Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Темляков, Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 11, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:05:09

УДК 517.518.8

В. Н. Темляков

Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости

Исследуется несколько задач теории приближений для классов функций смешанной гладкости. Техника, основанная на комбинации результатов, полученных в 1980–90-х гг. в теории приближений многочленами с гармониками из гиперболических крестов, и недавних результатов по жадным аппроксимациям, используется для вывода точных оценок наилучших m -членных приближений по тригонометрической системе. Приводятся некоторые наблюдения относительно численного интегрирования и приближенного восстановления функций смешанной гладкости. Доказаны оценки снизу, показывающие, что точность разреженных сеточных методов с сеткой из $\asymp 2^n n^{d-1}$ узлов нельзя улучшить добавлением 2^n произвольных точек. В применении к численному интегрированию эти оценки дают наилучшие из известных оценок снизу точности вычислений с помощью оптимальных кубатурных формул или кубатурных формул, основанных на редких сетках.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: нелинейное приближение, разреженное приближение, тригонометрическая система, конструктивные методы.

DOI: 10.4213/sm8466

§ 1. Введение

Разреженные приближения по словарям – важный вопрос в теории многомерных приближений. Основным побудительным мотивом исследования таких приближений является тот факт, что многие из сигналов, встречающихся на практике, можно хорошо приблизить разреженными. Разреженные приближения автоматически предполагают необходимость использования нелинейных и, в частности, жадных аппроксимаций.

Дадим краткое описание задачи о разреженных приближениях и обсудим полученные в настоящей работе результаты и их связи с ранее известными. В общей постановке мы имеем дело с банаховым пространством X , в котором задана переполненная система элементов (словарь) $\mathcal{D}$. Имеется достаточно аргументов в пользу важности постановки задачи в терминах банаховых пространств как для численного анализа в целом, так и для разреженных приближений (см., к примеру, [1; предисловие]). Пусть X – вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\| := \|\cdot\|_X$. Назовем множество $\mathcal{D}$ элементов

Исследование выполнено при поддержке NSF (грант DMS-1160841).

(функций) из X *словарем*, если всякий элемент $g \in \mathcal{D}$ имеет единичную норму ($\|g\| = 1$) и замыкание линейной оболочки $\text{span } \mathcal{D}$ совпадает с X . *Симметризованным словарем* называется множество $\mathcal{D}^\pm := \{\pm g : g \in \mathcal{D}\}$. Для ненулевого элемента $g \in X$ обозначим через F_g нормирующий функционал для g :

$$\|F_g\|_{X^*} = 1, \quad F_g(g) = \|g\|_X.$$

Его существование обеспечивается теоремой Хана–Банаха.

Элемент (функция, сигнал) $s \in X$ называется *m -разреженным* относительно $\mathcal{D}$, если его можно представить в виде $s = \sum_{i=1}^m c_i g_i$, $g_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, m$. Множество m -разреженных элементов обозначается через $\Sigma_m(\mathcal{D})$. Для данного элемента f введем погрешность наилучшего m -членного приближения

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_X := \inf_{s \in \Sigma_m(\mathcal{D})} \|f - s\|_X.$$

Для класса функций $\mathbf{W}$ положим

$$\sigma_m(\mathbf{W}, \mathcal{D})_X := \sup_{f \in \mathbf{W}} \sigma_m(f, \mathcal{D})_X.$$

Пусть $t \in (0, 1]$ – заданное неотрицательное число. Определим теперь (см. [2]) слабый чебышёвский жадный алгоритм (СЧЖА), обобщающий на банаховы пространства слабый ортогональный жадный алгоритм, введенный и изученный в [3] (см. также [1]).

СЛАБЫЙ ЧЕБЫШЁВСКИЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ (СЧЖА). Положим $f_0 := f_0^{c,t} := f$ и для всякого $m \geq 1$:

1) определим по индукции $\varphi_m := \varphi_m^{c,t} \in \mathcal{D}$ – произвольный элемент, удовлетворяющий условию

$$|F_{f_{m-1}}(\varphi_m)| \geq t \sup_{g \in \mathcal{D}} |F_{f_{m-1}}(g)|;$$

2) положим

$$\Phi_m := \Phi_m^t := \text{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^m$$

и зададим $G_m := G_m^{c,t}$ как наилучшее приближение к f в Φ_m ;

3) обозначим

$$f_m := f_m^{c,t} := f - G_m.$$

В [4] мы показали, что слабый чебышёвский жадный алгоритм прекрасно подходит для m -членных приближений по словарям из специального класса и, в частности, по тригонометрической системе. Тригонометрическая система функций – классическая система, которую, как известно, сложно исследовать. В [4] наряду с другими задачами мы исследовали задачу о нелинейных разреженных приближениях по этой системе. Обозначим через $\mathcal{RT}$ вещественную тригонометрическую систему $1, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \dots$ на $[0, 1]$, а через $\mathcal{RT}_p$ – ее вариант, нормированный в $L_p([0, 1])$. Через $\mathcal{RT}_p^d := \mathcal{RT}_p \times \dots \times \mathcal{RT}_p$ обозначим d -мерную тригонометрическую систему. Нам приходится рассматривать вещественную тригонометрическую систему, поскольку алгоритм СЧЖА хорошо изучен именно в вещественных банаховых пространствах. В [4] нами установлено неравенство типа Лебега для СЧЖА.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\mathcal{D}$ – нормированная в L_p , $2 \leq p < \infty$, вещественная d -мерная тригонометрическая система. Тогда для всякой функции $f \in L_p$ СЧЖА с параметром слабости t дает оценку

$$\|f_{C(t,p,d)m \ln(m+1)}\|_p \leq C \sigma_m(f, \mathcal{D})_p. \quad (1.1)$$

Это неравенство лебеговского типа гарантирует, что СЧЖА дает прекрасный результат для всякой отдельной функции f . В качестве дополнения к нему мы хотим получить результаты, связывающие скорость убывания $\sigma_m(f, \mathcal{T}^d)_p$ с некоторыми свойствами f типа гладкости. Это и является основной целью работы. Гладкость будет измеряться в терминах смешанной производной и смешанных разностей. Заметим, что классы функций с ограниченной смешанной производной не только интересны и привлекательны как объект исследований в теории приближений, но также важны для численного анализа. М. Гриббель с сотрудниками использует методы приближений, разработанные для этих классов, в эллиптических вариационных задачах. Как показывают недавние исследования Х. Исерентанта по поиску новых функциональных классов гладкости для уравнения Шрёдингера, оператор Шрёдингера для электронов имеет собственные функции со свойствами смешанной гладкости, близкими к ограниченности смешанной производной. Так что методы приближений, разработанные для классов функций с ограниченной смешанной производной, являются подходящим инструментом для численного исследования уравнения Шрёдингера.

Разреженные тригонометрические приближения периодических функций берут начало в статье С.Б. Стечкина [5], который использовал их в критерии абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Р.С. Исмагилов (см. [6]) нашел нетривиальные оценки для m -членных приближений функций с особенностями вида $|x|$ и для них получил содержательные и важные приложения к поперечникам классов Соболева. Он пользовался детерминистским методом, опирающимся на теоретико-числовые конструкции. Этот метод был развит В.Е. Майоровым (см. [7]), чей метод был основан на суммах Гаусса. Дальнейшие важные результаты были получены в [8] с использованием неконструктивного результата в теории конечномерных банаховых пространств, установленного Е.Д. Глускиным (см. [9]). Еще один мощный неконструктивный метод, основанный на вероятностных рассуждениях, был использован Ю. Маковозом (см. [10]) и Э.С. Белинским (см. [11], [12]). Некоторые другие методы были разработаны в [13]–[16] для вывода оценок снизу в классах функций. В [17] и [18] было обнаружено, что жадные алгоритмы можно использовать для конструктивных m -членных приближений по тригонометрической системе. В настоящей работе мы покажем, как можно использовать жадные алгоритмы для доказательства оптимальных или наилучших из известных оценок сверху для m -членных приближений в классах функций смешанной гладкости. Это простой и мощный способ вывода оценок сверху. Однако нам не известно, как его можно использовать в случае малой гладкости. Подробное исследование m -членных аппроксимаций в классах функций смешанной гладкости, в том числе в случае малой гладкости, можно найти в статье А.С. Романюка [19].

Заметим, что при $2 < p < \infty$ верхние оценки, полученные в [19], неконструктивны.

Начнем с обозначений. Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами; тогда

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{s}) &:= \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}, \\ Q_n &:= \bigcup_{\|\mathbf{s}\|_1 \leq n} \rho(\mathbf{s}) \text{ – ступенчатый гиперболический крест,} \\ \Gamma(N) &:= \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \prod_{j=1}^d \max(|k_j|, 1) \leq N \right\} \text{ – гиперболический крест.}\end{aligned}$$

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$

$$\delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}.$$

Пусть G – конечный набор точек из $\mathbb{Z}^d$; тогда обозначим

$$\mathcal{T}(G) := \left\{ t : t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in G} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\}.$$

Для простоты обозначений будем писать $\mathcal{T}(\Gamma(N)) = \mathcal{T}(N)$.

Будем исследовать задачи аппроксимации в классах функций смешанной гладкости, которые мы определим прямо сейчас. Начнем со случая периодических функций одного переменного. При $r > 0$ положим

$$F_r(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kx - \frac{r\pi}{2}\right), \quad (1.2)$$

$$W_p^r := \{f : f = \varphi * F_r, \|\varphi\|_p \leq 1\}. \quad (1.3)$$

Хорошо известно, что при $r > 1/p$ класс W_p^r вкладывается в пространство непрерывных функций $C(\mathbb{T})$. В частном случае класса W_1^1 также имеется вложение в $C(\mathbb{T})$.

В многомерном случае для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ обозначим

$$F_r(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d F_r(x_j), \quad \mathbf{W}_p^r := \{f : f = \varphi * F_r, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Для $f \in \mathbf{W}_p^r$ положим $f^{(r)} := \varphi$, где φ удовлетворяет равенству $f = \varphi * F_r$.

Основными результатами § 2 являются следующие две теоремы. В них мы используем обозначения

$$\beta := \beta(q, p) := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \quad \eta := \eta(q) := \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

В случае тригонометрической системы $\mathcal{T}^d$ мы не включаем ее в обозначения:

$$\sigma_m(\mathbf{W})_p := \sigma_m(\mathbf{W}, \mathcal{T}^d)_p.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_p \asymp \begin{cases} m^{-r+\beta}(\log m)^{(d-1)(r-2\beta)}, & 1 < q \leq p \leq 2, \quad r > 2\beta, \\ m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-2\eta)}, & 1 < q \leq 2 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}, & 2 \leq q \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_\infty \ll \begin{cases} m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-2\eta)+1/2}, & 1 < q \leq 2, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}, & 2 \leq q < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Случай $1 < q \leq p \leq 2$ в теореме 1.2, отвечающий первой строке формулы, был ранее доказан в [13] (см. также [20; гл. 4]). Доказательства в [13] и [20] конструктивны. В §2 мы сосредоточимся на случае $p \geq 2$ и в доказательствах теорем 1.2 и 1.3 будем использовать недавно развитые методы жадных аппроксимаций в банаховых пространствах. Важно отметить, что жадные аппроксимации не только позволяют доказать указанные теоремы, но также дают конструктивный метод построения соответствующих m -членных приближений. Приведем точную формулировку.

ТЕОРЕМА 1.4. *При $p \in (1, \infty)$ и $\mu > 0$ существуют конструктивные методы $A_m(f, p, \mu)$, которые для $f \in \mathbf{W}_q^r$ дают m -членное приближение к этой функции, удовлетворяющее оценке*

$$\|f - A_m(f, p, \mu)\|_p \ll \begin{cases} m^{-r+\beta}(\log m)^{(d-1)(r-2\beta)}, & 1 < q \leq p \leq 2, \quad r > 2\beta + \mu, \\ m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-2\eta)}, & 1 < q \leq 2 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{q} + \mu, \\ m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}, & 2 \leq q \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{2} + \mu. \end{cases}$$

Аналогичный вариант теоремы 1.3 верен и для $p = \infty$. Мы не умеем доказывать оценки снизу для приближений в равномерной норме L_∞ , соответствующие верхним оценкам из теоремы 1.3. В §3 с помощью известных результатов по энтропийным числам мы докажем некоторую оценку снизу в случае функций двух переменных. Заметим, что она представляет интерес в случае малой гладкости, когда $r < 1/2$.

В качестве непосредственного следствия из теорем 1.1 и 1.2 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть $p \in [2, \infty)$. Применим СЧЖА с параметром слабости $t \in (0, 1]$ к $f \in L_p$ относительно вещественной тригонометрической системы $\mathcal{RT}_p^d$. Если $f \in \mathbf{W}_q^r$, то*

$$\|f_m\|_p \ll \begin{cases} m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-2\eta)+r-\eta}, & 1 < q \leq 2, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r}(\log m)^{rd}, & 2 \leq q < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

В § 4 и § 5 приводятся некоторые наблюдения, относящиеся к численному интегрированию и приближенному восстановлению функций смешанной гладкости. Там мы докажем нижние оценки, демонстрирующие, что нельзя улучшить точность разреженных сеточных методов с $\asymp 2^n n^{d-1}$ узлами путем добавления 2^n произвольных точек. В случае численного интегрирования эти нижние оценки обеспечивают наилучшие на сегодняшний день оценки снизу для интегрирования с помощью оптимальных кубатурных формул или кубатурных формул по редким сеткам.

Наши методы основаны на комбинации результатов из теории аппроксимаций многочленами с гармониками из гиперболических крестов, полученных в 1980–90-е гг., и недавних результатов по жадным аппроксимациям. Сформулируем несколько известных результатов из теории аппроксимаций многочленами с гармониками из гиперболических крестов, которыми мы будем пользоваться в своем анализе. Начнем с задачи оценки $\|f\|_p$ через массив $\{\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q\}$. Здесь и далее p, q – скаляры, удовлетворяющие неравенствам $1 \leq q, p \leq \infty$. Зададим массив $\varepsilon = \{\varepsilon_{\mathbf{s}}\}$, где $\varepsilon_{\mathbf{s}} \geq 0$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, а s_j – неотрицательные целые числа, $j = 1, \dots, d$. Через $G(\varepsilon, q)$ и $F(\varepsilon, q)$ будем обозначать следующие множества функций ($1 \leq q \leq \infty$):

$$\begin{aligned} G(\varepsilon, q) &:= \{f \in L_q : \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q \leq \varepsilon_{\mathbf{s}} \text{ для любого } \mathbf{s}\}, \\ F(\varepsilon, q) &:= \{f \in L_q : \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q \geq \varepsilon_{\mathbf{s}} \text{ для любого } \mathbf{s}\}. \end{aligned}$$

Следующий результат содержится в [20; гл. 1, теорема 3.3]; случай $q = 2$, используемый в настоящей статье, см. [13] и [20; гл. 4, теорема 1.1].

ТЕОРЕМА 1.6. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\sup_{f \in G(\varepsilon, q)} \|f\|_p \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}} \varepsilon_{\mathbf{s}}^p 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p/q-1)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq q < p < \infty, \quad (1.4)$$

$$\inf_{f \in F(\varepsilon, q)} \|f\|_p \asymp \left(\sum_{\mathbf{s}} \varepsilon_{\mathbf{s}}^p 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p/q-1)} \right)^{1/p}, \quad 1 < p < q \leq \infty, \quad (1.5)$$

где константы не зависят от ε .

Нам потребуется следствие из теоремы 1.6 (см. [20; гл. 1, теорема 2.2]), которое мы также формулируем как теорему.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть $1 < q \leq 2$. Тогда для любого $t \in \mathcal{T}(N)$ выполнено неравенство*

$$\|t\|_A := \sum_{\mathbf{k}} |\hat{t}(\mathbf{k})| \leq C(q, d) N^{1/q} (\log N)^{(d-1)(1-1/q)} \|t\|_q.$$

Пусть

$$\Pi(\mathbf{N}, d) := \{(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d : |a_j| \leq N_j, j = 1, \dots, d\},$$

где N_j – неотрицательные целые числа и $\mathbf{N} := (N_1, \dots, N_d)$. Обозначим

$$\mathcal{T}(\mathbf{N}, d) := \left\{ t : t = \sum_{\mathbf{k} \in \Pi(\mathbf{N}, d)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\}.$$

Тогда

$$\dim \mathcal{T}(\mathbf{N}, d) = \prod_{j=1}^d (2N_j + 1) =: \vartheta(\mathbf{N}).$$

Следующий результат взят из [21; гл. 2, теорема 1.1]; см. также [22].

ТЕОРЕМА 1.8. *Для $\varepsilon > 0$ пусть подпространство $\Psi \subset \mathcal{T}(\mathbf{N}, d)$ удовлетворяет неравенству $\dim \Psi \geq \varepsilon \dim \mathcal{T}(\mathbf{N}, d)$. Тогда существует $t \in \Psi$, для которого*

$$\|t\|_\infty = 1, \quad \|t\|_2 \geq C(\varepsilon, d) > 0.$$

§ 2. Разреженные приближения

Для банахова пространства X зададим модуль гладкости формулой

$$\rho(u) := \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left(\frac{1}{2} (\|x + uy\| + \|x - uy\|) - 1 \right).$$

Равномерно гладким банаховым пространством называется пространство со следующим свойством:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\rho(u)}{u} = 0.$$

Хорошо известно (см., к примеру, [23; лемма В.1]), что в случае $X = L_p$, $1 \leq p < \infty$, выполнено соотношение

$$\rho(u) \leq \begin{cases} \frac{u^p}{p} & \text{при } 1 \leq p \leq 2, \\ \frac{(p-1)u^2}{2} & \text{при } 2 \leq p < \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть $A_1(\mathcal{D}) := A_1(\mathcal{D}, X)$ – замыкание в X выпуклой оболочки $\mathcal{D}$. Следующая теорема из [2] описывает скорость сходимости СЧЖА при f из $A_1(\mathcal{D}^\pm)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть X – равномерно гладкое банахово пространство с модулем гладкости $\rho(u) \leq \gamma u^q$, $1 < q \leq 2$. Тогда при $t \in (0, 1]$ для всякого $f \in A_1(\mathcal{D}^\pm)$ выполнено неравенство*

$$\|f - G_m^{c,t}(f, \mathcal{D})\| \leq C(q, \gamma)(1 + mt^p)^{-1/p}, \quad p := \frac{q}{q-1},$$

с постоянной $C(q, \gamma)$, которая может зависеть только от q и γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что $C(q, \gamma) \leq C(q)\gamma^{1/q}$.

Перейдем к инкрементальному жадному алгоритму (см. [18] и [1; гл. 6]). Пусть $\epsilon = \{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\epsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Заметим, что инкрементальный жадный алгоритм входит в семейство релаксационных жадных алгоритмов (см. [1; гл. 6]).

ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ С РАСПИСАНИЕМ ϵ ($\text{IA}(\epsilon)$). Пусть $f_0^{i,\epsilon} := f$ и $G_0^{i,\epsilon} := 0$. Тогда для всякого $m \geq 1$:

- 1) определим по индукции $\varphi_m^{i,\epsilon} \in \mathcal{D}$ – произвольный элемент, удовлетворяющий соотношению

$$F_{f_{m-1}^{i,\epsilon}}(\varphi_m^{i,\epsilon} - f) \geq -\epsilon_m;$$

- 2) положим

$$G_m^{i,\epsilon} := \left(1 - \frac{1}{m}\right) G_{m-1}^{i,\epsilon} + \frac{\varphi_m^{i,\epsilon}}{m};$$

- 3) обозначим

$$f_m^{i,\epsilon} := f - G_m^{i,\epsilon}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X – равномерно гладкое банахово пространство с модулем гладкости $\rho(u) \leq \gamma u^q$, $1 < q \leq 2$. Пусть

$$\epsilon_n := v\gamma^{1/q} n^{-1/p}, \quad p = \frac{q}{q-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда для всякого $f \in A_1(\mathcal{D})$ выполнено неравенство

$$\|f_m^{i,\epsilon}\| \leq C(v)\gamma^{1/q} m^{-1/p}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В [18] мы продемонстрировали возможности СЧЖА в классических разделах гармонического анализа. Задача связана с m -членными тригонометрическими приближениями в равномерной норме. Первый результат, указавший на преимущества m -членных приближений по вещественной тригонометрической системе $\mathcal{RT}$ над приближениями тригонометрическими многочленами порядка m , был получен Р. С. Исагиловым (см. [6]):

$$\sigma_m(|\sin 2\pi x|, \mathcal{RT})_\infty \leq C_\epsilon m^{-6/5+\epsilon} \quad \text{для любого } \epsilon > 0. \quad (2.2)$$

В. Е. Майоров (см. [7]) улучшил оценку (2.2):

$$\sigma_m(|\sin 2\pi x|, \mathcal{RT})_\infty \asymp m^{-3/2}. \quad (2.3)$$

И Исагилов, и Майоров вывели свои оценки (2.2) и (2.3) конструктивными методами. Майоров применил теоретико-числовой метод, основанный на суммах Гаусса. Основной момент при этом подходе можно сформулировать с помощью наилучших m -членных приближений тригонометрических многочленов. Пусть $\mathcal{RT}(N)$ – подпространство вещественных тригонометрических многочленов порядка N . С помощью сумм Гаусса можно (конструктивно) доказать оценку

$$\sigma_m(t, \mathcal{RT})_\infty \leq CN^{3/2} m^{-1} \|t\|_1, \quad t \in \mathcal{RT}(N). \quad (2.4)$$

Введем обозначение

$$\left\| a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k2\pi x + b_k \sin k2\pi x) \right\|_A := |a_0| + \sum_{k=1}^N (|a_k| + |b_k|).$$

Заметим, что в силу несложного неравенства

$$\|t\|_A \leq CN\|t\|_1, \quad t \in \mathcal{RT}(N),$$

оценка (2.4) следует из оценки

$$\sigma_m(t, \mathcal{RT})_\infty \leq C \left(\frac{N^{1/2}}{m} \right) \|t\|_A, \quad t \in \mathcal{RT}(N). \quad (2.5)$$

Таким образом, (2.5) сильнее, чем (2.4). Следующая оценка была доказана в [8]:

$$\sigma_m(t, \mathcal{RT})_\infty \leq Cm^{-1/2} \left(\ln \left(1 + \frac{N}{m} \right) \right)^{1/2} \|t\|_A, \quad t \in \mathcal{RT}(N). \quad (2.6)$$

В известном смысле (2.6) намного сильнее, чем (2.5) или (2.4). Вывод (2.6), данный в [8], неконструктивен. В [8] оценка (2.6) была доказана с помощью неконструктивной теоремы Глускина (см. [9]). Э.С. Белинский (см. [12]) использовал вероятностные методы для доказательства следующего неравенства:

$$\sigma_m(t, \mathcal{RT})_\infty \leq C \left(\frac{N}{m} \right)^{1/p} \left(\ln \left(1 + \frac{N}{m} \right) \right)^{1/p} \|t\|_p, \quad t \in \mathcal{RT}(N),$$

при $2 \leq p < \infty$. Его доказательство также неконструктивно. В [18] мы дали конструктивное доказательство (2.6), ключом к которому был СЧЖА. В работе [17] мы уже указывали, что СЧЖА позволяет дать конструктивное доказательство оценки

$$\sigma_m(f, \mathcal{RT})_p \leq C(p)m^{-1/2} \|f\|_A, \quad p \in [2, \infty). \quad (2.7)$$

Ранее (до [17]) известные доказательства (2.7) были неконструктивными (см. обсуждение в [17; § 5]). Таким образом, СЧЖА дает метод построения хорошего m -членного приближения. Сформулируем теперь один результат из [18].

ТЕОРЕМА 2.3. *Существует конструктивный метод $A(N, m)$, для всякого $t \in \mathcal{RT}(N)$ строящий m -членный тригонометрический полином $A(N, m)(t)$ со следующим аппроксимативным свойством:*

$$\|t - A(N, m)(t)\|_\infty \leq Cm^{-1/2} \left(\ln \left(1 + \frac{N}{m} \right) \right)^{1/2} \|t\|_A,$$

где C – абсолютная константа.

В силу шага 2) СЧЖА контролировать коэффициенты приближающего многочлена трудно – они получаются чебышёвской проекцией f на Φ_m . Поэтому имеет смысл рассмотреть алгоритм $\text{IA}(\epsilon)$, явно предъявляющий коэффициенты приближающего многочлена. Преимущество $\text{IA}(\epsilon)$ над другими алгоритмами типа жадных в том, что $\text{IA}(\epsilon)$ позволяет точно контролировать коэффициенты приближений. Для всех приближающих элементов $G_m^{i, \epsilon}$ выполнено равенство $\|G_m^{i, \epsilon}\|_A = 1$. Более того, известно, что все ненулевые коэффициенты такого многочлена имеют вид a/m , где a – натуральное число. Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.4. Для всякого $t \in \mathcal{RT}(\mathbf{N}, d)$ применение алгоритма $\text{IA}(\epsilon)$ к $f := t/\|t\|_A$ после m итераций производит m -членный тригонометрический многочлен $G_m(t) := G_m^{i,\epsilon}(f)\|t\|_A$ со следующим аппроксимативным свойством:

$$\|t - G_m(t)\|_\infty \leq C(d)(\overline{m})^{-1/2}(\ln \vartheta(\mathbf{N}))^{1/2}\|t\|_A, \\ \overline{m} := \max(1, m), \quad \|G_m(t)\|_A = \|t\|_A,$$

где константа $C(d)$ может зависеть только от d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать теорему 2.4 для $t \in \mathcal{RT}(\mathbf{N}, d)$ с $\|t\|_A = 1$. Тогда $t \in A_1((\mathcal{RT}(\mathbf{N}, d) \cap \mathcal{RT}^d)^\pm, L_p)$ для всех $p \in [2, \infty)$. Применяя теперь теорему 2.2 с $X = L_p$ и $\mathcal{D}^\pm$, где $\mathcal{D} := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $n = \vartheta(\mathbf{N})$, – вещественная тригонометрическая система с

$$\varphi_l := \prod_{j \in E} \cos k_j x_j \prod_{j \in [1, d] \setminus E} \sin k_j x_j,$$

получаем

$$\left\| t - \sum_{j \in \Lambda} \frac{a_j}{m} \varphi_j \right\|_p \leq C\gamma^{1/2}m^{-1/2}, \quad \sum_{j \in \Lambda} |a_j| = m, \quad (2.8)$$

где $\sum_{j \in \Lambda} \frac{a_j}{m} \varphi_j$ есть многочлен $G_m^{i,\epsilon}(t)$. В силу (2.1) находим, что $\gamma \leq p/2$. Используя теперь неравенство Никольского, из (2.8) получим

$$\left\| t - \sum_{j \in \Lambda} \frac{a_j}{m} \varphi_j \right\|_\infty \leq C(d)N^{1/p} \left\| t - \sum_{j \in \Lambda} \frac{a_j}{m} \varphi_j \right\|_p \leq C(d)p^{1/2}N^{1/p}m^{-1/2}.$$

Выбрав $p \asymp \ln N$, приходим к оценке, требуемой в теореме.

Отметим, что из приведенного доказательства теоремы 2.4 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $2 \leq p < \infty$. Для всякого $t \in \mathcal{RT}(\mathbf{N}, d)$ применение алгоритма $\text{IA}(\epsilon)$ к $f := t/\|t\|_A$ через m итераций производит m -членный тригонометрический многочлен $G_m(t) := G_m^{i,\epsilon}(f)\|t\|_A$ со следующим аппроксимативным свойством:

$$\|t - G_m(t)\|_p \leq C(d)(\overline{m})^{-1/2}p^{1/2}\|t\|_A, \quad \overline{m} := \max(1, m), \quad \|G_m(t)\|_A = \|t\|_A,$$

где константа $C(d)$ может зависеть только от d .

Заметим, что выполнение алгоритма $\text{IA}(\epsilon)$ зависит от словаря и от рассматриваемого пространства X . К примеру, при $d = 1$ алгоритм $\text{IA}(\epsilon)$ в теореме 2.4 использует вещественную тригонометрическую систему $1, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots, \cos N2\pi x, \sin N2\pi x$ в пространстве $X = L_p$, где $p \asymp \ln N$.

Теоремы 2.4 и 2.5 сформулированы выше для m -членных аппроксимаций по вещественной тригонометрической системе, поскольку общая теорема 2.2 доказана в вещественных банаховых пространствах. Очевидно, что как следствие из теорем 2.4 и 2.5 получается следующий результат для комплексной тригонометрической системы $\mathcal{T}^d := \{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$. Как и выше, положим $\overline{m} := \max(1, m)$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Существуют конструктивные методы аппроксимации тина жадных $G_m^p(\cdot)$, приводящие к m -членным многочленам по системе $\mathcal{T}^d$ со следующими свойствами: при $2 \leq p < \infty$*

$$\|f - G_m^p(f)\|_p \leq C_1(d)(\overline{m})^{-1/2} p^{1/2} \|f\|_A, \quad \|G_m^p(f)\|_A \leq C_2(d) \|f\|_A, \quad (2.9)$$

а при $p = \infty$ и $f \in \mathcal{T}(\mathbf{N}, d)$

$$\|f - G_m^\infty(f)\|_\infty \leq C_3(d)(\overline{m})^{-1/2} (\ln \vartheta(\mathbf{N}))^{1/2} \|f\|_A, \quad \|G_m^\infty(f)\|_A \leq C_4(d) \|f\|_A. \quad (2.10)$$

Теперь используем теорему 2.6 для m -членных аппроксимаций функций смешанной гладкости. Следующая теорема была доказана в [13] (см. также [20; гл. 4]). Доказательства в [13] и [20] конструктивные. Мы воспользуемся обозначениями

$$\beta := \beta(q, p) := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \quad \eta := \eta(q) := \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

ТЕОРЕМА 2.7. *Пусть $1 < q \leq p \leq 2$ и $r > 2\beta$. Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_p \asymp m^{-r+\beta} (\log m)^{(d-1)(r-2\beta)}.$$

Сначала распространим теорему 2.7 на случай $1 < q \leq p < \infty$.

ТЕОРЕМА 2.8. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_p \asymp \begin{cases} m^{-r+\beta} (\log m)^{(d-1)(r-2\beta)}, & 1 < q \leq p \leq 2, \quad r > 2\beta, \\ m^{-r+\eta} (\log m)^{(d-1)(r-2\eta)}, & 1 < q \leq 2 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r} (\log m)^{r(d-1)}, & 2 \leq q \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $p \leq 2$, отвечающий первой строке, вытекает из теоремы 2.7. Заметим, что для $p > 2$ теорема 2.8 была доказана в [15], однако доказательство там неконструктивно – оно использует неконструктивный результат из [8]. Мы дадим конструктивное доказательство, опирающееся на жадные алгоритмы. Вдобавок оно пригодно и при более слабых предположениях относительно r : $r > 1/q$ вместо $r > 1/q + \eta$ при $1 < q \leq 2$. Ключевым моментом доказательства является следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. *При $f \in L_1$ положим*

$$f_l := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \delta_{\mathbf{s}}(f), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Рассмотрим класс функций

$$\mathbf{W}_A^{a,b} := \{f : \|f_l\|_A \leq 2^{-al} l^{(d-1)b}\}.$$

Тогда при $2 \leq p \leq \infty$ и $0 < \mu < a$ имеется конструктивный метод $A_m(\cdot, p, \mu)$, опирающийся на жадные алгоритмы, который для $f \in \mathbf{W}_A^{a,b}$ приводит к оценке

$$\|f - A_m(f, p, \mu)\|_p \ll m^{-a-1/2} (\log m)^{(d-1)(a+b)}, \quad 2 \leq p < \infty, \quad (2.11)$$

$$\|f - A_m(f, \infty, \mu)\|_\infty \ll m^{-a-1/2} (\log m)^{(d-1)(a+b)+1/2}. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для $m \asymp 2^n n^{d-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $f \in \mathbf{W}_A^{a,b}$. Приближим f_l в L_p . По теореме 2.6 для $p \in [2, \infty)$ получаем

$$\|f_l - G_{m_l}^p(f_l)\|_p \ll (\overline{m}_l)^{-1/2} \|f_l\|_A \ll (\overline{m}_l)^{-1/2} 2^{-al} l^{(d-1)b}. \quad (2.13)$$

Зафиксировав $\mu \in (0, a)$, выберем

$$m_l := [2^{n-\mu(l-n)} l^{d-1}], \quad l = n, n+1, \dots$$

Кроме того, в приближающую функцию мы включим

$$S_n(f) := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \leq n} \delta_{\mathbf{s}}(f).$$

Положим

$$A_m(f, p, \mu) := S_n(f) + \sum_{l > n} G_{m_l}^p(f_l).$$

Тем самым, мы построили m -членное приближение f с

$$m \ll 2^n n^{d-1} + \sum_{l \geq n} m_l \ll 2^n n^{d-1}.$$

Погрешность этой аппроксимации в L_p имеет следующую верхнюю оценку:

$$\begin{aligned} \|f - A_m(f, p, \mu)\|_p &\leq \sum_{l \geq n} \|f_l - G_{m_l}^p(f_l)\|_p \ll \sum_{l \geq n} (\overline{m}_l)^{-1/2} 2^{-al} l^{(d-1)b} \\ &\ll \sum_{l \geq n} 2^{-1/2(n-\mu(l-n))} l^{-(d-1)/2} 2^{-al} l^{(d-1)b} \ll 2^{-n(a+1/2)} n^{(d-1)(b-1/2)}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы для $2 \leq p < \infty$.

Обсудим случай $p = \infty$. Доказательство здесь повторяет доказательство для $p < \infty$ со следующим изменением. Вместо (2.9), использованного для оценки m_l -членного приближения к f_l в L_p , воспользуемся (2.10) для оценки m_l -членного приближения к f_l в L_∞ . Тогда вместо оценки (2.13) получим

$$\|f_l - G_{m_l}^\infty(f_l)\|_\infty \ll (\overline{m}_l)^{-1/2} (\ln 2^l)^{1/2} \|f_l\|_A \ll (\overline{m}_l)^{-1/2} l^{1/2} 2^{-al} l^{(d-1)b}. \quad (2.14)$$

Появление множителя $l^{1/2}$ в (2.14) приводит к множителю $(\log m)^{1/2}$ в (2.12).

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2.8. Начнем со случая $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$. Хорошо известно (см., к примеру, [20; гл. 2, теорема 2.1]), что при $f \in \mathbf{W}_q^r$ выполнено неравенство

$$\|f_l\|_q \ll 2^{-lr}. \quad (2.15)$$

Из теоремы 1.7 следует оценка

$$\|f_l\|_A \ll 2^{-(r-1/q)l} l^{(d-1)(1-1/q)}.$$

Таким образом, для вывода оценок сверху достаточно применить лемму 2.1 с $a = r - 1/q$ и $b = 1 - 1/q$.

Далее, оценки сверху для $2 \leq q \leq p < \infty$ следуют из случая $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$ (рассмотренного выше) с $q = 2$. Оценки снизу следуют из теоремы 2.7 с $p = 2$. Оценки снизу для $2 \leq q \leq p < \infty$ следуют из известных результатов для $1 < p \leq q < \infty$, представленных в [14] (см. ниже теорему 2.17).

Теорема 2.8 доказана.

Обсудим случай $p = \infty$. Так же, как мы вывели теорему 2.8 из формулы (2.11) в лемме 2.1, нижеследующие оценки сверху для $p = \infty$ выводятся из формулы (2.12) в лемме 2.1.

ТЕОРЕМА 2.9. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_\infty \ll \begin{cases} m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-2\eta)+1/2}, & 1 < q \leq 2, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}, & 2 \leq q < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Эти оценки сверху обеспечиваются конструктивным методом $A_m(\cdot, \infty, \mu)$, основанным на жадных алгоритмах.

Рассмотрим случай $\sigma_m(\mathbf{W}_{1,\alpha}^r)_p$, не покрываемый теоремами 2.7 и 2.8. Функция $F_r(\mathbf{x})$ лежит в замыкании класса $\mathbf{W}_{1,\alpha}^r$, $r > 1 - 1/p$, в L_p , так что, с одной стороны,

$$\sigma_m(\mathbf{W}_{1,\alpha}^r)_p \geq \sigma_m(F_r(\mathbf{x}))_p,$$

а, с другой стороны, из определения $\mathbf{W}_{1,\alpha}^r$ следует, что для любого $f \in \mathbf{W}_{1,\alpha}^r$ выполнено

$$\sigma_m(f)_p \leq \sigma_m(F_r(\mathbf{x}))_p.$$

Таким образом,

$$\sigma_m(\mathbf{W}_{1,\alpha}^r)_p = \sigma_m(F_r(\mathbf{x}))_p. \quad (2.16)$$

Теперь докажем несколько результатов, относящихся к $\sigma_m(F_r(\mathbf{x}))_p$.

ТЕОРЕМА 2.10. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(F_r(\mathbf{x}))_p \asymp \begin{cases} m^{-r+1-1/p}(\log m)^{(d-1)(r-1+2/p)}, & 1 < p \leq 2, \quad r > 1 - \frac{1}{p}, \\ m^{-r+1/2}(\log m)^{r(d-1)}, & 2 \leq p < \infty, \quad r > 1. \end{cases}$$

Оценки сверху обеспечиваются конструктивным методом $A_m(\cdot, p, \mu)$, основанным на жадных алгоритмах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с $1 < p \leq 2$. Известна следующая оценка погрешности аппроксимации полиномами с гармониками из гиперболического креста (см., к примеру, [20; гл. 2, теорема 3.1]):

$$E_{Q_n}(F_r)_p := \inf_{t \in \mathcal{T}(Q_n)} \|F_r - t\|_p \ll 2^{-n(r-1+1/p)} n^{(d-1)/p}. \quad (2.17)$$

Учитывая, что $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$, из (2.17) получаем требуемую оценку сверху для $1 < p \leq 2$. Так что остается дать соответствующую нижнюю оценку при $1 < p \leq 2$. Положим

$$\theta_n := \{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d : \|\mathbf{s}\|_1 = n\}, \quad \Delta Q_n := \bigcup_{\mathbf{s} \in \theta_n} \rho(\mathbf{s}).$$

Фиксируем $K_m := \{\mathbf{k}^j\}_{j=1}^m$ и выберем минимальное n , удовлетворяющее условию

$$|\Delta Q_n| \geq 4m.$$

Очевидно, что

$$2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Пусть

$$\theta'_n := \left\{ \mathbf{s} \in \theta_n : |K_m \cap \rho(\mathbf{s})| \leq \frac{|\rho(\mathbf{s})|}{2} \right\}.$$

Заметим, что для $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$ выполнено $|\rho(\mathbf{s})| = 2^n$. Теперь

$$\frac{(|\theta_n| - |\theta'_n|)2^n}{2} \leq m \leq \frac{|\theta_n|2^n}{4},$$

откуда

$$|\theta'_n| \geq \frac{|\theta_n|}{2}.$$

По теореме 1.6 соотношение (1.5) для $q = 2$, $1 < p < 2$ для всякого $t = \sum_{j=1}^m c_j e^{i(\mathbf{k}^j, \mathbf{x})}$ дает

$$\begin{aligned} \|F_r - t\|_p &\gg \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta'_n} \|\delta_{\mathbf{s}}(F_r - t)\|_2^p 2^{n(p/2-1)} \right)^{1/p} \\ &\gg \left(\sum_{\mathbf{s} \in \theta'_n} 2^{pn(-r+1/2)} 2^{n(p/2-1)} \right)^{1/p} \gg 2^{-n(r-1+1/p)} n^{(d-1)/p}. \end{aligned}$$

Это дает нужную оценку снизу при $1 < p < 2$.

Используя приведенные выше рассуждения, мы получим оценку снизу для $p = 2$, не прибегая к теореме 1.6: достаточно воспользоваться равенством Парсевалля.

Перейдем к $2 \leq p < \infty$. Здесь рассуждения похожи на доказательство теоремы 2.8. Для

$$F_r^l := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \delta_{\mathbf{s}}(F_r)$$

получим

$$\|F_r^l\|_A \ll 2^{-lr} 2^l l^{d-1}.$$

Нужная оценка сверху следует из леммы 2.1 с $a = r - 1$ и $b = 1$. Оценка снизу получается из случая $p = 2$.

Теорема 2.10 доказана.

Так же, как модификация доказательства теоремы 2.8 доказывает теорему 2.9, соответствующая модификация рассуждений в доказательстве теоремы 2.10 приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2.11. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(F_r(\mathbf{x}))_\infty \ll m^{-r+1/2} (\log m)^{r(d-1)+1/2}, \quad r > 1.$$

Эти оценки обеспечиваются конструктивным методом $A_m(\cdot, \infty, \mu)$, основанным на жадных алгоритмах.

Перейдем к классам $\mathbf{H}_q^r$ и $\mathbf{B}_{q,\theta}^r$. Положим

$$\|f\|_{\mathbf{H}_q^r} := \sup_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q 2^{r\|\mathbf{s}\|_1}$$

и для $1 \leq \theta < \infty$ определим

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{q,\theta}^r} := \left(\sum_{\mathbf{s}} (\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q 2^{r\|\mathbf{s}\|_1})^\theta \right)^{1/\theta}.$$

Обозначим $\mathbf{B}_{q,\infty}^r := \mathbf{H}_q^r$. Допуская вольность в обозначениях, обозначим соответствующий единичный шар через

$$\mathbf{B}_{q,\theta}^r := \{f : \|f\|_{\mathbf{B}_{q,\theta}^r} \leq 1\}.$$

Нам будут удобны следующие небольшие модификации классов $\mathbf{B}_{q,\theta}^r$. Положим

$$\|f\|_{\mathbf{H}_{q,\theta}^r} := \sup_n \left(\sum_{\mathbf{s}: \|\mathbf{s}\|_1=n} (\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q 2^{r\|\mathbf{s}\|_1})^\theta \right)^{1/\theta}$$

и обозначим

$$\mathbf{H}_{q,\theta}^r := \{f : \|f\|_{\mathbf{H}_{q,\theta}^r} \leq 1\}.$$

Наилучшие m -членные приближения в классах $\mathbf{B}_{q,\theta}^r$ подробно изучены А. С. Романюком (см. [19]). Следующий результат был доказан в [13] (см. также [20; гл. 4]). Доказательства в [13] и [20] конструктивны.

ТЕОРЕМА 2.12. Пусть $1 < q \leq p \leq 2$ и $r > \beta$. Тогда

$$\sigma_m(\mathbf{H}_q^r)_p \asymp m^{-r+\beta} (\log m)^{(d-1)(r-\beta+1/p)}.$$

Следующий аналог теоремы 2.8 для классов $\mathbf{H}_q^r$ был доказан в [19]. Доказательство в [19] неконструктивно при $p > 2$.

ТЕОРЕМА 2.13. Имеют место соотношения

$$\sigma_m(\mathbf{H}_q^r)_p \asymp \begin{cases} m^{-r+\beta} (\log m)^{(d-1)(r-\beta+1/p)}, & 1 < q \leq p \leq 2, \quad r > \beta, \\ m^{-r+\eta} (\log m)^{(d-1)(r-1/q+1)}, & 1 < q \leq 2 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r} (\log m)^{(d-1)(r+1/2)}, & 2 \leq q \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Оценки сверху в теореме 2.13 обеспечиваются конструктивным методом $A_m(\cdot, p, \mu)$, основанным на жадных алгоритмах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $p \leq 2$, отвечающий первой строке теоремы 2.13, следует из теоремы 2.12. Рассмотрим теперь $p \geq 2$. Из определения классов $\mathbf{H}_q^r$ с $1 < q < \infty$ имеем

$$f \in \mathbf{H}_q^r \iff \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q \leq 2^{-r\|\mathbf{s}\|_1}.$$

Далее,

$$\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_A \ll 2^{\|\mathbf{s}\|_1/q} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q.$$

Так что при $f \in \mathbf{H}_q^r$ получаем

$$\|f_l\|_A \ll 2^{-(r-1/q)l} l^{d-1}.$$

Применение леммы 2.1 с $a = r - 1/q$ и $b = 1$ в случае $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$ дает нужные оценки сверху. Оценки сверху для $2 \leq q \leq p < \infty$ следуют из рассмотренного выше случая $q = 2$. Оценки снизу для $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$ вытекают из теоремы 2.12.

Оценки снизу для $2 \leq q \leq p < \infty$ вытекают из известных результатов, представленных в [14] (см. теорему 2.18 ниже).

Предложение 2.1 и теорема 2.13 доказаны.

Для $p = \infty$ верен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.14. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{H}_q^r)_\infty \ll \begin{cases} m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-1/q+1)+1/2}, & 1 < q \leq 2, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r}(\log m)^{(r+1/2)(d-1)+1/2}, & 2 \leq q < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Оценки сверху обеспечиваются конструктивным методом $A_m(\cdot, \infty, \mu)$, основанным на жадных алгоритмах.

Неконструктивное доказательство оценки из теоремы 2.14 для случая $2 \leq q < \infty$ см. в [24].

Перейдем к классам $\mathbf{B}_{q,\theta}^r$. Верно следующее обобщение теоремы 2.12 (см. [19]).

ТЕОРЕМА 2.15. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{B}_{q,\theta}^r)_p \asymp \begin{cases} m^{-r+\beta}(\log m)^{(d-1)(r-\beta+1/p-1/\theta)_+}, & 1 < q \leq p \leq 2, \quad r > \beta, \\ m^{-r+\eta}(\log m)^{(d-1)(r-1/q+1-1/\theta)}, & 1 < q \leq 2 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r}(\log m)^{(d-1)(r+1/2-1/\theta)}, & 2 \leq q \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Оценки сверху в теореме 2.15 обеспечиваются конструктивным методом, основанным на жадных алгоритмах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично конструктивному доказательству теорем 2.7 и 2.12 в [20] можно доказать предложение для первого соотношения из теоремы 2.15 (см. [19; теорема 3.1]).

Пусть теперь $p \geq 2$. В этом случае докажем оценку погрешности для обоих классов $\mathbf{H}_{q,\theta}^r$ и $\mathbf{B}_{q,\theta}^r$. Из определения классов $\mathbf{H}_{q,\theta}^r$ при $1 < q < \infty$ получаем

$$f \in \mathbf{H}_{q,\theta}^r \iff \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q^\theta \right)^{1/\theta} \leq 2^{-rl}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|f_l\|_A &\leq \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_A \ll 2^{l/q} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q \\ &\ll 2^{l/q} l^{(d-1)(1-1/\theta)} \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q^\theta \right)^{1/\theta} \ll 2^{-l(r-1/q)} l^{(d-1)(1-1/\theta)}. \end{aligned}$$

Так что для $f \in \mathbf{H}_{q,\theta}^r$ имеем

$$\|f_l\|_A \ll 2^{-(r-1/q)l} l^{(d-1)(1-1/\theta)}.$$

Применив лемму 2.1 с $a = r - 1/q$ и $b = 1 - 1/\theta$ к случаю $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$, получим требуемые оценки сверху. Для $2 \leq q \leq p < \infty$ оценки сверху следуют из уже разобранных случаев $q = 2$. Оценки снизу для $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$ вытекают из случая $1 < q \leq 2, p = 2$.

В [14] было показано, что

$$\sigma_m(\mathbf{H}_\infty^r \cap \mathcal{T}(\Delta Q_n))_p \gg m^{-r} (\log m)^{(d-1)(r+1/2)} \quad (2.18)$$

для некоторого n такого, что выполнено соотношение $m \asymp 2^n n^{d-1}$. Легко видеть, что для любого $f \in \mathbf{H}_\infty^r \cap \mathcal{T}(\Delta Q_n)_p$ имеет место оценка

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{q,\theta}^r} \ll n^{(d-1)/\theta}. \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует оценка снизу для $2 \leq q \leq p < \infty$.

Предложение 2.2 и теорема 2.15 доказаны.

В случае $p = \infty$ верен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.16. *Имеют место соотношения*

$$\sigma_m(\mathbf{H}_{q,\theta}^r)_\infty \ll \begin{cases} m^{-r+\eta} (\log m)^{(d-1)(r-1/q+1-1/\theta)+1/2}, & 1 < q \leq 2, \quad r > \frac{1}{q}, \\ m^{-r} (\log m)^{(r+1/2-1/\theta)(d-1)+1/2}, & 2 \leq q < \infty, \quad r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Оценки сверху обеспечиваются конструктивным методом $A_m(\cdot, \infty, \mu)$, основанным на жадных алгоритмах.

Сформулируем теперь несколько известных результатов для $1 < p \leq q \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 2.17. *Пусть $1 < p \leq q < \infty, r > 0$. Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_p \asymp m^{-r} (\log m)^{(d-1)r}.$$

Оценка сверху в теореме 2.17 вытекает из оценок погрешности приближений многочленами с гармониками из гиперболических крестов (см. [20; гл. 2, § 2]):

$$E_{Q_n}(\mathbf{W}_q^r, L_q) \ll 2^{-rn}, \quad 1 < q < \infty.$$

Оценка снизу из теоремы 2.17 доказана в [14].

Известен следующий результат для классов $\mathbf{H}_q^r$.

ТЕОРЕМА 2.18. Пусть $p \leq q$, $2 \leq q \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $r > 0$. Тогда

$$\sigma_m(\mathbf{H}_q^r)_p \asymp m^{-r}(\log m)^{(d-1)(r+1/2)}.$$

Нижняя оценка

$$\sigma_m(\mathbf{H}_\infty^r)_p \gg m^{-r}(\log m)^{(d-1)(r+1/2)}$$

была получена в [14] для всех $p > 1$. Соответствующая верхняя оценка следует из приближений многочленами с гармониками из гиперболических крестов (см. [20; гл. 2, теорема 2.2]):

$$E_{Q_n}(\mathbf{H}_q^r)_q := \sup_{f \in \mathbf{H}_q^r} E_{Q_n}(f)_q \asymp n^{(d-1)/2} 2^{-rn}, \quad 2 \leq q < \infty.$$

Следующий результат для классов $\mathbf{B}$ был доказан в [19].

ТЕОРЕМА 2.19. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $2 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $r > 0$. Тогда

$$\sigma_m(\mathbf{B}_{q,\theta}^r)_p \asymp m^{-r}(\log m)^{(d-1)(r+1/2-1/\theta)_+}.$$

§ 3. Применение энтропийных чисел

Пусть X – банахово пространство, а B_X – единичный шар в X с центром в 0. Пусть $B_X(y, r)$ – шар с центром в y и радиусом r : $\{x \in X : \|x - y\| \leq r\}$. Для компакта A и положительного числа ϵ определим число покрытия $N_\epsilon(A)$ следующим образом:

$$N_\epsilon(A) := N_\epsilon(A, X) := \min \left\{ n : \exists y^1, \dots, y^n : A \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_X(y^j, \epsilon) \right\}.$$

Для компакта A назовем ϵ -различимым множеством множество $\{x^1, \dots, x^m\} \subseteq A$ со следующим свойством:

$$\|x^i - x^j\| > \epsilon \quad \text{для любых } i, j : i \neq j. \quad (3.1)$$

Пусть $M_\epsilon(A) := M_\epsilon(A, X)$ – максимально возможное число элементов ϵ -различимого подмножества компакта A . Следующий простой результат хорошо известен.

ТЕОРЕМА 3.1. Для всякого компакта A выполнены неравенства

$$M_{2\epsilon}(A) \leq N_\epsilon(A) \leq M_\epsilon(A). \quad (3.2)$$

Рассмотрим энтропийные числа

$$\epsilon_k(A, X) := \inf \left\{ \epsilon : \exists y^1, \dots, y^{2^k} \in X : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(y^j, \epsilon) \right\}.$$

Следующая формулировка взята из [16].

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $F \subset X$ – компактное подмножество, для которого существуют нормированная система $\mathcal{D}$, $|\mathcal{D}| = N$, и $r > 0$ такие, что

$$\sigma_k(F, \mathcal{D})_X \leq k^{-r}, \quad k \leq N.$$

Тогда при $k \leq N$

$$\epsilon_k(F, X) \leq C(r) \left(\frac{\log(2N/k)}{k} \right)^r. \quad (3.3)$$

Мы используем эту теорему для доказательства следующей оценки снизу для наилучших m -членных приближений.

ТЕОРЕМА 3.3. Для $d = 2$ следующая оценка снизу верна для любых $q < \infty$ и $r > 1/q$:

$$\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_\infty \gg m^{-r} (\log m)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся одним неравенством из [25], известным как неравенство малых шаров (Small Ball Inequality). Для четного n положим

$$Y_n := \left\{ \mathbf{s} = (2n_1, 2n_2), n_1 + n_2 = \frac{n}{2} \right\}.$$

Тогда для любых коэффициентов $\{c_{\mathbf{k}}\}$

$$\left\| \sum_{\mathbf{s} \in Y_n} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_\infty \geq C \sum_{\mathbf{s} \in Y_n} \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_1, \quad (3.4)$$

где $\rho(\mathbf{s})$ определено в § 1, а C – положительное число. Неравенство (3.4) играет ключевую роль в доказательстве нижних оценок энтропийных чисел.

Возьмем произвольное четное $n \in \mathbb{N}$, которое в дальнейшем мы конкретизируем в зависимости от m . Рассмотрим компакт

$$F(Y_n)_\infty := \left\{ t = \sum_{\mathbf{s} \in Y_n} t_{\mathbf{s}} : t_{\mathbf{s}} \in \mathcal{T}(\rho(\mathbf{s})), \quad \|t_{\mathbf{s}}\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Из известных результатов по множествам коэффициентов Фурье тригонометрических полиномов вытекает следующая лемма (см. [22] и [25]).

ЛЕММА 3.1. Существуют $2^{n2^{n-1}}$ таких функций

$$f_j \in F(Y_n)_\infty, \quad j = 1, \dots, 2^{n2^{n-1}},$$

что при $i \neq j$

$$\|f_i - f_j\|_2 \gg n^{1/2}.$$

Покажем теперь, что для функций f_j из леммы 3.1 верно неравенство

$$\|f_i - f_j\|_\infty \gg n.$$

Действительно, для всякой $f \in F(Y_n)_\infty$ имеем

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\mathbf{s} \in Y_n} \|t_{\mathbf{s}}\|_2^2 \leq \sum_{\mathbf{s} \in Y_n} \|t_{\mathbf{s}}\|_1 \|t_{\mathbf{s}}\|_\infty \leq \sum_{\mathbf{s} \in Y_n} \|t_{\mathbf{s}}\|_1.$$

Остается применить неравенство малых шаров (3.4). Итак, для $k = n2^{n-1}$ по теореме 3.1 получаем

$$\epsilon_k(F(Y_n)_\infty)_\infty \gg \log k.$$

Теперь используем теорему 3.2. Возьмем $F := F(Y_n)_\infty$, $\mathcal{D} := \{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} : \|\mathbf{k}\|_\infty \leq 2^{n+1}\}$, $X := L_\infty$. Ясно, что при $l \geq \dim \mathcal{T}(Y_n) \asymp n2^n \asymp k$ выполнено

$$\sigma_l(F, \mathcal{D}) = 0.$$

Более того, для $f \in F$ выполнено

$$\|f\|_\infty \leq \frac{n}{2} \ll \log k.$$

Обозначим

$$B := \max_l l^r \sigma_l(F, \mathcal{D})_\infty.$$

По теореме 3.2 получаем

$$\log k \ll Bn^r k^{-r}, \quad B \gg n^{-r} k^r \log k.$$

Значит, существует $l \asymp k$, для которого

$$\sigma_l(F, \mathcal{D})_\infty \gg n^{-r} \log k \asymp (\log k)^{1-r}.$$

Далее, ясно, что для всякого m

$$\sigma_m(F, \mathcal{D})_\infty \ll \sigma_m(F, \mathcal{T})_\infty.$$

А по теореме Литтлвуда–Пэли существует такое $c_1(q) > 0$, что

$$c_1(q)n^{-1/2}2^{-rn}F \subset \mathbf{W}_q^r, \quad q < \infty.$$

Теорема 3.3 доказана.

§ 4. Численное интегрирование

4.1. Обозначения и постановка задачи. При численном интегрировании мы строим методы, дающие хорошее приближение интеграла

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mu$$

выражением вида

$$\Lambda(f, X_m) := \sum_{j=1}^m \lambda_j f(\xi^j), \quad (4.1)$$

где $X_m := \{\xi^1, \dots, \xi^m\}$, $\xi^j \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$. Для класса функций $\mathbf{W}$ введем обозначение

$$\Lambda(\mathbf{W}, X_m) := \sup_{f \in \mathbf{W}} \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mu - \Lambda(f, X_m) \right|.$$

Нас интересует зависимость от m наилучшей погрешности численного интегрирования с m узлами

$$\delta_m(\mathbf{W}) := \inf_{\lambda_1, \dots, \lambda_m; \xi^1, \dots, \xi^m} \Lambda(\mathbf{W}, X_m)$$

в некоторых классах функций $\mathbf{W}$.

4.2. Известные оценки снизу. Исторические сведения о численном интегрировании в классах функций смешанной гладкости можно найти в [21; гл. 4] и [26]. Следующая теорема доказана в [27].

ТЕОРЕМА 4.1. *Для всякой кубатурной формулы (Λ, X_m) с m узлами выполнена следующая оценка снизу:*

$$\Lambda(\mathbf{W}_p^r, X_m) \geq C(r, d, p) m^{-r} (\log m)^{(d-1)/2}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad r > \frac{1}{p}.$$

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 1.8. Она используется в доказательстве следующего результата.

ЛЕММА 4.1. *Пусть $\mathbf{s}$ – вектор из натуральных чисел и $\|\mathbf{s}\|_1 = n$. Тогда для всякого $N \leq 2^{n-1}$ и для произвольной кубатурной формулы (Λ, X_N) с N узлами существует такое $t_{\mathbf{s}} \in \mathcal{T}(2^{\mathbf{s}}, d)$ с $\|t_{\mathbf{s}}\|_{\infty} \leq 1$, что*

$$\hat{t}_{\mathbf{s}}(0) - \Lambda(t_{\mathbf{s}}, X_N) \geq C(d) > 0. \quad (4.2)$$

Для данного m выберем такое n , что

$$m \leq 2^{n-1} < 2m.$$

Рассмотрим многочлен

$$t(\mathbf{x}) = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} t_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}),$$

где $t_{\mathbf{s}}$ – многочлены из леммы 4.1 с $N = m$. Тогда

$$\hat{t}(0) - \Lambda(t, X_m) \geq C(d) n^{d-1}. \quad (4.3)$$

Доказательство теоремы 4.1 завершается установлением неравенства

$$\|t\|_{\mathbf{W}_p^r} \ll \|t\|_{\mathbf{B}_{p,2}^r} \ll 2^{rn} n^{(d-1)/2}. \quad (4.4)$$

Оценки снизу, доставляемые теоремой 4.1, одни и те же для разных параметров $1 \leq p < \infty$. Ясно, что чем больше p , тем сильнее утверждение теоремы.

4.3. Новые оценки снизу. Мы получим оценки снизу для численного интегрирования с некоторым специальным классом узлов. Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, d$. Сопоставим $\mathbf{s}$ решетку $W(\mathbf{s})$ следующим образом: введем обозначение

$$w(\mathbf{s}, \mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d \sin(2^{s_j} x_j)$$

и положим

$$W(\mathbf{s}) := \{\mathbf{x} : w(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем говорить, что набор узлов $X_m := \{\xi^i\}_{i=1}^m$ является (n, l) -сетью, если $|X_m \setminus W(\mathbf{s})| \leq 2^l$ для всех таких $\mathbf{s}$, что $\|\mathbf{s}\|_1 = n$.

ТЕОРЕМА 4.2. Для любой кубатурной формулы (Λ, X_m) по $(n, n-1)$ -сети X_m имеет место соотношение

$$\Lambda(\mathbf{W}_p^r, X_m) \gg 2^{-rn} n^{(d-1)/2}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует доказательству теоремы 4.1 в [27]. Возьмем $\mathbf{s}$ с $\|\mathbf{s}\|_1 = n$ и рассмотрим $\mathcal{T}(\mathbf{N}, d)$ с $N_j := 2^{s_j-1}$, $j = 1, \dots, d$. Тогда

$$\dim \mathcal{T}(\mathbf{N}, d) \geq 2^{\|\mathbf{s}\|_1} = 2^n.$$

Пусть $I(\mathbf{s})$ – такой набор индексов, что

$$X_m \setminus W(\mathbf{s}) = \{\xi^i\}_{i \in I(\mathbf{s})}.$$

Тогда $|I(\mathbf{s})| \leq 2^{n-1}$ по предположению. Рассмотрим

$$\Psi(\mathbf{s}) := \{t \in \mathcal{T}(\mathbf{N}, d) : t(\xi^i) = 0, i \in I(\mathbf{s})\}.$$

Тогда $\dim \Psi(\mathbf{s}) \geq 2^{n-1}$. По теореме 1.8 найдем $t_{\mathbf{s}}^1 \in \Psi(\mathbf{s})$, для которого имеем $\|t_{\mathbf{s}}^1\|_{\infty} = 1$ и $\|t_{\mathbf{s}}^1\|_2 \geq c(d) > 0$. Рассмотрим

$$t(\mathbf{x}) := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} t_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad t_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := |t_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{x})|^2 w(\mathbf{s}, \mathbf{x})^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & t_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{x}) w(s_1, x_1) \\ &= (2i)^{-1} \left(\sum_{\mathbf{k}: |k_j| \leq 2^{s_j-1}} \hat{t}_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + i2^{s_1} x_1} + \sum_{\mathbf{k}: |k_j| \leq 2^{s_j-1}} \hat{t}_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x}) - i2^{s_1} x_1} \right), \\ & \|t_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{x}) w(s_1, x_1)\|_2^2 = 2^{-1} \|t_{\mathbf{s}}^1\|_2^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|t_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{x}) w(\mathbf{s}, \mathbf{x})\|_2^2 = 2^{-d} \|t_{\mathbf{s}}^1\|_2^2 \geq c_1(d) > 0.$$

Очевидно, что (4.3) выполнено для нашего t . Соотношение (4.4) доказывается так же, как в [27].

Теорема 4.2 доказана.

Пример, построенный в доказательстве теоремы 4.1 (см. выше), приводит к оценке снизу для классов типа Бесова. Еще одно доказательство теоремы 4.3 приводится в [28].

ТЕОРЕМА 4.3. Для всякой кубатурной формулы (Λ, X_m) с m узлами выполняется следующая оценка снизу:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{B}_{p,\theta}^r, X_m) &\geq C(r, d, p) m^{-r} (\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)}, \\ 1 &\leq p \leq \infty, \quad 1 \leq \theta \leq \infty, \quad r > \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Действительно, как следует из доказательства формулы (4.4) в [27],

$$\|t\|_{\mathbf{B}_{p,\theta}^r} \ll 2^{rn} n^{(d-1)/\theta}. \quad (4.5)$$

Аналогичным образом, из доказательства теоремы 4.2 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.4. *Для всякой кубатурной формулы (Λ, X_m) относительно $(n, n-1)$ -сети X_m*

$$\Lambda(\mathbf{B}_{p,\theta}^r, X_m) \gg 2^{-rn} n^{(d-1)(1-1/\theta)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Заметим, что теоремы 4.2 и 4.4 дают нижние оценки для численного интегрирования по редким сеткам и их модификациям. Для $n \in \mathbb{N}$ определим редкую сетку $SG(n)$ следующим образом:

$$SG(n) := \{ \xi(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = (\pi k_1 2^{-n_1}, \dots, \pi k_d 2^{-n_d}), \\ 0 \leq k_j < 2^{n_j}, j = 1, \dots, d, \|\mathbf{n}\|_1 = n \}.$$

Теперь легко проверить, что $SG(n) \subset W(\mathbf{s})$ для любого $\mathbf{s}$ с $\|\mathbf{s}\|_1 = n$. Действительно, пусть $\xi(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \in SG(n)$, и рассмотрим произвольное $\mathbf{s}$ с $\|\mathbf{s}\|_1 = n$. Тогда $\|\mathbf{s}\|_1 = \|\mathbf{n}\|_1$ и существует j , для которого $s_j \geq n_j$. Для этого j имеем

$$\sin 2^{s_j} \xi(\mathbf{n}, \mathbf{k})_j = \sin 2^{s_j} \pi k_j 2^{-n_j} = 0, \quad w(\mathbf{s}, \xi(\mathbf{n}, \mathbf{k})) = 0.$$

Это значит, что $SG(n)$ – это (n, l) -сеть для всякого l . Заметим, что $|SG(n)| \asymp 2^n n^{d-1}$. Как известно (см. [30]), существует кубатурная формула $(\Lambda, SG(n))$, для которой

$$\Lambda(\mathbf{H}_p^r, SG(n)) \ll 2^{-rn} n^{d-1}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad r > \frac{1}{p}. \quad (4.6)$$

Теорема 4.4 с $\theta = \infty$ показывает, что оценка (4.6) точная. Более того, как показывает теорема 4.4, даже добавка к $SG(n)$ еще 2^{n-1} произвольных узлов не улучшит оценку в (4.6). Для $X_m = SG(n)$ другое доказательство теоремы 4.4 было дано в [28].

§ 5. Приближенное восстановление

Рассмотрим следующий восстанавливающий оператор. Для заданных m , $X_m := \{\xi^j\}_{j=1}^m$ и $\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_m(\mathbf{x})$ зададим линейный оператор формулой

$$\Psi(f, X_m) := \sum_{j=1}^m f(\xi^j) \psi_j(\mathbf{x}).$$

Для класса функций $\mathbf{W}$ положим

$$\Psi(\mathbf{W}, X_m)_p := \sup_{f \in \mathbf{W}} \|f - \Psi(f, X_m)\|_p.$$

Основной результат этого параграфа выражается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5.1. Для любого восстанавливающего оператора $\Psi(\cdot, X_m)$ по $(n, n-1)$ -сети X_m при $1 \leq q < p < \infty$ выполнено

$$\Psi(\mathbf{H}_q^r, X_m)_p \gg 2^{-n(r-\beta)} n^{(d-1)/p}, \quad \beta := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Прежде чем переходить к доказательству, сделаем несколько исторических замечаний. Задача оптимального восстановления на классах функций смешанной гладкости слабо исследована. Для класса $\mathbf{W}$ обозначим

$$\varrho_m(\mathbf{W})_p := \inf_{X_m; \psi_1, \dots, \psi_m} \Psi(\mathbf{W}, X_m)_p.$$

Правильный порядок этой величины известен только в отдельных случаях. В [29] было показано, что

$$\varrho_m(\mathbf{W}_2^r)_\infty \asymp m^{-r+1/2} (\log m)^{r(d-1)}. \quad (5.1)$$

Верхняя грань в (5.1) была получена восстановлением с помощью оператора типа Смоляка T_n при подходящем n . Оператор T_n использует редкую сетку $SG(n+d)$ и $\psi_j \in \mathcal{T}(Q_{n+d})$. Оператор T_n и его варианты изучались во многих работах. В [30] доказано, что для любых $f \in \mathbf{H}_p^r$, $1 \leq p \leq \infty$ и $r > 1/p$

$$\|f - T_n(f)\|_p \ll 2^{-rn} n^{d-1}. \quad (5.2)$$

Следующая оценка была получена в [21; гл. 4, § 5, замечание 2]: для любых $f \in \mathbf{H}_q^r$, $1 \leq q < p < \infty$ и $r > 1/q$

$$\|f - T_n(f)\|_p \ll 2^{-n(r-\beta)} n^{(d-1)/p}. \quad (5.3)$$

Оценка сверху (5.2) и оценка снизу колмогоровского поперечника, данная в [31]:

$$d_m(\mathbf{H}_\infty^r, L_\infty) \asymp m^{-r} (\log m)^{r+1} \quad \text{при } d = 2,$$

означают, что при $d = 2$ выполнено соотношение

$$\varrho_m(\mathbf{H}_\infty^r)_\infty \asymp m^{-r} (\log m)^{r+1}. \quad (5.4)$$

Оценка сверху (5.3) и известные оценки для колмогоровского поперечника (см., к примеру, [20; гл. 3]): при $1 \leq q \leq 2$, $r > 1/q$

$$d_m(\mathbf{H}_q^r, L_2) \asymp m^{-r+\eta} (\log m)^{(d-1)(r+1-1/q)}, \quad \eta := \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

означают, что при $1 \leq q \leq 2$ и $r > 1/q$ выполнено соотношение

$$\varrho_m(\mathbf{H}_q^r)_2 \asymp m^{-r+\eta} (\log m)^{(d-1)(r+1-1/q)}. \quad (5.5)$$

Как указывалось выше, $T_n(f) \in \mathcal{T}(Q_{n+d})$. Таким образом, T_n является приближением с гармониками из гиперболического креста $\mathcal{T}(Q_{n+d})$. Оценка сверху (5.3) и известные оценки для наилучшего приближения с гармониками из гиперболического креста (см., к примеру, [20; гл. 2, теорема 2.2]) показывают, что при $1 \leq q < p < \infty$ и $r > 1/q$ оператор T_n обеспечивает оптимальную по порядку скорость приближений в L_p для $\mathbf{H}_q^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Воспользуемся многочленами t_s^1 , построенными в доказательстве теоремы 4.2. Нам также придется проделать дополнительные построения. Пусть

$$\mathcal{K}_N(x) := \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ikx} = \frac{(\sin(Nx/2))^2}{N(\sin(x/2))^2}$$

– одномерное ядро Фейера. Ядро $\mathcal{K}_N$ является четным неотрицательным тригонометрическим многочленом из $\mathcal{T}(N-1)$. Очевидные равенства

$$\|\mathcal{K}_N\|_1 = 1, \quad \|\mathcal{K}_N\|_\infty = N,$$

неравенство

$$\|f\|_q \leq \|f\|_1^{1/q} \|f\|_\infty^{1-1/q}$$

и соображения двойственности показывают, что

$$CN^{1-1/q} \leq \|\mathcal{K}_N\|_q \leq N^{1-1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (5.6)$$

В многомерном случае положим

$$\mathcal{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d \mathcal{K}_{N_j}(x_j), \quad \mathbf{N} = (N_1, \dots, N_d).$$

Тогда $\mathcal{K}_{\mathbf{N}}$ оказываются неотрицательными тригонометрическими полиномами из $\mathcal{T}(\mathbf{N}-\mathbf{1}, d)$ со следующими свойствами:

$$\|\mathcal{K}_{\mathbf{N}}\|_1 = 1, \quad (5.7)$$

$$\|\mathcal{K}_{\mathbf{N}}\|_q \asymp \vartheta(\mathbf{N})^{1-1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (5.8)$$

Для n вида $n = 4l$, $l \in \mathbb{N}$, положим

$$Y(n, d) := \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} = (4l_1, \dots, 4l_d), l_1 + \dots + l_d = \frac{n}{4}, l_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d \right\}.$$

Для $\mathbf{s} \in Y(n, d)$ определим

$$t_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := t_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{x}) \mathcal{K}_{2^{\mathbf{s}-2}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*),$$

где $\mathbf{x}^*$ – точка максимума $|t_{\mathbf{s}}^1(\mathbf{x})|$. Наконец, пусть

$$t(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{s} \in Y(n, d)} t_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) w(\mathbf{s}, \mathbf{x}).$$

Тогда

$$|t_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}^*)| \gg 2^n,$$

так что по неравенству Никольского

$$\|t_{\mathbf{s}}\|_2 \gg 2^{n/2}.$$

Из нашего определения $Y(n, d)$ следует, что $t_s(\mathbf{x})w(\mathbf{s}, \mathbf{x})$, $\mathbf{s} \in Y(n, d)$, образуют ортогональную систему многочленов. Значит,

$$\|t\|_2^2 \gg 2^n n^{d-1}. \quad (5.9)$$

Для всякого $p \in (1, \infty)$ по теореме 1.6 имеем оценку

$$\|t\|_{p'} \ll \left(\sum_{\mathbf{s} \in Y(n, d)} \|t_{\mathbf{s}}\|_1^{p'} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(p'-1)} \right)^{1/p'} \ll 2^{n/p} n^{(d-1)/p'}. \quad (5.10)$$

Соотношения (5.9) и (5.10) показывают, что

$$\|t\|_p \gg 2^{n(1-1/p)} n^{(d-1)/p}. \quad (5.11)$$

Очевидно, что

$$\|t\|_{\mathbf{H}_q^r} \ll 2^{n(r+1-1/q)}. \quad (5.12)$$

Оценки (5.11), (5.12) и тот факт, что $\Psi(t, X_m) = 0$, обеспечивают оценку из теоремы 5.1, что завершает доказательство теоремы.

Неравенство

$$\|t\|_{\mathbf{B}_{q,\theta}^r} \ll 2^{n(r+1-1/q)} n^{(d-1)/\theta}$$

вместе с (5.11) приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любого восстанавливающего оператора $\Psi(\cdot, X_m)$ относительно $(n, n-1)$ -сети X_m при $1 \leq q < p < \infty$ и $r > \beta$ выполнено неравенство*

$$\Psi(\mathbf{B}_{q,\theta}^r, X_m)_p \gg 2^{-n(r-\beta)} n^{(d-1)(1/p-1/\theta)}, \quad \beta := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

§ 6. Обсуждение

Как подчеркнуто в названии и во введении, нас интересуют конструктивные методы m -членных приближений по тригонометрической системе. Теорема 1.1 в целом решает эту задачу для приближений в L_p , $2 \leq p < \infty$. Аналогичные результаты для приближений в L_p , $1 < p < 2$, автору не известны. Соответствующее неравенство лебеговского типа из [4] для $1 < p < 2$ дает соотношение

$$\|f_{C(t,p,d)m^{p'-1} \log(m+1)}\|_p \leq C \sigma_m(f)_p,$$

намного более слабое, чем теорема 1.1. Было бы интересно получить хорошие неравенства лебеговского типа для случая $1 < p < 2$ для СЧЖА или каких-нибудь других конструктивных методов.

Основные результаты настоящей статьи относятся к m -членным приближениям для $2 \leq p \leq \infty$. При $p \in [2, \infty)$ дела обстоят очень хорошо: имеется универсальный алгоритм (СЧЖА), который производит оптимальное (с точностью до добавочного множителя $(\log m)^{C(r,d)}$) m -членное приближение во всех классах $\mathbf{W}_q^r$, $\mathbf{H}_q^r$ и $\mathbf{B}_{q,\theta}^r$. Вдобавок имеются конструктивные методы, опирающиеся на жадные алгоритмы и дающие оптимальную скорость приближений во

всех этих классах. Однако имеющиеся оценки сверху (к примеру, в теореме 1.4) выполняются для более высокой гладкости r , чем требуется для вложения $\mathbf{W}_q^r$ в L_p . Интересно было бы найти конструктивные методы, дающие правильные порядки убывания $\sigma_m(\mathbf{W}_q^r)_p$, $\sigma_m(\mathbf{H}_q^r)_p$ и $\sigma_m(\mathbf{B}_{q,\theta}^r)_p$ в малой гладкости.

Случай $p = \infty$ (приближения по равномерной норме) очень интересен и сложен. Пространство $C(\mathbb{T}^d)$ не является гладким банаховым пространством, поэтому существующую теорию жадных аппроксимаций нельзя непосредственно применить к приближениям в L_∞ . В частности, нет аналога теоремы 1.1 для $p = \infty$. Однако в случае классов функций смешанной гладкости эту проблему можно обойти: как показано в доказательстве теоремы 2.4, мы можем воспользоваться жадными алгоритмами в L_p с большим p и получить оценки для m -членных приближений в L_∞ . За это нам придется заплатить появлением добавочного множителя $(\log m)^{1/2}$ в оценке погрешности. Он происходит от множителя $p^{1/2}$ в оценке погрешности аппроксимации с помощью жадных алгоритмов в L_p , $2 \leq p < \infty$ (см. замечание 2.1 и теорему 2.2). Добавочный множитель $(\log m)^{1/2}$ возникает при переходе от $p < \infty$ к $p = \infty$ и при иных подходах, в других оценках сверху асимптотических характеристик классов функций смешанной гладкости (см., к примеру, [1; гл. 3, п. 3.6]). К сожалению, мы не смогли получить оценки снизу, соответствующих нашим оценкам сверху для m -членных аппроксимаций в L_∞ . Весьма частный случай, разобранный в теореме 3.3, можно трактовать как указание, что от этого добавочного коэффициента $(\log m)^{1/2}$ при аппроксимациях в L_∞ избавиться нельзя.

Мы рассмотрели изотропные классы функций смешанной гладкости. Изотропность означает, что в определении классов гладкости все переменные играют одинаковую роль. Для теории приближений с гармониками из гиперболических крестов весьма интересны и важны анизотропные классы функций смешанной гладкости. Дадим соответствующие определения.

Пусть $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ – набор чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq r_{\nu+2} \leq \dots \leq r_d, \quad 1 \leq \nu \leq d.$$

Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ введем обозначения

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d F_{r_j}(x_j), \quad \mathbf{W}_p^{\mathbf{r}} := \{f : f = \varphi * F_{\mathbf{r}}, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Перейдем к классам $\mathbf{H}_q^{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{B}_{q,\theta}^{\mathbf{r}}$. Положим

$$\|f\|_{\mathbf{H}_q^{\mathbf{r}}} := \sup_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q 2^{(\mathbf{r}, \mathbf{s})}$$

и для $1 \leq \theta < \infty$ положим

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{q,\theta}^{\mathbf{r}}} := \left(\sum_{\mathbf{s}} (\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q 2^{(\mathbf{r}, \mathbf{s})})^\theta \right)^{1/\theta}.$$

Будем обозначать $\mathbf{B}_{q,\infty}^{\mathbf{r}} := \mathbf{H}_q^{\mathbf{r}}$. Соответствующий единичный шар обозначим через

$$\mathbf{B}_{q,\theta}^{\mathbf{r}} := \{f : \|f\|_{\mathbf{B}_{q,\theta}^{\mathbf{r}}} \leq 1\}.$$

Как известно, во многих задачах, где требуется оценить асимптотические характеристики, анизотропные классы функций смешанной гладкости от d переменных ведут себя как изотропные классы функций ν переменных (см., к примеру, [20]). Очевидно, это замечание верно для оценок снизу. Чтобы продемонстрировать его для оценок сверху, в некоторых случаях требуется разработка специальных методов. Подходы, развитые в настоящей работе, годятся и для анизотропных классов. К примеру, основная лемма 2.1 заменяется следующим утверждением.

ЛЕММА 6.1. Обозначим $r := r_1$ и для $f \in L_1$ положим

$$f_{l,r} := \sum_{\mathbf{s}: r l \leq (\mathbf{r}, \mathbf{s}) < r(l+1)} \delta_{\mathbf{s}}(f), \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Рассмотрим класс

$$\mathbf{W}_A^{\mathbf{r}, a, b} := \{f : \|f_{l,r}\|_A \leq 2^{-al} l^{(\nu-1)b}\}.$$

Тогда для $2 \leq p < \infty$ и $a > 0$ существует конструктивный метод, опирающийся на жадные алгоритмы и приводящий к оценке

$$\sigma_m(\mathbf{W}_A^{\mathbf{r}, a, b})_p \ll m^{-a-1/2} (\log m)^{(\nu-1)(a+b)}. \quad (6.1)$$

Для $p = \infty$ получаем

$$\sigma_m(\mathbf{W}_A^{\mathbf{r}, a, b})_\infty \ll m^{-a-1/2} (\log m)^{(\nu-1)(a+b)+1/2}. \quad (6.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Результаты § 2 выполнены для анизотропных классов функций смешанной гладкости, если положить $r = r_1$ и заменить d на ν .

Список литературы

- [1] V. Temlyakov, *Greedy approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., **20**, Cambridge Univ. Press, 2011, xiv+418 pp.
- [2] V. N. Temlyakov, “Greedy algorithms in Banach spaces”, *Adv. Comput. Math.*, **14**:3 (2001), 277–292.
- [3] V. N. Temlyakov, “Weak greedy algorithms”, *Adv. Comput. Math.*, **12**:2-3 (2000), 213–227.
- [4] V. N. Temlyakov, “Sparse approximation and recovery by greedy algorithms in Banach spaces”, *Forum Math. Sigma*, **2** (2014), e12, 26 pp.; IMI preprint 2013:09, 2013, 27 pp.; 2013, arXiv: 1303.6811v1.
- [5] С. Б. Стечкин, “Об абсолютной сходимости ортогональных рядов”, *Докл. АН СССР*, **102** (1955), 37–40.
- [6] Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3(177) (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29**:3 (1974), 169–186.

- [7] В. Е. Майоров, “Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q ”, *Матем. заметки*, **40**:2 (1986), 161–173; англ. пер.: V. E. Maiorov, “Trigonometric diameters of the Sobolev classes W_p^r in the space L_q ”, *Math. Notes*, **40**:2 (1986), 590–597.
- [8] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Nonlinear approximation by trigonometric sums”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **2**:1 (1995), 29–48.
- [9] Е. Д. Глускин, “Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств”, *Матем. сб.*, **136(178)**:1(5) (1988), 85–96; англ. пер.: E. D. Gluskin, “Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 85–96.
- [10] Y. Makovoz, “On trigonometric n -widths and their generalization”, *J. Approx. Theory*, **41**:4 (1984), 361–366.
- [11] Э. С. Белинский, “Приближение “плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций”, *Матем. сб.*, **132(174)**:1 (1987), 20–27; англ. пер.: È. S. Belinskii, “Approximation by a “floating” system of exponentials on classes of smooth periodic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **60**:1 (1988), 19–27.
- [12] E. S. Belinskii, “Decomposition theorems and approximation by a “floating” system of exponentials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:1 (1998), 43–53.
- [13] В. Н. Темляков, “Приближение периодических функций нескольких переменных билинейными формами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:1 (1986), 137–155; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximation of periodic functions of several variables by bilinear forms”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:1 (1987), 133–150.
- [14] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “О наилучших m -членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 ”, *Матем. заметки*, **56**:5 (1994), 57–86; англ. пер.: B. S. Kashin, V. N. Temlyakov, “On best m -term approximations and the entropy of sets in the space L^1 ”, *Math. Notes*, **56**:5 (1994), 1137–1157.
- [15] В. Н. Темляков, “Нелинейные поперечники по Колмогорову”, *Матем. заметки*, **63**:6 (1998), 891–902; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Nonlinear Kolmogorov widths”, *Math. Notes*, **63**:6 (1998), 785–795.
- [16] V. N. Temlyakov, “An inequality for the entropy numbers and its application”, *J. Approx. Theory*, **173** (2013), 110–121.
- [17] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, V. N. Temlyakov, “Convergence of some greedy algorithms in Banach spaces”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **8**:5 (2002), 489–505.
- [18] V. N. Temlyakov, “Greedy-type approximation in Banach spaces and applications”, *Constr. Approx.*, **21**:2 (2005), 257–292.
- [19] А. С. Романюк, “Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 61–100; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Best M -term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables”, *Izv. Math.*, **67**:2 (2003), 265–302.
- [20] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, *Тр. МИАН СССР*, **178**, 1986, 3–113; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximation of functions with a bounded mixed derivative”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **178** (1989), 1–121.
- [21] V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1993, x+419 pp.
- [22] В. Н. Темляков, “Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 138–168; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Estimates of the

- asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 161–197.
- [23] M. J. Donahue, C. Darken, L. Gurvits, E. Sontag, "Rate of convex approximation in non-Hilbert spaces", *Constr. Approx.*, **13**:2 (1997), 187–220.
- [24] E. S. Belinskii, "Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε -entropy", *Anal. Math.*, **15**:2 (1989), 67–74.
- [25] V. N. Temlyakov, "An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers", *J. Complexity*, **11**:2 (1995), 293–307.
- [26] V. N. Temlyakov, "Cubature formulas, discrepancy, and nonlinear approximation", *J. Complexity*, **19**:3 (2003), 352–391.
- [27] В. Н. Темляков, "Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул", *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1403–1413; англ. пер.: V. N. Temlyakov, "On a way of obtaining lower estimates for the errors of quadrature formulas", *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 247–257.
- [28] Dinh Dũng, T. Ullrich, "Lower bounds for the integration error for multivariate functions with mixed smoothness and optimal Fibonacci cubature for functions on the square", *Math. Nachr.*, **288**:7 (2015), 743–762.
- [29] V. N. Temlyakov, "On approximate recovery of functions with bounded mixed derivative", *J. Complexity*, **9**:1 (1993), 41–59.
- [30] В. Н. Темляков, "Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных", *Матем. сб.*, **128(170)**:2(10) (1985), 256–268; англ. пер.: V. N. Temlyakov, "Approximate recovery of periodic functions of several variables", *Math. USSR-Sb.*, **56**:1 (1987), 249–261.
- [31] V. N. Temlyakov, "An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths", *East J. Approx.*, **2**:2 (1996), 253–262.

Владимир Николаевич Темляков
(Vladimir N. Temlyakov)

University of South Carolina, Columbia, SC, USA;

Математический институт им. В.А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: temlyak@math.sc.edu

Поступила в редакцию

31.12.2014