_0(t) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} v_0(z_{(j-1)})$$

для любого $t \in [z_{(j-1)}, z_{(j)}]$.

Пусть

$$\max \left\{ \frac{z}{2\lambda_*}, z - \lambda_* \varphi(z) \right\} \leq t \leq z.$$

Так как $\lim_{s \rightarrow +0} \varphi'(s) = 0$, то существует $z_* = z_*(\mathfrak{Z}_1, \lambda_*)$ такое, что $\frac{z}{2} \leq z - \lambda_* \varphi(z)$ и $|\varphi'(z)| \leq \frac{1}{2\lambda_*}$ для любого $z \leq z_*$. Тогда для любого $z \leq z_*$ получаем $\varphi(z - \lambda_* \varphi(z)) \geq \frac{\varphi(z)}{2}$. Следовательно,

$$z \leq z - \lambda_* \varphi(z) + 2\lambda_* \varphi(z - \lambda_* \varphi(z)).$$

Остается применить (3.15).

Пусть $z > z_*$. Докажем, что

$$g_0(z) \underset{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*}{\asymp} g_0(t), \quad v_0(z) \underset{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*}{\asymp} v_0(t)$$

для любого $t \in [\frac{z}{2\lambda_*}, z]$. Имеем

$$\varphi\left(\frac{z}{2\lambda_*}\right) \geq \varphi\left(\frac{z_*}{2\lambda_*}\right) \underset{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*}{\asymp} 1.$$

Это означает, что существует $c_{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*} > 0$ такое, что

$$z \leq \frac{z}{2\lambda_*} + c_{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*} \varphi\left(\frac{z}{2\lambda_*}\right).$$

Применив (3.15) еще раз, получаем требуемую оценку. Лемма 5 доказана.

Пусть T – не более чем счетное семейство измеримых множеств. Положим

$$\mathcal{N}_{T,E} = \text{card}\{E' \in T : \text{mes}(E \cap E') > 0\}, \quad E \in T, \\ \mathcal{N}_T = \sup_{E \in T} \mathcal{N}_{T,E}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $0 \leq \tau_k < \dots < \tau_2 < \tau_1 < \tau_0 \leq \frac{1}{2}$, $0 < \widehat{c} < 1$,

$$\tau_{j-1} - \tau_j \geq \widehat{c} \varphi(\tau_{j-1}), \quad (3.16)$$

$G_{(j)} = \Omega_{[\tau_j, \tau_{j-1}]}$, $1 \leq j < k+1$, $T = \{G_{(j)}\}_{j=1}^k$. Тогда

$$\mathcal{N}_T \underset{\mathfrak{Z}_1, \widehat{c}}{\lesssim} 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция φ липшицева и $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi'(z) = 0$, то существует $z_0 = z_0(\mathfrak{Z}_1) \in (0, \frac{1}{2}]$ такое, что для любого $z \in (0, z_0]$

$$\varphi(z - 2\bar{c}\varphi(z)) \geq \frac{\varphi(z)}{2}, \quad \varphi(z + 2\bar{c}\varphi(z)) \leq 2\varphi(z), \quad |\varphi'(z)| \leq \frac{1}{4\bar{c}}. \quad (3.17)$$

Оценим

$$\text{card}\{i \in \overline{1, k} \setminus \{j\} : G_{(i)} \cap G_{(j)} \neq \emptyset\}, \quad j \in \overline{1, k}.$$

Так как множества $G_{(i)}$ открыты, то условие $G_{(i)} \cap G_{(j)} \neq \emptyset$ эквивалентно неравенству $\text{mes}(G_{(i)} \cap G_{(j)}) > 0$. Заметим, что если $\tau_{i-1} \geq z_0$, то

$$\tau_{i-1} - \tau_i \stackrel{(3.16)}{\geq} \widehat{c}\varphi(\tau_{i-1}) \underset{\mathfrak{Z}_1, \bar{c}}{\asymp} 1.$$

Значит,

$$\text{card}\{i \in \overline{1, k} : \tau_{i-1} \geq z_0\} \underset{\mathfrak{Z}_1, \bar{c}}{\lesssim} 1.$$

Поэтому достаточно оценить

$$\text{card}\{i \in \overline{1, k} \setminus \{j\} : G_{(i)} \cap G_{(j)} \neq \emptyset, \tau_{i-1} < z_0\}.$$

Если $G_{(i)} \cap G_{(j)} \neq \emptyset$, то существуют $z = z_{i,j} \in [\tau_j, \tau_{j-1}]$, $t \in [\tau_i, \tau_{i-1}]$ такие, что

$$B_{\bar{R}_z}(\eta_z) \cap B_{\bar{R}_t}(\eta_t) \neq \emptyset. \quad (3.18)$$

Пусть $i < j$. Тогда из (3.18) следует, что $z + \bar{R}_z \geq t - \bar{R}_t$. Поэтому

$$t - \tau_{j-1} \leq t - z \leq \bar{R}_z + \bar{R}_t \stackrel{(3.3)}{\leq} \bar{c}\varphi(z) + \bar{c}\varphi(t) \leq 2\bar{c}\varphi(t), \quad (3.19)$$

т.е. $t - 2\bar{c}\varphi(t) \leq \tau_{j-1}$. В силу монотонности функции φ и неравенства $t \leq \tau_{i-1} \leq z_0$, выполнено

$$\frac{\varphi(t)}{2} \stackrel{(3.17)}{\leq} \varphi(t - 2\bar{c}\varphi(t)) \leq \varphi(\tau_{j-1}).$$

Применяя еще раз (3.19), получаем $\tau_i - \tau_{j-1} \leq 2\bar{c}\varphi(t) \leq 4\bar{c}\varphi(\tau_{j-1})$. С другой стороны,

$$\tau_{i-1} - \tau_i \stackrel{(3.16)}{\geq} \widehat{c}\varphi(\tau_{i-1}) \geq \widehat{c}\varphi(\tau_{j-1}).$$

Из последних двух цепочек неравенств получаем требуемую оценку.

Пусть $i > j$. Тогда из (3.18) следует, что

$$t + \bar{R}_t \geq z - \bar{R}_z. \quad (3.20)$$

Пусть $z \geq z_0$. Тогда

$$(1 + \kappa_\Omega)\tau_{i-1} \geq (1 + \kappa_\Omega)t \stackrel{(3.2)}{\geq} t + \bar{R}_t \stackrel{(3.20)}{\geq} z - \bar{R}_z \stackrel{(3.2)}{\geq} (1 - \kappa_\Omega)z \geq (1 - \kappa_\Omega)z_0.$$

Значит, $\tau_{i-1} \underset{\mathfrak{Z}_1}{\gtrsim} 1$, $\varphi(\tau_{i-1}) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\gtrsim} 1$, $\tau_{i-1} - \tau_i \underset{\mathfrak{Z}_1, \bar{c}}{\gtrsim} 1$ и

$$\text{card}\{i > j : G_{(i)} \cap G_{(j)} \neq \emptyset, z_{i,j} \geq z_0\} \underset{\mathfrak{Z}_1, \bar{c}}{\lesssim} 1.$$

Пусть $z < z_0$. Из (3.20) следует, что

$$z - \bar{R}_z \leq t + \bar{R}_t \stackrel{(3.3)}{\leq} t + \bar{c}\varphi(t) \leq \tau_{i-1} + \bar{c}\varphi(z). \quad (3.21)$$

Положим

$$\tilde{z} = \begin{cases} z, & \text{если } z - \bar{R}_z \leq \tau_j - \bar{R}_{\tau_j}, \\ \tau_j, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Тогда

$$\tilde{z} - \bar{R}_{\tilde{z}} \leq \tau_{i-1} + \bar{c}\varphi(\tilde{z}). \quad (3.23)$$

В самом деле, если $\tilde{z} = z$, то это следует из (3.21). Если $\tilde{z} = \tau_j$, то в силу (3.21), (3.22) и неравенств $t \leq \tau_{i-1} \leq \tau_j$ получаем

$$\tilde{z} - \bar{R}_{\tilde{z}} \leq z - \bar{R}_z \leq t + \bar{c}\varphi(t) \leq \tau_{i-1} + \bar{c}\varphi(\tau_j) = \tau_{i-1} + \bar{c}\varphi(\tilde{z}).$$

Оценим $\tilde{z} - \tau_j$ сверху. Учитывая условие $\tilde{z} \leq z < z_0$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{z} - \tau_j &\stackrel{(3.22)}{\leq} \bar{R}_{\tilde{z}} - \bar{R}_{\tau_j} \stackrel{(3.3)}{\leq} \bar{c}\varphi(\tilde{z}) - \underline{c}\varphi(\tau_j) \\ &= (\bar{c} - \underline{c})\varphi(\tau_j) + \bar{c} \int_{\tau_j}^{\tilde{z}} \varphi'(s) ds \stackrel{(3.17)}{\leq} (\bar{c} - \underline{c})\varphi(\tau_j) + \frac{\tilde{z} - \tau_j}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{z} - \tau_j \leq 2(\bar{c} - \underline{c})\varphi(\tau_j). \quad (3.24)$$

Из (3.23) получаем

$$\tilde{z} - \tau_{i-1} \leq \bar{R}_{\tilde{z}} + \bar{c}\varphi(\tilde{z}) \stackrel{(3.3)}{\leq} 2\bar{c}\varphi(\tilde{z}). \quad (3.25)$$

Значит, $\varphi(\tau_{i-1}) \geq \varphi(\tilde{z} - 2\bar{c}\varphi(\tilde{z})) \stackrel{(3.17)}{\geq} \frac{\varphi(\tilde{z})}{2}$. Следовательно,

$$\tau_{i-1} - \tau_i \stackrel{(3.16)}{\geq} \hat{c}\varphi(\tau_{i-1}) \geq \frac{\hat{c}}{2}\varphi(\tilde{z}) \geq \frac{\hat{c}}{2}\varphi(\tau_j).$$

С другой стороны,

$$\tau_j - \tau_{i-1} \leq \tilde{z} - \tau_{i-1} \stackrel{(3.25)}{\leq} 2\bar{c}\varphi(\tilde{z}) \stackrel{(3.17), (3.24)}{\leq} 4\bar{c}\varphi(\tau_j).$$

Из последних двух цепочек неравенств получаем требуемую оценку. Лемма 6 доказана.

Следующее неравенство аналогично неравенству (4.7) в статье [6], если $\tau_+ - \tau_- \geq \lambda_*\varphi(\tau_+)$, $\lambda_* > 0$, то:

$$\sup_{z \in [\tau_-, \tau_+]} g_0(z) v_0(z) \varphi(z)^{r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p}} \lesssim_{31, \lambda_*} A_{0, [\tau_-, \tau_+]}. \quad (3.26)$$

Докажем теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения почти такие же, как в [6]. Приведем схему доказательства.

Для доказательства оценки снизу берем функции

$$\psi_f(y, z) = \begin{cases} \int_z^{\tau_+ - R} (t - z)^{r-1} g_0(t) f(t) dt, & z \leq \tau_+ - R, \\ 0, & z > \tau_+ - R, \end{cases}$$

где f такова, что функция $f_*(y, z) = f(z)$ удовлетворяет условию $\|f_*\|_{L_p(\Omega)} = 1$ и $f(z) = 0$ для $z \notin [\tau_-, \tau_+]$. По теореме В

$$\sup_{\|f_*\|_{L_p(\Omega)}=1} \|\psi_f\|_{L_{q,v}(\Omega)} \gtrsim \max\{A_{0, [\tau_-, \tau_+ - R]}, A_{1, [\tau_-, \tau_+ - R]}\}.$$

Применяя лемму 5, учитывая липшицевость φ и используя неравенства

$$\begin{aligned} R &\leq \overline{R}_{\tau_+} \stackrel{(3.3)}{\leq} \bar{c}\varphi(\tau_+), \\ \tau_+ - R - \tau_- &= \tau_+ - \underline{R}_{\tau_+} - \tau_- + (\underline{R}_{\tau_+} - R) \stackrel{(3.6)}{\geq} \underline{R}_{\tau_+} - R \stackrel{(3.6)}{=} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)R, \end{aligned}$$

получаем

$$\max\{A_{0, [\tau_-, \tau_+ - R]}, A_{1, [\tau_-, \tau_+ - R]}\} \gtrsim \max\{A_{0, [\tau_-, \tau_+]}, A_{1, [\tau_-, \tau_+]}\}.$$

Докажем оценку сверху. По лемме 2.2 из [6], можно считать, что

$$\varphi \in C^r\left(0, \frac{1}{2}\right], \quad |\varphi^{(k)}(z)| \leq c\varphi(z)^{1-k}, \quad k \in \overline{1, r}, \quad z \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad (3.27)$$

для некоторого $c > 0$, не зависящего от z . Из (3.10) и (3.11) следует, что существует $c_* = c_*(\mathfrak{Z}_1) > 0$ такое, что $\text{dist}(0, \partial G_z) \geq \underline{R}_z \geq c_*\varphi(z)$. Применяя гомотетическое преобразование по переменной y , можем считать $\frac{\lambda c_*}{2} = 1$. Пусть

$$\begin{aligned} K &\in C_0^\infty(B^{d-1}), \quad \int_{B^{d-1}} K(y) dy = 1, \quad \int_{B^{d-1}} K(y) y^\mu dy = 0, \\ \mu &\in \mathbb{Z}_+^{d-1}, \quad 1 \leq |\mu| \leq r-1, \\ u_\mu(z) &= \varphi(z)^{1-d} \int_{|y| < \varphi(z)} K\left(\frac{y}{\varphi(z)}\right) \frac{\partial^{|\mu|} u}{\partial y^\mu}(y, z) dy, \quad z \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad u \in W_{p,g}^r(\Omega), \\ Q(x) &= \sum_{|\mu| \leq r-1} u_\mu(z) \frac{y^\mu}{\mu!}, \quad x = (y, z) \in \Omega \end{aligned}$$

(см. [6; § 4]).

В [6; лемма 3.1] доказано, что если выполнено (3.27), то функция u_μ абсолютно непрерывна вместе с производными порядка не выше $r-1$. Кроме того, $u_\mu^{(r)} \in L_p^{\text{loc}}(0, \frac{1}{2})$ и для $r - |\mu| \leq s \leq r$, $z \in (0, \frac{1}{2})$, выполнено

$$|u_\mu^{(s)}(z)| \lesssim \varphi(z)^{r-|\mu|-s-\frac{d-1}{p}} \left(\int_{|y| < \varphi(z)} |\nabla^r u(y, z)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.28)$$

Положим $\tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]} = \{(y, z) \in \Omega_{[\tau_-, \tau_+]} : \tau_- \leq z \leq \tau_+\}$.

Пусть

$$\mu \in \mathbb{Z}_+^{d-1}, \quad |\mu| \leq r-1, \quad Q_\mu(x) = u_\mu(z)y^\mu.$$

Оценим сверху $\|Q_\mu\|_{L_{q,v}(\tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]})}$. Так как $u_\mu(z) = 0$ в некоторой окрестности τ_+ (см. (3.7)), то

$$u_\mu(z) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_z^{\tau_+} (t-z)^{r-1} u_\mu^{(r)}(t) dt, \quad z \in [\tau_-, \tau_+].$$

Применяя (3.28) для $s = r$, получаем

$$\begin{aligned} \|Q_\mu\|_{L_{q,v}(\tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]})} &\lesssim_{\mathfrak{Z}_1} \left(\int_{\tau_-}^{\tau_+} v_0^q(z) |u_\mu(z)|^q \varphi(z)^{q|\mu|+d-1} dz \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_{\tau_-, \tau_+} \left(\int_{\tau_-}^{\tau_+} \left| \frac{u_\mu^{(r)}(z)}{g_0(z)} \right|^p \varphi(z)^{p|\mu|+d-1} dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(3.28)}{\lesssim_{\mathfrak{Z}_1}} C_{\tau_-, \tau_+} \left(\int_{\tau_-}^{\tau_+} \int_{|y| < \varphi(z)} \left| \frac{\nabla^r u(y, z)}{g(y, z)} \right|^p dy dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Величина C_{τ_-, τ_+} оценивается с помощью теоремы В. Так как функция φ неубывающая, получаем требуемую оценку (см. доказательство в [6; §4]). Таким образом,

$$\|Q\|_{L_{q,v}(\tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]})} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}. \quad (3.29)$$

Оценим $\|u - Q\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}$. Пусть

$$\begin{aligned} z_0 &= \tau_+, \quad z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad k_* = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : z_{k+1} < \tau_-\}, \\ \hat{z}_{k+1} &= \max\{z_{k+1}, \tau_-\}, \quad \Omega_{(k)} = \bigcup_{z \in [\hat{z}_{k+1}, z_k]} \Omega_z, \quad 0 \leq k \leq k_*. \end{aligned}$$

По лемме 2 существует $b = b(\mathfrak{Z}_1) > 0$ такое, что $\Omega_{(k)} \in \mathbf{FC}(b)$. Пусть $g_{(k)} = g_0(z_k)$, $v_{(k)} = v_0(z_k)$. Из (3.5) получаем

$$g(x) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} g_{(k)}, \quad v(x) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} v_{(k)}$$

для любого $x \in \Omega_{(k)}$. По построению

$$z_k - z_{k+1} = \varphi(z_{k+1}) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} \varphi(z_k) \quad (3.30)$$

(здесь используется липшицевость φ). Отсюда, из теоремы С и неравенства (3.3) получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega_{(k)})} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(z_k)^{\frac{d}{q} - \frac{d}{p}} \left(\|u\|_{L_p(\Omega_{(k)})} + \varphi(z_k)^r \|\nabla^r u\|_{L_p(\Omega_{(k)})} \right).$$

Повторяя рассуждения в [6; §4], получаем

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega_{(k)})} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(z_k)^{r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p}} \|\nabla^r u\|_{L_p(\Omega_{(k)})}.$$

Из (3.30) и леммы 6 следует, что

$$\begin{aligned} \|u - Q\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})} &\lesssim \max_{0 \leq k \leq k_*} g_{(k)} v_{(k)} \varphi(z_k)^{r+\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})} \\ &\stackrel{(3.26)}{\lesssim} A_{0, [\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.29) получаем

$$\|u\|_{L_{q,v}(\tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]})} \lesssim A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}. \quad (3.31)$$

Остается доказать, что

$$\|u\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]} \setminus \tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]})} \lesssim A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_- &= \sup \{t \in [\tau_-, \tau_+] : \exists (y, z) \in \Omega_t : z < \tau_-\}, \\ \tilde{\tau}_+ &= \inf \{t \in [\tau_-, \tau_+] : \exists (y, z) \in \Omega_t : z > \tau_+\}. \end{aligned}$$

Тогда $\Omega_{[\tau_-, \tau_+]} \setminus \tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]} \subset \Omega_{[\tau_-, \tilde{\tau}_-]} \cup \Omega_{[\tilde{\tau}_+, \tau_+]}$. По лемме 3

$$\varphi(\tilde{\tau}_-) \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_-), \quad \varphi(\tilde{\tau}_+) \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_+).$$

В силу (3.3) и (3.6)

$$\tilde{\tau}_- - \tau_- \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tilde{\tau}_-) \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_-), \quad \tau_+ - \tilde{\tau}_+ \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tilde{\tau}_+) \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_+)$$

и существуют $R_- \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_-)$, $R_+ \asymp_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_+)$ такие, что

$$B_{\pm} := B_{R_{\pm}}(\eta_{\tilde{\tau}_{\pm}}) \subset \tilde{\Omega}_{[\tau_-, \tau_+]}. \quad (3.32)$$

По лемме 2

$$\Omega_{[\tau_-, \tilde{\tau}_-]} \in \mathbf{FC}(\tilde{b}, \eta_{\tilde{\tau}_-}), \quad \Omega_{[\tilde{\tau}_+, \tau_+]} \in \mathbf{FC}(\tilde{b}, \eta_{\tilde{\tau}_+}),$$

где $\tilde{b} = \tilde{b}(\mathfrak{Z}_1) > 0$. Наконец, из леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} g(x) &\asymp_{\mathfrak{Z}_1} g_0(\tau_-), \quad v(x) \asymp_{\mathfrak{Z}_1} v_0(\tau_-) \quad \text{для любого } x \in \Omega_{[\tau_-, \tilde{\tau}_-]}, \\ g(x) &\asymp_{\mathfrak{Z}_1} g_0(\tau_+), \quad v(x) \asymp_{\mathfrak{Z}_1} v_0(\tau_+) \quad \text{для любого } x \in \Omega_{[\tilde{\tau}_+, \tau_+]}. \end{aligned}$$

По теореме C

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tilde{\tau}_-]})} &\lesssim \|u\|_{L_{q,v}(B_-)} + g_0(\tau_-) v_0(\tau_-) \varphi(\tau_-)^{r+\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})} \\ &\stackrel{(3.26), (3.31), (3.32)}{\lesssim} A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\|u\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_+, \tau_+]})} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r u}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}.$$

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть

$$\Omega \in \mathbf{FC}_\varphi(a), \quad 0 < \lambda_* < 1, \quad 0 \leq \tau_- < \tau_+ \leq \frac{1}{2}, \quad \tau_- < \tau_+ - \lambda_* \varphi(\tau_+).$$

Предположим, что $A_{[\tau_-, \tau_+]} < \infty$. Тогда $W_{p,g}^r(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}) \subset L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$ и существует линейный непрерывный оператор

$$P: L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$$

такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1, \lambda_*} A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau_- \geq \tau_+ - \underline{R}_{\tau_+}$. Тогда

$$\tau_+ - \tau_- \stackrel{(3.1), (3.3)}{\leq} c_0 \varphi(\tau_+) \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_-),$$

где $c_0 = c_0(\mathfrak{Z}_1)$. Проверим последнее неравенство. Так как $\varphi'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$, то существует $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\mathfrak{Z}_1) > 0$ такое, что для $\tau_+ < \hat{\tau}$ выполнено

$$\varphi(\tau_-) \geq \varphi(\tau_+ - c_0 \varphi(\tau_+)) \geq \frac{\varphi(\tau_+)}{2}.$$

Если $\tau_+ > \hat{\tau}$, то $\underline{R}_{\tau_+} \leq \bar{R}_{\tau_+} \stackrel{(3.2)}{\leq} \kappa_\Omega \tau_+$ и $\tau_- \geq (1 - \kappa_\Omega) \tau_+ \geq (1 - \kappa_\Omega) \hat{\tau}$. Значит,

$$\varphi(\tau_-) \gtrsim_{\mathfrak{Z}_1} 1 \gtrsim_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_+).$$

Таким образом, $\tau_+ - \tau_- \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} \varphi(\tau_-)$. По лемме 2 $\Omega_{[\tau_-, \tau_+]} \in \mathbf{FC}(\tilde{b})$, $\tilde{b} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} 1$. Из неравенств (3.2), (3.3) и леммы 5 следует, что

$$g(x) \gtrsim_{\mathfrak{Z}_1} g_0(\tau_+), \quad v(x) \gtrsim_{\mathfrak{Z}_1} v_0(\tau_+)$$

для любого $x \in \Omega_{[\tau_-, \tau_+]}$. Остается применить теорему C и неравенство (3.26).

Предположим, что $\tau_- < \tau_+ - \underline{R}_{\tau_+}$. Пусть

$$P_0: \text{span } W_p^r(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+})) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))$$

– линейный непрерывный проектор. Тогда для любого $0 \leq k \leq r$ и любого $q_k \in [1, +\infty)$ такого, что $r - k + \frac{d}{q_k} - \frac{d}{p} > 0$, выполнено

$$\begin{aligned} \|f - P_0 f\|_{L_{q_k}(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))} &\lesssim_{p, q_k, r, d} \underline{R}_{\tau_+}^{r-k+\frac{d}{q_k}-\frac{d}{p}} \|\nabla^r f\|_{L_p(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))} \\ &\stackrel{(3.3)}{\lesssim_{\mathfrak{Z}_1}} (\varphi(\tau_+))^{r-k+\frac{d}{q_k}-\frac{d}{p}} \|\nabla^r f\|_{L_p(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))} \end{aligned} \quad (3.33)$$

(см. [50]).

Для того, чтобы определить P_0 , берем ортогональную проекцию в пространстве $L_2(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))$ на подпространство $\mathcal{P}_{r-1}(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))$, продолжаем ее на $L_1(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))$ по непрерывности и затем ограничиваем на $L_{q,v}(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))$. Функция Pf определяется как продолжение полинома $P_0(f)$ на область $\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}$. Тогда образ P содержится в $\mathcal{P}_{r-1}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$. Из условия $A_{[\tau_-, \tau_+]} < \infty$ следует, что $v \in L_q(\Omega)$ и оператор

$$P: L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]}) \rightarrow L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})$$

непрерывен.

Пусть $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } \psi_0 \subset B_1(0)$, $\psi_0|_{B_{1/2}(0)} = 1$, $\psi_0(x) \in [0, 1]$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$R = \frac{\underline{R}_{\tau_+}}{2}, \quad \psi(x) = \psi_0\left(\frac{x - \eta_{\tau_+}}{\underline{R}_{\tau_+}}\right).$$

Имеем $\text{supp } \psi \subset B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+})$, $\text{supp}(1 - \psi) \subset \Omega \setminus B_R(\eta_{\tau_+})$. В силу условий (3.2), (3.3), (3.5) и леммы 5

$$g(x) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} g_0(\tau_+), \quad v(x) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} v_0(\tau_+), \quad x \in B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}). \quad (3.34)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|\psi(f - Pf)\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})} &\leq \|f - Pf\|_{L_{q,v}(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))} \\ &\stackrel{(3.33), (3.34)}{\lesssim_{\mathfrak{Z}_1}} g_0(\tau_+) v_0(\tau_+) (\varphi(\tau_+))^\delta \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(B_{\underline{R}_{\tau_+}}(\eta_{\tau_+}))} \\ &\stackrel{(3.26)}{\lesssim_{\mathfrak{Z}_1}} A_{[\tau_-, \tau_+]} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}. \end{aligned}$$

Величина $\|(1 - \psi)(f - Pf)\|_{L_{q,v}(\Omega_{[\tau_-, \tau_+]})}$ оценивается по теореме 2 (рассуждения такие же, как в [52]). Следствие 1 доказано.

Пусть выполнены условия (1.3)–(1.8). Покажем, что

$$A_{[\tau_-, \tau_+]} \leq A_{[0, \tau_+]} \lesssim_{\mathfrak{Z}_1} |\log \tau_+|^{-\alpha} \rho(|\log \tau_+|). \quad (3.35)$$

В самом деле, интегралы из определения $A_{i,[0, \tau_+]}$, $i = 0, 1$, легко оцениваются (для этого применяем лемму 1 и заменяем $z - t$ на z , а $t - z$ на t). Затем используем убывание функции $t^{-\alpha} \rho(t)$ при больших t .

Эту оценку будем использовать при $\tau_- < \frac{\tau_+}{2}$. Если $\tau_- \geq \frac{\tau_+}{2}$, то

$$\varphi(t) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} \varphi(\tau_+), \quad g_0(t) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} g_0(\tau_+), \quad v_0(t) \underset{\mathfrak{Z}_1}{\asymp} v_0(\tau_+)$$

для любого $t \in [\tau_-, \tau_+]$. Значит,

$$\begin{aligned} A_{[\tau_-, \tau_+]} &\lesssim_{\mathfrak{Z}_1} g_0(\tau_+) v_0(\tau_+) [\varphi(\tau_+)]^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} (\tau_+ - \tau_-)^{r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &= |\log \tau_+|^{-\alpha} \rho(|\log \tau_+|) \tau_+^{-r - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} (\tau_+ - \tau_-)^{r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

§ 4. Оценки поперечников

Здесь мы предполагаем, что $p \leq q$.

Скажем, что множества $A, B \subset \mathbb{R}^d$ не перекрываются, если $A \cap B$ является множеством меры нуль.

Пусть $E, E_1, \dots, E_m \subset \mathbb{R}^d$ – измеримые множества. Скажем, что $\{E_i\}_{i=1}^m$ является покрытием E , если множество $E \setminus (\bigcup_{i=1}^m E_i)$ имеет меру нуль. Назовем $\{E_i\}_{i=1}^m$ разбиением E , если множества E_i попарно не перекрываются и множество $(\bigcup_{i=1}^m E_i) \Delta E$ имеет меру нуль.

Пусть $G \subset \Omega$ – измеримое множество, $T = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ – конечное разбиение G . Обозначим

$$\mathcal{S}_{r,T}(G) = \{S : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : S|_{G_i} \in \mathcal{P}_{r-1}(G_i), 1 \leq i \leq i_0, S|_{\Omega \setminus G} = 0\}.$$

Для каждой функции $f \in L_{q,v}(G)$ положим

$$\|f\|_{p,q,T,v} = \left(\sum_{i=1}^{i_0} \|f\|_{L_{q,v}(G_i)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Через $L_{p,q,T,v}(G)$ обозначим пространство $L_{q,v}(G)$ с нормой $\|\cdot\|_{p,q,T,v}$. Заметим, что $\|f\|_{p,q,T,v} \geq \|f\|_{L_{q,v}(G)}$.

В работе [52] доказано следующее утверждение (точнее, более общий результат для весовых пространств). В невесовом случае О. В. Бесов [7] привел более простое доказательство.

ЛЕММА 7. Пусть $a > 0$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $G \in \mathbf{FC}(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует семейство разбиений $\{T_{m,n}(G)\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ со следующими свойствами:

- 1) $\text{card } T_{m,n}(G) \underset{a,d}{\lesssim} 2^m n$;
- 2) для любого $E \in T_{m,n}(G)$ существует линейный непрерывный оператор $P_E : L_q(E) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(E)$ такой, что для любой функции $f \in W_p^r(G)$

$$\|f - P_E f\|_{L_q(E)} \underset{p,q,r,d,a}{\lesssim} (2^m n)^{-\frac{r}{d} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} (\text{mes } G)^{\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\nabla^r f\|_{L_p(E)};$$

- 3) для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, $E \in T_{m,n}(G)$

$$\text{card} \{E' \in T_{m+1,n}(G) : \text{mes}(E \cap E') > 0\} \underset{a,d}{\lesssim} 1,$$

$$\text{card} \{E' \in T_{m-1,n}(G) : \text{mes}(E \cap E') > 0\} \underset{a,d}{\lesssim} 1, \quad \text{если } m \geq 1.$$

Пусть X, Y – нормированные пространства, $B \subset X$, $A \in L(X, Y)$. Тогда

$$d_n(A(B), Y) \leq \|A\| d_n(B, X). \quad (4.1)$$

Если A – изоморфизм X и Y , то

$$\lambda_n(A(B), Y) \leq \|A\| \lambda_n(B, X), \quad d^n(A(B), Y) \leq \|A\| d^n(B, X). \quad (4.2)$$

Такие же неравенства выполнены, если Y является подпространством в пространстве X , $B \subset Y$ и A – линейный проектор на Y . Эти утверждения следуют из определений колмогоровского, гильфандовского и линейного поперечников.

Обозначим через χ_E характеристическую функцию множества E .

ЛЕММА 8. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – область, $G_1, \dots, G_m \subset \Omega$ – попарно не перекрывающиеся подобласти, $\psi_1, \dots, \psi_m \in W_{p,g}^r(\Omega)$, $\|\frac{\nabla^r \psi_j}{g}\|_{L_p(\Omega)} = 1$, $\text{supp } \psi_j \subset G_j$, $\|\psi_j\|_{L_{q,v}(G_j)} \geq M$, $1 \leq j \leq m$. Тогда

$$\vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \geq M \cdot \vartheta_n(B_p^m, l_q^m)$$

(см. определение ϑ_n перед теоремой А).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \text{span}\{\psi_j\}_{j=1}^m \subset L_{q,v}(\Omega)$. Из определения гильфандовского поперечника следует, что

$$d^n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \geq d^n(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X, X).$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} d_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) &\geq d_n(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X, X), \\ \lambda_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) &\geq \lambda_n(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X, X). \end{aligned}$$

Для этого построим проектор $Q: L_{q,v}(\Omega) \rightarrow X$ такой, что $\|Q\| \leq 1$ и применим неравенства (4.1), (4.2). Пусть $X_j = \text{span}\{\psi_j\}$. Обозначим через $L_{q,v}^{(j)}(G)$ множество функций из $L_{q,v}(G)$ с носителем в G_j . Так как $\dim X_j = 1$, то существует проектор $Q_j: L_{q,v}^{(j)}(G) \rightarrow X_j$ такой, что $\|Q_j\| \leq 1$. Пусть $Q(f) = \sum_{j=1}^m Q_j(f \chi_{G_j})$. Так как множества G_j попарно не перекрываются, то $\|Q\| \leq 1$.

Определим изоморфизм $T: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ формулой

$$T\left(\sum_{j=1}^m c_j \psi_j\right) = (c_1, \dots, c_m).$$

Так как $\|\frac{\nabla^r \psi_j}{g}\|_{L_p(\Omega)} = 1$, то включение $\sum_{j=1}^m c_j \psi_j \in W_{p,g}^r(\Omega)$ эквивалентно условию $(c_1, \dots, c_m) \in B_p^m$. Значит, $T(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X) = B_p^m$. Покажем, что

$$\|T\|_{L_{q,v}(G) \rightarrow l_q^m} \leq M^{-1}.$$

В самом деле, если $f = \sum_{j=1}^m c_j \psi_j$, то $\|Tf\|_{l_q^m} = \left(\sum_{j=1}^m |c_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$,

$$\|f\|_{L_{q,v}(G)} = \left(\sum_{j=1}^m |c_j|^q \|\psi_j\|_{L_{q,v}(G_j)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq M \|Tf\|_{l_q^m}.$$

В силу (4.1) и (4.2)

$$\begin{aligned} \vartheta_n(B_p^m, l_q^m) &= \vartheta_n(T(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X), l_q^m) \\ &\leq \|T\|_{L_{q,v}(G) \rightarrow l_q^m} \vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X, X) \leq M^{-1} \vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega) \cap X, X). \end{aligned}$$

Отсюда следуют требуемые оценки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – область. Предположим, что $W_{p,g}^r(G) \subset L_{q,v}(G)$. Пусть $M > 0$, $m_0 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ и $\{T_m\}_{m=0}^{m_0}$ – семейство конечных покрытий G со следующими свойствами:

- (i) $\mathcal{N}_{T_m} \leq M$ для любого $m \in \overline{0, m_0}$;
(ii) для любых $m \in \overline{0, m_0}$, $E \in T_m$ существует линейный непрерывный оператор $P_{E,m}: L_{q,v}(E) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(E)$ такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(G)$ выполнено неравенство

$$\|f - P_{E,m}f\|_{L_{q,v}(E)} \leq C_m \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E)};$$

- (iii) $\text{card}\{E' \in T_{m\pm 1} : \text{mes}(E \cap E') > 0\} \leq M$ для любого $E \in T_m$.

Пусть $U \subset G$ – измеримое подмножество. Тогда существует последовательность разбиений $\{\hat{T}_m\}_{m=0}^{m_0}$ множества U такая, что

- 1) $\text{card } \hat{T}_m \leq \text{card } T_m$;
- 2) существует линейный непрерывный оператор $P_m: L_{q,v}(G) \rightarrow \mathcal{S}_{r,\hat{T}_m}(U)$ такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(G)$ выполнено неравенство

$$\|f - P_m f\|_{p,q,\hat{T}_m,v} \lesssim_{M,p} C_m \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(G)};$$

- 3) $\text{card}\{E' \in \hat{T}_{m\pm 1} : \text{mes}(E \cap E') > 0\} \leq M$ для любого $E \in \hat{T}_m$;
- 4) существуют инъективные отображения $\mathcal{F}_m: \hat{T}_m \rightarrow T_m$ такие, что для любого $E \in \hat{T}_m$ выполнено включение $E \subset \mathcal{F}_m(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_m = \{E_{i,m}\}_{i=1}^{k_m}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,m} &= U \cap E_{1,m}, \quad \hat{E}_{i,m} = U \cap E_{i,m} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_{j,m}, \quad i \geq 2, \\ \hat{T}_m &= \{\hat{E}_{i,m}\}_{i \in I_m}, \quad I_m = \{i \in \overline{1, k_m} : \text{mes } \hat{E}_{i,m} > 0\}, \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_m(\hat{E}_{i,m}) = E_{i,m}$, $i \in I_m$. Тогда для $\hat{T}_m$ выполнены свойства 1), 3) и 4). Определим оператор P_m равенством $P_m f|_{\hat{E}_{i,m}} = P_{E_{i,m},m} f|_{\hat{E}_{i,m}}$, $i \in I_m$. Используя условие $\mathcal{N}_{T_m} \leq M$, получаем свойство 2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}_\varphi(a)$, $g(y, z) = g_0(z)$, $v(y, z) = v_0(z)$, $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, $0 < z \leq \frac{1}{2}$, и пусть выполнены условия (1.3)–(1.7). Для $z \geq \frac{1}{2}$ продолжаем функции g_0 , v_0 и φ константой. Тогда выполнены утверждения теоремы 1 для $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, g, v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху. Достаточно рассмотреть случай $n = 2^{Nd}$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$D_1 = \Omega_{[2^{-2}, 2^{-1}]}, \quad D_j = \Omega_{[2^{-j-1}, 2^{-j}]} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \Omega_{[2^{-i-1}, 2^{-i}]}, \quad j \geq 2.$$

Шаг 1. Рассмотрим $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Построим покрытие $\tilde{\mathbf{R}}_{j,l}$ множества $\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]}$. Без ограничения общности можно считать

$$\varphi(z) \leq z \quad \text{для} \quad \forall z \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (4.3)$$

Пусть $l_j \in \mathbb{Z}_+$ таковы, что

$$2^{-j-l_j-1} < \varphi(2^{-j}) \leq 2^{-j-l_j}. \quad (4.4)$$

Для $0 \leq l \leq l_j$, $1 \leq i \leq 2^l$ положим

$$\tau_{j,l}(i) = 2^{-j} + i \cdot 2^{-j-l}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_{j,l} = \{U_{i,j,l}\}_{1 \leq i \leq 2^l}, \quad U_{i,j,l} = \Omega_{[\tau_{j,l}(i-1), \tau_{j,l}(i)]}.$$

Тогда $\text{card } \tilde{\mathbf{R}}_{j,l} = 2^l$. Далее, по лемме 6

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mathbf{R}}_{j,l}} \lesssim 1. \quad (4.5)$$

Отсюда и из определения $\tilde{\mathbf{R}}_{j,l}$ получаем

$$\text{card}\{U' \in \tilde{\mathbf{R}}_{j,l \pm 1} : \text{mes}(U' \cap U) > 0\} \lesssim 1.$$

В силу следствия 1 и оценки (3.36) для любого $i \in \overline{1, 2^l}$ существует линейный непрерывный оператор $P_i^{j,l} : L_{q,v}(U_{i,j,l}) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(U_{i,j,l})$ такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|f - P_i^{j,l} f\|_{L_{q,v}(U_{i,j,l})} &\lesssim j^{-\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-l(r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(U_{i,j,l})} \\ &\leq j^{-\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-l(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(U_{i,j,l})}. \end{aligned}$$

В силу предложения 2 для любого $l = \overline{0, l_j}$ существуют разбиение $\mathbf{R}_{j,l}$ множества D_{j-1} , инъективное отображение $\mathcal{F}_{j,l} : \mathbf{R}_{j,l} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_{j,l}$ и линейный непрерывный оператор $\mathbb{P}_{j,l} : L_{q,v}(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]}) \rightarrow \mathcal{S}_{r, \mathbf{R}_{j,l}}(D_{j-1})$ такие, что

$$\text{card } \mathbf{R}_{j,l} \leq 2^l, \quad (4.6)$$

для любого $U \in \mathbf{R}_{j,l}$

$$\text{card}\{U' \in \mathbf{R}_{j,l \pm 1} : \text{mes}(U' \cap U) > 0\} \lesssim 1 \quad (4.7)$$

и $U \subset \mathcal{F}_{j,l}(U)$; кроме того, для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]})$

$$\|f - \mathbb{P}_{j,l} f\|_{p,q, \mathbf{R}_{j,l}, v} \lesssim j^{-\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-l(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]})}. \quad (4.8)$$

В силу леммы 2 и неравенства (4.4) выполнено $U_{i,j,l_j} \in \mathbf{FC}(b_*)$ при $b_* = b_*(3) > 0$ и

$$\text{mes } U_{i,j,l_j} \asymp \varphi^d(2^{-j}). \quad (4.9)$$

Значит, по лемме 7 для любого $l \geq l_j$ существует разбиение $T_{l,j,i} = T_{l-l_j,1}(U_{i,j,l_j})$ такое, что

$$1) \text{ card } T_{l,j,i} \underset{b_*, d}{\lesssim} 2^{l-l_j};$$

- 2) для любого $E \in T_{l,j,i}$ существует линейный непрерывный оператор $P_E: L_q(E) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(E)$ такой, что для любой функции $f \in W_p^r(\Omega)$ выполнено

$$\|f - P_E f\|_{L_q(E)} \lesssim_{p,q,r,d,b_*} 2^{-(l-l_j)(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} (\text{mes } U_{i,j,l_j})^{\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|\nabla^r f\|_{L_p(E)}; \quad (4.10)$$

- 3) для любого $l \geq l_j$, $G \in T_{l,j,i}$

$$\begin{aligned} \text{card}\{G' \in T_{l+1,j,i} : \text{mes}(G \cap G') > 0\} &\lesssim_{b_*,d} 1, \\ \text{card}\{G' \in T_{l-1,j,i} : \text{mes}(G \cap G') > 0\} &\lesssim_{b_*,d} 1, \quad \text{если } l \geq l_j + 1. \end{aligned}$$

Из (1.3)–(1.8), (4.4)–(4.10) и неравенства

$$2^{\frac{\delta}{d} l_j} \leq 2^{(r + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}) l_j}$$

следует, что для любого $E \in T_{l,j,i}$

$$\|f - P_E f\|_{L_{q,v}(E)} \lesssim_3 j^{-\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-l(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E)}. \quad (4.11)$$

Пусть $D \in \mathbf{R}_{j,l_j}$. Обозначим через $i(D)$ число i такое, что $U_{i,j,l_j} = \mathcal{F}_{j,l}(D)$. Для $l > l_j$ положим

$$\mathbf{R}_{j,l} = \{D \cap E : D \in \mathbf{R}_{j,l_j}, E \in T_{l,j,i(D)}\}. \quad (4.12)$$

Тогда $\mathbf{R}_{j,l}$ является разбиением D_{j-1} . В силу (4.6) и свойства 1) разбиения $T_{l,j,i}$ имеем

$$\text{card } \mathbf{R}_{j,l} \lesssim_{b_*,d} 2^l. \quad (4.13)$$

Покажем, что для любого $U \in \mathbf{R}_{j,l}$

$$\text{card}\{U' \in \mathbf{R}_{j,l \pm 1} : \text{mes}(U' \cap U) > 0\} \lesssim_3 1. \quad (4.14)$$

В самом деле, пусть $D, D' \in \mathbf{R}_{j,l_j}$, $E \in T_{l,j,i(D)}$, $E' \in T_{l \pm 1,j,i(D')}$, $\text{mes}(D \cap E \cap D' \cap E') > 0$. Так как $\mathbf{R}_{j,l_j}$ является разбиением, то $D' = D$. Остается применить свойство 3) разбиения $T_{l,j,i}$.

Пусть $f \in L_{q,v}(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]})$. Положим $\mathbb{P}_{j,l} f|_{D \cap E} = P_E f|_{D \cap E}$, где D, E из (4.12) и P_E из свойства 2) разбиения $T_{l,j,i(D)}$. Обозначим

$$C_{j,l} = j^{-\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-l(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})}.$$

Тогда $\mathbb{P}_{j,l}: L_{q,v}(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]}) \rightarrow \mathcal{S}_{r,\mathbf{R}_{j,l}}(D_{j-1})$ является линейным непрерывным оператором и для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]})$

$$\begin{aligned} \|f - \mathbb{P}_{j,l} f\|_{p,q,\mathbf{R}_{j,l},v} &= \left(\sum_{D \in \mathbf{R}_{j,l_j}} \sum_{E \in T_{l,j,i(D)}} \|f - P_E f\|_{L_{q,v}(D \cap E)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(4.11)}{\lesssim_3} C_{j,l} \left(\sum_{D \in \mathbf{R}_{j,l_j}} \sum_{E \in T_{l,j,i(D)}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = C_{j,l} \left(\sum_{D \in \mathbf{R}_{j,l_j}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(U_{i(D),j,l_j})}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{j,l} \left(\sum_{i=1}^{l_j} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(U_{i,j,l_j})}^p \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{(4.5)}{\lesssim_3} C_{j,l} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]})} \end{aligned}$$

(предпоследнее неравенство следует из инъективности отображения $\mathcal{F}_{j,l_j}$). Таким образом,

$$\|f - \mathbb{P}_{j,l} f\|_{p,q,\mathbf{R}_{j,l},v} \lesssim j^{-\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-l(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}])}}. \quad (4.15)$$

Шаг 2. Для $0 \leq t \leq Nd$ положим $G_t := \Omega_{[2^{-2^{t+1}}, 2^{-2^t}]}$,

$$\widehat{G}_0 = G_0, \quad \widehat{G}_t = G_t \setminus \bigcup_{s=0}^{t-1} G_s, \quad t \geq 1.$$

Тогда $\bigcup_{t=0}^{\infty} G_t = \bigcup_{t=0}^{\infty} \widehat{G}_t = \Omega$. Семейство областей $\{\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]}\}_{2^{t+1} \leq j \leq 2^{t+1}}$ образует покрытие $Q(t)$ множества G_t . По лемме 6

$$\mathcal{N}_{Q(t)} \lesssim \frac{1}{3}. \quad (4.16)$$

Семейство $\{D_{j-1}\}_{2^{t+1} \leq j \leq 2^{t+1}}$ образует покрытие множества $\widehat{G}_t$.

Пусть $t_* = t_*(N) = 0$ или $t_* = t_*(N) = Nd$ для каждого N , и пусть $\varepsilon > 0$. Выбор ε и t_* (в зависимости от $\mathfrak{J}$) будет сделан позже. Обозначим

$$m_t^* = \max\{\lceil t - Nd + \varepsilon |t - t_*| \rceil, 0\},$$

$$l_{m,t} = \lceil Nd - t - \varepsilon |t - t_*| \rceil + m, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad m \geq m_t^*, \quad (4.17)$$

$$\widehat{T}_{m,t,n}^1 = \{U \in \mathbf{R}_{j,l_{m,t}}, \quad 2^t + 1 \leq j \leq 2^{t+1}\}. \quad (4.18)$$

Тогда $\widehat{T}_{m,t,n}^1$ является разбиением множества $\widehat{G}_t$. В силу (4.7) и (4.14) для любого $U \in \widehat{T}_{m,t,n}^1$

$$\text{card}\{U' \in \widehat{T}_{m\pm 1,t,n}^1 : \text{mes}(U \cap U') \neq 0\} \lesssim \frac{1}{3}. \quad (4.19)$$

Из (4.6), (4.13) и (4.18) следует, что

$$\text{card } \widehat{T}_{m,t,n}^1 \lesssim 2^t \cdot 2^{l_{m,t}} \asymp n \cdot 2^{m-\varepsilon|t-t_*|}. \quad (4.20)$$

Для $f \in L_{q,v}(\Omega)$ полагаем

$$P_{m,t,n}^1 f|_{D_{j-1}} = \mathbb{P}_{j,l_{m,t}} f|_{D_{j-1}}, \quad 2^t + 1 \leq j \leq 2^{t+1}, \quad P_{m,t,n}^1 f|_{\Omega \setminus \widehat{G}_t} = 0.$$

Тогда $P_{m,t,n}^1 : L_{q,v}(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{r,\widehat{T}_{m,t,n}^1}(\widehat{G}_t)$ является линейным непрерывным оператором. Для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \|f - P_{m,t,n}^1 f\|_{p,q,\widehat{T}_{m,t,n}^1,v} &= \left(\sum_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} \|f - \mathbb{P}_{j,l_{m,t}} f\|_{p,q,\mathbf{R}_{j,l_{m,t}},v}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(4.8), (4.15)}{\lesssim} \left(\sum_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} j^{-p\alpha} \rho^p(j) \cdot 2^{-\frac{p\delta}{d} l_{m,t}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}])}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim 2^{-t\alpha} \rho(2^t) 2^{-\frac{\delta}{d} l_{m,t}} \left(\sum_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}])}^p \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{(4.16)}{\lesssim} 2^{-t\alpha} \rho(2^t) 2^{-\frac{\delta}{d} l_{m,t}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\|f - P_{m,t,n}^1 f\|_{p,q,\hat{T}_{m,t,n}^1,v} \lesssim 2^{-t\alpha} \rho(2^t) 2^{-\frac{\delta}{d} l_{m,t}}. \quad (4.21)$$

Шаг 3. Для $t \in \mathbb{Z}_+$ положим $U_t = \Omega_{[0,2^{-2^t}]}$. В силу следствия 1 и неравенства (3.35) существует линейный непрерывный оператор $P^t: L_{q,v}(U_t) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(U_t)$ такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\|f - P^t f\|_{L_{q,v}(U_t)} \lesssim 2^{-t\alpha} \rho(2^t). \quad (4.22)$$

Шаг 4. Рассмотрим случаи $p = q$ и $p < q$, $\hat{q} \leq 2$. Обозначим

$$\hat{U}_t = U_t \setminus \bigcup_{s=0}^{t-1} G_s, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Положим $P_n^1 f|_{\hat{G}_t} = P_{m_t^*,t,n}^1 f|_{\hat{G}_t}$ для $0 \leq t \leq Nd$, $P_n^1 f|_{\hat{U}_{Nd+1}} = P^{Nd+1} f|_{\hat{U}_{Nd+1}}$. Обозначим

$$T_n^1 = \left(\bigcup_{t=0}^{Nd} \hat{T}_{m_t^*,t,n}^1 \right) \cup \{\hat{U}_{Nd+1}\}.$$

Тогда T_n^1 является разбиением Ω и

$$\text{card } T_n^1 \stackrel{(4.17), (4.20)}{\lesssim} \sum_{0 \leq t \leq Nd, m_t^* = 0} n \cdot 2^{-\varepsilon|t-t_*|} + \sum_{0 \leq t \leq Nd, m_t^* > 0} 2^t \stackrel{\lesssim}{\sim} n.$$

Для оценки колмогоровских и линейных поперечников достаточно получить оценку сверху для $\|f - P_n^1 f\|_{L_{q,v}(\Omega)}$. Для оценки гильбертовских поперечников оценить сверху величину $\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)}$ для $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$ таких, что $P_n^1 f = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|f - P_n^1 f\|_{L_{q,v}(\Omega)}^q &= \sum_{t=0}^{Nd} \|f - P_{m_t^*,t,n}^1 f\|_{L_{q,v}(\hat{G}_t)}^q + \|f - P^{Nd+1} f\|_{L_{q,v}(\hat{U}_{Nd+1})}^q \\ &\stackrel{(4.17), (4.21), (4.22)}{\lesssim} \sum_{t=0}^{Nd} 2^{-t\alpha q} \rho^q(2^t) 2^{-\frac{\delta q}{d}(Nd-t-\varepsilon|t-t_*|)} + n^{-\alpha q} \rho^q(n) =: S^q \end{aligned}$$

(здесь использовалось соотношение $l_{m_t^*,t} \geq Nd - t - \varepsilon|t - t_*|$). Положим $\varepsilon = \frac{d}{2\delta} |\alpha - \frac{\delta}{d}|$. Если $\alpha > \frac{\delta}{d}$, то полагаем $t_* = 0$ и получаем $S \lesssim n^{-\frac{\delta}{d}}$; если $\alpha < \frac{\delta}{d}$, то берем $t_* = Nd$ и получаем $S \lesssim n^{-\alpha} \rho(n)$.

Шаг 5. Рассмотрим случай $p < q$, $\hat{q} > 2$. Обозначим $\hat{t}_N = [\frac{\hat{q}}{2}Nd]$. Тогда при достаточно больших N выполнено $Nd + 1 < \hat{t}_N$.

Для каждого $Nd + 1 \leq t < \hat{t}_N$, $m \in \mathbb{Z}_+$, построим разбиение $\hat{T}_{m,t,n}^2$ множества $\hat{G}_t$.

Шаг 5.1. Пусть $\gamma = 2^{1+\varepsilon}$, $m_t = \lceil (1+\varepsilon)(t - Nd) \rceil$, $0 \leq m \leq m_t$. Положим

$$\begin{aligned} j_{m,t}(s) &= \lfloor \gamma^{t-Nd} 2^{-m} s \rfloor, \quad \tau_{m,t}(s) = 2^{-j_{m,t}(s)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \\ J_{m,t} &= \{s \in \mathbb{Z}_+ : 2^t \leq j_{m,t}(s) \leq 2^{t+1} - 1\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Тогда $\text{card } J_{m,t} \lesssim_3 2^m n \cdot 2^{-\varepsilon(t-Nd)}$ для достаточно малых ε .

Обозначим через $T_{m,t,n}^2$ покрытие G_t множествами $\Omega_{[\tau_{m,t}(s+1), \tau_{m,t}(s)]}$, $s \in J_{m,t}$, $\tau_{m,t}(s) \neq \tau_{m,t}(s+1)$. Тогда

$$\text{card } T_{m,t,n}^2 \lesssim_3 2^m n \cdot 2^{-\varepsilon(t-Nd)}.$$

Если $\tau_{m,t}(s) \neq \tau_{m,t}(s+1)$, то

$$\tau_{m,t}(s) - \tau_{m,t}(s+1) \asymp \tau_{m,t}(s) \stackrel{(4.3)}{\geq} \varphi(\tau_{m,t}(s)).$$

Поэтому из определения $\tau_{m,t}(s)$ и из леммы 6 следует, что для любого множества $U \in T_{m,t,n}^2$

$$\text{card}\{U' \in T_{m+l,t,n}^2 : \text{mes}(U \cap U') > 0\} \lesssim_3 1, \quad l = 0, 1, -1.$$

В силу следствия 1 и неравенства (3.35) для любого множества $E \in T_{m,t,n}^2$ существует линейный непрерывный оператор $P_E : L_{q,v}(E) \rightarrow \mathcal{P}_{r-1}(E)$ такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\|f - P_E f\|_{L_{q,v}(E)} \lesssim_3 2^{-t\alpha} \rho(2^t) \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(E)}.$$

В силу предложения 2 существуют разбиение $\widehat{T}_{m,t,n}^2$ множества $\widehat{G}_t$ и инъекция $\mathcal{F}_{m,t,n} : \widehat{T}_{m,t,n}^2 \rightarrow T_{m,t,n}^2$ такие, что

$$\text{card } \widehat{T}_{m,t,n}^2 \lesssim_3 2^m n \cdot 2^{-\varepsilon(t-Nd)} \quad (4.24)$$

и для любого $U \in \widehat{T}_{m,t,n}^2$

$$\text{card}\{U' \in \widehat{T}_{m\pm 1,t,n}^2 : \text{mes}(U \cap U') > 0\} \lesssim_3 1, \quad (4.25)$$

$U \subset \mathcal{F}_{m,t,n}(U)$. Кроме того, существует линейный непрерывный оператор $P_{m,t,n}^2 : L_{q,v}(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{r, \widehat{T}_{m,t,n}^2}(\widehat{G}_t)$ такой, что для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\|f - P_{m,t,n}^2 f\|_{p,q, \widehat{T}_{m,t,n}^2, v} \lesssim_3 2^{-t\alpha} \rho(2^t). \quad (4.26)$$

Заметим, что $\widehat{T}_{m,t,n}^2$ может быть определено следующим образом:

$$\begin{aligned} E \in \widehat{T}_{m,t,n}^2 &\iff \text{mes } E > 0 \text{ и } \exists s \in J_{m,t} : \tau_{m,t}(s) \neq \tau_{m,t}(s+1), \\ E &= \widehat{G}_t \cap \Omega_{[\tau_{m,t}(s+1), \tau_{m,t}(s)]} \setminus \bigcup_{s' \in J_{m,t}, s' < s} \Omega_{[\tau_{m,t}(s'+1), \tau_{m,t}(s')]}; \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\text{тогда } \mathcal{F}_{m,t,n}(E) = \Omega_{[\tau_{m,t}(s+1), \tau_{m,t}(s)]}$$

(см. доказательство предложения 2).

Шаг 5.2. Построим разбиение $\widehat{T}_{m,t,n}^2$ для $m > m_t$. Заметим, что для любого $s \in J_{m,t}$ выполнено неравенство $|j_{m,t}(s+1) - j_{m,t}(s)| \leq 1$. Поэтому каждый элемент покрытия $T_{m,t,n}^2$ совпадает с $\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]}$ для некоторого $j \in \{2^t + 1, \dots, 2^{t+1}\}$ (см. (4.23)). Напомним, что $\widehat{G}_t \subset G_t = \Omega_{[2^{-2^{t+1}}, 2^{-2^t}]}$. Отсюда и из (4.27) получаем

$$\widehat{T}_{m,t,n}^2 = \{D_{j-1} : 2^t + 1 \leq j \leq 2^{t+1}, \quad \text{mes } D_{j-1} > 0\} \quad (4.28)$$

и $\mathcal{F}_{m,t,n}(D_{j-1}) = \Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}]}$.

Положим

$$\widehat{T}_{m,t,n}^2 = \{E \in \mathbf{R}_{j,m-m_t} : 2^t + 1 \leq j \leq 2^{t+1}\}.$$

Тогда $\widehat{T}_{m,t,n}^2$ является разбиением $\widehat{G}_t$. Из (4.6), (4.13) и (4.28) следует, что

$$\text{card } \widehat{T}_{m,t,n}^2 \lesssim 2^{m-m_t} \cdot 2^t \asymp 2^m n \cdot 2^{-\varepsilon(t-Nd)}. \quad (4.29)$$

В силу (4.7) и (4.14) для любого $E \in \widehat{T}_{m,t,n}^2$,

$$\text{card}\{E' \in \widehat{T}_{m\pm 1,t,n}^2 : \text{mes}(E \cap E') > 0\} \lesssim 1. \quad (4.30)$$

Для любой функции $f \in L_{q,v}(\Omega)$ положим $P_{m,t,n}^2 f|_{D_{j-1}} = \mathbb{P}_{j,m-m_t} f|_{D_{j-1}}$, $2^t + 1 \leq j \leq 2^{t+1}$, $P_{m,t,n}^2 f|_{\Omega \setminus \widehat{G}_t} = 0$. Тогда $P_{m,t,n}^2 : L_{q,v}(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{r,\widehat{T}_{m,t,n}^2}(\widehat{G}_t)$ является линейным непрерывным оператором и для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|f - P_{m,t,n}^2 f\|_{p,q,\widehat{T}_{m,t,n}^2,v} &= \left(\sum_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} \|f - \mathbb{P}_{j,m-m_t} f\|_{p,q,\mathbf{R}_{j,m-m_t},v}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(4.8), (4.15)}{\lesssim} \left(\sum_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} j^{-p\alpha} \rho(j) \cdot 2^{-\frac{p\delta}{d}(m-m_t)} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}])}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim 2^{-t\alpha - (m-m_t)\frac{\delta}{d}} \rho(2^t) \left(\sum_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega_{[2^{-j}, 2^{-j+1}])}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(4.16)}{\lesssim} 2^{-t\alpha - (m-m_t)\frac{\delta}{d}} \rho(2^t). \end{aligned}$$

Таким образом, для любой функции $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$

$$\|f - P_{m,t,n}^2 f\|_{p,q,\widehat{T}_{m,t,n}^2,v} \lesssim 2^{-t\alpha - (m-m_t)\frac{\delta}{d}} \rho(2^t). \quad (4.31)$$

Шаг 5.3. Пусть $f \in W_{p,g}^r(\Omega)$. Тогда

$$\|f - P^{\widehat{T}_N} f\|_{L_{q,v}(U_{\widehat{\varepsilon}_N})} \stackrel{(4.22)}{\lesssim} n^{-\frac{\alpha\widehat{q}}{2}} \rho(n^{\frac{\widehat{q}}{2}}). \quad (4.32)$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в работе [42]; здесь используются (4.19)–(4.21), (4.24)–(4.26), (4.29)–(4.32).

Оценка снизу. Заметим, что Ω содержит куб Q со стороной длины $\lambda \gtrsim \frac{1}{3}$, такой что $g(x) \gtrsim 1$, $v(x) \gtrsim 1$ для любого $x \in Q$. Значит,

$$\vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \gtrsim \vartheta_n(W_p^r([0, 1]^d), L_q([0, 1]^d)).$$

Применяя теорему A, получаем

$$\begin{aligned} \vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) &\gtrsim n^{-\frac{\hat{q}}{d}} \quad \text{при } p = q \text{ или } p < q, \quad \hat{q} \leq 2, \\ \vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) &\gtrsim n^{-\min\{\theta_1, \theta_2\}} \quad \text{при } p < q, \quad \hat{q} > 2. \end{aligned}$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(0, 1)$, $\psi \geq 0$, $\int_0^1 |\psi^{(r)}|^p dx = 1$. Для $j \in \mathbb{N}$ положим $\psi_j(x', x_d) = c_j \psi(2^j x_d - 1)$, где $c_j > 0$ выбирается так, что

$$\left\| \frac{\nabla^r \psi_j}{g} \right\|_{L_p(\Omega)} = 1.$$

Тогда

$$\text{supp } \psi_j \subset \{(x', x_d) \in \Omega : 2^{-j} < x_d < 2^{-j+1}\}.$$

Из (3.14) и порядковых равенств

$$g(x) \stackrel{(1.3)}{\gtrsim} g(2^{-j}), \quad v(x) \stackrel{(1.3)}{\gtrsim} v(2^{-j}), \quad 2^{-j} < x_d < 2^{-j+1}$$

следует, что

$$\begin{aligned} c_j &\stackrel{\sim}{\gtrsim}_{3, \psi} g(2^{-j}) \varphi(2^{-j})^{-\frac{d-1}{p}} 2^{\frac{j}{p}} \cdot 2^{-jr}, \\ \|\psi_j\|_{L_{q,v}(\Omega)} &\stackrel{\sim}{\gtrsim}_{3, \psi} c_j \cdot v(2^{-j}) \varphi(2^{-j})^{\frac{d-1}{q}} 2^{-\frac{j}{q}} \stackrel{\sim}{\gtrsim} j^{-\alpha} \rho(j) \end{aligned}$$

(последнее соотношение следует из (1.3)–(1.8)). Если $2^t \leq j < 2^{t+1}$, то

$$\|\psi_j\|_{L_{q,v}(\Omega)} \stackrel{\sim}{\gtrsim} 2^{-t\alpha} \rho(2^t).$$

Применяя лемму 8, получаем

$$\vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \gtrsim 2^{-t\alpha} \rho(2^t) \vartheta_n(B_p^{2^t}, l_q^{2^t}).$$

Пусть $t = Nd + 1$. Тогда в силу (2.1)–(2.4)

$$\begin{aligned} \vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) &\stackrel{\sim}{\gtrsim} n^{-\alpha} \rho(n) d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \\ &\stackrel{\sim}{\gtrsim}_{p,q} \begin{cases} n^{-\alpha} \rho(n), & p = q \text{ или } p < q, \quad \hat{q} \leq 2, \\ n^{-\alpha - \min\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\}} \rho(n), & \hat{q} > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $t = [\frac{\hat{q}}{2}Nd]$, $\hat{q} > 2$. Тогда

$$\vartheta_n(W_{p,g}^r(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \underset{3}{\gtrsim} n^{-\frac{\hat{q}\alpha}{2}} \rho(n^{\frac{\hat{q}}{2}}) \vartheta_n(B_p^{[n^{\frac{\hat{q}}{2}}]}, l_q^{[n^{\frac{\hat{q}}{2}}]}) \underset{3}{\lesssim} n^{-\frac{\hat{q}\alpha}{2}} \rho(n^{\frac{\hat{q}}{2}}).$$

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 и предложения 1 следует теорема 1.

В заключение автор выражает благодарность А. С. Кочурову и В. Ю. Протасову за ценные замечания при просмотре рукописи.

Список литературы

- [1] О. В. Бесов, “Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога”, *Тр. МИАН СССР*, **170** (1984), 12–30; англ. пер.: O. V. Besov, “Integral representations of functions, and imbedding theorems for a region with flexible horn condition”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **170** (1987), 11–31.
- [2] Д. А. Лабути́н, “Интегральное представление функций и вложение пространств Соболева на областях с нулевыми углами”, *Матем. заметки*, **61:2** (1997), 201–219; англ. пер.: D. A. Labutin, “Integral representations of functions and embeddings of Sobolev spaces on cuspidal domains”, *Math. Notes*, **61:2** (1997), 164–179.
- [3] Д. А. Лабути́н, “Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 18*, Тр. МИАН, **227**, Наука, М., 1999, 170–179; англ. пер.: D. A. Labutin, “Embedding of Sobolev spaces on Hölder domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **227** (1999), 163–172.
- [4] P. Hajlasz, P. Koskela, “Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains”, *J. London Math. Soc.* (2), **58:2** (1998), 425–450.
- [5] T. Kilpeläinen, J. Malý, “Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries”, *Z. Anal. Anwendungen*, **19:2** (2000), 369–380.
- [6] В. Г. Мазья, С. В. Поборчий, *Алгебра и анализ*, **18:4** (2006), 95–126; англ. пер.: V. G. Maz’ya, S. V. Poborchii, “Imbedding theorems for Sobolev spaces on domains with peak and on Hölder domains”, *St. Petersburg Math. J.*, **18:4** (2007), 583–605.
- [7] О. В. Бесов, “О колмогоровских поперечниках классов Соболева на нерегулярной области”, *Ортогональные ряды, теория приближений и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Бориса Сергеевича Кашина, Тр. МИАН, **280**, МАИК, М., 2013, 41–52; англ. пер.: O. V. Besov, “Kolmogorov widths of Sobolev classes on an irregular domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **280** (2013), 34–45.
- [8] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980, 660 с.; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, 528 pp.
- [9] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, Teubner-Texte Math., **31**, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1980, 151 pp.
- [10] D. E. Edmunds, H. Triebel, *Function spaces, entropy numbers, differential operators*, Cambridge Tracts in Math., **120**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+252 pp.
- [11] H. Triebel, *Theory of function spaces*, v. III, Monogr. Math., **100**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006, xii+426 pp.

- [12] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Hardy operators, function spaces and embeddings*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+326 pp.
- [13] Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский, “Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения”, *Анализ* – 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 5–157; англ. пер.: L. D. Kudryavtsev, S. M. Nikol’skij, “Spaces of differentiable functions of several variables and imbedding theorems”, *Analysis III. Spaces of differentiable functions*, Encyclopaedia Math. Sci., **26**, 1991, 1–140.
- [14] В. Г. Мазья, “Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств”, *Докл. АН СССР*, **133**:3 (1960), 527–530; англ. пер.: V. G. Maz’ja, “Classes of domains and imbedding theorems for function spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 882–885.
- [15] Ю. Г. Решетняк, “Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей”, *Сиб. матем. журнал*, **21**:6 (1980), 108–116; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “Integral representations of differentiable functions in domains with nonsmooth boundary”, *Siberian Math. J.*, **21**:6 (1981), 833–839.
- [16] Ю. Г. Решетняк, “Замечание об интегральных представлениях дифференцируемых функций многих переменных”, *Сиб. матем. журнал*, **25**:5 (1984), 198–200.
- [17] B. Bojarski, “Remarks on Sobolev imbedding inequalities”, *Complex analysis* (Joensuu, 1987), Lecture Notes in Math., **1351**, Springer, Berlin, 1988, 52–68.
- [18] О. В. Бесов, “Вложение пространств Соболева на областях с условием распадающегося гибкого конуса”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 11*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **173**, 1986, 14–31; англ. пер.: O. V. Besov, “Imbedding of Sobolev spaces on domains with the splitting flexible cone condition”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **173** (1987), 13–30.
- [19] W. D. Evans, D. J. Harris, “Fractals, trees and the Neumann Laplacian”, *Math. Ann.*, **296**:3 (1993), 493–527.
- [20] О. В. Бесов, “О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 72–93; англ. пер.: O. V. Besov, “On the compactness of embeddings of weighted Sobolev spaces on a domain with irregular boundary”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **232** (2001), 66–87.
- [21] О. В. Бесов, “Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 3–26; англ. пер.: O. V. Besov, “Sobolev’s embedding theorem for a domain with irregular boundary”, *Sb. Math.*, **192**:3 (2001), 323–346.
- [22] О. В. Бесов, “О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей”, *Докл. РАН*, **376**:6 (2001), 727–732; англ. пер.: O. V. Besov, “On the compactness of embeddings of weighted Sobolev spaces on a domain with an irregular boundary”, *Dokl. Math.*, **63**:1 (2001), 95–100.
- [23] О. В. Бесов, “Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 69–82; англ. пер.: O. V. Besov, “Integral estimates for differentiable functions on irregular domains”, *Sb. Math.*, **201**:12 (2010), 1777–1790.
- [24] O. V. Besov, “Sobolev’s embedding theorem for anisotropically irregular domains”, *Eurasian Math. J.*, **2**:1 (2011), 32–51.
- [25] L. Caso, R. D’Ambrosio, “Weighted spaces and weighted norm inequalities on irregular domains”, *J. Approx. Theory*, **167** (2013), 42–58.
- [26] A. Pietsch, “ s -numbers of operators in Banach spaces”, *Studia Math.*, **51** (1974), 201–223.

- [27] S. Heinrich, “On the relation between linear n -widths and approximation numbers”, *J. Approx. Theory*, **58**:3 (1989), 315–333.
- [28] D. E. Edmunds, J. Lang, “Gelfand numbers and widths”, *J. Approx. Theory*, **166** (2013), 78–84.
- [29] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976, 304 с.
- [30] В. М. Тихомиров, “Теория приближений”, *Анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **14**, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [31] A. Pinkus, *n -widths in approximation theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, x+291 pp.
- [32] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3(93) (1960), 81–120; англ. пер.: V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.
- [33] Р. С. Исагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3(177) (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29**:3 (1974), 169–186.
- [34] Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351; англ. пер.: B. S. Kashin, “Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:2 (1977), 317–333.
- [35] Е. Д. Глускин, “Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств”, *Матем. сб.*, **120**(162):2 (1983), 180–189; англ. пер.: E. D. Gluskin, “Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets”, *Math. USSR-Sb.*, **48**:1 (1984), 173–182.
- [36] R. A. DeVore, R. C. Sharpley, S. D. Riemenschneider, “ n -widths for C_p^α spaces”, *Anniversary volume on approximation theory and functional analysis* (Oberwolfach, 1983), Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **65**, Birkhäuser, Basel, 1984, 213–222.
- [37] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α ”, *Матем. сб.*, **73**(115):3 (1967), 331–355; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “Piecewise-polynomial approximations of functions of the classes W_p^α ”, *Math. USSR-Sb.*, **2**:3 (1967), 295–317.
- [38] A. El Kolli, “ n -ième épaisseur dans les espaces de Sobolev”, *J. Approximation Theory*, **10**:3 (1974), 268–294.
- [39] И. В. Бойков, “Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **38**:1 (1998), 25–33; англ. пер.: I. V. Boykov, “Approximation of some classes of functions by local splines”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **38**:1 (1998), 21–29.
- [40] I. V. Boykov, *Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics*, 2013, arXiv: 1303.0416v1.
- [41] H. Triebel, “Entropy and approximation numbers of limiting embeddings; an approach via Hardy inequalities and quadratic forms”, *J. Approx. Theory*, **164**:1 (2012), 31–46.
- [42] A. A. Vasil’eva, “Widths of weighted Sobolev classes on a John domain: strong singularity at a point”, *Rev. Mat. Complut.*, **27**:1 (2014), 167–212.
- [43] М. С. Айтенова, Л. К. Кусаинова, “Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I”, *Матем. журн.*, **2**:1(3) (2002), 3–9 (electronic).
- [44] М. С. Айтенова, Л. К. Кусаинова, “Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. II”, *Матем. журн.*, **2**:2(4) (2002), 7–14 (electronic).

- [45] П. И. Лизоркин, М. О. Отелбаев, “Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 10*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **170**, 1984, 213–232; англ. пер.: P. I. Lizorkin, M. O. Otelbaev, “Estimates of approximate numbers of the imbedding operators for spaces of Sobolev type with weights”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **170** (1987), 245–266.
- [46] М. О. Отелбаев, “Оценки поперечников по Колмогорову для одного класса весовых пространств”, *Докл. АН СССР*, **235**:6 (1977), 1270–1273; англ. пер.: M. Otelbaev, “Estimates of the Kolmogorov diameters for a class of Besov spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **18**:4 (1978), 1159–1163.
- [47] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, Физматлит, М., 1996, 480 с.; англ. пер. 1-го изд.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, v. I, II, Scripta Series in Mathematics, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York–Toronto, Ont.–London, 1978, 1979, viii+345 pp., viii+311 pp.
- [48] В. Д. Степанов, “Двухвесовые оценки интегралов Римана–Лиувилля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 645–656; англ. пер.: V. D. Stepanov, “Two-weighted estimates of Riemann–Liouville integrals”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 669–681.
- [49] С. Л. Соболев, “Об одной теореме функционального анализа”, *Матем. сб.*, **4**(46):3 (1938), 471–497; англ. пер.: S. Sobolev, “On a theorem of functional analysis”, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **34**, 1963, 39–68.
- [50] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1950, 255 с.; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Applications of functional analysis in mathematical physics*, Transl. Math. Monogr., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, vii+239 pp.
- [51] А. А. Васильева, “Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin”, *J. Approx. Theory*, **167** (2013), 1–41.
- [52] А. А. Васильева, “Поперечники весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона”, *Ортогональные ряды, теория приближений и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Бориса Сергеевича Кашина, Тр. МИАН, **280**, МАИК, М., 2013, 97–125; англ. пер.: A. A. Vasil'eva, “Widths of weighted Sobolev classes on a John domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **280** (2013), 91–119.

Анастасия Андреевна Васильева
(Anastasia A. Vasil'eva)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Поступила в редакцию
29.12.2014 и 26.06.2015