Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, Экспонента G -пространств и изовариантные экстензоры, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 2, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:49:47

УДК 515.124.62+515.122.4

С. М. Агеев

Экспонента G -пространств и изовариантные экстензоры

Исследуется эквивариантная версия теоремы Кертиса–Шори–Веста. Установлено, что для невырожденного G -континуума Пеано X с действием компактной абелевой группы Ли G экспонента $\exp X$ эквиморфна максимальному эквивариантному гильбертову кубу в том и только том случае, когда свободная часть X_{free} плотна в X , а также, что приведенное условие является достаточным для эквиморфности X и Q в случае действия произвольной компактной группы Ли G . Ключ к доказательству этих результатов лежит в теории универсальных (в смысле Пале) G -пространств.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: изовариантный абсолютный экстензор, универсальное G -пространство Пале, классифицирующее пространство для G -пространств, экспонента G -пространства, эквивариантный гильбертов куб.

DOI: 10.4213/sm8463

§ 1. Введение

Пространство $\exp X$ всех непустых компактных подмножеств метрического G -пространства X , снабженное топологией Виеториса (и называемое *экспонентой* X), естественным образом наследует действие группы G : $\mu(g, A) \rightleftharpoons g \cdot A$. Тем самым появляется возможность исследовать, как те или иные топологические свойства экспоненты преломляются в присутствии действия группы. Априори наибольший интерес здесь должна вызывать задача о нахождении эквивариантной версии известной теоремы Кертиса–Шори–Веста, которая гласит, что $\exp X$ гомеоморфна гильбертову кубу Q в том и только том случае, когда X есть невырожденный континуум Пеано (см. [1]).

После того как Дж. Вест (по-видимому) первым ввел понятие эквивариантного гильбертова куба Q (мы используем иной термин: максимальный эквивариантный гильбертов куб) – полного и глубокого аналога обычного гильбертова куба, расплывчатая постановка этого вопроса приобрела более конкретное очертание: какие условия следует наложить на компактное G -пространство X , чтобы его экспонента была эквиморфна максимальному эквивариантному гильбертову кубу Q (см. [2])? Наиболее естественный подход к этой проблеме состоит в выделении существенных (и вместе с тем допускающих обзорную проверку) свойств Q , полностью определяющих его топологию. В работе [2] была установлена эквивариантная версия теоремы Торунчика о характеристизации

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь.

$\mathbb{Q}$ -многообразий, из которой следовало: компактное G -АЕ-пространство $\mathbb{X}$ эквивормфно $\mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда $\mathbb{X}$ обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством относительно всех G -компактов (определения всех встречающихся во введении терминов излагаются далее в тексте статьи). После этого разрешение вопроса об эквивормфности $\exp \mathbb{X} \cong_G \mathbb{Q}$ естественно редуцируется к изучению свойств экспонент, связанных как с продолжением эквивариантных отображений, так и с продолжением эквивариантных вложений G -пространств.

Окончательный результат об описании эквивариантных абсолютных экстензоров среди экспонент G -пространств принадлежит А. Телейко и М. Заричному [3], которые установили, что $\exp \mathbb{X} \in G\text{-АЕ}$ тогда и только тогда, когда $\exp \mathbb{X} \in \text{АЕ}$. Поэтому, если G -пространство $\mathbb{X} \in \text{АЕ}(1)$ – связно и локально связно, то $\exp \mathbb{X} \in G\text{-АЕ}$ (см. теорему 7). Отсюда и из эквивариантной версии теоремы Торунчика о характеристизации $\mathbb{Q}$ -многообразий непосредственно следует $\exp \mathbb{Q} \cong_G \mathbb{Q}$, однако исследование проблемы распознавания максимального эквивариантного гильбертова куба среди экспонент более общих G -пространств оказалось весьма непростым.

В работах [3], [4] было установлено, что для широкого класса G -компактов $\mathbb{X} \in \text{АЕ}(1)$ экспонента $\exp \mathbb{X}$ обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством относительно однородных пространств, а также удовлетворяет G -дизъюнктивному аппроксимационному свойству ($G\text{-DAP}$). Однако выполнение обоих этих свойств не влечет за собой выполнения, как теперь ясно, более сильного $\mathbb{Z}$ -аппроксимативного свойства¹, и поэтому заявленная в работах [3], [4] эквивормфность $\exp \mathbb{X}$ и $\mathbb{Q}$ в действительности оставалась под вопросом. Одной из основных целей настоящей работы является устранение этой неопределенности, для чего устанавливаются достаточные условия для эквивормфности $\exp \mathbb{X} \cong_G \mathbb{Q}$, которые одновременно являются и необходимыми, если действующая группа является абелевой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{X}$ есть невырожденный G -континуум Пеано² с действием компактной группы Ли G . Если свободная часть $\mathbb{X}_{\text{free}}$ плотна в $\mathbb{X}$, то $\exp \mathbb{X} \cong_G \mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{X}$ есть невырожденный G -континуум Пеано с действием компактной абелевой группы Ли G . Тогда $\exp \mathbb{X} \cong_G \mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда свободная часть $\mathbb{X}_{\text{free}}$ плотна в $\mathbb{X}$.

Наибольшую сложность при доказательстве этих теорем доставляет установление $\mathbb{Z}$ -аппроксимативного свойства для экспоненты. Ввиду невозможности

¹В [2; теорема 3.5] ошибочно утверждалась такая эквивалентность. В § 6 показывается, что в качестве контрпримера здесь годится произведение гильбертова куба на компактный конус над счетным дизъюнктивным объединением максимальных эквивариантных гильбертовых кубов. Отметим, что допущенная неточность в [2] никак не влияет на обоснованность всех остальных результатов этой работы (достаточно просто убрать упоминание об условии (d) из теоремы 3.5), но приводит к пробелам в [3], [4]. Отметим также, что подобные ошибки встречались и ранее: например, в [5] неверно сформулирована характеристизационная теорема для $\mathbb{Q}$ -многообразий с действием конечных групп.

²Под континуумом Пеано мы понимаем связный и локально связный метрический компакт, что в силу теоремы Куратовского–Дугунджи [6], [7] равносильно принадлежности компакта классу $\text{АЕ}(1)$ -пространств. Невырожденный G -континуум Пеано есть G -компакт класса $\text{АЕ}(1)$, имеющий неединоточное пространство орбит.

осуществить непосредственную его проверку, заменим набор свойств, характеризующих топологию максимального эквивариантного гильбертова куба. Поскольку свойства

- “быть эквивариантным абсолютным экстензором и обладать $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством”,
- “быть изовариантным абсолютным экстензором и обладать G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством”

определяют один и тот же запас компактных G -пространств (см. теорему 18 и замечание к теореме 16), то тем самым

- компактное G -пространство $\text{exr } X$ эквиморфно $\mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда $\text{exr } X \in \text{IsoV-AE}$ и обладает G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством (см. теорему 19).

Детектирование G -дизъюнктивного аппроксимационного свойства относительно просто³, в то время как установление свойства $\text{exr } X \in \text{IsoV-AE}$ на порядок сложнее. (Но все же, как показано в нижеприводимой теореме, осуществимо.)

ТЕОРЕМА 3. *Пусть X есть невырожденный G -континуум Пеано с действием компактной группы Ли G . Если свободная часть X_{free} плотна в X , то $\text{exr } X \in \text{IsoV-AE}$.*

Итак, на первый план в развитии сюжета статьи выходит понятие изовариантного абсолютного экстензора (IsoV-AE -пространства) – одного из центральных в теории компактных групп преобразований. На наш взгляд, причина многих неудач в исследовании эквивариантной теоремы Кертиса–Шори–Веста состояла именно в том, что в рамках этой теории в должной мере не выкристаллизовалось понятие IsoV-AE -пространства.

В терминах теории категорий IsoV-AE -пространство определяется как инъективный объект изовариантной категории ISOV-TOP , объектами которой являются пространства с действием компактной группы G , а морфизмами являются изовариантные отображения. Принято трактовать орбитные проекции объектов ISOV-TOP (так же, как и сами объекты) как обобщенные главные G -расслоения, а ее инъективные объекты как универсальные обобщенные главные G -расслоения.

Объекты с подобными свойствами впервые были построены Р. Пале для компактных групп Ли, действующих на конечномерных пространствах с конечным числом орбитных типов [8; п. 2.6]. Затем этот результат был распространен на компактные метризуемые группы, действующие на пространствах с конечномерным пространством орбит [9]. В работах [10]–[12] последние ограничения были сняты, в результате чего была доказана теорема о существовании IsoV-AE -пространств. Как результат, орбитное пространство IsoV-AE -пространства классифицирует G -пространства в смысле Пале (что во многом сводит изучение категории ISOV-TOP к исследованию гомотопических свойств топологических пространств).

³Например, можно действовать по классической схеме, если предварительно установить существование выпуклой инвариантной метрики на $\text{exr } X$. Впрочем, последнее автору неизвестно.

При последующем исследовании Isov-AE-пространств выявилось их ключевое свойство – *комбинированное* свойство продолжения эквивариантных отображений (см. теорему 11). Это позволило получить ряд важных следствий.

- (1) Изучение эквивариантных гомотопических типов Equiv-ANE-пространств сводится к изучению изовариантных гомотопических типов Isov-ANE-пространств. В свою очередь, эквивалентность соответствующих категорий позволяет определить важный функтор перехода к пучку орбит данного типа $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$ (который затруднительно определить по-другому ввиду неинвариантности пучков орбит данного типа под действием эквивариантной гомотопической эквивалентности).
- (2) Возможно наделить $\mathcal{F}$ -классифицирующие G -пространства в смысле [13] дополнительной структурой изовариантных абсолютных экстензоров. Как результат появляется возможность для эффективного вычисления гомотопических инвариантов пространств орбит $\mathcal{F}$ -классифицирующих G -пространств.
- (3) Орбитная проекция Isov-AE-пространства допускает естественную стратификацию на универсальные главные расслоения, что, в свою очередь, приводит к стратификации его пространства орбит на соответствующие классифицирующие пространства.

Если действующая группа есть окружность S^1 , то свойство (3) тесно коррелирует с результатами Х. Торуньчика и Дж. Веста о пространстве орбит экспоненты $\exp(S^1)$ с естественным действием окружности S^1 (см. [14]): их важное наблюдение состояло в том, что некоторые пучки орбитных типов в $\exp(S^1)/S^1$ наделяются структурой комплексов Эйленберга–Маклейна⁴. Поскольку все те же результаты имеют место и в пространстве орбит любого абсолютного изовариантного экстензора с действием S^1 , а также можно утверждать с большой долей уверенности, что $\exp(S^1) \in \text{IsoV-AE}$, то мы приходим к выводу, что именно абсолютные изовариантные экстензоры ответственны за возникновение подобных феноменов.

К сожалению, работа [14] содержит серию пробелов: некоторые вспомогательные утверждения ошибочны, а ряд верных утверждений имеют ошибочные доказательства (см. § 10). В одной из работ автора будет доказано, что $\exp G \in \text{IsoV-AE}$ для любой нетривиальной компактной связной группы Ли G . Тем самым главные результаты [14] будут полностью реабилитированы и (в историческом плане) могут рассматриваться как пример глубокого интуитивного предчувствия теории абсолютных изовариантных экстензоров. Отметим еще, что желание иметь строгое обоснование работы [14] явилось одним из основных мотивов при написании этой статьи.

Ключом к доказательству эквивариантной теоремы Кертиса–Шори–Веста является обнаружение изовариантной экстензорной структуры в экспоненте. Поскольку строить продолжение G -отображений с сохранением орбитных типов чрезвычайно сложно, мы сводим все это к более простой, но равносильной

⁴Позже похожие структуры появились при изучении топологии компакта Банаха–Мазура [15], [16].

задаче построения приближенно изовариантного (так называемого ε -изовариантного) продолжения.

Существенное усложнение построения изовариантного продолжения G -отображения в экспоненту (по сравнению с эквивариантным) требует объяснения. Если последнее тесно связано с операцией объединения (см. доказательство теоремы 7), то для изовариантного продолжения G -отображения в $\exp X$ дополнительно требуется гармонизация двух операций: объединения компактов и вычисления группы симметрии компакта. К сожалению, мы можем полагаться здесь только лишь на очевидное вложение

$$\text{Symm}(A) \cap \text{Symm}(B) \subset \text{Symm}(A \cup B),$$

причем расхождение между правой и левой частями будет неприемлемым, если об этом не позаботиться заранее. Главная сложность при исследовании эквивариантной версии теоремы Кертиса–Шори–Веста и состоит в преодолении несогласованности упомянутых выше операций. Основываясь на соображениях общего положения мы решаем эту задачу – строим представительные семейства множеств, гармонизирующие ситуацию (см. §§ 7, 8).

Статья имеет достаточно сложную логическую структуру и обременена многими техническими деталями. Поэтому для облегчения ее чтения мы приводим план доказательства теорем 1, 2 и 3, который состоит в комплексе следующих рассуждений: сначала в теореме 21 устанавливается, что для компактного G -пространства $Y = \exp X$, удовлетворяющего условию теоремы 3, справедливо свойство

- (а) компактное Equiv-AE -пространство Y удовлетворяет свойству $G\text{-DAP}$, а множество $\text{Iso}_\varepsilon(\mathbb{P}, Y)$ всех ε -изовариантных отображений для любого $\varepsilon > 0$ является плотным в пространстве $\text{Equiv}(\mathbb{P}, Y)$ всех эквивариантных отображений из произвольного компактного G -полиэдра $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}^G = \emptyset$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 3 следует воспользоваться импликацией (а) $\Rightarrow$ (b); для доказательства же теоремы 1 и достаточности теоремы 2 воспользуемся цепочкой импликаций (b) $\Rightarrow$ (c) и (c) $\Rightarrow$ (d) (доказательства этих импликаций излагаются в теоремах 16, 18 и в статье [2]). Доказательство необходимости теоремы 2 излагается в предложении 5.

Упомянутые выше свойства (b)–(d) таковы:

- (b) компактное G -пространство Y одновременно является $\text{Iso}_\text{ov-AE}$ - и $G\text{-DAP}$ -пространством;
- (c) компактное Equiv-AE -пространство Y обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством;
- (d) компактное Equiv-AE -пространство Y эквиморфно максимальному эквивариантному гильбертову кубу.

Автор посвящает данную статью памяти профессора В. В. Федорчука.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений и если не оговорено противное, предпо-

лагаются метрическими (непрерывными); рассматриваются только действия компактных групп Ли, если противное не оговорено специально.

Приведем основные понятия теории G -пространств [17]. Под действием компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ понимается непрерывное отображение μ из произведения $G \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- (1) $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(g \cdot h, x)$;
- (2) $\mu(e, x) = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$, $g, h \in G$ (здесь e – единица группы G).

Как правило, вместо $\mu(g, x)$ будем писать $g \cdot x$, или просто gx . Пространство $\mathbb{X}$ с действием группы G называется G -пространством. Отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ двух G -пространств называется G -отображением или *эквивариантным отображением*, если $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$, $g \in G$.

Заметим, что G -пространства и G -отображения образуют категорию, которую мы обозначим через G -TOP или EQUIV-TOP, если ясно о какой группе G идет речь. Мы свободно будем использовать символ “ G –” или “Equiv–”, означающий *эквивариантный*. Если “***” есть известное понятие из неэквивариантной топологии, то “ G -***” или “Equiv-***” обозначает соответствующий эквивариантный аналог. Наоборот, любое понятие, касающееся G -пространств, легко можно преобразовать в неэквивариантное понятие, если положить группу G тривиальной.

Орбитой $G(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ называется подмножество $\{g \cdot x \mid g \in G\} = G \cdot x$, являющееся замкнутым. Естественное отображение $\pi = \pi_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow X$, $x \mapsto G(x)$, пространства $\mathbb{X}$ в пространство фактор-разбиения $\mathbb{X}/G$ (которое, если при этом не будет возникать путаницы, обозначим через X) назовем *орбитной проекцией*. Пространство фактор-разбиения X , наделенное факторной топологией, порожденной π , будем называть *пространством орбит*. Любое G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ порождает непрерывное отображение пространств орбит $\tilde{f}: X \rightarrow Y$, $\tilde{f}(G(x)) = G(f(x))$, называемое *индуцированным отображением пространств орбит*.

Если подмножество $A \subset \mathbb{X}$ совпадает с $\pi^{-1}\pi(A) = G \cdot A$, то оно наделяется естественным действием группы G и называется *инвариантным* или G -*подмножеством*.

Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ следующее подмножество $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки* x . Для любой замкнутой подгруппы H (для замкнутых подгрупп принято обозначение $H < G$) введем в рассмотрение следующие подмножества $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X}^H = \{x \in \mathbb{X} \mid H \cdot x = x\} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \subset G_x\}$$

(множество H -неподвижных точек);

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_H &= \{x \in \mathbb{X} \mid H = G_x\}, & \mathbb{X}_{(H)} &= \{x \in \mathbb{X} \mid H \text{ сопряжена с } G_x\}, \\ \mathbb{X}_{\leq H} &= \{x \in \mathbb{X} \mid G_x < H\}. \end{aligned}$$

Орбитным типом $\text{Orb}(\mathbb{X})$ G -пространства $\mathbb{X}$ назовем дискретное объединение всех встречающихся орбит в $\mathbb{X}$ (взятых по одному). Так как любая орбита $G(x)$ эквивормфна пространству смежных классов группы G по стабилизатору точки, то $\text{Orb}(\mathbb{X}) \subset \coprod \{G/G_x \mid x \in \mathbb{X}\}$.

Назовем *стационарным типом* G -пространства $\mathbb{X}$ подмножество Conj_G , состоящее из классов сопряженности (G_x) всех стабилизаторов $x \in \mathbb{X}$. Соответствие $G(x) \mapsto (G_x)$ есть корректно определенная биекция между орбитным типом $\text{Orb}(\mathbb{X})$ и стационарным типом пространства $\mathbb{X}$, причем

- (3) $(G_x) \subset (G_y)$ (т.е. G_x сопряжена подгруппе G_y) в том и только том случае, когда существует эквивариантное отображение $f: G(x) \rightarrow G(y)$.

С учетом этого обстоятельства мы часто будем отождествлять орбитный и стационарный типы пространства $\mathbb{X}$ и записывать $\text{Orb}(\mathbb{X})$ в виде $\{(G_x) \mid x \in \mathbb{X}\}$. Если $\mathcal{F} \subset \text{Conj}_G$, то множество $\mathbb{X}_{\mathcal{F}} \doteq \{x \mid (G_x) \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{X}$ будем называть $\mathcal{F}$ -орбитным пучком $\mathbb{X}$ или пучком орбит типа $\mathcal{F}$. Скажем, что задано G -пространство $\mathbb{X}$ орбитного типа $\mathcal{F}$, если $\text{Orb}(\mathbb{X}) \subset \mathcal{F}$ (т.е. $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}_{\mathcal{F}}$ совпадают). Если $\mathcal{F}$ -орбитный пучок $\mathbb{X}_{\mathcal{F}}$ состоит из всех точек с тривиальным стабилизатором, то $\mathbb{X}_{\mathcal{F}}$ называется *свободной частью* $\mathbb{X}$ и обозначается через $\mathbb{X}_{\text{free}}$.

Эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *изовариантным*, если f сохраняет стабилизаторы, т.е. $G_x = G_{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Категорию, образованную G -пространствами и изовариантными отображениями, обозначим через ISOV-TOP (всегда будет ясно о какой группе G идет речь). Следующий факт – *критерий эквивалентности*, широко известен: изовариантное отображение является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда порожденное им отображение орбит является гомеоморфизмом.

Следующие два известных факта (см. [8]) понадобятся при доказательстве леммы 1:

ТЕОРЕМА 4. *Для компактной группы Ли G справедливы следующие свойства:*

- (а) *любая последовательность замкнутых подгрупп $\{G > H_1 > H_2 > H_3 > \dots\}$ стабилизируется, т.е. $H_n = H_{n+1} = H_{n+2} = \dots$ начиная с некоторого номера n ;*
- (б) *любая последовательность классов сопряженности замкнутых подгрупп $\{(G) \supset (H_1) \supset (H_2) \supset (H_3) \supset \dots\}$ стабилизируется, т.е. $(H_n) = (H_{n+1}) = (H_{n+2}) = \dots$ начиная с некоторого номера n .*

Многозначное отображение, сопоставляющее точке ее стабилизатор, является *полунепрерывным сверху*, т.е. множество $\mathcal{U} \doteq \{x \in \mathbb{X} \mid G_x \subset U\} \subset \mathbb{X}$ открыто для любого открытого $U \subset G$.

ТЕОРЕМА 5. *Если $x_0 \in \mathbb{X}$, то для любой окрестности $\mathcal{U}$ единицы группы существует такая окрестность $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x_0) \subset \mathbb{X}$, что для любой точки $y \in \mathcal{O}$ имеет место включение $u \cdot G_y \cdot u^{-1} \subset G_{x_0}$ для некоторой $u \in \mathcal{U}$. В частности, для любой точки $y \in \mathcal{O}$ имеет место $(G_y) \subset (G_{x_0})$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Особо подчеркнем, что в теореме 5 непрерывный выбор окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ в зависимости от точки x_0 не возможен. Если $\mathbb{X} = \exp G$, то любое отображение $\varepsilon: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ со свойством

- для любой точки y , принадлежащей ε -окрестности $N(x; \varepsilon(x))$ точки x , орбитный тип (G_y) содержится в (G_x)

будет разрывно в любой точке x с $G_x \not\leq G$ (см. [14; лемма 1]).

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbb{X}$ есть G -пространство с действием компактной группы Ли G . Тогда существует не более чем счетное семейство $\{(H_i)\}$ орбитных типов, для которого

- (4) каждое $\mathbb{X}_{(H_i)} = \{x \in \mathbb{X} \mid (G_x) = (H_i)\}$ является открытым подмножеством в $\mathbb{X}$, а $\sqcup \{\mathbb{X}_{(H_i)} \mid i \geq 1\}$ плотно в $\mathbb{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что для любого открытого G -подмножества $\mathbb{U}$ существует открытое G -подмножество $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ одноорбитного типа. Предположим противное: существует такая открытая G -окрестность $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_1(x_1)$ некоторой точки x_1 , что $(G_{x'}) \subset (G_{x_1})$ для всех $x' \in \mathbb{U}_1$ (теорема 5), при этом любое открытое G -подмножество $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}_1$ не является одноорбитным. Следовательно, $(G_{x_2}) \subsetneq (G_{x_1})$ для некоторой точки $x_2 \in \mathbb{U}_1$. Вновь выбираем такую открытую G -окрестность $\mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1(x_2)$, что $(G_{x'}) \subset (G_{x_2})$ для всех $x' \in \mathbb{U}_2$ (теорема 5), при этом любое открытое G -подмножество $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}_2$ не является одноорбитным, и так далее.

Приведенные рассуждения можно повторить, в результате чего возникает последовательность несовпадающих классов сопряженности замкнутых подгрупп $\{(G_{x_1}) \supsetneq (G_{x_2}) \supsetneq (G_{x_3}) \supsetneq \dots\}$, чего в компактной группе Ли быть не может (см. теорему 4). Полученное противоречие доказывает лемму 1.

В дальнейшем будем называть открытое плотное подмножество $\sqcup \{\mathbb{X}_{(H_i)} \mid i \geq 1\} \subset \mathbb{X}$, удовлетворяющее свойству (4), *орбитным остовом* $\mathbb{X}$. Известно (см. [17]), что орбитный остов связного гладкого многообразия $\mathbb{M}$ с локально гладким действием состоит из орбит одного типа, так называемых *главных орбит*.

Остановимся на определении *гильбертова куба* в категории G -пространств для компактной метрической действующей группы G . Пусть $\mathfrak{R}$ есть множество всех неприводимых ортогональных представлений G , а $\mathbb{R}_\varrho$ и $\mathbb{D}_\varrho$ суть пространство представления $\varrho \in \mathfrak{R}$ и его единичный шар. Для определенности элемент $\mathfrak{R}$, соответствующий тривиальному представлению группы G на $\mathbb{R}^1$, обозначим через ρ_0 , при этом $\mathbb{D}_{\rho_0} = [-1, 1]$ есть тривиальное G -пространство. Имеется всего лишь счетное число неприводимых ортогональных представлений, т.е. $|\mathfrak{R}| = \omega$. *Эквивариантным гильбертовым кубом* называется G -пространство $\mathbb{Q}_0 = \prod \{(\mathbb{D}_\varrho)^\omega \mid \varrho \in \mathfrak{R}, \varrho \neq \rho_0\}$ с диагональным действием группы G , а *максимальным эквивариантным гильбертовым кубом* – G -пространство $\mathbb{Q} = \prod \{(\mathbb{D}_\varrho)^\omega \mid \varrho \in \mathfrak{R}\}$. Ясно, что $\mathbb{Q}_0$ имеет единственную неподвижную точку и $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ есть гильбертов куб.

Представим максимальный эквивариантный гильбертов куб $\mathbb{Q}$ в виде $\mathbb{C} \times \mathbb{C}'$, где $\mathbb{C}$ есть произведение конечного числа его сомножителей, а $\mathbb{C}'$ – произведение оставшихся сомножителей, и назовем $\mathbb{C}$ *конечномерным основанием* $\mathbb{Q}$ (можно считать, что $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}'$ естественно содержатся). Ясно, что $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}'$ G -стягиваемы по себе в $0 \in \mathbb{Q}$. Естественную проекцию $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{C}$ обозначим через $\text{pr}_{\mathbb{C}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$.

Известно, что любой G -компакт $\mathbb{X}$ есть замкнутое подмножество максимального гильбертова куба $\mathbb{Q}$, а локально компактное G -пространство $\mathbb{Y}$ – замкнутое подмножество некоторого открытого G -подмножества $\mathbb{U} \subset \mathbb{Q}$.

Экспоненциальные действия. Пространство $\exp X$ всех непустых компактных подмножеств метрического пространства X , снабженное топологией Виеториса, называется *экспонентой* X . Базу этой топологии составляют множества вида

$$\left\{ A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ и для всех } i, A \cap U_i \neq \emptyset \right\},$$

где U_i суть открытые подмножества X . Если d есть допустимая метрика на X , то топология Виеториса порождается метрикой Хаусдорфа d_H . Ясно, что само пространство X естественно содержится в $\exp X$ в качестве замкнутого подпространства.

Действие компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ продолжается на $\exp \mathbb{X}$ формулой $\mu(g, A) = g \cdot A$. Любая *конечная экспонента*

$$\exp_n \mathbb{X} = \{ A \in \exp \mathbb{X} \mid \text{мощность } |A| \leq n \} \subset \exp \mathbb{X}$$

является замкнутым инвариантным подмножеством, так же как и *связная экспонента*

$$\exp_c \mathbb{X} = \{ A \in \exp \mathbb{X} \mid A \text{ является связным компактом} \} \subset \exp \mathbb{X}.$$

Отметим, что стабилизатор G_A элемента $A \in \exp \mathbb{X}$, по определению равный $\text{Symm } A = \{ g \in G \mid g \cdot A = A \} < G$, совпадает также с подгруппой $\{ g \in G \mid g \cdot A \subset A \} < G$. Заметим, что если $k \in \text{Symm}(H \cdot x) < G$, где $x \in \mathbb{X}$ и $H < G$, то $k \cdot x \in H \cdot x$ и, следовательно, $k \in H \cdot G_x$, т.е. $\text{Symm}(H \cdot x) \subset H \cdot G_x$.

Множество H -неподвижных точек $(\exp \mathbb{X})^H$ совпадает с подпространством всех H -инвариантных компактов, которое в свою очередь естественно гомеоморфно $\exp(\mathbb{X}/H)$: $A \in (\exp \mathbb{X})^H \mapsto A/H \in \exp(\mathbb{X}/H)$. Отсюда следует, что $\exp \mathbb{X}$ имеет единственную G -неподвижную точку в том и только том случае, когда $\mathbb{X}$ однородно.

Обозначим через $\mathcal{P}$ подмножество $\{ P < G \mid Hx = PHx \}$, где $x \in \mathbb{X}$ и $H < G$, частично упорядоченного (по включению) множества всех замкнутых подгрупп G . Поскольку $Hx = K(Hx)$ для $K = \text{Symm}(Hx)$, то $K \in \mathcal{P}$. В описанной ситуации имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Подгруппа K является наибольшим элементом в частично упорядоченном подмножестве $\mathcal{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко установить, что

$$L = \text{Cl} \left(\bigcup \{ P_1 \cdot P_2 \cdots P_n \mid P_i \in \mathcal{P}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1 \} \right)$$

является замкнутой подгруппой G . Тем самым, $K < L$.

Поскольку для любого $l \in L$ имеем

$$l \cdot (Hx) \subset \text{Cl} \left(\bigcup \{ P_1 \cdot P_2 \cdots P_n \cdot Hx \mid P_i \in \mathcal{P}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1 \} \right) = Hx,$$

то $l \cdot (Hx) = Hx$ и, следовательно, L содержится в $K = \text{Symm}(Hx)$. Поэтому $K = L$ и, следовательно, K есть наибольший элемент в $\mathcal{P}$.

Если $\mathbb{X}$ компактен, то $\text{exp } \mathbb{X}$ является компактным G -пространством, также как и $\text{exp}^2 \mathbb{X} = \text{exp}(\text{exp } \mathbb{X})$. Каждый элемент $\mathcal{A} \in \text{exp}^2 \mathbb{X}$ представляет собой семейство компактных подмножеств $\mathbb{X}$. Поскольку тело $\bigcup \mathcal{A}$ этого семейства есть компакт, то оператор объединения $\bigcup: \text{exp}^2 \mathbb{X} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$, $\mathcal{A} \mapsto \bigcup \mathcal{A}$, корректно определен и кроме того является непрерывным G -отображением.

Если $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ и $\mathbb{Z}$ являются компактными G -пространствами, а $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \text{exp } \mathbb{Y}$ и $\psi: \mathbb{Y} \rightarrow \text{exp } \mathbb{Z}$ – непрерывными G -отображениями, то $\psi(\varphi(x)) \in \text{exp}^2 \mathbb{Z}$, а формула $\mathbb{X} \ni x \mapsto \bigcup(\psi(\varphi(x))) \in \text{exp } \mathbb{Z}$ корректно определяет непрерывное G -отображение

$$\bigcup(\psi \circ \varphi): \mathbb{X} \rightarrow \text{exp } \mathbb{Z}.$$

Отметим, что G -отображение $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \text{exp } \mathbb{Y}$ равносильно заданию многозначного G -отображения $\Phi: \mathbb{X} \rightsquigarrow \mathbb{Y}$, $\Phi(x) = \varphi(x) \subset \mathbb{Y}$, чем мы будем пользоваться в дальнейшем. Непрерывность φ равносильна одновременной полунепрерывности сверху и снизу многозначного отображения Φ (см. [18]).

G -полиэдры. Скажем, что G -пространство $\mathbb{P}$ является G -полиэдром, если его пространство орбит P есть полиэдр с триангуляцией T , наделенный слабой топологией (относительно T), а также

- (*) для любого симплекса $\delta \in T$ существуют замкнутая подгруппа $L = L_\delta < G$ и G -отображение $h = h_\delta: \delta \times G/L \rightarrow \Delta$ в G -симплекс Δ – прообраз $\pi^{-1}(\delta)$ симплекса δ при орбитной проекции $\pi: \mathbb{P} \rightarrow P$, для которого индуцированное отображение пространств орбит является тождественным, а ограничение $h|: \text{rint}(\delta) \times G/L \rightarrow \pi^{-1}(\text{rint}(\delta))$ является эквиморфизмом (здесь $\text{rint}(\delta)$ есть относительная внутренность симплекса δ).

Будем называть такое G -отображение h *характеристическим G -отображением*, T – *триангуляцией G -полиэдра $\mathbb{P}$* , а совокупность G -симплексов $\mathbb{T} = \{\Delta = \pi^{-1}(\delta) \mid \delta \in T\}$ – *G -триангуляцией $\mathbb{P}$* , соответствующей триангуляции T . Если $g \in G$, то образ $\delta^* = h(\delta \times (g \cdot L)) \subset \Delta$, который будет называться в дальнейшем *срезом G -полиэдра над симплексом δ* , гомеоморфен симплексу $\delta \in T$. Ясно, что группа симметрии среза $\text{Symm}(\delta^*)$ совпадает с gLg^{-1} , а два среза над симплексом δ , соответствующие различным элементам $g, g' \in G$, отличаются на сдвиг.

Далее считаем $\mathbb{P}$ конечным G -полиэдром с заданной на нем инвариантной метрикой. Барицентрическое подразделение $\beta(T)$ триангуляции T каноническим образом порождает G -триангуляцию G -полиэдра $\mathbb{P}$, если в качестве соответствующих $\beta(T)$ характеристических G -отображений брать ограничения характеристических G -отображений для триангуляции T . Несложно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $\gamma > 0$ существует такое k -кратное барицентрическое подразделение $T' = \beta^k(T)$, что для G -триангуляции $\mathbb{P}$, каноническим образом построенной по T' , справедливо следующее: любой срез $\delta^* \subset \Delta$ G -полиэдра $\mathbb{P}$ над симплексом $\delta \in T'$ имеет диаметр $\text{diam}(\delta^*) < \gamma$.

Значимость G -полиэдров обусловлена тем обстоятельством, что любое компактное гладкое G -многообразие есть конечный G -полиэдр [19], а также следующим фактом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если G -компакт $\mathbb{X}$ лежит в евклидовом G -пространстве $\mathbb{E}^n$, то в любой его ε -окрестности $N(\mathbb{X}; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, существует замкнутая G -окрестность $\mathbb{P} \supset \mathbb{X}$, являющаяся компактным гладким G -многообразием (а стало быть, G -полиэдром).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аппроксимируем G -функцию

$$\varrho = \text{dist}(\cdot, \mathbb{X}): N(\mathbb{X}; \varepsilon) \rightarrow [0, \infty),$$

сопоставляющую $y \in \mathbb{E}^n$ расстояние до $\mathbb{X}$, гладкой G -функцией $\varrho': N(\mathbb{X}; \varepsilon) \rightarrow [0, \infty)$ (см. [17]). По теореме Сарда мера сингулярных значений ϱ' равна 0. Так как $\text{Im} \varrho$ есть отрезок $[0, \varepsilon]$, а ϱ' достаточно близка к ϱ , то существует регулярное значение $r \in \text{Im}(\varrho')$, для которого пересечение $(\varrho')^{-1}([r, \infty))$ с $\mathbb{X}$ пусто. Легко проверить, что $\mathbb{P} = (\varrho')^{-1}([0, r])$ и является искомым многообразием.

ТЕОРЕМА 6. Если G -компакт $\mathbb{X} \in G\text{-ANE}$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого G -отображения $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$, определенного на G -компакте $\mathbb{Y}$, существуют компактный G -полиэдр $\mathbb{P}$ и такие G -отображения $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{P}$ и $h: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, что $h \circ g$ и f G -гомотопны относительно ε (см. сноску⁵).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta > 0$ таково, что любые два δ -близкие G -отображения являются эквивариантно ε -гомотопными. Не теряя общности, будем считать, что $\mathbb{Y}$ есть замкнутое подмножество в максимальном гильбертовом кубе $\mathbb{Q}$, а отображение f допускает G -продолжение до G -отображения $\hat{f}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, определенного на некоторой окрестности $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{Q}$. Пусть $p = \text{pr}_{\mathbb{C}}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ есть естественная проекция $\mathbb{Q}$ на такое конечномерное основание $\mathbb{C} \subset \mathbb{Q}$, что $p^{-1}p(y) \subset \mathbb{U}$ для любого $y \in \mathbb{Y}$, и $\sigma \in \text{cov } \mathbb{U}$ есть выпуклое покрытие $\mathbb{U}$, для которого

(5) мелкость покрытия $\hat{f}(\sigma)$ меньше δ и $\{p^{-1}p(y) \mid y \in \mathbb{Y}\} \prec \sigma$.

Спроектируем $\mathbb{Y}$ на $\mathbb{C}$ и, воспользовавшись предложением 2, найдем такое компактное гладкое G -многообразие $\mathbb{P}$, чтобы

$$p(\mathbb{Y}) \subset \mathbb{P} \subset N(p(\mathbb{Y}); \sigma) \cap \mathbb{C},$$

где $N(A; \sigma)$ есть объединение элементов σ , пересекающих A . Ясно, что $\mathbb{P}$ естественно содержится в $p^{-1}p(\mathbb{P})$ в качестве инвариантного подмножества, $\mathbb{P} \hookrightarrow p^{-1}p(\mathbb{P})$. Полагаем в качестве искомым G -отображений следующие композиции

$$g: \mathbb{Y} \xrightarrow{p} p(\mathbb{Y}) \hookrightarrow \mathbb{P}, \quad h: \mathbb{P} \hookrightarrow p^{-1}p(\mathbb{P}) \xrightarrow{\hat{f}} \mathbb{X}.$$

Поскольку $(h \circ g)(y) = \hat{f}(p(y))$, то из свойства (5) следует, что $\text{dist}(h \circ g, f) < \delta$. Тем самым $h \circ g \simeq_G f[\text{rel } \varepsilon]$.

Конечнозначные ретракции. Пусть $B^n \subset \mathbb{R}^n$ есть единичный шар с центром в начале координат, S^{n-1} – его граница. Полунепрерывное сверху и снизу многозначное отображение $r: B^n \rightsquigarrow S^{n-1}$ (эквивалентно сказать, непрерывное

⁵То есть существует G -гомотопия H , соединяющая $h \circ g$ и $\text{Id}_{\mathbb{X}}$, у которой диаметр любого пути меньше, чем ε . Кратко будем записывать это так: $h \circ g \simeq_G \text{Id}_{\mathbb{X}}[\text{rel } \varepsilon]$.

отображение $r: B^n \rightarrow \exp(S^{n-1})$, для которого $r(x) = \{x\}$ для всех $x \in S^{n-1}$, а мощность $|r(x)|$ множества $r(x)$ для всех $x \in B^n$ ограничена сверху числом a , будем называть $(\leq a)$ -значной (или просто *конечнозначной*) *ретракцией шара B^n на его границу $S^{n-1} = \partial B^n$* . Ясно, что речь здесь идет о таком непрерывном отображении $r: B^n \rightarrow \exp_a(S^{n-1})$, что $r(x) = x$ для любого $x \in S^{n-1}$.

Широко известен факт о том, что для любого $n \geq 2$ существует трехзначная ретракция $r: B^n \rightarrow \exp_3(S^{n-1})$ шара B^n на его границу (см. [20; лемма 4.2.22]). Отсюда легко следует, что для конечного полиэдра P с триангуляцией T и для любого $s \geq 2$ существует конечнозначная ретракция $r_s: P^{(s)} \rightarrow \exp_{a_s}(P^{(s-1)})$, определенная на s -остове, которая удовлетворяет следующему свойству:

- (i) для любого симплекса $\delta \in T^{(s)}$, $r_s(\delta)$ содержится в $\exp(\delta^{(s-1)})$ – экспоненте $(s-1)$ -мерного остова δ .

Множественно применяя многозначные ретракции $\{r_s\}$, мы приходим к существованию такой конечнозначной ретракции $r: P \rightarrow \exp(P^{(1)})$, что

- (ii) для любого симплекса δ , $\dim P \geq \dim \delta \geq 2$, имеет место $r(\delta) \subset \exp(\delta^{(1)})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathbb{P}$ есть конечный G -полиэдр с заданной на нем инвариантной метрикой и G -триангуляцией $\mathbb{T}$. Тогда для любого $\gamma > 0$ существует такое k -кратное барицентрическое подразделение $T' = \beta^k(T)$, что для G -триангуляции $\mathbb{T}'$, каноническим образом построенной по T' , существует конечнозначная G -ретракция $R: \mathbb{P} \rightarrow \exp(\mathbb{P}^{(1)})$ (см. сноску ⁶), для которой

- (iii) $\text{diam}(\{p\} \cup R(p)) < \gamma$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\dim P \geq s \geq 2$ рассмотрим конечнозначную ретракцию $r_s: P^{(s)} \rightarrow \exp(P^{(s-1)})$, обладающую свойством (i). Если $\chi = \chi_\delta: \delta \times G/H \rightarrow \Delta \rightleftharpoons \pi^{-1}(\delta)$ есть характеристическое G -отображение симплекса $\delta \in T^{(s)}$, то формулой

$$\chi(p, gH) \in \Delta \mapsto \chi(r_s(p) \times (gH)) \in \pi^{-1}(\delta^{(s-1)}) \subset \Delta \quad \text{для } (p, gH) \in \delta \times G/H$$

корректно определяется конечнозначная G -ретракция $R_s: \Delta \rightarrow \exp(\Delta^{(s-1)})$. Тем самым на s -остове $\mathbb{P}^{(s)} \rightleftharpoons \pi^{-1}(P^{(s)})$ определяется конечнозначная G -ретракция $R_s: \mathbb{P}^{(s)} \rightarrow \exp(\mathbb{P}^{(s-1)})$.

Проведем такие рассуждения для G -триангуляции $\mathbb{P}$, каноническим образом построенной по многократному барицентрическому подразделению $\beta^k(T)$ (см. предложение 1). Легко видеть, что композиция построенных выше G -ретракций

$$R: \mathbb{P} = \mathbb{P}^{(p)} \xrightarrow{R_p} \mathbb{P}^{(p-1)} \xrightarrow{R_{p-1}} \dots \rightsquigarrow \mathbb{P}^{(2)} \xrightarrow{R_2} \mathbb{P}^{(1)}$$

является G -ретракцией $R: \mathbb{P} \rightarrow \exp(\mathbb{P}^{(1)})$ на экспоненту 1-мерного остова относительно G -триангуляции $\beta^k(\mathbb{T})$. Если подобрать подразделение $\beta^k(T)$ более тщательно, то можно дополнительно добиться того, чтобы для G -ретракции R было выполнено свойство (iii).

⁶Здесь $\mathbb{P}^{(1)}$ есть 1-мерный остов $\mathbb{P}$ относительно G -триангуляции $\mathbb{T}'$.

§ 3. Эквивариантные и изовариантные экстензоры

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G -отображений в категории $\mathfrak{C}$, совпадающей с ISOV-TOP или с EQUIV-TOP. Пространство $\mathbb{X}$ с действием компактной группы G называется *абсолютным окрестностным $\mathfrak{C}$ -экстензором* (обозначается $\mathbb{X} \in \mathfrak{C}\text{-ANE}$), если каждый морфизм $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ из $\mathfrak{C}$, определенный на замкнутом G -подмножестве $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ G -пространства $\mathbb{Z}$ и называемый *частичным $\mathfrak{C}$ -морфизмом*, может быть продолжен на некоторую G -окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$ до $\mathfrak{C}$ -морфизма $\widehat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$. Если всегда возможно сделать $\mathbb{U}$ равным $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *абсолютным $\mathfrak{C}$ -экстензором*, $\mathbb{X} \in \mathfrak{C}\text{-AE}$. Если действующая группа G тривиальна (т.е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие абсолютных [окрестностных] экстензоров для метрических пространств – A[N]E (см. [6], [7]).

Если $\mathfrak{C}$ совпадает с категорией EQUIV-TOP, то абсолютные [окрестностные] $\mathfrak{C}$ -экстензоры будут называться эквивариантными абсолютными [окрестностными] экстензорами (кратко, Equiv-A[N]E-пространствами или просто G -A[N]E-пространствами). Если же $\mathfrak{C}$ совпадает с категорией ISOV-TOP, то абсолютные [окрестностные] $\mathfrak{C}$ -экстензоры будут называться изовариантными абсолютными [окрестностными] экстензорами (кратко, IsoV-A[N]E-пространствами); IsoV-AE-пространство совпадает с универсальным G -пространством в смысле Пале [8], а его пространство орбит классифицирует G -пространства.

Примерами эквивариантных абсолютных экстензоров являются: банахово G -пространство с действием компактной группы G (см. [21; с. 155] и [22; с. 117]), линейное нормированное G -пространство с действием компактной группы Ли (см. [23]), а также экспоненты некоторых G -пространств. Последний результат принадлежит А. Телейко (см. [3]) и основан на идее усреднения действия.

ТЕОРЕМА 7. Если G -пространство $\mathbb{X} \in \text{AE}(1)$, то $\exp \mathbb{X} \in G\text{-AE}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{X} \in \text{AE}(1)$, то $\exp \mathbb{X} \in \text{AE}$ (см. [1]). Поэтому любое частичное G -отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \exp \mathbb{X}$ продолжается до отображения $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \exp \mathbb{X}$. Искомое G -отображение $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, продолжающее φ , задается формулой: $\widehat{\varphi}(z)$ совпадает с компактом

$$\bigcup \{g^{-1} \cdot \psi(g \cdot z) \mid g \in G\} \subset \mathbb{X}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Замкнутое G -подпространство $\mathbb{X}' \subset \mathbb{X}$ называется *строгим деформационным окрестностным G -ретрактом* $\mathbb{X}$, если существует окрестность $\mathbb{U}$, $\mathbb{X}' \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{X}$, и гомотопия $F: \mathbb{U} \times I \rightarrow \mathbb{X}$ такие, что

$$F_0 = \text{Id}_{\mathbb{U}}, \quad F_t|_{\mathbb{X}'} = \text{Id}_{\mathbb{X}'}, \quad t \in I = [0, 1], \quad F_1 \text{ является ретракцией } \mathbb{U} \text{ на } \mathbb{X}'.$$

Следующая теорема, являющаяся эквивариантным аналогом теоремы Уайтхеда–Борсука–Ханнера (см. [1]), имеет с ней схожее доказательство.

ТЕОРЕМА 8. Если $\mathbb{Y} \in G\text{-A[N]E}$ есть замкнутое подмножество G -пространства $\mathbb{X}$, причем

- (1) $\mathbb{Y}$ является строгим деформационным (строгим деформационным окрестностным) G -ретрактом $\mathbb{X}$;

(2) $\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} \in G\text{-ANE}$,

то $\mathbb{X}$ является $G\text{-A}[N]\text{E}$ -пространством.

Из этой теоремы несложно выводиться, что любой конечный G -полиэдр является $G\text{-ANE}$ -пространством.

Скажем, что G -пространство $\mathbb{X}$ имеет сложность действия, не уступающую сложности действия G -пространства $\mathbb{Y}$ (кратко, $\mathbb{Y} \leq \mathbb{X}$), если существует изовариантное отображение из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{X}$. Назовем Isov-порождающим любое G -пространство $\mathbb{X}$ с наибольшей сложностью действия (т.е. любое G -пространство $\mathbb{Y}$ допускает изовариантное отображение в $\mathbb{X}$). Примером Isov-порождающего пространства является счетная степень $\mathbb{J} = (\text{Con } \mathbb{T})^\omega$ метрического конуса $\text{Con } \mathbb{T}$ над дискретным объединением $\mathbb{T}$ всех однородных пространств $G/H \in G\text{-ANE}$ (см. [24]).

Так как $\text{Con } \mathbb{T}$ допускает изовариантное отображение в максимальный эквивариантный гильбертов куб, то существует изовариантное отображение $\varphi: \mathbb{J} = (\text{Con } \mathbb{T})^\omega \rightarrow \mathbb{Q} = (\mathbb{Q})^\omega$. Следовательно, максимальный эквивариантный гильбертов куб тоже является Isov-порождающим пространством.

Следующая теорема (см., например, [12]) выделяет Isov-AE-пространства среди произведений G -пространств.

ТЕОРЕМА 9. Пусть для всех $i \geq 1$ Equiv-AE -пространство $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим пространством. Тогда $\prod \{\mathbb{X}_i \mid i \geq 1\} \in \text{Isov-AE}$.

Так как $\mathbb{J}$ и $\mathbb{Q}$ являются Isov-порождающими G -пространствами, а также Equiv-AE -пространствами и, кроме того, $\mathbb{J} \cong_G \mathbb{J}^\omega$ и $\mathbb{Q} \cong_G \mathbb{Q}^\omega$, то из теоремы 9 следует, что $\mathbb{J}$, а также максимальный эквивариантный гильбертов куб $\mathbb{Q}$ являются Isov-AE-пространствами.

Приведем альтернативное доказательство существования Isov-AE-пространств (важной особенностью которого является его применимость для локально компактных групп Ли).

Обозначим пространство непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$, снабженное компактно открытой топологией, через $C(X, Y)$. Если $\mathbb{X}$ является G -пространством, то формула $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, где $f \in C(\mathbb{X}, Y)$, $g \in G$, а $x \in \mathbb{X}$, задает функциональное действие группы G на $C(\mathbb{X}, Y)$. Если $\mathbb{X}$ является компактом, то топология на $C(\mathbb{X}, Y)$ совпадает с топологией, порожденной sup -метрикой.

ТЕОРЕМА 10. Пусть L есть гильбертово пространство, а G – компактная группа. Тогда $\mathbb{X} = C(G, L) \in \text{Isov-AE}$. Более того, для любого частичного G -отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{X}$ существует G -продолжение $\hat{F}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X} = C(G, L)$ отображения f , являющееся изовариантным на дополнении (т.е. $\hat{F}|_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывное отображение $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow L$, значение $\varphi(a)$ которого в точке $a \in \mathbb{A}$ есть значение функции $f(a)$ в единице $e \in G$, т.е. $\varphi(a) = (f(a))(e)$, $a \in \mathbb{A}$. Тогда задача G -продолжения f , изовариантно на дополнении, сводится к продолжению φ до непрерывного отображения $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow L$, такого, что

(a) $\hat{\varphi}|_{G(z)}: G(z) \rightarrow L$ есть вложение для любого $z \notin \mathbb{A}$.

В самом деле, отображение $\widehat{F}: \mathbb{Z} \rightarrow C(G, L)$, заданное формулой $[\widehat{F}(z)](g) = \widehat{\varphi}(g^{-1} \cdot z)$, является непрерывным и эквивариантным продолжением отображения f , которое изовариантно на дополнении к $\mathbb{A}$. Его непрерывность легко следует из компактной открытости топологии на $C(G, L)$. Эквивариантность $\widehat{F}$ получается непосредственной проверкой. Так как $[f(a)](g)$ совпадает с $[f(g^{-1} \cdot a)](e)$ в силу эквивариантности отображения f , а из определений отображений φ и $\widehat{F}$ следует, что

$$[f(g^{-1} \cdot a)](e) = \varphi(g^{-1} \cdot a) = \widehat{\varphi}(g^{-1} \cdot a) = [\widehat{F}(a)](g),$$

то $f(a) = \widehat{F}(a)$ для любого $a \in \mathbb{A}$.

Проверим теперь изовариантность $\widehat{F}$ на дополнении $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}$: для $z \notin \mathbb{A}$ стабилизатор $G_{\widehat{F}(z)}$ есть

$$\{h \in G \mid [\widehat{F}(z)](g) = [h \cdot \widehat{F}(z)](g) = [\widehat{F}(z)](h^{-1} \cdot g)\},$$

что влечет

$$G_{\widehat{F}(z)} = \{h \in G \mid \widehat{\varphi}(g^{-1} \cdot z) = \widehat{\varphi}(g^{-1} \cdot h \cdot z) \text{ для любого } g \in G\}.$$

Так как $\widehat{\varphi}|_{G(z)}$ есть вложение, то $h \in G_z$ и, следовательно, $G_{\widehat{F}(z)} = G_z$.

Наконец, в приведенной ниже лемме изложим построение требуемого непрерывного отображения $\widehat{\varphi}$.

ЛЕММА 3. *Для любого частичного отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} L$ существует непрерывное продолжение $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow L$, удовлетворяющее условию (а).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vartheta: \mathbb{Z} \rightarrow L \in \text{AE}$ есть непрерывное продолжение φ , а $\xi: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$, $\xi^{-1}(0) = \mathbb{A}$ – непрерывная функция.

Далее воспользуемся известным фактом (см. [25; теорема 3]) о том, что орбитная проекция $p: \mathbb{Z} \rightarrow Z$, являющаяся открытым и совершенным отображением, послойно вкладывается в проекцию $\text{pr}: Z \times L \rightarrow Z$, т.е. существует такое непрерывное отображение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow L$ (не обязательно являющееся продолжением φ), что

- (b) ограничение ψ на любой прообраз $p^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{Z}$ (т.е. на любую орбиту $G(z)$) есть вложение.

Построим еще одно отображение. Ввиду того, что гильбертово пространство L является *сильно универсальным пространством* (т.е. любое частичное отображение сепарабельного пространства в L допускает глобальное продолжение, являющееся вложением на дополнении), существует непрерывное продолжение $t: L \times L \times [0, 1] \rightarrow L$ отображения $L \times L \times [0] \rightarrow L$, $(x, y, 0) \mapsto x$, которое является вложением на дополнении к $L \times L \times [0]$.

Тогда в качестве искомого отображения $\widehat{\varphi}$ можно взять композицию

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\vartheta \Delta \psi \Delta \xi} L \times L \times [0, 1] \xrightarrow{t} L$$

диагонального произведения отображений ϑ , ψ и ξ , а также отображения t .

Отметим важное соотношение $\text{Isov-A[N]E} \subset \text{Equiv-A[N]E}$ между инъективными объектами категорий ISOV-TOP и EQUIV-TOP , следующее из нижеприводимого комбинированного свойства продолжения G -отображений в Isov-AE -пространства (см. [11]).

ТЕОРЕМА 11. *Если $\mathbb{X}$ является Isov-AE -пространством, то для любого частичного G -отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X}$ существует G -продолжение $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ отображения φ , являющееся изовариантным на дополнении.*

Приведем необходимые условия принадлежности G -пространств классам эквивариантных и изовариантных экстензоров (см. [11]).

ТЕОРЕМА 12. *Если $\mathbb{X} \in \text{Equiv-ANE}$, то $\{\mathbb{X}^H \mid H < G\} \in \text{equi-LAE}$ (см. сноску⁷); если же $\mathbb{X} \in \text{Isov-ANE}$, то вложение $\mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ является гомотопически плотным⁸ для любой подгруппы $H < G$, а $\{\mathbb{X}_H \mid H < G\} \in \text{equi-LAE}$.*

С помощью теоремы 12 легко построить пример Equiv-AE -пространства $\mathbb{Z} \notin \text{Isov-ANE}$.

Скажем, что G -пространство $\mathbb{X}$ является *локально Isov-стягиваемым* ($\mathbb{X} \in \text{Isov-LC}$), если для любого $x \in \mathbb{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая эквивариантная ε -гомотопия $H: \mathbb{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ (см. сноску⁹) некоторой окрестности $\mathbb{U} \ni x$, что

(3) $H_t: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ является изовариантным отображением для всех $t < 1$;

(4) $H_0 = \text{Id}$, а H_1 переводит $\mathbb{U}$ в орбиту некоторой точки $\bar{y} \in \mathbb{X}$.

Если $\mathbb{U} = \mathbb{X}$, то G -пространство $\mathbb{X}$ называется *Isov-стягиваемым* ($\mathbb{X} \in \text{Isov-C}$).

ТЕОРЕМА 13. *Любое Isov-A[N]E -пространство $\mathbb{X}$ является Isov-[L]C -пространством.*

Теперь исследуем, какие свойства компакта $\mathbb{X}$ влекут $\exp \mathbb{X} \in \text{Isov-AE}(0)$ – свойство *абсолютной изовариантной экстензорности в размерности 0* (т.е. любое частичное изовариантное отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \exp \mathbb{X}$, $\dim Z = 0$, может быть продолжено на $\mathbb{Z}$ до изовариантного отображения $\hat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \exp \mathbb{X}$). Для этого напомним внутреннюю характеристику $\text{Isov-AE}(0)$ -пространств (см. [26]):

(5) топологически полное G -пространство $\mathbb{X}$ принадлежит классу $\text{Isov-AE}(0)$

в том и только том случае, когда для любой окрестности $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ и для любой подгруппы $H < G_x$ справедливо $\mathcal{O} \cap \mathbb{X}_H \neq \emptyset$.

Воспользуемся этой характеристикой для формулировки необходимых и достаточных условий для того, чтобы $\exp \mathbb{X} \in \text{Isov-AE}(0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для G -компакта $\mathbb{X}$ с действием компактной группы Ли G следующие условия эквивалентны:*

(6) $\exp \mathbb{X} \in \text{Isov-AE}(0)$;

⁷То есть для любой окрестности U точки $x \in \mathbb{X}$ существует такая окрестность V , что для любого частичного отображения $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi} V \cap \mathbb{X}_H$ существует его продолжение $\hat{\varphi}: Z \rightarrow U \cap \mathbb{X}_H$.

⁸То есть существует такая G -гомотопия $F: \mathbb{X}^H \times I \rightarrow \mathbb{X}^H$, что $F_0 = \text{Id}$, $\text{Im } F_t \subset \mathbb{X}_H$ для всех $t > 0$.

⁹То есть $H(u, [0, 1])$ имеет диаметр меньше ε для любого $u \in \mathbb{U}$.

- (7) для любых $A \in \exp \mathbb{X}$, $H < \text{Symm } A$ и $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $B \in \exp \mathbb{X}$, что $\text{dist}_H(A, B) < \varepsilon$ и $\text{Symm } B = H$.

Отсюда и из леммы 1 в качестве несложного следствия получаем необходимое условие на $\mathbb{X}$ для того, чтобы $\exp \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}(0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если действующая компактная группа Ли G абелева и $\exp \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}(0)$, то свободная часть $\mathbb{X}_{\text{free}}$ плотна в $\mathbb{X}$.

Следующее утверждение доставляет достаточное условие на компакт $\mathbb{X}$, чтобы $\exp \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}(0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\mathbb{X}$ есть компакт с действием компактной группы Ли G . Если пространство орбит $X_{\text{free}} = \mathbb{X}_{\text{free}}/G$ свободной части плотно в X и не имеет изолированных точек, то $\exp \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что выполнено условие (7) из §3. Пусть $D \subset \mathbb{X}$ конечное подмножество, для которого $\text{dist}_H(A, D) < \varepsilon$. Поскольку метрика на $\mathbb{X}$ инвариантна, а A является H -инвариантным подмножеством, то $\text{dist}_H(A, H \cdot D) < \varepsilon$. Так как $X_{\text{free}} \subset X$ плотно и не имеет изолированных точек, то можно чуть пошевелить множество D так, что оно будет пересекать каждую орбиту не более чем по одной точке и при этом $D \subset \mathbb{X}_{\text{free}}$. Тем самым $\text{Symm}(H \cdot D) = H$.

§ 4. Мягкие и аппроксимативно мягкие отображения

Рассмотрим квадратную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} = \text{Cl } \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array} \quad (4.1)$$

в категории EQUIV-TOP метрических G -пространств. Будем говорить, что G -отображение φ есть *частичное поднятие G -отображения ψ относительно f* .

Скажем, что *задача продолжения частичного поднятия для диаграммы (4.1) разрешима глобально (локально)*, если существует G -отображение $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ ($\widehat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ есть G -окрестность $\mathbb{A}$), продолжающее φ и такое, что $f \circ \widehat{\varphi} = \psi$ ($f \circ \widehat{\varphi} = \psi|_{\mathbb{U}}$). Придерживаясь выбранной терминологии, будем говорить, что $\widehat{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ ($\widehat{\varphi}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$) есть *глобальное (локальное) поднятие G -отображения ψ относительно f* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. G -отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется G -мягким (локально G -мягким) в данной размерности n , если для любой квадратной коммутативной диаграммы (4.1), в которой $\dim \mathbb{Z} \leq n$, задача продолжения частичного поднятия разрешима глобально (локально).

Если $n = \infty$, то, опуская спецификацию n , будем говорить просто о G -мягких и о локально G -мягких отображениях. Если действующая группа G

тривиальна, то введенные понятия трансформируются в понятия *мягких* и *локально мягких отображений*. Попутно отметим, что введенные понятия можно интерпретировать как инъективные объекты соответствующих категорий морфизмов. Пример локально мягкого отображения доставляет естественная проекция $\text{pr}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ в случае $\mathbb{Y} \in G\text{-ANE}$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется α -*аппроксимативно n -мягким*, $n \leq \infty$, $\alpha > 0$, если для любой квадратной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A = \text{Cl } A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \cap & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y, \end{array} \quad (4.2)$$

в которой (Z, A) полиэдральная компактная n -мерная пара, существует такое продолжение $\widehat{\varphi}: Z \rightarrow X$ отображения φ , что $\text{dist}(f \circ \widehat{\varphi}, \psi) < \alpha$.

Отображение f называется *аппроксимативно n -мягким*, если оно является α -аппроксимативно n -мягким для любого $\alpha > 0$. Хотя это и не используется нами, но отметим, что если в предположении $X, Y \in \text{ANE}$ расширить класс n -мерных полиэдров (Z, A) до класса n -мерных компактов, то запас определяемых отображений не изменится.

Пример аппроксимативно 1-мягкого отображения возникает, если фиксированы плотные подмножества $Q_i \subset X \in \text{ANE}(1)$, $i \leq n$. Тогда вложение $L = \bigcup \{L_s \mid s \leq n\} \hookrightarrow X^n$ является аппроксимативно 1-мягким (здесь $L_s = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \in Q_i \text{ для всех } i \neq s\}$). Доказательство этого факта повторяет канву рассуждений, взятых из доказательства предложения 13, и по этой причине опускается.

Следующее утверждение имеет несложное доказательство.

ЛЕММА 4. *Если Y есть полное пространство, а все открытые вложения $X_i \hookrightarrow Y$ являются аппроксимативно n -мягкими, то вложение $\bigcap \{X_i \mid i \geq 1\} \hookrightarrow Y$ является аппроксимативно n -мягким.*

Во множестве $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ всех непрерывных отображений из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ рассмотрим “source limitation” топологию (“target limitation” топологию соответственно), в которой базис $f \in C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ образуют множества

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{g \in C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid \text{dist}(g(x), f(x)) < \delta(x)\},$$

где $\delta = \varepsilon \in C(\mathbb{X}, \mathbb{R}^+)$ (где $\delta(x) = \varepsilon(f(x))$, а $\varepsilon \in C(\mathbb{Y}, \mathbb{R}^+)$). Варьируя положительные непрерывные функции ε , мы получаем базис окрестностей для f . Ясно, что в обеих топологиях (как в “source limitation” топологии, так и в “target limitation” топологии) $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, вообще говоря, не метризуемо, но обладает свойством Бэра – пересечение счетного числа открытых плотных подмножеств является плотным подмножеством (см. [27]). Отметим, что множество $\text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ всех эквивариантных отображений замкнуто в $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ как в “source limitation” топологии, так и в “target limitation” топологии. Если $\mathbb{X}$ есть компакт, то все эти топологии совпадают между собой и совпадают с компактно открытой топологией.

Операция ограничения G -отображения на замкнутое G -подмножество $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ порождает непрерывное отображение $R: C(\mathbb{Z}, \mathbb{Y}) \rightarrow C(\mathbb{A}, \mathbb{Y})$ пространств G -отображений, заданных в той или иной топологии. Известно, что в случае “target limitation” топологии это отображение является открытым, если дополнительно $\mathbb{Y} \in G\text{-ANE}$. Менее известен схожий результат, относящийся к “source limitation” топологии, который нам будет удобнее сформулировать в развернутом виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y} \in G\text{-ANE}$ – G -продолжение частичного G -отображения $\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$, то для любой непрерывной функции $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1)$ существует непрерывная функция $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1)$, для которой справедливо следующее свойство:

- для любого частичного G -отображения $\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{g} \mathbb{Y}$ со свойством $\text{dist}(f(a), g(a)) < \beta(a)$ для любой $a \in \mathbb{A}$ существует G -продолжение $\hat{g}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ со свойством $\text{dist}(\hat{f}(z), \hat{g}(z)) < \alpha(z)$ для любой $z \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественную проекцию $p = \text{pr}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}$, которая в силу $\mathbb{Y} \in G\text{-ANE}$ является локально G -мягкой. Отсюда несложно следует, что для любой G -окрестности $\mathbb{U}$ графика $\text{Gr}(\hat{f}) = \{(z, \hat{f}(z)) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Y}$ существует G -окрестность $\mathbb{V}$, которая является послойно G -стягиваемой внутри $\mathbb{U}$, т.е. существует такая G -гомотопия $H: \mathbb{V} \times I \rightarrow \mathbb{U}$ (называемая G -стягиванием), что $H_0 = \text{Id}$, $\text{pr} \circ H_t = \text{pr}$ и $H_1 = s \circ \text{pr}$ для G -сечения $s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Y}$, $s(z) = (z, \hat{f}(z))$.

Возьмем G -окрестность $\mathbb{U}$ в виде $\{\{z\} \times N(\hat{f}(z); \alpha(z)) \mid z \in \mathbb{Z}\}$, тогда G -окрестность $\mathbb{V}$ можно взять в виде $\{\{z\} \times N(\hat{f}(z); \beta(z)) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ для некоторой непрерывной функции $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1)$. Не теряя общности, можно считать, что частичное G -отображение $\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{g} \mathbb{Y}$ эквивариантно G -продолжено до G -отображения $g: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Y}$ на некоторую G -окрестность $\mathbb{W}$ с сохранением свойства $\text{dist}(\hat{f}(z), g(z)) < \beta(z)$ для любой $z \in \mathbb{W}$. Пусть $\xi: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$ есть G -функция (т.е. функция, постоянная на орбитах), для которой $\xi = 1$ вне $\mathbb{W}$ и $\xi = 0$ на $\mathbb{A}$. Тогда искомое G -продолжение $\hat{g}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ строится по формуле

$$\hat{g}(z) = \begin{cases} \text{pr}_{\mathbb{Y}}(H(g(z), \xi(z))), & \text{если } z \in \mathbb{W}; \\ \hat{f}(z), & \text{если } z \notin \mathbb{W}. \end{cases}$$

Предположим, что имеется задача об аппроксимации G -отображения $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y} \in G\text{-ANE}$ G -отображением из какого-либо класса $\mathcal{C}$. Предложение 7 влечет принцип переопределения G -отображений (который полезен тем, в частности, что позволяет существенно упрощать рассуждения и по этой причине будет нами многократно использован). Суть его заключается в том, что если ограничение G -отображения f на замкнутое подпространство $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ как угодно близко аппроксимируется G -отображением из $\mathcal{C}$, то, не теряя общности, можно считать, что исходно в задаче аппроксимации G -отображение f , будучи ограниченным на подпространство $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$, уже принадлежит классу $\mathcal{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $X_0 \hookrightarrow X \in \text{ANE}$ – аппроксимативно n -мягкое отображение, $Z \hookrightarrow A \xrightarrow{\varphi'} X$ – частичное отображение, определенное на n -мерном компакте Z и имеющее продолжение $\varphi: Z \rightarrow X$. Тогда для любой непрерывной функции $\alpha: Z \setminus A \rightarrow (0, 1)$ существует такое новое продолжение $\psi: Z \rightarrow X$ отображения φ' , что $\psi(Z \setminus A) \subset X_0$ и $\text{dist}(\psi(z), \varphi(z)) < \alpha(z)$ для любой $z \in Z \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим “кольцевое” покрытие

$$\{F_k \rightrightarrows \alpha^{-1}([2^{-k-1}, 2^{-k}])\}$$

дополнения $Z \setminus A$. Так как каждое отображение $\varphi_{2k+1} \rightrightarrows \varphi|_{F_{2k+1}}$ может быть как угодно близко аппроксимировано отображением $\psi_{2k+1}: F_{2k+1} \rightarrow X_0$, то в силу принципа переопределения отображений с самого начала можно считать, что $\varphi(F_{2k+1}) \subset X_0$. Возникающее частичное отображение

$$F_{2k} \hookrightarrow F_{2k} \cap (F_{2k-1} \sqcup F_{2k+1}) \xrightarrow{\varphi_{2k-1} \cup \varphi_{2k+1}} X_0$$

аппроксимируем отображением $\psi_{2k}: F_{2k} \rightarrow X_0$, $\text{dist}(\psi_{2k}, \varphi|_{F_{2k}}) < \delta_{2k} < 2^{-4k}$.

Поскольку константы δ_{2k} выбраны малыми, то отображение

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{если } z \in A \cup F_{2k+1}; \\ \psi_{2k}(z), & \text{если } z \in F_{2k}, \end{cases}$$

будет непрерывным и удовлетворять требованиям предложения.

§ 5. Достаточные условия совпадения Equiv-АЕ- и Isov-АЕ-пространств

Исследуем, какие свойства следует наложить на Equiv-АЕ-пространство, чтобы оно являлось также и Isov-АЕ-пространством, для чего предварительно приведем ряд фактов. Пусть $\varepsilon > 0$. Эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется ε -изовариантным, если для любой точки $x \in \mathbb{X}$ существует такая точка $x' \in \mathbb{X}$ (называемая *мажорируемой*), что $\text{dist}(x, x') < \varepsilon$ и $G_{f(x)}$ содержится в окрестности $N(G_{x'}; \varepsilon)$.

Через $\text{IsoV}_\varepsilon(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ обозначим множество всех ε -изовариантных отображений, которое, как можно показать, очевидно является открытым подмножеством $\text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ пространства всех G -отображений в “source limitation” топологии. В силу приведенного ниже результата множество $\text{IsoV}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ всех изовариантных отображений образует G_δ -подмножество.

ТЕОРЕМА 14. $\text{IsoV}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ совпадает с пересечением $\bigcap \{\text{IsoV}_{2^{-n}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \mid n \geq 1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства этой теоремы можно извлечь более точный факт: если $\mathbb{X} = \bigcup \{\mathbb{X}_n \mid n \geq 1\}$, $\mathbb{X}_n \in \mathbb{X}_{n+1}$ (т.е. $\text{Cl } \mathbb{X}_n \subset \text{Int } \mathbb{X}_{n+1}$), и эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ таково, что $f|_{\mathbb{X}_n}: \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ является 2^{-n} -изовариантным отображением для любого n , то f является изовариантным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть эквивариантное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ является α_n -изовариантным для любого $n \geq 1$, но не является изовариантным: $G_{f(x_0)} \setminus G_{x_0} \neq \emptyset$ для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{X}$. Из полунепрерывности сверху многозначного отображения, сопоставляющего точке ее стабилизатор, следует, что существуют $\delta > 0$ и такая окрестность $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0)$, что $G_{f(x_0)} \setminus N(G_x; \delta) \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathcal{U}$. Отсюда легко вывести, что отображение f не является 2^{-n} -изовариантным для некоторого n .

ТЕОРЕМА 15. Для полного метрического G -пространства $\mathbb{Y} \in \text{Equiv-AE}$ следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathbb{Y} \in \text{Isov-AE}$;
- (2) $\text{Isov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ плотно в $\text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ для любого G -пространства $\mathbb{X}$ (в “source limitation” топологии);
- (3) для любого $\varepsilon > 0$ множество $\text{Isov}_\varepsilon(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ всех ε -изовариантных отображений является плотным подмножеством в $\text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ для любого G -пространства $\mathbb{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства эквивалентности (2) $\Leftrightarrow$ (3) следует воспользоваться теоремой 14 и тем, что $\text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ обладает свойством Бэра (не являясь, однако, метризуемым пространством). Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2) изложено в [11].

Установим оставшуюся нетривиальную импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Так как $\mathbb{Y} \in \text{Equiv-AE}$, то любое частичное G -отображение $\mathbb{X} \leftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$ допускает G -продолжение $\hat{f}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Поскольку $\text{Isov}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}, \mathbb{Y}) \subset \text{Equiv}(\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}, \mathbb{Y})$ плотно, то существует такое изовариантное отображение $g: \mathbb{X} \setminus \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Y}$, что $\text{dist}(g(x), \hat{f}(x)) < \text{dist}(x, \mathbb{A})$ для всех $x \notin \mathbb{A}$. Легко проверить, что G -отображение $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, $\varphi|_{\mathbb{A}} = f$, $\varphi|_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}} = g$, является искомым.

Доказанная теорема имеет скорее чисто теоретический интерес, поскольку установить плотность $\text{Isov}_\varepsilon(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \text{Equiv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ для любого G -пространства $\mathbb{X}$ довольно сложно. Значительно бóльшую практическую ценность для детектирования Isov-AE -пространств имеет следующая

ТЕОРЕМА 16. Пусть $\mathbb{Y}$ есть локально компактное Equiv-AE -пространство. Тогда следующие условия попарно эквивалентны:

- (a) $\mathbb{Y} \in \text{Isov-AE}$;
- (b) для любого $\varepsilon > 0$ и любого G -отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$, определенного на компактном G -полиэдре $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}^G = \emptyset$, существует ε -изовариантное отображение $\tilde{f}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $\text{dist}(f, \tilde{f}) < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве следствия из теоремы 16 получаем, что любое компактное G -пространство $\mathbb{X}$, являющееся Equiv-AE -пространством и обладающее $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством (см. далее), является Isov-AE -пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим еще пару свойств, которые, как окажется, будут эквивалентны уже приведенным:

- (с) для любого $\varepsilon > 0$ и любого G -отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$, определенного на компактном G -полиэдре $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}^G = \emptyset$, существует изовариантное отображение $\tilde{f}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $\text{dist}(f, \tilde{f}) < \varepsilon$;
- (d) для любого $\varepsilon > 0$ и любого G -отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, определенного на G -ANE-компакте $\mathbb{X}$ с $\mathbb{X}^G = \emptyset$, существует ε -изовариантное отображение $\tilde{f}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $\text{dist}(f, \tilde{f}) < \varepsilon$.

План доказательства таков: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a). Исключая из рассмотрения тривиальную импликацию (a) $\Rightarrow$ (b) и почти тривиальную импликацию (b) $\Rightarrow$ (c) (которую легко извлечь из теоремы 14), подробно остановимся только на содержательных.

Доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (d) будет основываться на следующем факте.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbb{X}$ есть G -ANE-компакт с $\mathbb{X}^G = \emptyset$. Тогда для любого G -отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие компактный G -полиэдр $\mathbb{P}$ без G -неподвижных точек (т.е. $\mathbb{P}^G = \emptyset$) и G -отображения $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}$ и $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$, что g является ε -изовариантным отображением, а $\text{dist}(\psi \circ g, f) < \varepsilon/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\mathcal{O}(x_i) \mid i \leq n\} \in \text{cov } \mathbb{X}$ есть такое покрытие мелкости меньше ε (см. сноску ¹⁰), что для всех $i \leq n$ справедливо

$$(4) \text{diam } f(\mathcal{O}(x_i)) < \varepsilon/2;$$

$$(5) G_x \subset N(G_{x_i}; \varepsilon), \text{ как только } x \in \mathcal{O}(x_i) \text{ (см. теорему 5)}.$$

Пусть δ , $\delta < \varepsilon/2$, есть число Лебега покрытия $\{\mathcal{O}(x_i)\}$. В силу теоремы 6 существуют такие G -полиэдр $\mathbb{P}$ и G -отображения $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}$ и $h: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, что $\text{dist}(h \circ g, \text{Id}_{\mathbb{X}}) < \delta$. В частности,

(6) для любого $x \in \mathbb{X}$ существует окрестность $\mathcal{O}(x_i)$, содержащая x и $h(g(x))$. Следовательно, $\text{dist}(x, x_i) < \varepsilon$ и $G_{g(x)} < G_{h(g(x))} \subset N(x_i; \varepsilon)$; последнее справедливо в силу (6). Тем самым, отображением g является ε -изовариантным, а также

$$(7) \text{dist}(f(x), f(h(g(x)))) < \varepsilon/2.$$

В качестве искомого отображения ψ можно взять композицию $\mathbb{P} \xrightarrow{h} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$. Действительно, $\mathbb{P}^G = \emptyset$, поскольку $h(\mathbb{P}^G) \subset \mathbb{X}^G$. Кроме того, в силу (7) имеет место $\text{dist}(f(x), \psi(g(x))) < \varepsilon/2$.

Продолжаем доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (d), используя при этом обозначения из формулировки и доказательства леммы 5. По предположению существует изовариантное отображение $\tilde{\psi}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $\text{dist}(\psi, \tilde{\psi})$ меньше $\varepsilon/2$. Полагаем $\tilde{f}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ равным $\tilde{\psi} \circ g$. Так как $\text{dist}(\psi \circ g, f) < \varepsilon/2$ и $\text{dist}(\psi \circ g, \tilde{\psi} \circ g) < \delta < \varepsilon/2$, то $\text{dist}(f, \tilde{f}) < \varepsilon$. Кроме того, $\tilde{f}$ как композиция ε -изовариантного отображения g и изовариантного отображения $\tilde{\psi}$ будет ε -изовариантным отображением.

(d) $\Rightarrow$ (a): Поскольку локально компактное пространство орбит Y допускает собственное отображение на луч $[0, \infty)$, то можно считать, что $\mathbb{Y}$ является замкнутым инвариантным подпространством произведения $\mathbb{Q} \times [0, \infty) \in \text{IsoV-AE}$

¹⁰То есть диаметр каждого элемента покрытия меньше ε .

максимального эквивариантного гильбертова куба $\mathbb{Q}$ и луча. Поэтому для доказательства достаточно показать, что существует изовариантная ретракция $R: \mathbb{Q} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Y}$.

Далее обозначим $\mathbb{Q} \times [0, \infty)$ через $\mathbb{Z}$. Так как $\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Y} \cup \mathbb{Z}^G)$ локально компактно, то существует его *компактное исчерпывание* G -ANE-компактами $\mathbb{K}_1 \Subset \mathbb{K}_2 \Subset \mathbb{K}_3 \Subset \dots$, $\bigcup \{\mathbb{K}_i \mid i \geq 1\} = (\mathbb{Q} \times [0, \infty)) \setminus (\mathbb{Y} \cup \mathbb{Z}^G)$; ясно, что каждое из них имеет пустое множество неподвижных точек.

Поскольку $\mathbb{Y} \in \text{Equiv-AE}$, то существует G -ретракция $r: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$. Воспользуемся принципом переопределения G -отображений (см. предложение 7) и рассмотрим 2^{-1} -изовариантное отображение $h_1: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{Y}$, продолжающееся до такой G -ретракции $r_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$, что $\text{dist}(r, r_1) < \varepsilon_1$ и $r_1 = r$ на $\mathbb{Z}^G$. Далее рассмотрим 2^{-2} -изовариантное отображение $h_2: \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{Y}$, продолжающееся до такой G -ретракции $r_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$, что $\text{dist}(r_1, r_2) < \varepsilon_2$ и $r_2 = r$ на $\mathbb{Z}^G$. Читателю должно быть ясным, как далее продолжить построения.

За счет выбора аппроксимирующих констант $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ можно добиться того, чтобы существовал равномерный предел $R \doteq \lim_{i \rightarrow 0} r_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$, который по необходимости будет G -ретракцией. За счет еще более тщательного выбора аппроксимирующих констант ε_i можно добиться того, чтобы все ограничения $R|_{K_n} = \lim_{i \rightarrow 0} r_i|_{K_n}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ были 2^{-m} -изовариантными отображениями для всех $m \geq n$. В силу теоремы 14 каждое ограничение $R|_{K_n}$, как и вся ретракция $R: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$, будет изовариантным отображением. Теорема 16 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Опираясь на [11; теорема 8.3] и повторяя канву рассуждений, взятых из импликации (d) $\Rightarrow$ (a), можно доказать следующий полезный факт: “Если $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y} \in \text{IsoV-ANE}$ есть G -отображение, то для любой непрерывной G -функции $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow (0, 1)$ существует изовариантное отображение $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ со свойством $\text{dist}(f(z), g(z)) < \alpha(z)$ для любой $z \in \mathbb{Z}$ ”.

§ 6. G -дизъюнктивно аппроксимативное и $\mathbb{Z}$ -аппроксимативное свойства

Замкнутое G -подмножество $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ G -пространства $\mathbb{X}$ является $\mathbb{Z}$ -подмножеством, если в пространстве непрерывных G -отображений $C(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ (далее в этом параграфе пространства отображений рассматриваются с “target limitation” топологией) всюду плотно подмножество непрерывных G -отображений $C(\mathbb{X}, \mathbb{X} \setminus \mathbb{A})$. Скажем, что G -пространство $\mathbb{X}$ обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством относительно G -пространства $\mathbb{Y}$, если

- любое G -отображение $\varphi: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ как угодно близко аппроксимируется замкнутым $\mathbb{Z}$ -вложением $\tilde{\varphi}: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ ($\equiv G$ -вложением, образ которого является $\mathbb{Z}$ -подмножеством).

По-другому это условие выражается как плотность множества всех $\mathbb{Z}$ -вложений в пространстве $C(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.

Будем говорить, что локально компактное G -пространство $\mathbb{X}$ является $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным (или же $\mathbb{X}$ обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством), если оно обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством относительно всех локально компактных G -пространств.

Скажем, что G -пространство $\mathbb{X}$ обладает G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством относительно G -пространства $\mathbb{Y}$, если

- для любого $\varepsilon > 0$ и любого G -отображения $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ существуют G -отображения $f_1, f_2: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ ε -близких к f , для которых $f_1(\mathbb{Y}) \cap f_2(\mathbb{Y}) = \emptyset$.

Пространство $\mathbb{X}$ обладает G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством (G -DAP), если $\mathbb{X}$ обладает G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством относительно любого G -пространства.

ТЕОРЕМА 17. Пусть локально компактное G -пространство $\mathbb{X}$ одновременно является G -ANE- и G -DAP-пространством. Тогда для любого G -отображения $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$, определенного на G -компакте $\mathbb{W}$, и любого $\varepsilon > 0$ существует G -отображение $h: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$, индуцирующее Z -вложение $\tilde{h}: W \rightarrow X$ пространств орбит и такое, что $\text{dist}(f, h) < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Несложно показать, что пространство орбит X гомеоморфно $\mathbb{Q}$ -многообразию, однако пространство $\mathbb{X}$ не обязано быть $\mathbb{Q}$ -многообразием.

В процессе доказательства теоремы 17 пространство $\mathbb{X}$ будет локально компактным G -ANE-пространством и одновременно G -DAP-пространством. Сначала выведем ряд вспомогательных фактов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любого G -отображения $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ компактного G -пространства $\mathbb{W}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε -близкое к f G -отображение $h: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что индуцированное отображение $\tilde{h}: W \rightarrow X$ пространств орбит является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение расчленяющее семейство $\{\varphi_k: \mathbb{W} \rightarrow [0, 1] \mid k \geq 1\}$ G -функций, т.е. такое, что для любой G -окрестности $\mathbb{U} = \mathbb{U}(w)$ точки $w \in \mathbb{W}$ существует номер k такой, что $\varphi_k(w) = 0$, а $\varphi_k^{-1}(1)$ не пересекается с $\mathbb{U}$. В силу расчленяемости семейства $\{\varphi_k\}$ справедлива эквивалентность:

- (1) $G(w) = G(w')$ тогда и только тогда, когда $|\varphi_k(w) - \varphi_k(w')| < 1$ для любого $k \geq 1$.

ЛЕММА 6. Для любого G -отображения $F: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ и любого k существует как угодно близкое к F G -отображение $H: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $H(G(w)) = H(G(w'))$ влечет $|\varphi_k(w) - \varphi_k(w')| < 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{A} \Leftarrow \varphi_k^{-1}[0, 1/3]$ и $\mathbb{B} \Leftarrow \varphi_k^{-1}[2/3, 1]$ – непересекающиеся замкнутые G -подмножества. Поскольку F как угодно близко аппроксимируется G -отображениями F' и F'' , имеющими дизъюнктные образы, а $\mathbb{X} \in G$ -ANE, то в силу принципа переопределения эквивариантных отображений F как угодно близко аппроксимируется G -отображением $H: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ таким, что $H = F'$ на $\mathbb{A}$ и $H = F''$ на $\mathbb{B}$, т.е. $H(\mathbb{A})$ и $H(\mathbb{B})$ дизъюнкты. Ясно, что H есть искомое G -отображение.

Далее многократно применяем лемму 6: сначала отображение $f_1 \Leftarrow f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ как угодно близко аппроксимируем G -отображением $f_2: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ таким, что $f_2(G(w)) = f_2(G(w'))$ влечет $|\varphi_1(w) - \varphi_1(w')| < 2/3$. В силу компактности $\mathbb{W}$ следует, что существует $\delta_2 > 0$, для которого из $\text{dist}(f_2(G(w)), f_2(G(w'))) < \delta_2$

следует $|\varphi_1(w) - \varphi_1(w')| < 2/3$. Далее G -отображение $f_2: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ как угодно близко аппроксимируем G -отображением $f_3: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ таким, что $f_3(G(w)) = f_3(G(w'))$ влечет $|\varphi_2(w) - \varphi_2(w')| < 2/3$. Читателю должно быть ясным, как далее продолжить построения. В результате продолжения этого процесса будут построены G -отображения $\{f_n: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X} \mid n \geq 1\}$ и последовательность $\{\delta_n\}$ такие, что

- (2) f_{n+1} как угодно близко к f_n (заведомо меньше δ_n);
- (3) из $\text{dist}(f_n(G(w)), f_n(G(w'))) < \delta_n$ следует $|\varphi_i(w) - \varphi_i(w')| < 2/3$ для любого $i < n$.

Пусть G -отображение $h: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ есть равномерный предел $\lim f_i$. Из (3) следует, что $h(G(w)) = h(G(w'))$ влечет $|\varphi_i(w) - \varphi_i(w')| \leq 2/3$ для любого i , что вместе с (2) позволяет утверждать, что $h(G(w)) = h(G(w'))$ влечет $G(w) = G(w')$. Отсюда легко следует, что $\tilde{h}: W \rightarrow X$ есть вложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для любой последовательности $\{f_k: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X}\}$ G -отображений, определенных на G -компактах, и любой последовательности чисел $\{\varepsilon_k > 0\}$ существует такая последовательность $\{h_k: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X}\}$ G -отображений, что $\text{dist}(\tilde{f}_k, h_k) < \varepsilon_k$, $\text{Im } h_k \cap \text{Im } h_l = \emptyset$ для всех $k \neq l$, а индуцированное отображение $\tilde{h}_k: W_k \rightarrow X$ пространств орбит является вложением для всех $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество T всех последовательностей $\xi = \{\varphi_k: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X} \mid k \geq 1\}$ G -отображений, топологизировав T с помощью введения базисных окрестностей

$$N(\xi; \{\varepsilon_k > 0\}) = \{\zeta = \{\psi_k: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X}\} \mid \text{dist}(\varphi_k, \psi_k) < \varepsilon_k \text{ для всех } k \geq 1\}.$$

Варьируя последовательности $\{\varepsilon_k > 0\}$, мы получаем базис окрестностей для ξ . Ясно, что T не метризуемо, однако, легко проверить, обладает свойством Бэра. С помощью предложения 9 доказывается, что открытое подмножество

$$U_n = \{\zeta \in T \mid \psi_k(\mathbb{W}_k) \cap \psi_l(\mathbb{W}_l) = \emptyset \text{ для всех } k < l \leq n, \\ \tilde{\psi}_k: W_k \rightarrow X \text{ есть вложение для всех } k \leq n\}$$

является плотным в T . Далее следует воспользоваться свойством Бэра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 17. Пусть $\mathbb{W}_2 \subset \mathbb{W}_3 \subset \dots$ есть компактное исчерпывание локально компактного G -АНЕ-пространства $\mathbb{X}$. Легко проверяется, что для $\mathbb{X}$ свойство G — DAP эквивалентно тому, что для любого $k \geq 2$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют G -отображения $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X}$ ε -близкие к вложению $\mathbb{W}_k \hookrightarrow \mathbb{X}$, для которых $\varphi_1(\mathbb{X}) \cap \varphi_2(\mathbb{X}) = \emptyset$.

Рассмотрим заданное G -отображение $f_1 \rightleftharpoons f: \mathbb{W} \rightleftharpoons \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{X}$ и счетные плотные подмножества $\mathcal{A}_k \subset C(\mathbb{W}_k, \mathbb{X})$, $k \geq 2$, G -отображений. Представим $\bigcup \mathcal{A}_k$ в виде $\{f_i \mid i \geq 2\}$. К полученной последовательности $\{f_k \mid k \geq 1\}$ G -отображений и последовательности чисел $\{\varepsilon_k = 2^{-k} \cdot \varepsilon\}$ применим предложение 10 и получим счетное плотное подмножество отображений

$$\{h_k: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}\}_{k=1}^\infty \subset C(\mathbb{X}, \mathbb{X}), \quad \text{dist}(f_k, h_k) < \varepsilon_k,$$

имеющих взаимно дизъюнктные образы и индуцирующих вложение пространств орбит для всех $k \geq 1$. Легко проверяется, что G -отображение h_1 является искомым.

Если в теореме 17 усилить лишь часть условий (вместо $\mathbb{X} \in \text{Equiv-ANE}$ требовать $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$), то при этом существенно усиливается заключение этой теоремы.

ТЕОРЕМА 18. *Если локально компактное G -пространство $\mathbb{X}$ одновременно является IsoV-ANE- и G -DAP-пространством, то оно обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством.*

Далее будем использовать известный факт о том, что

- (4) локально компактное G -ANE-пространство обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством, если оно обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством относительно всех компактных G -пространств.

Поэтому теорема 18 будет следовать из предложений 11 и 12. До конца их доказательств $\mathbb{X}$ будет локально компактным IsoV-ANE- и G -DAP-пространством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Для любого G -отображения $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ компактного G -пространства $\mathbb{W}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует G -вложение $h: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $\text{dist}(f, h) < \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $C(\mathbb{W}, \mathbb{X})$ всех G -отображений рассмотрим открытое множество

$$U_n = \{ \varphi: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X} \mid \varphi \text{ есть } 2^{-n}\text{-изовариантное отображение,} \\ \tilde{\varphi}: W \rightarrow X \text{ есть } 2^{-n}\text{-отображение}^{11} \}.$$

Поскольку в силу леммы 7 $U_n \subset C(\mathbb{W}, \mathbb{X})$ открыто и плотно, то $\mathbb{U} = \bigcap \{ U_n \mid n \geq 1 \}$ есть плотное подмножество $C(\mathbb{W}, \mathbb{X})$ (теорема Бэра), состоящее из G -вложений.

ЛЕММА 7. *Множество U_n плотно в $C(\mathbb{W}, \mathbb{X})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 17 любое G -отображение $\varphi \in C(\mathbb{W}, \mathbb{X})$ как угодно близко аппроксимируется G -отображением $\varphi': \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$, у которого $\tilde{\varphi}': W \rightarrow X$ является 2^{-n} -отображением. Поскольку $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, φ' как угодно близко аппроксимируем изовариантным отображением, при этом можно считать, что индуцированное им отображение пространств орбит продолжает оставаться 2^{-n} -отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Для любой последовательности $\{f_k: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X}\}$ G -отображений и любой последовательности чисел $\{\varepsilon_k > 0\}$ существует такая последовательность $\{h_k: \mathbb{W}_k \rightarrow \mathbb{X}\}$ G -вложений, что $\text{dist}(f_k, h_k) < \varepsilon_k$ и $\text{Im } h_k \cap \text{Im } h_l = \emptyset$ для всех $k \neq l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Его мы проведем дословно аналогично рассуждениям из предложения 10. Только в качестве открытого подмножества U_n следует

ВЗЯТЬ

$$\begin{aligned} \{\zeta \in T \mid \psi_k(\mathbb{W}_k) \cap \psi_l(\mathbb{W}_k) = \emptyset \text{ для всех } i < j \leq n, \\ \psi_k: W_k \rightarrow X \text{ есть } G\text{-вложение для всех } k \leq n\}. \end{aligned}$$

На сей раз с помощью предложения 11 доказывается, что U_n является плотным в T . Далее следует воспользоваться свойством Бэра.

Следствие из эквивариантной версии теоремы Торунчика о характеристизации $\mathbb{Q}$ -многообразий (см. [2]) утверждает, что компактное G -АЕ-пространство $\mathbb{X}$ эквивормфно $\mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда $\mathbb{X}$ обладает $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством. Поскольку $\mathbb{Q} \in \text{IsoV-AE}$ и $\text{IsoV-AE} \subset G\text{-AE}$, то критерий $\mathbb{Q}$ -многообразий в силу теоремы 18 может быть сформулирован по-иному.

ТЕОРЕМА 19. *Компактное G -пространство $\mathbb{X} \cong_G \mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда одновременно $\mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$ и $\mathbb{X} \in G\text{-DAP}$.*

С учетом теоремы 19 для доказательства теорем 1 и 2 достаточно установить, что $\exp \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}$ и $\exp \mathbb{X} \in G\text{-DAP}$ (если G -пространство $\mathbb{X}$ удовлетворяет соответствующим условиям).

Из техники, развитой при доказательстве теоремы 16, извлечем еще один нужный нам результат:

ТЕОРЕМА 20. *Пусть $\mathbb{X}$ есть локально компактное IsoV-ANE -пространство и $\mathbb{X}^G$ обладает свойством DAP . Тогда следующие условия попарно эквивалентны:*

- (α) $\mathbb{X}$ обладает свойством $G\text{-DAP}$;
- (β) $\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^G$ обладает свойством $G\text{-DAP}$;
- (γ) $\mathbb{X}$ обладает свойством $G\text{-DAP}$ относительно компактных G -полиэдров с пустым множеством неподвижных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основывается на следующей схеме: (α) $\Rightarrow$ (β) $\Rightarrow$ (γ) $\Rightarrow$ (α). Поскольку импликация (α) $\Rightarrow$ (β) легко следует из свойства (4), а импликация (β) $\Rightarrow$ (γ) – из $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, то подробно остановимся на остающейся импликации (γ) $\Rightarrow$ (α). Ее доказательство с помощью теоремы 6 легко свести к следующему случаю:

- для любого $\varepsilon > 0$ и любого G -отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, определенного на компактном G -полиэдре $\mathbb{P}$, существуют G -отображения $f', f'': \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, имеющие дизъюнктные образы и такие, что $\text{dist}(f, f') + \text{dist}(f, f'') < \varepsilon$.

Поскольку $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}^G$ локально компактно, то возможно выбрать его компактное исчерпывание G -полиэдрами

$$\mathbb{P}_1 \Subset \mathbb{P}_2 \Subset \mathbb{P}_3 \Subset \dots, \quad \bigcup \{\mathbb{P}_i \mid i \geq 1\} = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}^G.$$

Ясно, что все $\mathbb{P}_i$ имеют пустые множества неподвижных точек. Так как по условию $\mathbb{X}^G \in \text{DAP}$, а $\mathbb{X}$ – IsoV-ANE -пространство, то из (γ) и принципа переоопределения G -отображений (см. предложение 7) следует, что f как угодно близко аппроксимируется G -отображениями $f_1, f_2: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, ограничения которых на $\mathbb{P}^G \cup \mathbb{P}_1$ являются изовариантными и имеют дизъюнктные образы.

Вновь воспользуемся $\mathbb{X}^G \in \text{DAP}$ и $\mathbb{X} \in \text{IsoV-ANE}$, тогда из (γ) и принципа переопределения G -отображений выводим, что каждое G -отображение f_i , $i = 1, 2$, как угодно близко аппроксимируется G -отображениями $f_{i1}, f_{i2}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}$, ограничения которых на $\mathbb{P}^G \cup (\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2)$ являются изовариантными и такими, что ограничения любых двух из имеющихся четырех отображений на $\mathbb{P}^G \cup (\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2)$ имеют дизъюнктные образы. Продолжаем этот процесс счетное число раз и строим G -отображения $f_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$, $i_k \in \{0, 1\}$, $1 \leq n < \infty$, удовлетворяющие свойствам изовариантности и дизъюнктности.

За счет выбора аппроксимирующих констант можно добиться того, чтобы существовали равномерные пределы

$$f' \Leftarrow \lim_{n \rightarrow 0} f_{\underbrace{11 \dots 1}_n}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X}, \quad f'' \Leftarrow \lim_{n \rightarrow 0} f_{\underbrace{22 \dots 2}_n}: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{X},$$

являющиеся в силу замечания 2 изовариантными отображениями. За счет еще более тщательного выбора аппроксимирующих констант можно добиться того, чтобы f' и f'' имели дизъюнктные образы.

Наконец, приведем обещанный пример компактного $\text{IsoV-AE}(0)$ - и одновременно G -АЕ-пространства $\mathbb{X}$, обладающего G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством, но не являющегося IsoV-ANE -пространством и, как следствие, не обладающего $\mathbb{Z}$ -аппроксимативным свойством. Для этого рассмотрим счетное число дизъюнктивных G -подмножеств $\bigsqcup \mathbb{X}_i \subset \mathbb{Q}$, каждое из которых эквивормфно $\mathbb{Q}$. Под *конусом* $\text{Con}_t(\mathbb{Y})$ *высоты* $t > 0$ *над* G -*пространством* $\mathbb{Y}$ мы понимаем факторпространство $(\mathbb{Y} \times [0, t])/\sim$ с единственным нетривиальным классом эквивалентности $\mathbb{Y} \times \{0\}$ (обозначаемым через $\{*\}$ и называемым вершиной конуса). Тогда искомым G -пространством является

$$\mathbb{X} = \left(\bigcup \{ \text{Con}_{2^{-n}}(\mathbb{X}_n) \mid n \geq 0 \} \right) \times \mathbb{Q} \subset ((\mathbb{Q} \times [0, 1])/\sim) \times \mathbb{Q}$$

– произведение компактного конуса над счетным дизъюнктивным объединением максимальных эквивариантных гильбертовых кубов на гильбертов куб.

Прежде всего отметим, что из свойства (5) (см. §3) легко следует, что для компактной группы Ли G пространство $\mathbb{Y}$ является $\text{IsoV-AE}(0)$ -пространством в том и только том случае, когда

- (*) для любой точки $y \in \mathbb{Y}$ и для любого класса сопряженных подгрупп (H) , $(H) \subset (G_y)$, существует такая сходящаяся последовательность $\{y_n\} \rightarrow y$, что $(G_{y_n}) = (H)$ для всех n .

Поскольку $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию (*), то $\mathbb{X}$ является $\text{IsoV-AE}(0)$ -пространством. Однако $\mathbb{X}$ не есть IsoV-ANE -пространство, так как не выполнено необходимое условие принадлежности G -пространства классу изовариантных окрестностных экстензоров: $\mathbb{X}_H = \bigsqcup \{ (\mathbb{X}_n)_H \times (0, 2^{-n}] \mid n \geq 0 \}$ не является АЕ-пространством (см. теорему 12).

Поскольку вершина $\{*\}$ конуса есть строгий деформационный G -ретракт $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X} \setminus \{*\}$ есть G -АНЕ (как дискретное объединение G -АЕ-пространств), то в силу теоремы 8 G -пространство $\mathbb{X} \in G\text{-АЕ}$. Наконец, G -пространство $\mathbb{X}$ обладает G -дизъюнктивным аппроксимационным свойством относительно как произведение G -АЕ-пространства и гильбертова куба $\mathbb{Q} \in \text{DAP}$.

§ 7. Рафинированные отображения

Пусть компактное G -пространство $\mathbb{X}$, удовлетворяет условию теоремы 3. В силу теоремы 16 для доказательства теоремы 3 достаточно установить следующий факт.

ТЕОРЕМА 21. *Для любого G -отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, определенного на компактном G -полиэдре $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}^G = \emptyset$, и для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε -изовариантные отображения $f_+, f_-: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, имеющие дизъюнктные образы и такие, что $\text{dist}(f, f_+) + \text{dist}(f, f_-) < \varepsilon$.*

Поскольку $(\exp \mathbb{X})^G = \exp X \cong Q$ и, следовательно, $(\exp \mathbb{X})^G \in \text{DAP}$, то в силу теоремы 20 установление $\mathbb{X} \in G - \text{DAP}$ (а следовательно, и теорем 1 и 2) также сводится к теореме 21.

В свою очередь, для доказательства теоремы 21 нам понадобится ввести целый ряд понятий и установить между ними необходимые взаимосвязи – этому посвящен данный и последующие параграфы. Сначала мы вводим в рассмотрение и изучаем класс так называемых *рафинированных G -отображений* $f: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, для которых возможно непосредственное обоснование теоремы 21. Затем исследуем возможность аппроксимации произвольных G -отображений рафинированными (см. § 8), что в итоге ведет к завершению доказательства теоремы 21 и получению всех основных результатов работы (см. § 9).

Поскольку открытое подмножество $\mathbb{X}_{\text{free}}$ плотно в $\mathbb{X}$ и не содержит изолированных точек, то несложно построить дизъюнктные в $\mathbb{X}$ плотные подмножества $Q_i \subset \mathbb{X}_{\text{free}}$, индексированные целыми числами, $i \in \mathbb{Z}$, такие, что

- (1) объединение $\bigcup Q_i$ пересекается с каждой орбитой не более чем по одной точке.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{Z}$ есть конечное подмножество целых чисел мощности $n \geq 6$. Ясно, что подмножество $Q_\Lambda = \prod \{Q_{\lambda_i} \mid 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{X}^n$ содержится в

$$L_\Lambda = \bigcup \{L_s \mid s \leq n\},$$

где

$$L_s = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{X}^n \mid x_i \in Q_{\lambda_i} \text{ для всех } i \neq s\}.$$

Множество L_Λ назовем Λ -*решеткой*, а Q_Λ – ее *узлами*. Ввиду плотности каждого $Q_i \subset \mathbb{X}$ узлы Q_Λ плотно содержатся в $\mathbb{X}^n$ и, следовательно, решетка L_Λ является плотным в $\mathbb{X}^n$ подмножеством.¹² Из свойства (1) и определения L_Λ следует, что

- для любого $\bar{x} \in L_\Lambda$ среди орбит $G(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, имеется $\geq n - 1$ различных.

Обозначим через $p_H(\bar{x})$, где $H < G$, а $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}^n$, следующее подмножество

$$\bigcup \{H \cdot x_i \mid i \leq n\} = H \cdot \text{supp } \bar{x} \in (\exp(\mathbb{X}))^H,$$

¹²Ранее, в § 4, было установлено, что вложение $L_\Lambda \hookrightarrow \mathbb{X}^n$ является аппроксимативно 1-мягким.

где $\text{supp } \bar{x} = \{x_i \mid i \leq n\}$. На этом пути возникает отображение $p_H: \mathbb{X}^n \rightarrow (\text{exp}(\mathbb{X}))^H$, которое при $H = \{e\}$ становится G -отображением

$$p: \mathbb{X}^n \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}, p(\bar{x}) = \text{supp } \bar{x} \in \text{exp } \mathbb{X}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Элемент $A \in \text{exp } \mathbb{X}$ называется (Λ, H) -*порожденным множеством* для $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ и $H < G$, если

$$A = g \cdot p_H(\bar{x}) = \bigcup \{g \cdot H \cdot x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

для некоторых $g \in G$ и $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_\Lambda$.

Мощность $|\Lambda|$ индексного множества будем называть *индексом* (Λ, H) -порожденного множества A . Ясно, совокупность всех (Λ, H) -порожденных множеств образует инвариантное подмножество $\text{exp } \mathbb{X}$.

Из определения (Λ, H) -порожденного множества $A = g \cdot p_H(\bar{x})$ легко следует

- (2) множество $A \subset \mathbb{X}$ пересекается не менее чем с $(|\Lambda| - 1)$ орбитами точек x_i , являющихся координатами $\bar{x}$, и содержится в объединении $|\Lambda|$ G -орбит.

Назовем G -орбиту *чистой* для (Λ, H) -порожденного множества $A = g \cdot p_H(\bar{x})$, если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q_\lambda$ и пересечение этой орбиты с A есть gHx_i для некоторого $g \in G$ и для некоторой координаты x_i . Из определения Λ -решетки и свойства (2) легко следует, что

- (3) множество A имеет $\geq |\Lambda| - 2$ чистых G -орбит.

Так как $\Lambda > 6$, то число чистых G -орбит у (Λ, H) -порожденного множества A не меньше 4.

ЛЕММА 8. Если A является (Λ, H) -порожденным множеством, то

$$\text{Symm}(A) = g \cdot H \cdot g^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G(x), x \in Q_\lambda$ — одна из чистых орбит A . Представим A в виде $(g \cdot H \cdot x) \sqcup A'$. Тогда

$$\text{Symm}(A) = \text{Symm}(g \cdot H \cdot x) \cap \text{Symm}(A').$$

Поскольку $x \in \mathbb{X}_{\text{free}}$, то $\text{Symm}(g \cdot H \cdot x) = g \cdot H \cdot g^{-1}$; поскольку $A = g \cdot p_H(\bar{x})$, то $g \cdot H \cdot g^{-1} \subset \text{Symm}(A')$ — лемма установлена.

Элемент $A \in \text{exp } \mathbb{X}$ называется (H) -*порожденным множеством*, если A является (Λ, H) -порожденным множеством для некоторого $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Из леммы 8 следует, что совокупность всех (H) -порожденных множеств содержится в $(\text{exp}(\mathbb{X}))_{(H)}$. Из предложения 6 и плотности $L_\Lambda \subset \mathbb{X}^n$ следует

ЛЕММА 9. Совокупность всех (H) -порожденных множеств образует плотное подмножество в $G \cdot (\text{exp}(\mathbb{X}))^H$ (см. сноску¹³), т.е. для любых $B \in G \cdot (\text{exp}(\mathbb{X}))^H$, $H < G$ и $\varepsilon > 0$ существует (Λ, H) -порожденное множество A для подходящего конечного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ такое, что $\text{dist}_H(A, B) < \varepsilon$.

¹³Тем самым совокупность всех (H) -порожденных множеств образует плотное подмножество в $(\text{exp}(\mathbb{X}))_{(H)}$.

Пусть имеются G -отображение $f: \mathbb{W} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ и n -элементное подмножество $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Ясно, что следующее подмножество

$$\mathbb{W}_{\Lambda, f} = \{w \in \mathbb{W} \mid f(w) \text{ является } (\Lambda, H)\text{-порожденным} \\ \text{для подгруппы } H < G, \text{ сопряженной } G_w\} \subset \mathbb{W},$$

которое для краткости записывается как $\mathbb{W}_\Lambda$, является инвариантным. Из леммы 8 следует, что ограничение $f|: \mathbb{W}_\Lambda \rightarrow \exp \mathbb{X}$ является изовариантным отображением.

Пусть теперь имеются несколько конечных подмножеств $\Lambda_i \subset \mathbb{Z}$, каждое мощности не меньше 6.

ЛЕММА 10. Если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, то $\mathbb{W}_{\Lambda_1} \cap \mathbb{W}_{\Lambda_2} = \emptyset$.

Доказательство этой леммы легко следует из нижеприводимого свойства, которое в свою очередь получается из свойства (3).

- (а) для любых дизъюнктивных подмножеств $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}$ пересечение Λ_1 -порожденного множества A с Λ_2 -порожденным множеством B пусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Скажем, что G -отображение $f: \mathbb{W} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ является *рафинированным*, если существует последовательность дизъюнктивных подмножеств $\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \Lambda_3 \sqcup \dots \subset \mathbb{Z}$ таких, что

- (b) $\mathbb{W} = \bigsqcup \{\mathbb{W}_{\Lambda_i} \mid i \geq 1\}$;
 (c) для любых двух точек w_1, w_2 , лежащих в $\mathbb{W}_{\Lambda_i}, i \geq 1$, существует не более одной G -орбиты, пересекающей $f(w_1)$ и $f(w_2)$.

Из условия (b) приведенного определения следует, что любое рафинированное G -отображение является изовариантным, а из условия (c) и леммы 10 – существует не более одной G -орбиты, пересекающей $f(w_1)$ и $f(w_2)$ для любых $w_i \in \mathbb{W}$.

Для усиления введенного выше понятие нам понадобится новое отношение порядка: скажем, что натуральное число k существенно больше l , $k \gg l$, если $k > l^2$. Ясно, что

- (d) для любых $a, b \in \mathbb{N}$ существует такое l_0 , что из $k \gg l > l_0$ следует $k > al + b$.

Отсюда легко следует

ЛЕММА 11. Для любого натурального числа a существует $m = m(a) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого упорядоченного набора натуральных чисел $\{n_1, \dots, n_b, \dots, n_c\}$, $1 < b \leq c \leq a$, удовлетворяющего неравенствам

$$m < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{b-1} \ll n_b = n_{b+1} = \dots = n_c, \quad (7.1)$$

справедливо неравенство $n_c/2 > a + (n_1 + \dots + n_{b-1})$.

Рафинированное G -отображение $f: \mathbb{W} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ назовем *усиленно m -рафинированным*, если для $\mathbb{W}_{\Lambda_i} = \mathbb{W}_{\Lambda_i, f}$ справедливо следующее

- (4) $\mathbb{W} = \mathbb{W}_{\Lambda_1} \sqcup \mathbb{W}_{\Lambda_2} \sqcup \dots$, где $\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \Lambda_3 \sqcup \dots \subset \mathbb{Z}$ и $m \leq |\Lambda_1| \ll |\Lambda_2| \ll |\Lambda_3| \ll \dots$.

Если в этом определении рассматривать только положительные индексные подмножества (т.е. $\Lambda_i \subset \mathbb{N}$), то возникает понятие *положительного усиленно m -рафинированного G -отображения*. Аналогичным образом можно рассматривать только отрицательные индексные подмножества (т.е. $(-\Lambda_i) \subset \mathbb{N}$). Из свойства (а) легко следует, что

- (5) любые два усиленно m -рафинированных G -отображения, одно из которых является положительным, а другое – отрицательным, имеют непесекающиеся образы.

Следующее утверждение является основным инструментом при обосновывании изовариантности строящихся отображений.

ТЕОРЕМА 22 (о гармонизации). *Пусть $f: \mathbb{W} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ есть усиленно m -рафинированное G -отображение для числа $m = m(a)$, взятого из леммы 11. Тогда для любого семейства точек*

$$\{w_k \in \mathbb{W}_{\Lambda_{i_k}} \mid 1 \leq k \leq c\} \subset \mathbb{W}, \quad 1 < c \leq a,$$

справедливо

$$\text{Symm}(f(w_1) \cup \dots \cup f(w_c)) \subset \text{Symm}(f(w_c)),$$

если индексы $\{i_k\}$ монотонно возрастают: $i_1 \leq \dots \leq i_c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $i_1 < \dots < i_{b-1} < i_b = \dots = i_c$ для $1 < b \leq c$. Поскольку $f(w_i)$ для каждого $i < b$ является (Λ_i, H_i) -порожденным множеством, то свойство (2) влечет, что $f(w_1) \cup \dots \cup f(w_{b-1})$ содержится в объединении $|\Lambda_{i_1}| + \dots + |\Lambda_{i_{b-1}}|$ орбит $\mathbb{X}$. В силу (с) совпадение индексов $|\Lambda_{i_b}| = \dots = |\Lambda_{i_c}|$ приводит к тому, что имеется не более $(c - b)$ орбит, которые пересекают одновременно $f(w_c)$ и $f(w_b) \cup \dots \cup f(w_{c-1})$. Следовательно, в силу (2) имеется

$$\begin{aligned} t &\geq (|\Lambda_{i_c}| - 1) - (c - b) - (|\Lambda_{i_1}| + \dots + |\Lambda_{i_{b-1}}|) \\ &\geq \frac{|\Lambda_{i_c}|}{2} + \left(\frac{|\Lambda_{i_c}|}{2} - a - (|\Lambda_{i_1}| + \dots + |\Lambda_{i_{c-1}}|) \right) \end{aligned}$$

орбит, которые пересекают $f(w_c)$, но не пересекают ни одно из множеств $f(w_i)$, $i < c$. Из леммы 11 следует, что последнее слагаемое неотрицательно, а следовательно, $t \geq |\Lambda_{i_c}|/2 \geq 3$. Поэтому среди таких орбит есть по крайней мере одна чистая орбита $f(w_c)$, скажем $G(x_0)$. Тем самым $G(x_0)$ пересекает множество $(f(w_1) \cup \dots \cup f(w_{c-1})) \cup f(w_c)$ по такому множеству gHx_0 , что $\text{Symm}(gHx_0) = \text{Symm}(f(w_c))$ (см. лемму 8). Тем самым

$$\begin{aligned} \text{Symm}(f(w_1) \cup \dots \cup f(w_c)) &\subset \text{Symm}(G(x_0) \cap (f(w_1) \cup \dots \cup f(w_c))) \\ &= \text{Symm}(gHx_0) = \text{Symm}(f(w_c)), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.

В заключение параграфа отметим, что теорема о гармонизации операций применяется единственный раз в самый ответственный момент при доказательстве предложения 15.

§ 8. Аппроксимация рафинированными путями

Мы продолжаем пользоваться вспомогательными множествами из предыдущего параграфа: $Q_i \subset \mathbb{X}_{\text{free}}, i \in \mathbb{Z}$ – дизъюнктные плотные подмножества, удовлетворяющие свойству (1) из § 7; Λ -решетка $L_\Lambda \subset \mathbb{X}^n$ и ее узлы Q_Λ для n -элементного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{Z}, n \geq 6$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Путь $s: I \rightarrow \mathbb{X}^n$ называется (ε, Λ) -рафинированным, где $\varepsilon > 0$, если $s(\dot{I})$ содержится в Λ -решетке L_Λ , а также

- (1) для любых $t_1, t_2 \in \dot{I} = (a, b)$, $|t_1 - t_2| \geq \varepsilon$, существует не более одной G -орбиты, на которой имеются как координаты точки $s(t_1) \in L_\Lambda$, так и координаты точки $s(t_2) \in L_\Lambda$.

Путь $s: I \rightarrow \mathbb{X}^n, \sigma(\dot{I}) \subset L_\Lambda$, называется Λ -рафинированным, если он является (ε, Λ) -рафинированным для любого $\varepsilon > 0$. Это эквивалентно тому, что для любых $t_1, t_2 \in \dot{I} = (a, b)$, $t_1 \neq t_2$, существует не более одной G -орбиты из $\mathbb{X}$, на которой имеются координаты обеих точек $s(t_1)$ и $s(t_2)$.

Фиксируем точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in \mathbb{X}^n$ и рассмотрим пространство $\mathcal{P}$ всех путей $s: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{X}^n$, соединяющих $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$. Введем в $\mathcal{P}$ топологию, базу которой образуют множества вида

$$\mathcal{O}(s, \alpha: \dot{I} \rightarrow \mathbb{R}^+) = \{\sigma: I \rightarrow \mathbb{X}^n \in \mathcal{P} \mid \text{dist}(\sigma(t), s(t)) < \alpha(t) \forall t \in \dot{I}\},$$

где $\alpha: \dot{I} \rightarrow \mathbb{R}^+$ – произвольная непрерывная функция. Варьируя непрерывные функции α , мы получаем базис окрестностей для пути s .

Следующее утверждение представляет собой основной технический результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 23. Для любого пути $s: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{X}^n \in \mathcal{P}$ и для любого n -элементного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{N}$ существует Λ -рафинированный путь $\sigma: I \rightarrow \mathbb{X}^n \in \mathcal{P}$, как угодно близкий к s (см. сноску ¹⁴).

Редуцируем эту теорему к более простому утверждению. Для этого заметим, что множество всех (ε, Λ) -рафинированных путей открыто в $\mathcal{P}$, а множество Λ -рафинированных путей есть счетное пересечение множеств (ε_i, Λ) -рафинированных путей для любой последовательности чисел $\{\varepsilon_i\} \rightarrow 0$. Ясно, что пространство $\mathcal{P}$ не метризуемо, однако обладает свойством Бэра. Поэтому справедливо следующее:

- (2) путь $s: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{X}^n \in \mathcal{P}$ как угодно близко аппроксимируется Λ -рафинированным путем тогда и только тогда, когда s как угодно близко аппроксимируется (ε, Λ) -рафинированным путем для любого $\varepsilon > 0$.

¹⁴Фраза “путь, как угодно близкий к s ” в данном случае означает, что берется путь $\sigma \in \mathcal{P}$, лежащий в как угодно малой окрестности $\mathcal{O}(s, \alpha)$.

В силу свойства (2) теорема 23 редуцируется к приведенному ниже утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует (ε, Λ) -рафинированный путь $\sigma: I \rightarrow \mathbb{X}^n \in \mathcal{P}$, как угодно близкий к $s: I \rightarrow \mathbb{X}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется функция $\alpha: \overset{\circ}{I} \rightarrow (0, 1)$, порождающая окрестность $\mathcal{O}(s, \alpha)$. Не теряя общности, можно считать, что отрезок $I = [a, b]$ совпадает с отрезком $[-\infty, \infty]$, а представление интервала $\overset{\circ}{I} = (-\infty, \infty)$ в виде объединения подотрезков $\bigcup \{[k, k+1] \mid k \in \mathbb{Z}\}$ таково, что диаметр образа $s([k, k+2])$ меньше ε для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Несложно установить существование такого плотного подмножества $\{\bar{q}_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset Q_\Lambda$, что i -координата $(\bar{q}_k)_i$ и j -координата $(\bar{q}_l)_j$ совпадают тогда и только тогда, когда $i = j$ и $k = l$. (Назовем его подмножеством узлов решетки L_Λ *общего положения*.)

Рассмотрим две точки $\bar{q}_k$ и $\bar{q}_{k+1}$. Если i -координаты $(\bar{q}_k)_i$ и $(\bar{q}_{k+1})_i$ для любого $i \leq n$ достаточно близки, то в силу локальной линейной связности $\mathbb{X}$ точки $\bar{q}_k$ и $\bar{q}_{k+1}$ можно соединить путем $\omega_k: I_k = [k, k+1] \rightarrow \mathbb{X}^n$ контролируемого размера. Несложно дополнительно добиться того, чтобы образ ω_k содержался в множестве

$$\{\bar{x} \in \mathbb{X}^n \mid \text{число координат } x_i, \\ \text{совпадающих с } i\text{-й координатой } \bar{q}_k \text{ или } \bar{q}_{k+1}, \geq n-1\},$$

а поскольку последнее множество содержится в L_Λ , то ω_k представляет собой путь в решетке L_Λ : $\omega_k: I_k = [k, k+1] \rightarrow L_\Lambda$. Тем самым отображение $\omega: (-\infty, \infty) \rightarrow L_\Lambda$, совпадающее с ω_k на I_k , корректно определено и непрерывно. Если дополнительно выбирать точки $\bar{q}_k$ еще более близко к $s(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, то отображение ω по непрерывности продолжится до пути $\sigma: I \rightarrow \mathbb{X}^n \in \mathcal{P}$. При еще более тщательном выборе точек $\bar{q}_k$ можно добиться того, чтобы путь σ лежал в окрестности $\mathcal{O}(s, \alpha)$.

Несложно видеть, что для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$, $|t_1 - t_2| > 2$, существует не более одной G -орбиты из $\mathbb{X}$, на которой имеются координаты как точки $\omega_k(t_1) \in \mathbb{X}^n$, так и точки $\omega_k(t_2) \in \mathbb{X}^n$. Поскольку $\text{diam}(s([k, k+2])) < \varepsilon$, то построенный путь ω является (ε, Λ) -рафинированным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что если множества $A = p_H(\bar{a})$ ($= H \cdot \text{supp } \bar{a}$) и $B = p_H(\bar{b})$ ($= H \cdot \text{supp } \bar{b}$) из $(\exp(\mathbb{X}))^H$, где $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{X}^k$, таковы, что для расстояний Хаусдорфа справедливо $\text{dist}_H(A, B) < \delta$ и $\text{dist}_H(A, \text{supp } \bar{a}) + \text{dist}_H(B, \text{supp } \bar{b}) < \delta$, то для любого m -элементного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, где $m \geq 2k$, существует такой путь $s: I \rightarrow \mathbb{X}^m$, что*

$$(3) \ s(\overset{\circ}{I}) \subset L_\Lambda, \text{ путь } p_H(s): I \xrightarrow{s} \mathbb{X}^m \xrightarrow{p_H} (\exp(\mathbb{X}))^H \text{ соединяет } A \text{ и } B \text{ и} \\ \text{diam}(p_H(s)) < \varepsilon \text{ (см. сноску }^{15}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из доказательства предложения 14 следует, что зависимость $\delta = \delta_\varepsilon$ можно выбрать непрерывной.

¹⁵Тем самым для любого $t \in \overset{\circ}{I}$, $(p_H(s))(t)$ является (Λ, H) -порожденным подмножеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таково, что любые две (2δ) -близкие точки из $\mathbb{X}$ соединяются путем диаметра меньше ε . Несложно подобрать такие точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in \mathbb{X}^m$, что $\text{supp}(\bar{x}_0) = \text{supp}(\bar{a})$ и $\text{supp}(\bar{x}_1) = \text{supp}(\bar{b})$, а расстояние $d(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ (т.е. максимум расстояний в $\mathbb{X}$ соответствующих координат $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$) совпадает с $\text{dist}_H(\text{supp}(\bar{a}), \text{supp}(\bar{b}))$. Отсюда следует, что $p_H(\bar{x}_0) = p_H(\bar{a}) = A$ и $p_H(\bar{x}_1) = p_H(\bar{b}) = B$.

Поскольку $\text{dist}_H(A, B) < \delta$ и $\text{dist}_H(A, \text{supp} \bar{a}) + \text{dist}_H(B, \text{supp} \bar{b}) < \delta$, то

$$d(\bar{x}_0, \bar{x}_1) = \text{dist}_H(\text{supp} \bar{a}, \text{supp} \bar{b}) < 2\delta.$$

Воспользуемся тем, что $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ и построим путь $\tilde{s}: I \rightarrow \mathbb{X}^m$ диаметра меньше ε , соединяющий точки $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$. Далее воспользуемся теоремой 23 и как угодно близко (в пространстве $\mathcal{P}$) аппроксимируем $\tilde{s}$ путем $s: I \rightarrow \mathbb{X}^m$, $s(I) \subset L_\Delta$.

§ 9. Доказательство основного результата

Для завершения доказательства теоремы 21 (и, следовательно, теорем 1, 2 и 3) будем предполагать, что имеется G -отображение $f: \mathbb{P} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$, определенное на компактном G -полиэдре $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}^G = \emptyset$, и задано $\varepsilon > 0$. Далее найдем такое число $\gamma > 0$, что

- (1) диаметр тела $\bigcup f(A)$ образа $f(A)$ меньше ε для любого множества $A \subset \mathbb{P}$, $\text{diam}(A) < \gamma$.

Зафиксируем на G -полиэдре $\mathbb{P}$ инвариантную метрику. В силу предложения 3 существуют G -триангуляция $\mathbb{T} = \{\Delta = \pi^{-1}(\delta) \mid \delta \in T\}$ и такая ($\leq a$)-значная (для некоторого $a \in \mathbb{N}$) G -ретракция $R: \mathbb{P} \rightarrow \text{exp}(\mathbb{P}^{(1)})$, что

- (2) $\text{diam}(\{p\} \cup R(p)) < \gamma$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

До конца статьи введем в рассмотрение число $m = m(a) \in \mathbb{N}$, строящееся по числу a в соответствии с леммой 11. Сначала с помощью теоремы 22 о гармонизации обоснуем теорему 21 для m -рафинированных G -отображений $f: \mathbb{P} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Пусть ограничение $h = f|_{\mathbb{P}^{(1)}}: \mathbb{P}^{(1)} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$ G -отображения f является усиленно m -рафинированным G -отображением для введенного числа m . Тогда G -ретракция $R: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}^{(1)}$ порождает непрерывное G -продолжение $\tilde{f} = \bigcup (h \circ R): \mathbb{P} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$ отображения $h: \mathbb{P}^{(1)} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$, которое является γ -изовариантным. Более того, G -отображение $\tilde{f}: \mathbb{P} \rightarrow \text{exp } \mathbb{X}$ является ε -близким к f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств (1) и (2) следует, что $\text{diam}(f(\{p\} \cup R(p))) < \varepsilon$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Отсюда и из формулы $\tilde{f}(p) = h(R(p)) = f(R(p))$ следует, что $\text{dist}(\tilde{f}, f) < \varepsilon$.

Поскольку $h = f|_{\mathbb{P}^{(1)}}$ является усиленно m -рафинированным и, следовательно, является изовариантным отображением, то для доказательства γ -изовариантности отображения $\tilde{f}$ достаточно установить следующее свойство:

- (3) для произвольной точки $p \notin \mathbb{P}^{(1)}$ существует точка $q \in \mathbb{P}^{(1)}$, $\text{dist}(p, q) < \gamma$, стабилизатор $G_{\tilde{f}(p)}$ которой содержится в стабилизаторе G_q .

Но это свойство непосредственно следует из замечания к предложению 22, поскольку подмножество $R(p) \subset \mathbb{P}^{(1)}$ состоит из $\leq a$ элементов $\{w_k\}$, $\tilde{f}(p) = \bigcup f(w_k)$ и $\text{dist}(p, w_k) < \gamma$ для любого $k \leq a$.

Теперь нам осталось научиться ограничить произвольного G -отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ как угодно близко аппроксимировать усиленно m -рафинированными G -отображениями (как положительными, так и отрицательными). Это позволит в силу предложения 15 и свойства (5) из § 7 аппроксимировать f ε -близко ε -изовариантными отображениями $f_+, f_-: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, имеющими дизъюнктные образы.

ТЕОРЕМА 24. *Для любого числа m G -отображение $f: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ как угодно близко аппроксимируется G -отображением $\tilde{f}: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, у которого ограничение $\tilde{f}|_{\mathbb{P}^{(1)}}$ является положительным (отрицательным соответственно) усиленно m -рафинированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\exp \mathbb{X} \in G\text{-AE}$ (см. теорему 7), то с помощью принципа переопределения G -отображений (см. предложение 7) несложно свести теорему 24 к следующему предложению 16.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Для любого числа m и для любого $\varepsilon > 0$ ограничение $f|_{\mathbb{P}^{(1)}}: \mathbb{P}^{(1)} = \pi^{-1}(P^{(1)}) \rightarrow \exp \mathbb{X}$ ε -близко аппроксимируется G -отображением $\varphi: \mathbb{P}^{(1)} \rightarrow \exp \mathbb{X}$, являющимся положительным (отрицательным соответственно) усиленно m -рафинированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты и определенности построим только лишь положительное усиленно m -рафинированное отображение $\tilde{f}|_{\mathbb{P}^{(1)}}$. Для этого в первую очередь упорядочим следующие элементы триангуляции T :

- вершины из $P^{(0)} - v_1, \dots, v_s$ (и соответствующие им срезы $v_i^* \in \pi^{-1}(v_i)$), а также ребра из 1-мерного остова $P^{(1)} - r_1, r_2, \dots, r_t$ (и соответствующие им срезы r_i^* , лежащие в G -ребре $\mathbb{R}_i \equiv \pi^{-1}(r_i)$);

обозначим также

- соответствующие вершинам и ребрам группы симметрий $K_i = \text{Symm}(v_i^*)$, $i \leq s$, и $H_i = \text{Symm}(r_i^*)$, $i \leq t$.

Далее покажем, что с самого начала можно считать, что имеет место следующая

ЛЕММА 12. *Ограничение на остов $\mathbb{P}^{(0)} = \pi^{-1}(P^{(0)})$ исходного G -отображения $f: \mathbb{P} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ является положительным усиленно m -рафинированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для любого $i \leq s$ группа симметрии $K_i = \text{Symm}(v_i^*)$ среза v_i^* вершины содержится в стабилизаторе $G_{f(v_i^*)}$ его образа, то можно воспользоваться леммой 9 и аппроксимировать $f(v_i^*)$ как угодно близко (Λ_i, K_i) -порожденным множеством $A_i \in \exp \mathbb{X}$, $\text{Symm } A_i = K_i$, имеющим индекс больше m . Несложно дополнительно добиться того, чтобы подмножества $\{\Lambda_i \subset \mathbb{N} \mid i \leq s\}$ были дизъюнктными и выполнялись неравенства $m < |\Lambda_1| \ll |\Lambda_2| \ll \dots \ll |\Lambda_s|$. Тем самым ограничение $f|_{\mathbb{P}^{(0)}}: \mathbb{P}^{(0)} \rightarrow \exp \mathbb{X}$ как угодно близко аппроксимируется G -отображением

$$\varphi: \mathbb{P}^{(0)} = \coprod \{G(v_i^*) \mid v_i \in P^{(0)}, i \leq s\} \rightarrow \exp \mathbb{X}, \quad \varphi(g \cdot v_i^*) = g \cdot A_i,$$

являющимся, как легко видеть, положительным усиленно m -рафинированным. Поскольку $\exp \mathbb{X} \in G\text{-АЕ}$, то для завершения доказательства леммы вновь следует воспользоваться принципом переопределения G -отображений.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 16. Рассмотрим произвольное G -ребро $G \cdot r_i^*$ порожденное срезом r_i^* над ребром $r_i \subset P^{(1)}$, $i \leq t$. Не теряя общности, можно считать, что ребро r_i совпадает с отрезком $[-\infty, \infty]$. Поскольку орбитная проекция гомеоморфно отображает срез r_i^* на ребро r_i , то далее будем отождествлять срез r_i^* с ребром $r_i = [-\infty, \infty] \subset P^{(1)}$, который (т.е. срез) нам удобно будет обозначать через $r_i^*[-\infty, \infty]$.

Пусть $\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \varepsilon/2)$ есть такое непрерывное отображение, что

- (4) если непрерывное отображение $g: r_i^*(-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i \leq t$, удовлетворяет неравенству $\text{dist}(f(\tau), g(\tau)) < \max\{\gamma(\tau') \mid |\tau - \tau'| \leq 2\}$ для любого $\tau \in r_i^*(-\infty, \infty)$, то g остается непрерывным, если его доопределить следующим образом: $g(-\infty) = f(-\infty)$ и $g(\infty) = f(\infty)$.

Введем в рассмотрение зависимость $\delta(t) = \delta_{\gamma(t)} > 0$ из предложения 14, которую можно считать непрерывной по $t \in (-\infty, \infty)$ ввиду замечания 6. После этого представим интервал $r_i^*(-\infty, \infty) \subset r_i^*[-\infty, \infty]$, лежащий в $\mathbb{P}_{H_i}$, где $H_i = \text{Symm}(r_i^*)$, в виде объединения счетного числа подотрезков $\{I_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ так, чтобы

- (5) для любого $k \in \mathbb{Z}$ справедливо $\text{diam } I_k < 2$ и $\text{diam } f(I_k) < \delta_k \iff \min\{\delta(t) \mid t \in I_k\}$.

Пусть $\gamma_k \equiv \max\{\gamma(t) \mid t \in I_k\} < \varepsilon/2$. Ясно, что свойство (4) трансформируется в следующее

- (6) если непрерывное отображение $g: r_i^*(-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет неравенству $\text{dist}(f(t), g(t)) < \gamma_k$ для любого $t \in I_k$, то g остается непрерывным, если его доопределить следующим образом: $g(-\infty) = f(-\infty)$ и $g(\infty) = f(\infty)$.

Не теряя общности, можно считать, что такое представление $\{I_k\}$ есть $\bigcup\{r_i^*[k, k+1] \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ясно, что $f(r_i^*(-\infty, \infty)) \subset (\exp \mathbb{X})^{H_i}$, где $H_i = \text{Symm}(r_i^*)$.

Образуем из полученных подотрезков отрезка $r_i^*[-\infty, \infty]$ и их граничных точек счетное множество

$$\mathcal{L} = \{r_i^*[k, k+1], r_i^*[k], r_i^*[-\infty], r_i^*[\infty] \mid k \in \mathbb{Z}, i \leq t\},$$

которое занумеруем натуральными числами так, чтобы

- (7) номера элементов $r_i^*[k]$ и $r_i^*[k+1]$ всегда предшествовали номеру элемента $r_i^*[k, k+1]$ для всех k и i .

Тем самым $r_i^*[k-1, k]$ и $r_i^*[k, k+1]$ имеют большие номера, нежели $r_i^*[k]$. Не теряя общности, можно считать, что $\{r_i^*[-\infty], r_i^*[\infty] \mid i \leq t\}$ занумерованы первыми.

Доказательство предложения 16 будет завершено, если мы сумеем построить последовательность дизъюнктивных подмножеств $\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \Lambda_3 \sqcup \dots \subset \mathbb{Z}^+$ таких, что $m \leq |\Lambda_1| \ll |\Lambda_2| \ll |\Lambda_3| \ll \dots$, и G -отображение $\varphi: \mathbb{W} \rightrightarrows \mathbb{P}^{(1)} \rightarrow \exp G$, для которого $\text{dist}(\varphi, f) < \varepsilon$, $\varphi = f \upharpoonright_{\mathbb{P}^{(0)}}$, а также $\mathbb{W} = \bigsqcup\{\mathbb{W}_{\Lambda_j} \mid j \geq 1\}$ – см. определение усиленно m -рафинированного отображения.

Построение искомого G -отображения φ будем осуществлять последовательно, индукцией по только что установленному упорядочению на $\mathcal{L}$ так, что при этом

- (8) каждое множество $\mathbb{W}_{\Lambda_j} = \{w \in \mathbb{W} \mid \varphi(w) \text{ является } (\Lambda_j, K)\text{-порожденным для подгруппы } K < G, \text{ сопряженной } G_w\}$ будет совпадать с одним из следующих инвариантных подмножеств:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_i[k, k+1] &\Rightarrow G \cdot (r_i^*[k, k+1]), & \mathbb{W}_i[k] &\Rightarrow G \cdot (r_i^*[k]), \\ \mathbb{W}_i[-\infty] &\Rightarrow G \cdot (r_i^*[-\infty]), & \mathbb{W}_i[\infty] &\Rightarrow G \cdot (r_i^*[\infty]);\end{aligned}$$

- (9) на $(n+1)$ -м шаге G -отображение φ будет определено на объединении первых $n+1$ элементов множества $\mathcal{L}$ и будет являться продолжением φ , построенным на n -м шаге.

База индукции имеет место, так как на $\mathbb{W} \cap \mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}^{(0)}$ отображение φ совпадает с усиленно m -рафинированным отображением $f|_{\mathbb{P}^{(0)}}$. Предположим, что φ задано на первых n элементах $\mathcal{L}$.

Если $(n+1)$ -й элемент $\mathcal{L}$ есть точка $r_i^*[k] \in \mathbb{P}_H$, то в качестве ее образа $\varphi(r_i^*[k])$ берем любое как угодно близкое к $f(r_i^*[k])$ множество $A_{n+1} \in \exp \mathbb{X}$, являющееся (Λ_{n+1}, H) -порожденным. При этом подбираем индексное подмножество $\Lambda_{n+1} \subset \mathbb{N}$ так, чтобы оно было дизъюнктно ко всем построенным ранее Λ_j и чтобы $|\Lambda_{n+1}| \gg |\Lambda_n|$. Теперь рассматриваем частичное G -отображение, которое совпадает с f вне объединения $\mathbb{W}_i[k-1, k] \cup \mathbb{W}_i[k, k+1]$ и принимает значение A_{n+1} в точке $r_i^*[k]$. После этого применяем к нему *принцип переопределения G -отображений* – G -отображение φ будет построено на объединении первых $(n+1)$ элементов множества $\mathcal{L}$. Не теряя общности, можно считать, что построенное отображение φ с самого начала совпадало с отображением f .

Если же $(n+1)$ -й элемент $\mathcal{L}$ есть отрезок $r_i^*[k, k+1] \subset \mathbb{P}_{H_i}$, то в силу свойства (7) на точках $r_i^*[k]$ и $r_i^*[k+1]$ отображение f уже было перестроено в соответствии с индуктивным предположением из свойства (8): в частности, $A \Rightarrow f(r_i^*[k])$ и $B \Rightarrow f(r_i^*[k+1])$ являются (H_i) -порожденными множествами, принадлежащими $(\exp \mathbb{X})_{H_i}$, и $\text{dist}_H(A, B) < \delta_k$ (см. свойство (5)). Поэтому возможно представить A в виде $p_{H_i}(\bar{a})$ и $B = p_{H_i}(\bar{b})$ для таких $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{X}^l$, что $\text{dist}_H(A, \text{supp } \bar{a}) + \text{dist}_H(B, \text{supp } \bar{b}) < \delta_k$.

Тогда для подмножества $\Lambda_{n+1} \subset \mathbb{N}$, дизъюнктного ко всем построенным ранее Λ_i и такого, что $|\Lambda_{n+1}| \gg l^2 + |\Lambda_n|$, применимо предложение 14. Тем самым существует такой путь

$$s: r_i^*[k, k+1] \rightarrow \mathbb{X}^{|\Lambda_{n+1}|}, \text{Im } s \subset L_{\Lambda_{n+1}},$$

что путь $p_{H_i}(s): r_i^*[k, k+1] \rightarrow (\exp(\mathbb{X}))^{H_i}$ (см. сноску ¹⁶) соединяет A и B и имеет диаметр меньше, чем $\gamma_k = \max\{\gamma(t) \mid t \in r_i^*[k, k+1]\} < \varepsilon/2$.

Теперь если переопределить G -отображение f только на $\mathbb{W}_i[k, k+1]$ так, чтобы оно совпадало с $p_{H_i}(s)$ на $r_i^*[k, k+1]$, то G -отображение φ будет построено на объединении первых $(n+1)$ элементов множества $\mathcal{L}$. Считая, что построенное

¹⁶В действительности, $p_{H_i}(s)$ переводит $r_i^*[k, k+1]$ в $(\exp \mathbb{X})_{H_i}$.

отображение φ с самого начала совпадало с отображением f на объединении первых $n + 1$ элементов $\mathcal{L}$, продолжаем индуктивные построения далее.

Поскольку $\text{dist}(\varphi(t), f(t)) < \max\{\gamma(t) \mid t \in r_i^*[k, k + 1]\}$ для любого $t \in r_i^*(-\infty, \infty)$, то в силу свойства (6) построенное G -отображение $\varphi: W \rightarrow \exp X$ будет являться непрерывным. Несложно проверить, что φ является искомым G -отображением – тем самым доказательство предложения 16 будет завершено.

§ 10. Замечание к работе Торунчика–Веста [14]

Один из главных результатов [14], касающихся гомотопических свойств пространства орбит экспоненты $\exp(S^1)$, состоит в обнаружении того, что

- (1) пространство орбит $(\exp(S^1))/S^1$ без неподвижной точки есть пространство Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Q}; 2)$.

В свою очередь, этот результат выводится из следующих утверждений (2)–(4):

- (2) $(\exp(S^1))_{\leq H}/H$ есть АЕ-пространство для любой собственной подгруппы $H < G$;
- (3) вложение $(\exp(S^1))_{\leq K}/S^1 \hookrightarrow (\exp(S^1))_{\leq H}/S^1$ индуцирует умножение на целое число $|H/K|$ в двумерной гомотопической группе π_2 , если $K < H \not\leq S^1$;
- (4) $(\exp(S^1))_{\leq H}/S^1$ есть пространство Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}; 2)$ для любой подгруппы $H \not\leq G$.

Раскручивая далее логическую схему доказательства основного результата работы [14], выделим основные моменты, на которых основан вывод свойств (2)–(4):

- (5) для любой $x \in (\exp(S^1))_{\leq H}$ существует инвариантная окрестность $U \subset (\exp(S^1))_{\leq H}$ и существует S^1 -гомотопия $f_t: U \rightarrow (\exp(S^1))_{\leq H}$ такая, что и $f_t((\exp(S^1))_K) \subset (\exp(S^1))_K$ для всех $K < H$ и $0 \leq t < 1$ (см. сноску¹⁷);
- (6) $(\exp(S^1))_{< H} \hookrightarrow (\exp(S^1))_{\leq H}$ есть гомотопически плотное вложение для любой подгруппы $H < G$.

К сожалению, обоснование свойств (5), (6) в статье [14] проведено не убедительно. Так, лемма 1 из этой работы содержит типичную ошибку (которая повторяется, например, в [28]), на которую указано в замечании 1. Дж. Вест сообщил нам, что все же часть результатов (однако не все: например, это не относится к лемме 9) может быть спасена, если проделать подходящие изменения в лемме 1. Еще один изъян содержится в лемме 6, в результате чего ее доказательство в представленном виде не верно.

§ 11. Заключение

Обсудим ряд задач и гипотез, возникающих в связи с исследуемой эквивариантной версией теоремы Кертиса–Шори–Веста. Как уже отмечалось, необходимым условием для того, чтобы $\exp X \cong_G \mathbb{Q}$ является компактность $\text{AE}(1)$ -

¹⁷Это свойство близко по формулировке к понятию IsoV -локальной стягиваемости.

пространства $\mathbb{X}$ и нетривиальность пространства орбит X . Однако имеется и еще одно условие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть действующая группа G есть компактная группа Ли, $\sqcup\{\mathbb{X}_{(H_i)} \mid i \geq 1\} \subset \mathbb{X}$ – орбитный остов $\mathbb{X}$. Если $\exp \mathbb{X} \in \text{IsoV-AE}(0)$, то все H_i являются простыми подгруппами в G .

Сразу же поясним встретившееся новое понятие. Подгруппа $H < G$ называется *простой подгруппой*, если в H нет нетривиальных (т.е. отличных от $\{e\}$ и от H) нормальных подгрупп $K < G$. Если $H = G$, то $H < G$ простая подгруппа в том и только том случае, когда G есть простая группа.

Если H есть простая группа, то $H < G$ простая подгруппа. Обратное, конечно, не верно: $\text{SO}(2) < \text{SO}(3)$ есть простая подгруппа, но не простая группа.

Указание к доказательству предложения 17: показать, что в $\exp(\mathbb{X}_{(H_i)})$ всюду плотно множество конечных подмножеств $A \subset \mathbb{X}_{(H_i)}$, пересекающих каждую орбиту не более чем по одной точке.

В связи с полученным новым необходимым условием возникает весьма правдоподобное предположение:

ГИПОТЕЗА 1. Пусть на невырожденном G -континууме Пеано $\mathbb{X}$ действует компактная группа Ли G . Тогда $\exp \mathbb{X} \cong_G \mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда все H_i являются простыми подгруппами в G , где $\sqcup\{\mathbb{X}_{(H_i)} \mid i \geq 1\} \subset \mathbb{X}$ есть орбитный остов $\mathbb{X}$.

Вот еще несколько интересных вопросов. Верно ли, что связная экспонента $\exp_c(\text{SO}(3))$ является IsoV-AE-пространством? Верно ли, что пространство вероятностных мер $P(G)$ на компактной связной группе Ли G является IsoV-AE-пространством? Было бы интересно разобраться с экспонентой локально компактной группы Ли.

В заключение мне хотелось сердечно поблагодарить профессоров В. В. Беляш-Кривца и В. И. Черноусова за консультации, внесшие весомый вклад в завершение этой статьи.

Ключевой прием статьи состоит в использовании для построения продолжений, сохраняющих орбитный тип точек, техники ε -изовариантных отображений. Мне приятно отметить, что своим появлением эта идея обязана беседам с профессором Э. Тимчатиным во время визита в Университет Саскатчевана.

Список литературы

- [1] J. van Mill, *Infinite-dimensional topology, prerequisites and introduction*, North-Holland Math. Library, **43**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989, xii+401 pp.
- [2] С. М. Агеев, “Многообразия, моделируемые эквивариантным гильбертовым кубом”, *Матем. сб.*, **185**:12 (1994), 19–48; англ. пер.: S. M. Ageev, “Manifolds modeled by an equivariant Hilbert cube”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **83**:2 (1995), 445–468.
- [3] A. Teleiko, “Equivariant Hilbert cubes and their functorial representations”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **3**:2 (1997), 72–82.
- [4] A. Teleiko, M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*, Math. Stud. Monogr. Ser., **5**, VNTL Publ., L’viv, 1999, 263 pp.

- [5] M. Steinberger, J. West, “On the geometric topology of locally linear actions of finite groups”, *Geometric and Algebraic Topology*, Banach Center Publ., **18**, PWN, Warsaw, 1986, 181–204.
- [6] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971, 291 с.; пер. с англ.: K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monogr. Mat., **44**, PWN, Warsaw, 1967, 251 pp.
- [7] Sze-tsen Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965, 234 pp.
- [8] R. Palais, *The classification of G -spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 36, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1960, iv+72 pp.
- [9] С. М. Агеев, “Классификация пространств”, *Известия РАН*, **78** (1995), 223–255.
- [10] С. М. Агеев, Д. Реповш, “Задача о распространении накрывающей гомотопии для компактных групп преобразований”, *Матем. заметки*, **92**:6 (2012), 803–818; англ. пер.: S. M. Ageev, D. D. Repovš, “The covering homotopy extension problem for compact transformation groups”, *Math. Notes*, **92**:6 (2012), 737–750.
- [11] С. М. Агеев, “Универсальные G -пространства Пале и изовариантные абсолютные экстензоры”, *Матем. сб.*, **203**:6 (2012), 3–34; англ. пер.: S. M. Ageev, “On Palais universal G -spaces and isovariant absolute extensors”, *Sb. Math.*, **203**:6 (2012), 769–797.
- [12] С. М. Агеев, “Изовариантные экстензоры и характеристика эквивариантных гомотопических эквивалентностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 3–28; англ. пер.: S. M. Ageev, “Isovariant extensors and the characterization of equivariant homotopy equivalences”, *Izv. Math.*, **76**:5 (2012), 857–880.
- [13] T. tom Dieck, *Transformation groups*, De Gruyter Stud. Math., **8**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987, x+312 pp.
- [14] H. Toruńczyk, J. E. West, “The fine structure of S^1/S^1 ; a Q -manifold hyperspace localization of the integers”, *Proceedings of the International conference on geometric topology* (Warsaw, 1978), PWN, Warsaw, 1980, 439–449.
- [15] С. М. Агеев, С. А. Богатый, “О негомеоморфности компакта Банаха–Мазура гильбертову кубу”, *УМН*, **53**:1(319) (1998), 209–210; англ. пер.: S. M. Ageev, S. A. Bogatyĭ, “The Banach–Mazur compactum is not homeomorphic to the Hilbert cube”, *Russian Math. Surveys*, **53**:1 (1998), 205–207.
- [16] S. M. Ageev, S. A. Bogatyĭ, *The Banach–Mazur compactum in the dimension two*, Topology Atlas preprint № 291, 1997, 8 pp., <http://at.yorku.ca/p/a/a/m/14.htm>.
- [17] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure Appl. Math., **46**, Academic Press, New York–London, 1972, xiii+459 pp.
- [18] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, 2-е изд., Физматлит, М., 2006, 332 с.
- [19] S. Illman, “The equivariant triangulation theorem for actions of compact Lie groups”, *Math. Ann.*, **262**:4 (1983), 487–501.
- [20] J. van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland Math. Library, **64**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001, xii+630 pp.
- [21] H. Abels, “A universal proper G -space”, *Math. Z.*, **159**:2 (1978), 143–158.
- [22] T. Matumoto, “Equivariant K -theory and Fredholm operators”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math.*, **18** (1971), 109–125.
- [23] M. Murayama, “On G -ANR’s and their G -homotopy types”, *Osaka J. Math.*, **20** (1983), 479–512.
- [24] С. М. Агеев, Д. Реповш, “О продолжении действий групп”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 3–28; англ. пер.: S. M. Ageev, D. Repovš, “On extending actions of groups”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 159–182.
- [25] Б. А. Пасынков, “О размерности и геометрии отображений”, *Докл. АН СССР*, **221**:3 (1975), 543–546; англ. пер.: B. A. Pasynkov, “On the dimension and geometry of mappings”, *Soviet Math. Dokl.*, **16**:2 (1975), 384–388.

- [26] С. М. Агеев, “Об одной задаче Замбахидзе–Смирнова”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 3–11; англ. пер.: S. M. Ageev, “On a problem of Zambakhidze–Smirnov”, *Math. Notes*, **58**:1 (1995), 679–684.
- [27] R. A. McCoy, I. Ntantu, *Topological properties of spaces of continuous functions*, *Lecture Notes in Math.*, **1315**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, iv+124 pp.
- [28] S. A. Antonyan, *The topology of the Banach–Mazur compactum*, Preprint № 558, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 1997.

Сергей Михайлович Агеев

(Sergey M. Ageev)

Белорусский государственный университет,

г. Минск, Белоруссия

E-mail: ageev_sergei@inbox.ru

Поступила в редакцию

29.12.2014 и 20.07.2015