Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, Дефект индекса в теории нелокальных задач и η -инвариант, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 85–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:33:41

УДК 517.168.5

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин

Дефект индекса в теории нелокальных задач и η -инвариант

Работа посвящена эллиптической теории на многообразиях, край которых является накрытием. Рассмотрены нелокальные краевые задачи, для которых вычислен индекс. Затем исследуется задача Атьи–Патоли–Зингера на таких многообразиях. Для нетривиальных накрытий вычислен дефект индекса. Построена двойственность Пуанкаре в K -теории на соответствующих многообразиях с особенностями.

Библиография: 33 названия.

Введение

В работе исследуются краевые задачи для эллиптических уравнений на многообразиях, край которых представляет собой конечнолистное накрытие. На таких многообразиях рассматриваются краевые задачи для операторов, не удовлетворяющих условию Атьи–Ботта (т.е. операторов, для которых корректные классические краевые задачи отсутствуют). Напомним, что известные операторы Хирцебруха и Дирака и подобные им геометрические операторы как раз не удовлетворяют условию Атьи–Ботта.

Мы рассматриваем два класса краевых задач на многообразиях с накрытием на крае.

1. Нелокальные краевые задачи. На гладком многообразии M с краем ∂M , который представлен как конечнолистное накрытие с проекцией $\pi: \partial M \rightarrow X$, определен изоморфизм

$$C^\infty(\partial M) \stackrel{\beta}{\simeq} C^\infty(X, \pi_! 1)$$

пространства $C^\infty(\partial M)$ гладких функций и пространства сечений векторного расслоения $\pi_! 1 \in \text{Vect}(X)$ на базе накрытия – прямого образа одномерного тривиального расслоения.

Для скалярного эллиптического оператора D на многообразии M простейшая нелокальная задача из рассматриваемых в работе имеет вид

$$\begin{aligned} Du &= f, \\ B\beta(u|_{\partial M}) &= g, \end{aligned} \tag{0.1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 03-02-16336, 02-01-00118, 02-01-00928).

где u, f – функции на M , функция g определена на базе X накрытия, а оператор B , определяющий краевые условия, также действует на базе X . По отношению к исходному многообразию M краевые условия в системе (0.1) являются *нелокальными*, так как они сравнивают значения функции в разных точках многообразия M .

Для этого класса нелокальных краевых задач устанавливается теорема конечности, и для регулярных накрытий получена теорема об индексе. Не вдаваясь сейчас подробно в точные формулировки результатов, отметим два существенных аспекта теории.

Во-первых, в доказательстве теоремы об индексе вложение основного многообразия производится в универсальное расслоение конечной группы, в то время как в классической теореме об индексе достаточно вложить многообразие в пространство $\mathbb{R}^N$.

Во-вторых, в случае нелокальных задач аналог разностной конструкции Атьи–Зингера эллиптического оператора принадлежит K -группе некоторой *некоммутативной C^* -алгебры*, ассоциированной с кокасательным расслоением и накрытием π . Напомним, что в классической теореме об индексе достаточно топологической K -теории.

В этой работе формула индекса получена в терминах, близких к K -теорной формулировке теоремы Атьи–Зингера. Локальные формулы индекса предполагается рассмотреть в другом месте.

2. Спектральные задачи на многообразиях с накрытием. Первый подход к обобщению классических краевых задач, свободный от препятствия Атьи–Ботта, был построен в замечательной работе Атьи–Патоли–Зингера [1]. Для класса эллиптических операторов первого порядка (включающего, впрочем, все геометрические операторы) определена так называемая *спектральная задача*, обозначаемая через (D, Π_+) . Она фредгольмова. Однако ее индекс в общей ситуации не определяется главным символом оператора D .

В случае, когда край многообразия является накрытием, интересные инварианты возникают, если рассматривать класс эллиптических операторов, которые в окрестности края поднимаются с базы накрытия. Главный символ такого оператора D определяет элемент

$$[\sigma(D)] \in K^0(\overline{T^*M}^\pi)$$

в K -группе пространства $\overline{T^*M}^\pi$ с особенностями, которое получается из кокасательного расслоения T^*M отождествлением точек в слоях накрытия на крае (подробнее см. §5). Для элемента $[\sigma(D)]$ определяется топологический индекс

$$\text{ind}_t[\sigma(D)] \in \mathbb{Q}/n\mathbb{Z},$$

где n – число листов накрытия. Однако равенство аналитического индекса (как вычета по модулю n) и топологического справедливо только в случае тривиального накрытия. Для произвольного регулярного накрытия в работе получена формула *дефекта индекса*

$$\text{mod } n\text{-ind}(D, \Pi_+) - \text{ind}_t[\sigma(D)] = \eta(D|_X \otimes 1_{n-\pi,1}) \in \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}. \quad (0.2)$$

При этом дефектом, т.е. разностью между аналитическим индексом по модулю n и топологическим, является относительный η -инвариант Атьи–Патоли–Зингера ограничения оператора D на край с коэффициентами в плоском расслоении $\pi_!1$. В случае тривиального накрытия относительный η -инвариант равен нулю и формула дефекта приводит к формуле индекса

$$\text{mod } n\text{-ind}(D, \Pi_+) = \text{ind}_t[\sigma(D)].$$

Последняя формула была получена Мельроузом и Фридом [2], см. также [3]–[6]. Впрочем, наше доказательство является новым даже и в этом случае. Любопытно отметить, что ключевым моментом доказательства является интерпретация дробного аналитического инварианта

$$\text{mod } n\text{-ind}(D, \Pi_+) - \eta(D|_X \otimes 1_{n-\pi_!1}) \in \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \quad (0.3)$$

как индекса некоторой нелокальной краевой задачи из п. 1 (в подходящей эллиптической теории с коэффициентами).

Есть и более тесная связь между эллиптическими теориями п. 1 и п. 2.

3. Изоморфизм и двойственность Пуанкаре. Рассмотрим многообразия с особенностями $\overline{T^*M}^\pi$ и $\overline{M}^\pi$. В работе установлены *изоморфизмы Пуанкаре* на этих пространствах, которые в случае тождественного накрытия $\pi = \text{Id}$, $X = \partial M$ приводят к известным изоморфизмам Пуанкаре (см., например, [7]–[9])

$$K^0(T^*M) \simeq K_0(M, \partial M), \quad K^0(T^*(M \setminus \partial M)) \simeq K_0(M) \quad (0.4)$$

(для некомпактных пространств используется K -функтор с компактными носителями). Отличие от гладкой ситуации на рассматриваемых многообразиях с особенностями изоморфизм связывает K -группы коммутативной алгебры функций пространства и некоторой двойственной некоммутативной алгебры. Изоморфизмы Пуанкаре на элементах определяются *квантованием*, т.е. сопоставлением символу оператора. При этом в аналоге первого изоморфизма из (0.4) используются операторы п. 2, а во втором случае – нелокальные задачи из п. 1.

Коротко о содержании работы. В первом параграфе определяется класс нелокальных задач на многообразии с накрытием на крае и доказывается теорема конечности. Целью следующего параграфа является получение формулы индекса. В качестве примера построена корректная краевая задача для оператора Хирцебруха на многообразии с отражающей границей. В третьем параграфе производится гомотопическая классификация нелокальных эллиптических операторов. Следующие три параграфа посвящены формуле дефекта индекса. После того, как в первом из них даются все необходимые определения, в §5 доказывается формула (0.2), являющаяся одним из центральных результатов работы. В §6 рассмотрено приложение к вычислению дробной части η -инварианта. Показано также, что инвариант (0.3) можно вычислять по формуле Лефшеца. Работу завершают

два параграфа, в которых на многообразиях с особенностями, которые отвечают накрытию на крае, строятся двойственность и изоморфизм Пуанкаре в K -теории.

Интересный класс нелокальных задач представляют задачи на многообразиях, для которых проекция π имеет особенности (например, отвечает проекции на факторпространство по несвободному действию конечной группы на крае многообразия). Теория индекса задач такого типа связана, по-видимому, с индексом на многообразиях с особенностями типа орбиобразий (см. [10], [11]). Преимущество подхода настоящей работы состоит в том, что в случае гладкой базы X накрытия не возникает дополнительных аналитических и топологических трудностей. Подобные постановки нелокальных задач остаются за рамками настоящей работы. Их можно найти, например, в книге [12].

Еще одно естественное обобщение возникает при переходе от накрытий к локально тривиальным расслоениям со слоем ненулевой размерности. Соответствующий класс краевых задач предполагается рассмотреть в другом месте.

Результаты, полученные в работе, докладывались на конференции “Spring School 2001”, Потсдам, ФРГ, конференции “Топология, анализ и смежные вопросы” в честь 60-летия А. С. Мищенко, Москва, 2001 г., а также на Международном математическом конгрессе 2002 г., Пекин. Авторы признательны В. Е. Назайкинскому и В. Нистору за обсуждения результатов работы, благодарны А. С. Мищенко, который указал нам на ошибку в предыдущей версии работы, а также рецензенту за сделанные замечания.

§1. Нелокальные краевые задачи

1. Накрытия и нелокальные операторы. Пусть задано конечнолистное накрытие гладких многообразий с проекцией $\pi: Y \rightarrow X$. Определено отображение прямого образа

$$\pi_!: \text{Vect}(Y) \rightarrow \text{Vect}(X),$$

сопоставляющее векторному расслоению $E \in \text{Vect}(Y)$ расслоение

$$\pi_! E \in \text{Vect}(X), \quad (\pi_! E)_x = C^\infty(\pi^{-1}(x), E), \quad x \in X.$$

Из этого определения вытекает изоморфизм $\beta_E: C^\infty(Y, E) \xrightarrow{\cong} C^\infty(X, \pi_! E)$ пространств сечений на тотальном пространстве Y и на базе X накрытия. Это позволяет переносить операторы, действующие на многообразии Y , на базу X и обратно. Более точно, для дифференциального оператора

$$D: C^\infty(Y, E) \rightarrow C^\infty(Y, E)$$

на Y через $\pi_! D$ будем обозначать прямой образ, определяемый выражением

$$\pi_! D = \beta_E D \beta_E^{-1}: C^\infty(X, \pi_! E) \rightarrow C^\infty(X, \pi_! E).$$

Он является дифференциальным оператором. Однако обратный образ

$$\pi^! D' = \beta_E^{-1} D' \beta_E: C^\infty(Y, E) \rightarrow C^\infty(Y, E) \quad (1.1)$$

оператора D' на X будет *нелокальным оператором* (и даже не псевдолокальным).

ПРИМЕР 1.1. Для тривиального накрытия

$$Y = \underbrace{X \sqcup X \sqcup \cdots \sqcup X}_{n \text{ штук}} \rightarrow X,$$

состоящего из n экземпляров базы X , и тривиального расслоения $E = \mathbb{C}$ имеем $\pi_! E = \mathbb{C}^n$. При этом прямые образы дифференциальных операторов на Y всегда являются диагональными операторами

$$\pi_! D = \text{diag}(D|_{X_1}, \dots, D|_{X_n}): C^\infty(X, \mathbb{C}^n) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{C}^n),$$

в то время как обратный образ является матричным оператором произвольного вида. В этой интерпретации внедиагональные элементы матричного оператора (1.1) являются нелокальными операторами на пространстве Y , так как они перемешивают значения функций на разных листах накрытия.

2. Постановка нелокальных задач. Пусть M – компактное гладкое многообразие с краем ∂M . Будем предполагать, что край является накрытием над гладким замкнутым многообразием X с проекцией

$$\pi: \partial M \rightarrow X.$$

Фиксируем некоторую воротниковую окрестность $\partial M \times [0, 1)$ края многообразия M . Нормальную координату к краю будем обозначать через t .

Для гладкой функции $u \in C^\infty(M)$ через $j_{\partial M}^{m-1}u$,

$$j_{\partial M}^{m-1}u = \left(u|_{\partial M}, -i \frac{\partial}{\partial t} u \Big|_{\partial M}, \dots, \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-1} u \Big|_{\partial M} \right),$$

обозначается сужение на край ее джета порядка $m-1$ в нормальном к краю направлении. Оператор $j_{\partial M}^{m-1}$ непрерывно действует в следующих пространствах Соболева:

$$j_{\partial M}^{m-1}: H^s(M) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{m-1} H^{s-1/2-k}(\partial M), \quad s > m - \frac{1}{2}.$$

На протяжении работы мы будем предполагать, что для векторных расслоений E на многообразиях с краем в воротниковой окрестности края зафиксированы изоморфизмы $p^*(E|_{\partial M}) \simeq E|_{\partial M \times [0, 1]}$, где через $p: \partial M \times [0, 1] \rightarrow \partial M$ обозначена естественная проекция. В этом случае оператор взятия джета корректно определен и на сечениях расслоений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Нелокальной краевой задачей* для дифференциального оператора

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

порядка m будем называть систему уравнений вида

$$\begin{cases} Du = f, & u \in H^s(M, E), f \in H^{s-m}(M, F), \\ B\beta_E(j_{\partial M}^{m-1}u) = g, & g \in H^\delta(X, G), \end{cases} \quad (1.2)$$

где граничные условия определяются псевдодифференциальным оператором

$$B: \bigoplus_{k=0}^{m-1} H^{s-1/2-k}(X, \pi_! E|_{\partial M}) \rightarrow H^\delta(X, G)$$

на базе X накрытия. Предполагается, что компонента

$$B_k: H^{s-1/2-k}(X, \pi_! E|_{\partial M}) \rightarrow H^\delta(X, G)$$

оператора B имеет порядок $s - 1/2 - k - \delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Можно также рассмотреть задачи типа (1.2), в которых компоненты вектор-функции g лежат в пространствах Соболева с разными индексами. Выбор одного и того же индекса δ продиктован соображениями удобства и может быть всегда осуществлен с помощью редукции порядка.

Отметим, что в случае тождественного накрытия $\pi = \text{Id}$, $X = \partial M$ задача (1.2) становится классической краевой задачей (см., например, [13]).

3. Связь с классическими задачами. Теорема конечности. Воротниковая окрестность $\partial M \times [0, 1)$ края многообразия также является накрытием

$$\pi \times 1: \partial M \times [0, 1) \rightarrow X \times [0, 1).$$

Соответствующий изоморфизм пространств сечений обозначим через

$$\beta'_E: C^\infty(\partial M \times [0, 1), E) \rightarrow C^\infty(X \times [0, 1), \pi_! E).$$

Тогда в окрестности края многообразия нелокальную краевую задачу (D, B) можно рассматривать как обратный образ следующей классической краевой задачи:

$$\begin{pmatrix} \beta'_F & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} D \\ B\beta_E j_{\partial M}^{m-1} \end{pmatrix} \circ (\beta'_E)^{-1} = \begin{pmatrix} \beta'_F D (\beta'_E)^{-1} \\ B j_X^{m-1} \end{pmatrix},$$

т. е. краевой задачи

$$\begin{pmatrix} \beta'_F D (\beta'_E)^{-1} \\ B j_X^{m-1} \end{pmatrix}: C^\infty(X \times [0, 1), \pi_! E) \rightarrow \begin{matrix} C^\infty(X \times [0, 1), \pi_! F) \\ \oplus \\ C^\infty(X, G), \end{matrix} \quad (1.3)$$

для дифференциального оператора $(\pi \times 1)_! D = \beta'_F D (\beta'_E)^{-1}$ на цилиндре $X \times [0, 1)$. В локальных координатах последний оператор представляет собой диагональную матрицу, элементами которой являются операторы на листах накрытия. Задача (1.3) будет обозначаться для краткости через $((\pi \times 1)_! D, B)$.

Отметим, что *классическая краевая задача* (1.3) *определена только в окрестности края*, так как накрытие $\pi \times 1$ определено только в окрестности края многообразия M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Задача (D, B) называется *эллиптической*, если оператор D эллиптивен и классическая задача $((\pi \times 1)_! D, B)$ является эллиптической, т.е. удовлетворяет условию Шапиро–Лопатинского (см., например, [13]).

Пользуясь стандартной техникой, получаем следующую теорему конечности.

ТЕОРЕМА 1.1. *Эллиптическая задача $\mathcal{D} = (D, B)$ фредгольмова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через D^{-1} параметрикс эллиптического оператора D внутри многообразия. Аналогичным образом параметрикс классической эллиптической краевой задачи $((\pi \times 1)_! D, B)$ на цилиндре $X \times [0, 1]$ обозначим через (L, K) . Глобально на многообразии M определим параметрикс задачи $\mathcal{D}$ как склейку указанных параметрикс

$$\mathcal{D}^{-1} = (\psi_1 D^{-1} \varphi_1 + \psi_2 (\pi \times 1)^! L \varphi_2, \psi_2 K),$$

здесь функции $\varphi_{1,2}$ являются разбиением единицы, удовлетворяющим условию

$$\varphi_1 \equiv 0 \text{ в окрестности края, } \quad \varphi_2 \equiv 0 \text{ вне некоторой окрестности.} \quad (1.4)$$

Функции $\psi_{1,2}$ выбраны таким образом, что $\psi_i \equiv 1$ на носителе $\text{supp } \varphi_i$ и они также удовлетворяют условиям (1.4). Функция ψ_2 предполагается постоянной в слоях накрытия $\pi \times 1$. Оператор $\mathcal{D}^{-1}$, очевидно, является почти обратным к оператору $\mathcal{D}$. Теорема доказана.

§2. Индекс нелокальных задач

В предыдущем параграфе нелокальная краевая задача в окрестности края была представлена в терминах некоторой классической краевой задачи. Это позволит в настоящем параграфе применить известные топологические методы (см., например, [14]) к задаче о вычислении индекса нелокальных задач.

1. Редукция к операторам нулевого порядка. Будем рассматривать следующий класс операторов, нелокальных в окрестности края многообразия. Линейный оператор

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

называется *допустимым оператором порядка m* , если он представим по модулю операторов с гладким ядром в виде

$$D = \psi_1 D' \varphi_1 + \psi_2 (\pi \times 1)^! D'' \varphi_2 \quad (2.1)$$

для срезающих функций $\varphi_{1,2}$, $\psi_{1,2}$, как и в доказательстве теоремы 1.1. Здесь $D': C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ – псевдодифференциальный оператор на M , а

$$D'': C^\infty(X \times [0, 1], (\pi \times 1)_! E) \rightarrow C^\infty(X \times [0, 1], (\pi \times 1)_! F)$$

– оператор на цилиндре $X \times [0, 1]$, который, в свою очередь, является суммой псевдодифференциального оператора с компактным носителем ядра на внутренности $X \times (0, 1)$ и дифференциального оператора по нормальной к краю переменной t

$$\sum_{k=0}^m D_k(t) \left(-i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-k}. \quad (2.2)$$

Здесь $D_k(t)$ – гладкие семейства псевдодифференциальных операторов на X порядка $\text{ord } D_k(t) = k$, а оператор $D_0(t)$ индуцирован гомоморфизмом расслоений.

На рассматриваемый класс операторов переносится понятие эллиптичности, постановка нелокальных краевых задач и теорема конечности (ср. с аналогичным обобщением [13] в классической ситуации). В частности, *символ допустимого оператора* является парой (σ_M, σ_X) , где символ $\sigma_M: p^*E \rightarrow p^*F$ определен над $M \setminus (\partial M \times [0, \varepsilon))$ (через $p: S^*M \rightarrow M$ обозначена естественная проекция), а символ $\sigma_X: p_0^*(\pi_!E) \rightarrow p_0^*(\pi_!F)$ ($p_0: S^*(X \times [0, 1]) \rightarrow X \times [0, 1]$) задан над цилиндром $X \times [0, 1]$. При этом символы являются гладкими и их значения согласованы:

$$(\pi_0)_! \sigma_M|_{\partial M \times (\varepsilon, 1)} = \sigma_X,$$

где прямой образ индуцирован естественной проекцией

$$\pi_0: T^*M|_{\partial M \times (\varepsilon, 1)} \rightarrow T^*(X \times (\varepsilon, 1)).$$

ПРИМЕР 2.1. Пусть $E \in \text{Vect}(M)$ – векторное расслоение. Предположим, что задано разложение его прямого образа в окрестности $U_{\partial M}$ края

$$\pi_!E|_{\partial M} = E_+ \oplus E_-, \quad E_{\pm} \in \text{Vect}(X \times [0, \varepsilon)).$$

Определим оператор $D_{\pm}: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ по формуле

$$D_{\pm} = \psi_2(\pi \times 1)^! \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda_{X, E_+} \right) \oplus \left(i \frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda_{X, E_-} \right) \right] \varphi_2 + \psi_1 i\Lambda_{M, E} \varphi_1 \quad (2.3)$$

(здесь через Λ обозначены псевдодифференциальные операторы первого порядка со скалярным символом равным $|\xi|$ на соответствующих многообразиях, а срезающие функции выбираются как и выше). Оператор $D_{\pm}$ является допустимым эллиптическим оператором, а корректным краевым условием для него является условие Дирихле

$$P_{E_-} \beta_E(u|_{\partial M}) = g \in C^\infty(X, E_-),$$

где через $P_{E_-}: \pi_!E|_{\partial M} \rightarrow \pi_!E|_{\partial M}$ обозначен проектор на подрасслоение E_- . Краевую задачу для оператора $D_{\pm}$ с этим условием обозначим через $\mathcal{D}_{\pm}$. Так же, как и в ситуации классических краевых задач (см., например, [13]), устанавливается равенство нулю индекса задачи $\mathcal{D}_{\pm}$.

Операторы, отвечающие разбиению $E_+ = \pi_!E|_{\partial M}$, $E_- = 0$, будем обозначать через D_+ . Такие операторы являются фредгольмовыми без краевых условий.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Как и в классической теории, на замкнутом многообразии (см. [15]) можно дать два эквивалентных определения гомотопии эллиптических нелокальных задач. Во-первых, две задачи можно назвать гомотопными, если существует семейство задач, соединяющее две данные и непрерывное по операторной норме (в некоторой паре пространств Соболева). Во-вторых, задачи можно назвать гомотопными, если существует непрерывная гомотопия их символов (с сохранением эллиптичности). Эквивалентность двух определений основана на сглаживании непрерывных гомотопий и на стандартных оценках норм операторов по модулю компактных слагаемых через их символы, см., например, [16].

Через $\text{Ell}^m(M, \pi)$, $m \geq 1$, обозначим¹ группу Гротендика полугруппы гомотопических классов эллиптических краевых задач для допустимых операторов порядка m по модулю прямых сумм с краевыми задачами $\mathcal{D}_\pm \circ D_+^{m-1}$.

Через $\text{Ell}^0(M, \pi)$ обозначим группу стабильных гомотопических классов допустимых эллиптических операторов порядка нуль (напомним, что при стабилизации тривиальными операторами в этом случае называются те, которые индуцированы изоморфизмами расслоений). Отметим, что допустимые эллиптические операторы нулевого порядка в окрестности края согласно выражению (2.2) индуцированы изоморфизмами расслоений и не требуют постановки краевых условий.

Аналогично классической теории (см. [14] или [13]) порядок нелокальной задачи может быть доведен до нулевого при помощи стабильных гомотопий. Более точно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1 (о редукции порядка). *Композиция с оператором D_+ (с коэффициентами в расслоениях) индуцирует изоморфизм групп*

$$\begin{aligned} \times D_+^m : \text{Ell}^0(M, \pi) &\rightarrow \text{Ell}^m(M, \pi), \\ [D] &\mapsto [D \circ D_+^m]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого результата является прямым обобщением доказательства из классической теории (см. [14]), и поэтому здесь мы его опускаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Опишем редукцию порядка, т.е. отображение $(\times D_+^m)^{-1}$ в важном частном случае краевых задач вида

$$\begin{aligned} Du &= f, \\ P\beta_E(u|_{\partial M}) &= g, \quad g \in C^\infty(X, \text{Im } P), \end{aligned}$$

с допустимым эллиптическим оператором $D : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ первого порядка, который в окрестности $U_{\partial M}$ края представлен в виде

$$(\pi \times 1)_! (D|_{U_{\partial M}}) = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + A(t) \right),$$

¹В дальнейшем через $\text{Ell}^m(M, \pi)$ мы будем обозначать соответствующие группы Гротендика также и в ситуации замкнутых многообразий и многообразий с краем с проекциями π , определенными на некотором открытом множестве. Из контекста всегда будет ясно, о какой группе идет речь, так что возможность недоразумения здесь исключается.

где $A(t)$ – гладкое семейство операторов на базе X накрытия, а Γ – изоморфизм расслоений $\pi_! E|_{\partial M} \rightarrow \pi_! F|_{\partial M}$. Граничные условия определяются проектором P в расслоении $\pi_!(E|_{\partial M})$. Для простоты будем предполагать, что символ $a(x, \xi)$ оператора $A(0)$ эрмитов и удовлетворяет соотношению $a^*a = |\xi|^2$. Проектор P будем также считать эрмитовым. Через $L_+(A(0)) \in \text{Vect}(S^*X)$ обозначим расслоение Кальдерона – векторное расслоение над S^*X , порожденное собственными векторами символа $a(x, \xi)$, отвечающими положительным собственным значениям.

Условие эллиптичности задачи (D, P) состоит в требовании, чтобы проектор P определял изоморфизм подрасслоений

$$L_+(A(0)) \xrightarrow{P} p_0^* \text{Im } P, \quad p_0: S^*X \rightarrow X.$$

В этом случае рассмотрим линейную гомотопию символа

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t} + A(0)\right) = i\tau + a(x, \xi)$$

(через τ обозначена двойственная переменная к t), определяемую выражением

$$(1 - \varepsilon)(i\tau + a(x, \xi)) + \varepsilon(2P(x) - 1), \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Из эллиптичности краевой задачи вытекает, что при $\tau^2 + \xi^2 = 1$ это гомотопия эллиптических символов. При этом в конце гомотопии при $\varepsilon = 1$ символ не зависит от кокасательных переменных. Гомотопию эллиптических символов можно рассматривать как символ на цилиндре $X \times [0, 1]$. Тогда символ исходного оператора D вместе с построенной гомотопией определяют символ допустимого эллиптического оператора нулевого порядка на многообразии M с подклеенным цилиндром $[0, 1] \times \partial M$. Полученный эллиптический символ нулевого порядка переносится на исходное многообразие M при помощи очевидного диффеоморфизма $M \simeq M \cup_{\partial M} ([0, 1] \times \partial M)$, тождественного вдали от края. Можно показать (ср. с [14]), что образ задачи (D, P) при отображении редукции порядка $(\times D_+)^{-1}$ из теоремы 2.1 совпадает с элементом, определяемым построенным символом (оператором).

2. Допустимые операторы на замкнутом многообразии. Пусть M – замкнутое многообразие и $\overline{U}$ – подмногообразие (возможно, с краем) коразмерности нуль в M , на котором задано накрытие

$$\overline{U} \xrightarrow{\pi} \overline{Y}$$

над некоторым многообразием $\overline{Y}$. Через U, Y будем обозначать соответствующие множества внутренних точек. Тогда скалярные *допустимые* операторы на M имеют вид

$$D = D' + \psi(\pi^! D'')\varphi,$$

где D' – псевдодифференциальный оператор на M , а D'' – псевдодифференциальный оператор на Y , действующий в сечениях расслоения $\pi_!1 \in \text{Vect}(Y)$, а срезающие функции φ, ψ имеют носители в U .

В матричном случае мы рассматриваем операторы, действующие в более общих пространствах, чем пространства сечений расслоений.

Будем рассматривать тройки (E, E_0, α) , состоящие из расслоений

$$E \in \text{Vect}(V), \quad E_0 \in \text{Vect}(Y)$$

(здесь $V \subset M$ – такая окрестность множества $M \setminus U$, что пересечение $U \cap V$ вместе с каждой своей точкой содержит весь слой, в котором она находится) и изоморфизма расслоений

$$\pi_!E|_{U \cap V} \xrightarrow{\sim} E_0|_{\pi(U \cap V)}$$

на множестве $\pi(U \cap V)$.

Через $\text{Vect}(M, \pi)$ обозначим множество классов изоморфных троек. При этом две тройки $(E, E_0, \alpha), (F, F_0, \gamma)$ называются *изоморфными*, если векторные расслоения, входящие в них, попарно изоморфны: $E \xrightarrow{a} F, E_0 \xrightarrow{b} F_0$, и изоморфизмы согласованы: $\gamma(\pi_!a) = b\alpha$.

Пространством сечений, отвечающим тройке $\mathcal{E} = (E, E_0, \alpha)$, называется линейное пространство

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \mathcal{E}) &= \{(u, v) \mid u \in C^\infty(V, E), v \in C^\infty(Y, E_0), \alpha\beta_E(u|_{U \cap V}) = v|_{\pi(U \cap V)}\} \\ &\subset C^\infty(V, E) \oplus C^\infty(Y, E_0). \end{aligned}$$

Для тождественного накрытия тройка $\mathcal{E}$ определяет векторное расслоение на M , получающееся сцеплением расслоений E и E_0 при помощи изоморфизма α ; пространство $C^\infty(M, \mathcal{E})$ есть пространство сечений этого векторного расслоения.

Пространство сечений $C^\infty(M, \mathcal{E})$ порождается своими подпространствами

$$C_0^\infty(V, E), C_0^\infty(Y, E_0) \subset C^\infty(M, \mathcal{E})$$

сечений с компактными носителями. Более точно, при первом вложении функции u сопоставляется пара $(u, \widetilde{\beta_E u|_{U \cap V}})$, где тильда означает продолжение функции нулем в точках, в которых она не была первоначально определена. Аналогичным образом второе вложение сопоставляет функции v пару $(\widetilde{\beta_E^{-1} v|_{\pi(U \cap V)}}, v)$. Теперь определение нелокальных операторов, действующих в пространствах вида $C^\infty(M, \mathcal{E})$ на M , получается стандартным образом, исходя из скалярного случая. А именно *допустимым оператором порядка t* называется оператор

$$D: C^\infty(M, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{F}),$$

представимый по модулю операторов с гладким ядром в виде

$$D = D_1\varphi_1 + D_2\varphi_2 \tag{2.4}$$

для псевдодифференциальных операторов порядка m

$$D_1: C_0^\infty(V, E) \rightarrow C_0^\infty(V, F), \quad D_2: C_0^\infty(Y, E_0) \rightarrow C_0^\infty(Y, F_0)$$

с компактными носителями ядер. Предполагается, что срезающая функция φ_1 равна нулю в окрестности множества $M \setminus V$, а φ_2 — в окрестности множества $M \setminus U$.

Символ допустимого оператора является парой (σ_M, σ_Y) обычных символов:

$$\sigma_M: p_M^* E|_{M \setminus U} \rightarrow p_M^* F|_{M \setminus U}, \quad \sigma_Y: p_Y^* E_0|_{\overline{Y}} \rightarrow p_Y^* F_0|_{\overline{Y}},$$

где $p_M: S^*M \rightarrow M$, $p_Y: S^*Y \rightarrow Y$. При этом символы согласованы:

$$\gamma((\pi_0)_! \sigma_M|_{\partial \overline{U}}) \alpha^{-1} = \sigma_Y|_{\partial \overline{Y}}.$$

Через $\text{Ell}^k(M, \pi)$ обозначим группу стабильных гомотопических классов допустимых эллиптических операторов порядка k на M по модулю эллиптических операторов с (главными) символами, не зависящими от кокасательных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Аналогичный класс эллиптических операторов и краевых задач для них можно рассмотреть на многообразиях с краем. Более точно, пусть M — многообразие с границей и на замкнутом подмножестве $\overline{U} \subset M$ определена проекция π , как и ранее. Предполагается, что множество $\overline{U}$ в области $M \setminus \partial M$ является подмногообразием коразмерности нуль, а в некоторой воротниковой окрестности края является прямым произведением $[0, \varepsilon) \times \overline{U}_0$, где $\overline{U}_0$ — подмногообразие коразмерности нуль в ∂M . Тогда на M рассматриваются операторы вида (2.4), где оба оператора D_1 и D_2 имеют порядок m и в окрестности края соответствующих многообразий оба являются дифференциальными по нормальной к краю переменной (см. (2.2)). Такие операторы по-прежнему действуют в пространствах вида $C^\infty(M, \mathcal{E})$. Для них рассматриваются краевые задачи вида

$$(D, Bj): C^\infty(M, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{F}) \oplus C^\infty(\partial M, \mathcal{G}),$$

где $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Vect}(M, \pi)$, $\mathcal{G} \in \text{Vect}(\partial M, \pi|_{\partial M})$, j — оператор взятия джета порядка m , $j: C^\infty(M, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\partial M, \mathcal{E}^m|_{\partial M})$, а граничные условия определяются допустимым оператором B на крае. Можно показать, что на этот класс краевых задач переносятся все результаты этого параграфа, включая определение тривиальных задач $\mathcal{D}_\pm$, группы стабильных гомотопических классов краевых задач и теоремы о редукции порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Рассмотрим многообразие M с накрытием π на крае. В п. 1 этого параграфа была определена группа $\text{Ell}^m(M, \pi)$, порожденная нелокальными задачами для обычных эллиптических операторов. С другой стороны, в окрестности края определена проекция $\pi \times 1: \partial M \times [0, 1) \rightarrow X \times [0, 1)$ и определена группа $\text{Ell}^m(M, \pi \times 1)$, отвечающая нелокальным задачам для допустимых операторов в смысле замечания 2.3. Эти две группы оказываются изоморфными при естественном отображении

$$\text{Ell}^m(M, \pi) \rightarrow \text{Ell}^m(M, \pi \times 1).$$

Это вытекает из изоморфизма $\text{Vect}(M) \simeq \text{Vect}(M, \pi \times 1)$.

3. Редукция на замкнутое многообразие. Вернемся к проблеме вычисления индекса нелокальных операторов на многообразии M с краем ∂M , для которого задано накрытие π . Рассмотрим какое-либо вложение $f: M \rightarrow M'$ в замкнутое многообразие той же размерности, что и M (в качестве M' можно взять, например, дубль $2M = M \cup_{\partial M} M$ многообразия M). Аналогично классической ситуации [15] определяется отображение прямого образа

$$f_!: \operatorname{Ell}^0(M, \pi) \rightarrow \operatorname{Ell}^0(M', \pi \times 1),$$

где через $\pi \times 1$ обозначено продолжение накрытия π на трубчатую окрестность $\partial M \times [-1, 1] \subset M'$. А именно эллиптическому оператору

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}^k)$$

(к этому виду можно привести произвольный оператор $C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ добавлением тождественного оператора $\operatorname{Id}: C^\infty(M, F') \rightarrow C^\infty(M, F')$, где через F' обозначено дополнительное расслоение к F) с символом $\sigma(D) = (\sigma_M, \sigma_X)$ сопоставляется символ на M' , который на M совпадает с исходным, а на дополнении $M' \setminus M$ является тождественным $\operatorname{Id}: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$. Полученный символ действует из пространства, определяемого сцеплением расслоения E с расслоением $\mathbb{C}^k$ при помощи изоморфизма $\sigma_X|_X$, в расслоение $\mathbb{C}^k$ над объемлющим замкнутым многообразием M' .

ЛЕММА 2.1. *Отображение $f_!: \operatorname{Ell}^0(M, \pi) \rightarrow \operatorname{Ell}^0(M', \pi \times 1)$ корректно определено и сохраняет индекс.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма является переформулировкой известного свойства вырезания для индекса. Доказательство стандартно и опускается.

4. Вложение в универсальное пространство. В теоремах об индексе этой работы мы будем считать, что выполнено следующее условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.1. Накрытие π является регулярным, и на подмногообразии $\bar{U}$ задано свободное действие конечной группы G , при этом проекция π есть проекция на факторпространство.

Пусть даны две пары (M, π) и (M', π') (оба многообразия предполагаются замкнутыми).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что задано *вложение* f пары (M, π) в (M', π') , если определено вложение $f: M \rightarrow M'$, $f(\bar{U}) \subset \bar{U}'$, и на области определения накрытия отображение является эквивариантным.

Напомним, что через U мы обозначаем множество, на котором определена проекция π (и аналогично U' для π').

Через $\pi_N: EG_N \rightarrow BG_N$ обозначим N -универсальное расслоение для группы G , в котором пространства являются замкнутыми многообразиями. Известна,

см. например [17], явная конструкция для расслоений такого вида. Например, рассмотрим вложения

$$G \subset S_{|G|} \subset \mathbb{U}(|G|)$$

в унитарную группу. Тогда расслоение $V_{k,|G|} \rightarrow V_{k,|G|}/G$ (где через $V_{k,n}$ обозначено многообразие Штифеля n -реперов в $\mathbb{C}^k$, а $|G|$ – порядок группы) при достаточно большом k будет N -универсальным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для пары (M, π) при выполнении предположения 2.1 существует вложение в универсальное пространство (EG_N, π_N) при достаточно большом N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу N -универсальности накрытия π_N существует эквивариантное отображение $\bar{U} \rightarrow EG_N$. Если размерность универсального пространства EG_N достаточно велика, то соображения общего положения показывают, что малым шевелением можно добиться того, чтобы оно стало гладким вложением. В силу N -связности пространства EG_N это вложение можно продолжить до гладкого отображения $M \rightarrow EG_N$. В свою очередь, малым шевелением отображения вне окрестности подмножества $\bar{U}$ можно его сделать вложением на всем многообразии.

5. Оператор Эйлера в диске. В единичном диске $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой зададим задачу Неймана для оператора Эйлера

$$\begin{aligned} (d + \delta)u &= f, \\ (*u)|_{\mathbb{S}^{n-1}} &= g, \end{aligned} \quad u \in \Lambda^e(\mathbb{D}^n), \quad f \in \Lambda^o(\mathbb{D}^n),$$

действующего из четных форм в нечетные, $g \in \Lambda^{e+n}(\mathbb{S}^{n-1})$. Эта краевая задача является эллиптической, и теория Ходжа показывает, что она имеет тривиальное ядро, а ядро одномерно и состоит из констант. То же верно и для однородной краевой задачи, которую запишем в операторном виде

$$D_{dR} = d + \delta: \Lambda_0^e(\mathbb{D}^n) \rightarrow \Lambda^o(\mathbb{D}^n)$$

(через $\Lambda_0^e(\mathbb{D}^n)$ обозначено подпространство форм, удовлетворяющих однородным граничным условиям). Этот оператор является $O(n)$ -эквивариантным относительно естественного действия ортогональной группы на $\mathbb{D}^n$.

6. Вложения и индекс эллиптических операторов. Рассмотрим вложение $f: (M, \pi) \rightarrow (M', \pi')$ положительной коразмерности. Фиксируем на M' метрику, которая на подмногообразии $\bar{U}' \subset M'$ является G -инвариантной. Нормальное расслоение M обозначим через NM . Тогда замкнутая трубчатая окрестность W подмногообразия M в M' диффеоморфна расслоению единичных шаров в нормальном расслоении $DM \subset NM$. Причем диффеоморфизм над $\bar{U} \subset \bar{U}'$ можно считать G -эквивариантным.

Рассмотрим допустимый эллиптический оператор на M

$$D: C^\infty(M, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{F}).$$

На построенном многообразии DM можно определить краевую задачу, являющуюся скрещенным произведением оператора D на базе M и семейства краевых задач для оператора Эйлера в вертикальных направлениях. Определение такого произведения можно получить так же, как в работе [15].

Скрещенное произведение является краевой задачей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D} \otimes 1_{\Lambda^e} & -1_F \otimes \tilde{D}_{dR}^* \\ 1_E \otimes \tilde{D}_{dR} & \tilde{D}^* \otimes 1_{\Lambda^o} \end{pmatrix},$$

где поднятие оператора D на многообразии DM с коэффициентами в расслоении четных форм на слоях обозначено через

$$\tilde{D} \otimes 1_{\Lambda^e} : C^\infty(DM, p^* \mathcal{E} \otimes \Lambda_0^e(DM)) \rightarrow C^\infty(DM, p^* \mathcal{F} \otimes \Lambda_0^e(DM)).$$

Через $\tilde{D}^* \otimes 1_{\Lambda^o}$ обозначено поднятие, отвечающее сопряженному оператору и пространству нечетных форм. Семейство краевых задач для оператора Эйлера $\tilde{D}_{dR}^M$ с коэффициентами в тройке $\mathcal{E} = (E, E_0, \alpha)$ обозначено через

$$1_E \otimes \tilde{D}_{dR} : C_{\alpha \otimes 1}^\infty(DM, p^* E \otimes \Lambda_0^e(DM)) \rightarrow C_{\alpha \otimes 1}^\infty(DM, p^* E \otimes \Lambda^o(DM)).$$

По построению внедиагональные операторы коммутируют с диагональными. Так же, как и в обычной теореме Атьи–Зингера, отсюда получаем следующий результат.

ЛЕММА 2.2. $\text{ind } D = \text{ind } \mathcal{D}$.

Доказательство аналогично приведенному в работе [15].

Таким образом, оператору D , определенному на подмногообразии $M \subset M'$, мы сопоставили краевую задачу $\mathcal{D}$ на трубчатой окрестности $DM \simeq W \subset M'$ с тем же индексом. К этой краевой задаче можно применить процедуру редукции порядка (см. замечание 2.2) и продолжить соответствующий оператор нулевого порядка с подмногообразия W на все M' , как это делалось в п. 2. Суммируя вышесказанное, получаем, что для вложения f пары (M, π) в (M', π') определено отображение прямого образа

$$f_! : \text{Ell}^1(M, \pi) \rightarrow \text{Ell}^0(M', \pi'),$$

при котором индекс сохраняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Непосредственное вычисление показывает, что линейная гомотопия редукции порядка для краевых задач из замечания 2.2, при которой символ $\sigma(d + \delta)$ продолжается с пространства $T^*\mathbb{D}^n$ до символа на $T^*\mathbb{R}^n$, обратимого вне компакта, приводит к элементу эквивариантной K -группы

$$j_!(1) \in K_{O(n)}(T^*\mathbb{R}^n), \quad j : pt \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

используемому в стандартном доказательстве Атьи–Зингера.

7. Теорема об индексе. Обозначим через f вложение пары (M, π) в универсальное пространство, см. предложение 2.1. На универсальном пространстве EG_N проекция π_N глобально определена и прямой образ нелокального оператора является обычным эллиптическим оператором на базе BG_N , т.е. определено отображение

$$(\pi_N)_! : \text{Ell}(EG_N, \pi_N) \rightarrow \text{Ell}(BG_N) \simeq K(T^*BG_N).$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Для пары (M, π) , удовлетворяющей предположению 2.1, коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}^1(M, \pi) & \xrightarrow{f_!} & \text{Ell}^0(EG_N, \pi_N) \\ \text{ind} \downarrow & & \downarrow (\pi_N)_! \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\text{ind}_t} & K(T^*BG_N), \end{array}$$

где через ind_t обозначен топологический индекс Атьи–Зингера на замкнутом многообразии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, имеем

$$\text{ind } D = \text{ind } f_![D] = \text{ind}(\pi_N)_! f_![D] = \text{ind}_t((\pi_N)_! f_![D]),$$

где первое равенство следует из сохранения индекса при прямом образе, второе – из того, что при отображении $(\pi_N)_!$ сам оператор не меняется, а последнее равенство представляет собой формулу Атьи–Зингера для эллиптического псевдодифференциального оператора на замкнутом многообразии BG_N .

8. Пример многообразия с отражающей границей, см. [18]. Пусть M – $4k$ -мерное компактное ориентированное риманово многообразие, на крае ∂M которого задана обращающая ориентацию гладкая инволюция G без неподвижных точек. Проекцию, отвечающую соответствующему свободному действию группы $\mathbb{Z}_2$, обозначим через $\pi: \partial M \rightarrow \partial M/\mathbb{Z}_2$. Рассмотрим оператор Хирцебруха на многообразии M

$$d + d^*: \Lambda^+(M) \rightarrow \Lambda^-(M)$$

(см. [19]). В воротниковой окрестности края выберем метрику прямого произведения, которая поднимается с цилиндра $[0, 1] \times \partial M/\mathbb{Z}_2$. Тогда оператор Хирцебруха представляется, с точностью до изоморфизма векторных расслоений, в виде (см. [1])

$$\frac{\partial}{\partial t} + A$$

для эллиптического самосопряженного оператора на крае

$$A: \Lambda^*(\partial M) \rightarrow \Lambda^*(\partial M), \quad A\omega = (-1)^{k+p}(d * -\varepsilon * d)\omega,$$

где в случае формы $\omega \in \Lambda^{2p}(\partial M)$ четной степени полагаем $\varepsilon = 1$, а для нечетной $\omega \in \Lambda^{2p-1}(\partial M)$ полагаем $\varepsilon = -1$. В силу обращения ориентации инволюцией G получаем антикоммутативность

$$G^* A = -AG^*.$$

Ни на каком многообразии оператор Хирцебруха не имеет корректных классических краевых условий. Однако он допускает следующую нелокальную краевую задачу

$$\begin{aligned} (d + d^*)\omega &= f, \\ (1 + G^*)\omega|_{\partial M} &= g, \quad g \in \Lambda^*(\partial M)^{\mathbb{Z}_2} \simeq \Lambda^*(\partial M/\mathbb{Z}_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

на многообразии с отражающей границей. Здесь через $\Lambda^*(\partial M)^{\mathbb{Z}_2}$ обозначено подпространство G -инвариантных форм на крае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Нелокальная задача (2.5) является эллиптической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, рассмотрим произвольную точку $x \in \partial M/\mathbb{Z}_2$ на базе накрытия. Прямое вычисление показывает, что в окрестности этой точки классическая краевая задача, отвечающая нелокальной задаче, имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\omega_1 &= f_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\omega_2 = f_2, \\ \omega_1|_{\partial M/\mathbb{Z}_2} + \omega_2|_{\partial M/\mathbb{Z}_2} &= g. \end{aligned}$$

Условие ее эллиптичности (условие Шапиро–Лопатинского) выполнено, так как символ оператора граничных условий определяет изоморфизм пространств

$$\operatorname{Im} \sigma(\Pi_+)(x, \xi) \oplus \operatorname{Im} \sigma(\Pi_-)(x, \xi) \simeq \Lambda^*(\partial M)_x$$

в каждой точке $(x, \xi) \in S^*\partial M/\mathbb{Z}_2$ косферического расслоения, где через Π_+ обозначен неотрицательный спектральный проектор самосопряженного оператора A

$$\Pi_+ = \frac{A + |A|}{2|A|},$$

а $\Pi_- = 1 - \Pi_+$ — отрицательный проектор. Из эллиптичности классической задачи получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{ind}(d + d^*, (1 + G^*)) = \operatorname{sign} M,$$

где $\operatorname{sign} M$ — сигнатура многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символ задачи (2.5) совпадает с символом композиции спектральной задачи Атьи–Патоли–Зингера

$$(d + d^*)\omega = f,$$

$$\Pi_+\omega|_{\partial M} = \omega', \quad \omega' \in \text{Im } \Pi_+ \subset \Lambda^*(\partial M),$$

и фредгольмова оператора

$$(1 + G^*): \text{Im } \Pi_+ \rightarrow \Lambda^*(\partial M)^{\mathbb{Z}_2}. \quad (2.6)$$

Вычислим каждый из них.

1) Для индекса спектральной задачи известно выражение (см. [1])

$$\text{ind}(d + d^*, \Pi_+) = \text{sign } M - \frac{\dim \ker A}{2}.$$

При этом по теории Ходжа–де Рама имеем: $\dim \ker A = \dim H^*(\partial M)$.

2) С другой стороны, для оператора (2.6) прямая проверка показывает, что он является оператором на, а его ядро совпадает с пространством G -антиинвариантных гармонических форм. Оператор Ходжа $*$ переводит пространства анти- и инвариантных форм друг в друга, поэтому получаем

$$\dim \ker(1 + G^*)|_{\text{Im } \Pi_+} = \frac{\dim \ker A}{2}.$$

Собирая вместе индекс спектральной задачи и оператора $(1 + G^*)$, получаем требуемое равенство

$$\text{ind}(d + d^*, (1 + G^*)) = \text{sign } M - \frac{\dim \ker A}{2} + \frac{\dim \ker A}{2} = \text{sign } M.$$

§ 3. Гомотопическая классификация нелокальных операторов

Разрежем многообразие M на две части

$$M' = M \setminus \{\partial M \times [0, 1)\} \simeq M \quad \text{и} \quad \partial M \times [0, 1].$$

Тогда символ $\sigma(D)$ допустимого эллиптического оператора D нулевого порядка естественно представлять как пару обычных символов

$$\sigma(D)|_{M'} \quad \text{и} \quad (\pi \times 1)! \sigma(D)|_{\partial M \times [0, 1]}. \quad (3.1)$$

Будем их обозначать для краткости через σ_M и σ_X , соответственно. Каждый из них определяет обычные разностные конструкции

$$[\sigma_M] \in K(T^*M'), \quad [\sigma_X] \in K(T^*(X \times (0, 1))).$$

Здесь и ниже через K обозначена K -группа с компактными носителями. В последнем случае эллиптический символ σ_X нулевого порядка обратим над основанием $X \times \{0\}$ цилиндра $X \times [0, 1]$ (это вытекает из эллиптичности и разложения (2.2)) и определяет таким образом элемент указанной K -группы с компактными носителями.

Однако определить единый элемент одной топологической K -группы не представляется возможным, так как многообразия T^*M' и $T^*(X \times (0, 1])$ нельзя гладко подклеить одно к другому (их края не диффеоморфны). Тем не менее, подклейку можно осуществить, если склеивать не сами многообразия, а их алгебры функций.

1. C^* -алгебра многообразия с накрытием на крае. Каждому пространству сопоставим алгебру непрерывных функций, которые обращаются в нуль на бесконечности:

$$C_0(T^*M'), \quad C_0(T^*(X \times (0, 1]), \text{End } p^* \pi_! 1).$$

При этом на пространстве $T^*(X \times (0, 1])$ рассматриваются функции со значениями в эндоморфизмах векторного расслоения $\pi_! 1 \in \text{Vect}(X)$, а через $p: T^*(X \times (0, 1]) \rightarrow X$ обозначена естественная проекция. В прямой сумме рассматриваемых алгебр определим подалгебру, определяемую условием согласования

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{T^*M, \pi} = \{ (u, v) \mid u \in C_0(T^*M'), v \in C_0(T^*(X \times (0, 1]), \text{End } p^* \pi_! 1), \\ \beta u|_{\partial M'} \beta^{-1} = v|_{t=1} \}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь через t обозначена координата вдоль образующей цилиндра $X \times (0, 1]$.

В случае тождественного накрытия $\partial M \rightarrow \partial M = X$ эта алгебра становится коммутативной алгеброй непрерывных функций на пространстве $T^*(M \setminus \partial M)$, обращаясь в нуль на бесконечности. Отметим, что введенную алгебру можно рассматривать как C^* -алгебру группоида [20], отвечающего отношению эквивалентности, определяемому проекцией π на крае ($x \sim y$, если $x = y$ или $x, y \in \partial M$ и $\pi(x) = \pi(y)$). В случае тривиального накрытия эта алгебра рассматривалась в работе [6].

2. Разностная конструкция. Определим *разностную конструкцию*, которая в ситуации нелокальных операторов будет отображением

$$\chi: \text{Ell}^0(M, \pi) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}) \quad (3.3)$$

в группу K_0 для C^* -алгебры $\mathcal{A}_{T^*M, \pi}$. Для эллиптического оператора

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}^k)$$

фиксируем вложения расслоений $E, \mathbb{C}^k$ в тривиальные расслоения достаточно большой размерности и обозначим через $P_E, P_{\mathbb{C}^k}$ проекторы, определяющие соответствующие подрасслоения

$$E \simeq \text{Im } P_E \subset \mathbb{C}^N \oplus 0, \quad \mathbb{C}^k \simeq \text{Im } P_{\mathbb{C}^k} \subset 0 \oplus \mathbb{C}^L.$$

В окрестности края многообразия через $P_{\pi|E}$, $P_{\pi|\mathbb{C}^k}$ будем обозначать прямые образы этих проекторов. *Разностным элементом* оператора D называется разность

$$\chi[D] = [P_1 \oplus P_2] - [P_{\mathbb{C}^k} \oplus P_{\pi|\mathbb{C}^k}] \in K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}),$$

где проектор P_1 над многообразием M' имеет вид

$$\begin{cases} P_E \cos^2 |\xi| + P_{\mathbb{C}^k} \sin^2 |\xi| \\ \quad + (\sigma_M^{-1}(x, \xi) P_{\mathbb{C}^k} + \sigma_M(x, \xi) P_E) \sin |\xi| \cos |\xi|, & |\xi| \leq \frac{\pi}{2}, \\ P_{\mathbb{C}^k}, & |\xi| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

(предполагается, что главный символ является однородным по ξ степени нуль), а проектор P_2 над цилиндром $X \times [0, 1]$ определяется выражениями

$$\begin{cases} P_{\pi|E} \cos^2 |\xi| + P_{\pi|\mathbb{C}^k} \sin^2 |\xi| + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^{-1}(x', \xi) P_{\pi|\mathbb{C}^k} + \tilde{\sigma}(x', \xi) P_{\pi|E}) \sin 2|\xi|, \\ P_{\pi|E} \cos^2 \varphi + P_{\pi|\mathbb{C}^k} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^{-1}(x', 0) P_{\pi|\mathbb{C}^k} + \tilde{\sigma}(x', 0) P_{\pi|E}) \sin 2\varphi, \\ P_{\pi|\mathbb{C}^k}, \end{cases}$$

где в первом случае рассматриваются значения $x' \in X \times [1/2, 1]$, $|\xi| \leq \pi/2$, во втором — $x' \in X \times [0, 1/2]$, $|\xi| < \pi t$, а последний случай покрывает все остальные точки. Здесь для краткости положено

$$\varphi = |\xi| + \frac{\pi}{2}(1 - 2t), \quad \tilde{\sigma}(x', \xi) = \sigma_X(x', \xi).$$

Геометрически указанные проекторы определяют подрасслоение, которое над нулевым сечением при $|\xi| = 0$ совпадает с расслоением $E \subset \mathbb{C}^{N+L}$, при $|\xi| \geq \pi/2$ совпадает с ортогональным расслоением $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{N+L}$, а в промежуточных точках является поворотом одного расслоения в сторону другого при помощи эллиптического символа $\sigma(D)$, определяющего их изоморфизм. По построению проекторы P_1 и $P_{\mathbb{C}^k}$ совпадают вне компактного множества пространства T^*M' , а проекторы P_2 и $P_{\pi|\mathbb{C}^k}$ совпадают вне компакта на $T^*(X \times (0, 1])$, т.е. разность $[P_1 \oplus P_2] - [P_{\mathbb{C}^k} \oplus P_{\pi|\mathbb{C}^k}]$ действительно является элементом группы $K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Построенный элемент K -группы для C^* -алгебры можно определять и другими выражениями (ср. [21]).

ТЕОРЕМА 3.1. *Разностная конструкция (3.3) корректно определена и осуществляет изоморфизм групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение χ сохраняет отношения эквивалентности в группах $\text{Ell}^0(M, \pi)$ и $K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi})$. В самом деле, при гомотопии операторов их символы непрерывно гомотопируются, что приводит к непрерывной гомотопии соответствующих проекторов $P_{1,2}$. Кроме этого, элемент $\chi[D]$ не зависит от произвола в выборе вложений в тривиальные расслоения, так как все такие вложения гомотопны, а для тривиальных операторов D (которые индуцированы изоморфизмами расслоений) равен нулю. Таким образом, отображение χ корректно определено. Проверка взаимной однозначности отображения χ также не представляет трудностей и оставляется читателю в качестве упражнения.

3. Теорема об индексе семейств нелокальных операторов. В §5 при вычислении дефектов индекса используется формула индекса семейств. Сформулируем кратко соответствующие результаты.

Пусть P – компактный комплекс. Через $\text{Ell}_P(M, \pi)$ обозначим группу стабильных гомотопических классов эллиптических семейств на M , которые параметризованы пространством P .

ТЕОРЕМА 3.2 (индекс семейств нелокальных операторов). *Пусть для пары (M, π) выполнено предположение 2.1. Тогда для вложения $f: M \rightarrow EG_N$ определено отображение прямого образа $f_!$ для семейств эллиптических операторов, входящее в коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}_P(M, \pi) & \xrightarrow{f_!} & \text{Ell}_P(EG_N, \pi_N) \\ \text{ind} \downarrow & & \downarrow (\pi_N)_! \\ K^0(P) & \xleftarrow{\text{ind}_t} K^0(P \times T^*BG_N) \equiv \text{Ell}_P(BG_N). \end{array}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2 предыдущего параграфа (ср. [22]) и поэтому опускается.

Отметим, наконец, что в этой ситуации также может быть определена разностная конструкция

$$\chi_P: \text{Ell}_P(M, \pi) \rightarrow K_0(C(P, \mathcal{A}_{T^*M, \pi})),$$

где через $C(P, \mathcal{A}_{T^*M, \pi})$ обозначена алгебра непрерывных функций на компакте P со значениями в C^* -алгебре $\mathcal{A}_{T^*M, \pi}$.

§ 4. Гомотопический инвариант на многообразиях с накрытием на крае

1. Класс операторов. На многообразии M с накрытием π на крае будем рассматривать эллиптические операторы

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F),$$

которые являются дифференциальными и в окрестности края многообразия поднимаются с базы накрытия. Более точно, предполагается выполнение следующего условия.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.1. Сужения расслоений E и F на край поднимаются с базы накрытия π , зафиксированы изоморфизмы

$$E|_{\partial M} \simeq \pi^* E_0, \quad F|_{\partial M} \simeq \pi^* F_0, \quad E_0, F_0 \in \text{Vect}(X),$$

и для некоторого оператора $D_0: C^\infty(X \times [0, 1), E_0) \rightarrow C^\infty(X \times [0, 1), F_0)$ на цилиндре с краем X прямой образ исходного оператора D в окрестности края включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X \times [0, 1), \pi_! E) & \xrightarrow{(\pi \times 1)_! D} & C^\infty(X \times [0, 1), \pi_! F) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ C^\infty(X \times [0, 1), E_0 \otimes \pi_! 1) & \xrightarrow{D_0 \otimes 1} & C^\infty(X \times [0, 1), F_0 \otimes \pi_! 1). \end{array} \quad (4.1)$$

Здесь через $D_0 \otimes 1$ обозначен оператор D_0 с коэффициентами в плоском расслоении $\pi_! 1$ (см., например, [23]).

Будем также предполагать, что оператор D является оператором первого порядка. Более точно, выполнено

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.2. В окрестности $X \times [0, \varepsilon)$ края справедливо представление

$$D_0|_{X \times [0, \varepsilon)} = \Gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + A_0 \right),$$

где Γ – изоморфизм векторных расслоений, а A_0 – эллиптический самосопряженный оператор первого порядка на многообразии X . Оператор A_0 называется *касательным оператором* для D_0 .

Из предположений 4.1, 4.2 вытекает, что оператор D в окрестности края имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} + \pi^!(A_0 \otimes 1)$$

(с точностью до изоморфизма векторных расслоений). Самосопряженный оператор $\pi^!(A_0 \otimes 1)$ будем обозначать для краткости через A .

2. Гомотопический инвариант. Для оператора D , удовлетворяющего предположениям 4.1, 4.2, рассматривается *спектральная краевая задача* Атьи–Патоли–Зингера [1]

$$Du = f,$$

$$\Pi_+ u|_{\partial M} = g, \quad g \in \text{Im } \Pi_+ \subset H^{s-1/2}(\partial M, E),$$

где $\Pi_+ = (A + |A|)/2|A|$ – неотрицательный спектральный проектор самосопряженного оператора A (если оператор A вырожден, то в этой формуле надо заменить A на $A + \varepsilon$ для положительного числа ε , меньшего чем модуль наибольшего отрицательного собственного значения оператора A). Спектральная задача фредгольмова, однако ее индекс $\text{ind}(D, \Pi_+)$ не инвариантен относительно гомотопий оператора D и не определяется его главным символом. Здесь под непрерывной гомотопией операторов D понимается непрерывная гомотопия во внутреннейности многообразия, которую можно накрыть в окрестности края непрерывной гомотопией диаграммы (4.1) и непрерывной гомотопией касательных операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Выражение*

$$\widetilde{\text{ind}} D \stackrel{\text{def}}{=} \text{mod } n - (\text{ind}(D, \Pi_+) + \eta(A) - n\eta(A_0)) \in \mathbb{R}/n\mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

где n – число листов накрытия, а $\eta(A)$, $\eta(A_0)$ – спектральные η -инварианты Атьи–Патоди–Зингера касательных операторов A и A_0 , является гомотопическим инвариантом оператора D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение

$$\text{ind}(D, \Pi_+) + \eta(A) - n\eta(A_0). \quad (4.3)$$

Из результатов Атьи–Патоди–Зингера [23] следует, что для гладкого семейства операторов D_t (соответствующие семейства касательных операторов обозначим через A_t , $A_{0,t}$) это выражение является кусочно гладкой функцией параметра t .

1) Производная η -инварианта

$$\frac{d}{dt}\eta(A_t)$$

по параметру t локальна, т.е. определяется как интеграл по многообразию от выражения, определяемого полным символом семейства касательных операторов A_t . Однако полные символы касательных операторов A_t и $A_{0,t}$ в семействе локально совпадают по предположению 4.1. Следовательно, выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\eta(A_t) = n \frac{d}{dt}\eta(A_{0,t}).$$

Таким образом, выражение (4.3) является кусочно постоянной функцией.

2) Покажем теперь, что скачки кратны числу n листов накрытия. В самом деле, при гомотопии операторов D_t как индекс, так и η -инварианты изменяются на спектральный поток соответствующих семейств касательных операторов. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} & [\text{ind}(D_t, \Pi_+, t) + \eta(A_t) - n\eta(A_{0,t})] \Big|_{t=0,1} \\ &= (-1 + 1) \text{sf}(A_t)_{t \in [0,1]} - n \text{sf}(A_{0,t})_{t \in [0,1]} \in n\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В случае тривиального накрытия рассматриваемый инвариант сводится к $\text{mod } n$ -индексу Мельроуза–Фрида [2]

$$\text{mod } n\text{-ind}(D, \Pi_+) \in \mathbb{Z}_n \subset \mathbb{R}/n\mathbb{Z}.$$

С другой стороны, рассматривая только дробную часть $\{\cdot\}$ выражения (4.2), получаем *относительный η -инвариант* Атьи–Патоди–Зингера [24], [23]

$$\{\eta(A_0 \otimes 1_{\pi,1}) - n\eta(A_0)\} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

оператора A_0 с коэффициентами в плоском расслоении $\pi^* 1 \in \text{Vect}(X)$.

Введенный инвариант $\widetilde{\text{ind}}$ допускает интересную интерпретацию как препятствие. Более точно, предположим, что само многообразие M является тотальным пространством накрытия $\widetilde{\pi}$ с базой Y , которое индуцирует над краем накрытие π

$$\begin{array}{ccc} \partial M & \subset & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \widetilde{\pi} \\ X & \subset & Y. \end{array}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть дифференциальный оператор $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ является поднятием оператора D_0 с базы Y . Тогда выполнено равенство

$$\widetilde{\text{ind}} D = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле Атьи–Патоуди–Зингера [1] сумма

$$\text{ind}(D, \Pi_+) + \eta(A)$$

определяется как интеграл по многообразию от выражения, определяемого полным символом оператора D . С другой стороны, операторы D и D_0 локально совпадают. Поэтому получаем

$$\text{ind}(D, \Pi_+) + \eta(A) = n(\text{ind}(D_0, \Pi_{+,0}) + \eta(A_0)).$$

Переноса $n\eta(A_0)$ в левую часть равенства, получаем искомое соотношение.

§ 5. Теорема о дефекте индекса

1. Разностная конструкция. Паре (M, π) соответствует пространство с особенностями $\overline{M}^\pi$

$$\overline{M}^\pi = M / \{x \sim x', \text{ если } x, x' \in \partial M \text{ и } \pi(x) = \pi(x')\},$$

которое получается отождествлением точек в слоях накрытия $\pi: \partial M \rightarrow X$ (см. рис. 1 в случае тривиального накрытия). Аналогичным образом, край (некомпактного) многообразия T^*M также является накрытием над произведением $T^*X \times \mathbb{R}$ и определено некомпактное пространство $\overline{T^*M}^\pi$, получаемое отождествлением точек в слоях.

Рассмотрим эллиптический оператор D , удовлетворяющий предположению 4.1. Из диаграммы (4.1) вытекает, что его главный символ определяет элемент K -группы

$$[\sigma(D)] \in K(\overline{T^*M}^\pi).$$

Рис. 1. Пространство с особенностями

Таким образом, определен гомоморфизм

$$\chi: \text{Ell}(\overline{M}^\pi) \rightarrow K(\overline{T^*M}^\pi), \quad \chi[D] = [\sigma(D)].$$

Здесь через $\text{Ell}(\overline{M}^\pi)$ обозначена группа Гротендика гомотопических классов эллиптических операторов D на многообразии M , которые удовлетворяют предположениям 4.1, 4.2.

Получаемая ниже формула для инварианта $\widetilde{\text{ind}} D$ использует спаривание Пуанкаре на многообразии с особенностями $\overline{T^*M}^\pi$. Целью следующего пункта является определение этого спаривания.

2. Одно спаривание в K -теории на пространстве с особенностями.

Аналогично алгебре $\mathcal{A}_{T^*M, \pi}$, отвечающей кокасательному расслоению, можно определить и алгебру для самого многообразия M :

$$\mathcal{A}_{M, \pi} = \{(u, v) \mid u \in C_0(M'), v \in C_0(X \times (0, 1], \text{End } \pi_! 1), \beta(u|_{\partial M'}) \beta^{-1} = v|_{t=1}\}.$$

ЛЕММА 5.1. *Группа $K_0(\mathcal{A}_{M, \pi})$ изоморфна группе стабильных гомотопических классов троек*

$$(E, F, \sigma), \quad E, F \in \text{Vect}(M), \quad \sigma: \pi_! E|_{\partial M} \rightarrow \pi_! F|_{\partial M},$$

где σ – изоморфизм векторных расслоений. Тривиальными называются те тройки, для которых изоморфизм σ индуцирован изоморфизмом соответствующих расслоений на многообразии M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение аналогично теореме 3.1, устанавливающей топологическую реализацию группы $K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi})$. Аналогично предыдущему тройке $(E, \mathbb{C}^k, \sigma)$ (к этому виду сводится произвольная тройка) сопоставляется следующий элемент K_0 -группы

$$[P_E \oplus P_2] - [P_{\mathbb{C}^k} \oplus P_{\pi! \mathbb{C}^k}] \in K_0(\mathcal{A}_{M, \pi}),$$

где проектор P_2 над цилиндром $X \times [0, 1]$ имеет вид

$$P_2 = P_{\pi! E} \cos^2 \varphi + P_{\pi! \mathbb{C}^k} \sin^2 \varphi + (\sigma^{-1}(x)P_{\pi! \mathbb{C}^k} + \sigma(x)P_{\pi! E}) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}(1 - t).$$

Здесь через $P_E, P_{\mathbb{C}^k} \subset \mathbb{C}^N$ обозначены проекторы на подрасслоения, изоморфные соответственно E и $\mathbb{C}^k$. Предполагается, что эти подрасслоения ортогональны.

Доказательство того, что такое сопоставление индуцирует изоморфизм с группой $K_0(\mathcal{A}_{M, \pi})$, также аналогично предыдущему и опускается.

Эта реализация позволяет определить произведение

$$K^0(\overline{T^*M}^\pi) \times K_0(\mathcal{A}_{M, \pi}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi})$$

при помощи конструкции символа с коэффициентами в расслоении. Более точно, для элементов

$$[\sigma] \in K(\overline{T^*M}^\pi), \quad [E, F, \sigma'] \in K_0(\mathcal{A}_{M, \pi})$$

рассмотрим символ

$$\sigma \otimes 1_E \oplus \sigma^{-1} \otimes 1_F \quad (5.1)$$

на многообразии M . Прямой образ ограничения этого символа на край имеет вид

$$\pi!(\sigma \otimes 1_E \oplus \sigma^{-1} \otimes 1_F|_{\partial M}) = \pi!\sigma \otimes 1_{\pi! E|_{\partial M}} \oplus \pi!\sigma^{-1} \otimes 1_{\pi! F|_{\partial M}} \\ \simeq (\pi!\sigma \oplus \pi!\sigma^{-1}) \otimes 1_{\pi! E|_{\partial M}}.$$

Здесь последний изоморфизм вытекает из изоморфизма векторных расслоений

$$\pi! E|_{\partial M} \xrightarrow{\sigma'} \pi! F|_{\partial M}.$$

Символ $(\pi!\sigma \oplus \pi!\sigma^{-1}) \otimes 1_{\pi! E|_{\partial M}}$ стандартным образом гомотопируется к единице

$$\begin{pmatrix} \pi!\sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi!\sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Таким образом, символ (5.1) мы продолжили до нелокального эллиптического символа на многообразии M . Искомое произведение определим как разностный элемент этого символа, обозначаемый через

$$[\sigma] \times [E, F, \sigma'] \in K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}).$$

В силу гомотопической классификации ($K_0(\mathcal{A}_{T^*M,\pi}) \simeq \text{Ell}(M, \pi)$) к произведению можно применить индексное отображение и определить спаривание групп как композицию

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: K^0(\overline{T^*M}^\pi) \times K_0(\mathcal{A}_{M,\pi}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{T^*M,\pi}) \xrightarrow{\text{ind}} \mathbb{Z}.$$

Построенное спаривание является двойственностью Пуанкаре на многообразии $\overline{T^*M}^\pi$ с особенностями (см. §8). Отметим, что если накрытие π регулярно, то индекс можно выразить топологически (по теореме об индексе) и для спаривания имеем топологическую формулу.

3. Элемент K -теории с коэффициентами, определяемый накрытием на крае многообразия. Рассмотрим сначала универсальный случай. Полубесконечный цилиндр $EG_N \times [0, +\infty)$ обозначим через $\mathcal{M}_N$, а обратный предел при $N \rightarrow \infty$ групп $K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{M}_N,\pi_N})$ обозначим через $K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{M}_\infty})$. Мы построим специальный элемент

$$[\tilde{\gamma}] \in K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{M}_\infty}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}), \quad n = |G|, \quad (5.2)$$

отвечающий универсальному расслоению $\gamma = \pi_! 1 \in \text{Vect}(BG)$, где $1 \in \text{Vect}(EG)$. В самом деле, универсальное расслоение определяет элемент²

$$[\gamma] - n \in K(BG).$$

Эта разность определяет элемент из K -группы с искомыми коэффициентами в силу следующей леммы.

ЛЕММА 5.2. *Имеет место изоморфизм $\tilde{K}^0(BG) \simeq K^1(BG, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z})$, индуцированный кограничным отображением ∂ точной последовательности*

$$\rightarrow K^1(BG_N) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K^1(BG_N, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} K^0(BG_N) \xrightarrow{\times n} K^0(BG_N) \otimes \mathbb{Q},$$

отвечающей вложению групп коэффициентов $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем последовательность

$$\rightarrow K^1(BG_N) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K^1(BG_N, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \rightarrow K^0(BG_N) \xrightarrow{\times n} K^0(BG_N) \otimes \mathbb{Q}$$

в виде короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow K^1(BG_N) \otimes \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \rightarrow K^1(BG_N, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Tor } K^0(BG_N) \rightarrow 0.$$

При $N \rightarrow \infty$ получаем (неточную, вообще говоря) последовательность обратных пределов

$$0 \rightarrow \varprojlim K^1(BG_N) \otimes \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \rightarrow K^1(BG, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \varprojlim \text{Tor } K^0(BG_N) \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

²Здесь и далее K -группы классифицирующих пространств определяются как обратные пределы их конечномерных аппроксимаций.

При возрастании числа N последовательность групп $\tilde{K}^*(BG_N)$ удовлетворяет следующему свойству (см., например, [24], [25]). Для любого N при некотором положительном числе L образ отображения

$$\tilde{K}^*(BG_{N+L}) \rightarrow \tilde{K}^*(BG_N) \quad (5.4)$$

состоит из элементов конечного порядка. Из этого свойства вытекают равенства для пределов групп

$$\varprojlim K^1(BG_N) \otimes \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} = 0 \quad \text{и} \quad \varprojlim \text{Tor } K^0(BG_N) = \varprojlim \tilde{K}^0(BG_N) = \tilde{K}^0(BG).$$

Пользуясь свойством (5.4), можно также доказать точность последовательности (5.3). Для этого надо рассматривать коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K^1(BG_N) \otimes \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} & \rightarrow & K^1(BG_N, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Tor } K^0(BG_N) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow 0 & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & K^1(BG_{N+L}) \otimes \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} & \rightarrow & K^1(BG_{N+L}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Tor } K^0(BG_{N+L}) \rightarrow 0, \end{array} \quad (5.5)$$

где число L выбирается из условия (5.4).

Таким образом, получаем изоморфизм

$$\varprojlim K^1(BG_N, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \simeq \varprojlim \tilde{K}^0(BG_N).$$

Наконец, искомый элемент (5.2) получаем, используя изоморфизм

$$K^{**+1}(BG_N, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \simeq K_*(\mathcal{A}_{\mathcal{M}_N, \pi_N}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}),$$

индуцированный вложением идеала $C_0(BG_N \times (0, 1), \text{End}(\pi_N)_! 1)$. Отсюда

$$K^1(BG, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \simeq K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{M}_\infty}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z})$$

и элемент $[\tilde{\gamma}]$ можно считать элементом любой из этих групп.

Пусть теперь задана пара (M, π) . До конца этого параграфа будем предполагать, что накрытие π , определенное на крае многообразия M , является главным G -накрытием для конечной группы G . Для пары (M, π) существует отображение $f: M \rightarrow \mathcal{M}_N$, которое край переводит в основание $EG_N \times \{0\}$ и является эквивариантным на крае (см. предложение 2.1). Обратный образ элемента $[\tilde{\gamma}]$ обозначим через

$$[\pi! 1] \stackrel{\text{def}}{=} f^*[\tilde{\gamma}] \in K_0(\mathcal{A}_{M, \pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}). \quad (5.6)$$

Элемент не зависит от f , так как отображения в универсальное пространство гомотопны друг другу. Получим геометрическую реализацию построенного элемента.

4. Геометрическая реализация группы $K_0(\mathcal{A}_{M,\pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z})$. Группа $\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$ является прямым пределом конечных групп $\mathbb{Z}_{nN}$ относительно вложений

$$\mathbb{Z}_{nN} \subset \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}, \quad x \mapsto x/N.$$

Поэтому K -группа с коэффициентами $\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$ определяется как прямой предел

$$K_0(\mathcal{A}_{M,\pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) = \varprojlim K_0(\mathcal{A}_{M,\pi}, \mathbb{Z}_{nN}). \quad (5.7)$$

Далее, элементы групп с конечными коэффициентами можно строить, пользуясь следующим утверждением (ср. [26]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Тройка (E, F, σ) , в которой*

$$E \in \text{Vect}(M), \quad F \in \text{Vect}(X), \quad \pi_!(E|_{\partial M}) \stackrel{\sigma}{\simeq} kF, \quad (5.8)$$

σ – изоморфизм расслоений над X , определяет элемент группы $K_0(\mathcal{A}_{M,\pi}, \mathbb{Z}_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично топологическому случаю (см., например, [24]) теория с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_k$ определяется в терминах *пространства Мура* этой группы, обозначаемого через $\mathbb{M}_k$, по следующей формуле

$$K_0(\mathcal{A}_{M,\pi}, \mathbb{Z}_k) = K_0(\tilde{C}_0(\mathbb{M}_k, \mathcal{A}_{M,\pi})), \quad (5.9)$$

где $\tilde{C}_0(\mathbb{M}_k, \mathcal{A}_{M,\pi})$ – алгебра $\mathcal{A}_{M,\pi}$ -значных функций на пространстве Мура, которые обращаются в нуль в выделенной точке.

Можно получить обобщение леммы 5.1 на случай семейств. Более точно, тем же методом можно установить, что K -группа $K_0(\tilde{C}_0(\mathbb{M}_k, \mathcal{A}_{M,\pi}))$ изоморфна группе стабильных гомотопических классов троек (E', F', σ') , где $E', F' \in \text{Vect}(M \times \mathbb{M}_k)$, с изоморфизмом

$$\sigma': \pi_!(E'|_{\partial M}) \rightarrow \pi_!(F'|_{\partial M})$$

над пространством $X \times \mathbb{M}_k$.

Фиксируем на пространстве Мура одномерное расслоение ε , определяющее образующую $[\varepsilon] - 1 \in \tilde{K}(\mathbb{M}_k) \simeq \mathbb{Z}_k$ (подробнее о пространстве Мура см., например, [24], [26]). Зафиксируем также тривиализацию $\rho: k\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^k$.

Рассмотрим теперь тройку (E, F, σ) . Сопоставим ей следующий элемент

$$[E \otimes \varepsilon, E, \sigma'] \in K_0(\tilde{C}_0(\mathbb{M}_k, \mathcal{A}_{M,\pi})),$$

где изоморфизм σ' определяется как композиция (см. [26])

$$\pi_!(E|_{\partial M}) \otimes \varepsilon \xrightarrow{\sigma \otimes 1} kF \otimes \varepsilon \simeq F \otimes k\varepsilon \xrightarrow{1 \otimes \rho} F \otimes \mathbb{C}^k \simeq kF \xrightarrow{\sigma^{-1} \otimes 1} \pi_!(E|_{\partial M}). \quad (5.10)$$

5. Интерпретация элемента $[\widetilde{\pi_! 1}]$ (см. (5.6)). Для достаточно большого числа N рассмотрим тройку $(N, 1, \alpha)$, где N и 1 – это расслоения соответствующих размерностей

$$N \in \text{Vect}(M), \quad 1 \in \text{Vect}(X),$$

а $\pi_! N \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^{nN}$ – тривиализация. Согласно предложению 5.1 тройка определяет элемент

$$[N, 1, \alpha] \in K_0(\mathcal{A}_{M, \pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}).$$

Пользуясь диаграммой (5.5), читатель может проверить, что этот элемент совпадает с элементом $[\widetilde{\pi_! 1}]$, если число N и тривиализация выбраны по следующему правилу.

А именно если классифицирующее отображение

$$f: M \rightarrow \mathcal{M}_\infty$$

в универсальное пространство попадает в остов $\mathcal{M}_{N'}$, то для числа N' существует такое число L' , что выполнено свойство (5.4). Число N выбирается настолько большим, что ограничение универсального расслоения γ на остов $BG_{N'+L'}$ в количестве N экземпляров тривиально с некоторой тривиализацией

$$N\gamma \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{C}^{nN}.$$

Надмногообразием M выбирается индуцированная тривиализация

$$\alpha = f^* \alpha'.$$

6. Теорема о дефекте индекса.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для многообразия M , край которого является тотальным пространством накрытия $\pi: \partial M \rightarrow X$, отвечающего свободному действию конечной группы G , коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}(\overline{M}^\pi) & \xrightarrow{\chi} & K(\overline{T^*M}^\pi) \\ \widetilde{\text{ind}} \downarrow & \swarrow \langle \cdot, [\pi_! 1] \rangle & \\ \mathbb{R}/n\mathbb{Z}, & & \end{array}$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено спаривание Пуанкаре с коэффициентами

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: K(\overline{T^*M}^\pi) \times K_0(\mathcal{A}_{M, \pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{ind}} \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}. \quad (5.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теорема 5.1 дает выражение для инварианта $\widetilde{\text{ind}} D$ в топологических терминах через главный символ оператора, так как в силу соотношений (5.7) и (5.9) индексное отображение в (5.11) выражается топологически по теореме 3.2 об индексе семейств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы по существу аналитическое и состоит в редукции аналитического инварианта $\widetilde{\text{ind}}$ к индексу со значениями в группе $\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$. Поэтому начнем с определения соответствующих операторов.

1. Определим сначала эллиптическую теорию $\text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z})$ с коэффициентами в группе $\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$. Такое определение можно дать в терминах прямого предела

$$\text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) = \varinjlim \text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Z}_{nN}), \quad \mathbb{Z}_{nN} \subset \mathbb{Z}_{nNM} \subset \mathbb{Q}/n\mathbb{Z},$$

теорий с коэффициентами в конечных группах. При этом эллиптическую теорию с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_k$ определим в терминах семейств нелокальных эллиптических операторов первого порядка над пространством Мура $\mathbb{M}_k$ группы $\mathbb{Z}_k$, полагая

$$\text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Z}_k) = \text{Ell}_{\mathbb{M}_k}(M, \pi)$$

(подробнее об эллиптической теории по модулю k см. [26]).

2. Определим отображение

$$\text{Ell}(\overline{M}^\pi) \xrightarrow{\Phi} \text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}), \quad (5.12)$$

которое сопоставляет оператору D некоторое семейство нелокальных задач.

Для этого рассмотрим семейство эллиптических операторов первого порядка на M

$$D^* \oplus (D \otimes 1_\varepsilon): C^\infty(M, F \oplus E \otimes \varepsilon) \rightarrow C^\infty(M, E \oplus F \otimes \varepsilon),$$

параметризованное пространством Мура $\mathbb{M}_{nN}$ (число N будет выбрано ниже). Здесь через D^* обозначен сопряженный оператор, а семейство $D \otimes 1_\varepsilon$ является оператором D с коэффициентами в расслоении ε . Рассмотрим прямую сумму этого семейства с самим собой в количестве N экземпляров. Оказывается, что для этого семейства при достаточно большом числе N существуют корректные краевые условия. Действительно, начиная с некоторого N , прямая сумма плоского расслоения π^*1 является тривиальной. Рассмотрим некоторую тривиализацию

$$N\pi^*1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^{nN}. \quad (5.13)$$

Тогда на базе накрытия имеет место изоморфизм расслоений

$$\pi^*(NE|_{\partial M}) \simeq \pi^*N \otimes E_0 \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0$$

и, аналогично, изоморфизм

$$\begin{aligned} \pi^*(NE|_{\partial M}) \otimes \varepsilon &\simeq \pi^*N \otimes E_0 \otimes \varepsilon \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0 \otimes \varepsilon \\ &\simeq nN\varepsilon \otimes E_0 \xrightarrow{\rho \otimes 1} \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0. \end{aligned}$$

Соответствующие изоморфизмы пространств сечений обозначим через

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha \otimes 1: C^\infty(X, \pi_!(NE|_{\partial M})) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0), \\ B_2 &= \rho \otimes 1(\alpha \otimes 1): C^\infty(X, \pi_!(NE|_{\partial M}) \otimes \varepsilon) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0). \end{aligned}$$

В этих обозначениях определено семейство нелокальных краевых задач в смысле §1

$$\begin{aligned} ND^*u &= f_1, \quad N(D \otimes 1_\varepsilon)v = f_2, \\ B_1\beta_E u|_{\partial M} + B_2\beta_E v|_{\partial M} &= g, \quad g \in C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0), \end{aligned} \quad (5.14)$$

которое состоит из эллиптических элементов. Таким образом, отображение (5.12) сопоставляет оператору D семейство нелокальных задач (5.14), отвечающее некоторой фиксированной тривиализации (5.13).

3. Естественно определяется индексное отображение

$$\text{ind}: \text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/n\mathbb{Z},$$

при котором элементу $[\mathcal{D}]$, представленному семейством $\mathcal{D}$ эллиптических операторов, параметризованных пространством Мура $\mathbb{M}_{nN}$, сопоставляется (приведенный) индекс семейства

$$\text{ind}[\mathcal{D}] \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind } \mathcal{D} \in \tilde{K}(\mathbb{M}_{nN}) \simeq \mathbb{Z}_{nN} \subset \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 5.3. *Коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}(\overline{M}^\pi) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \\ & \searrow \widetilde{\text{ind}} & \swarrow \text{ind} \\ & \mathbb{R}/n\mathbb{Z}, & \end{array}$$

если число N и тривиализация α в (5.13) выбраны как указано в п. 5 этого параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Краевая задача (5.14) линейно гомотопна задаче

$$\begin{aligned} ND^*u &= f_1, \quad N(D \otimes 1_\varepsilon)v = f_2, \\ B_1\beta_E \Pi_- u|_{\partial M} + B_2\beta_E \Pi_+ v|_{\partial M} &= g, \quad g \in C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0), \end{aligned}$$

с сохранением эллиптичности. Из последнего выражения следует, что индекс семейства $\Phi[D]$ есть сумма индексов семейства спектральных задач для операторов ND^* и $N(D \otimes 1_\varepsilon)$ и индекса семейства операторов

$$N \text{ Im } \Pi_- (A) \oplus N \text{ Im } \Pi_+ (A) \otimes \varepsilon \xrightarrow{B_1+B_2} C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0) \quad (5.15)$$

на крае многообразия. Здесь и ниже в обозначении спектральных проекторов указываются самосопряженные операторы, которым они отвечают. Вычислим индекс этого семейства.

1) Можно построить разложение

$$C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0) \simeq nN \operatorname{Im} \Pi_- (A_0) \oplus nN \varepsilon \otimes \operatorname{Im} \Pi_+ (A_0)$$

пространства правых частей семейства (5.15). Изоморфизм устанавливается отображением

$$nN \operatorname{Im} \Pi_- (A_0) \oplus nN \varepsilon \otimes \operatorname{Im} \Pi_+ (A_0) \xrightarrow{1+(\rho \otimes 1)} C^\infty(X, \mathbb{C}^{nN} \otimes E_0).$$

Пользуясь этим изоморфизмом, получаем, что индекс семейства (5.15) принимает вид

$$\operatorname{ind}(N \operatorname{Im} \Pi_+ (A) \xrightarrow{\Pi_+(A_0)\beta_E} nN \operatorname{Im} \Pi_+ (A_0))([\varepsilon] - 1) \in \tilde{K}(\mathbb{M}_{nN}).$$

Наконец, опуская пространство $\operatorname{Im} \Pi_+ (A)$ на базу накрытия, преобразуем этот индекс к виду

$$\operatorname{ind}(N \operatorname{Im} \Pi_+ (\pi_! A) \xrightarrow{\Pi_+(A_0)} nN \operatorname{Im} \Pi_+ (A_0))([\varepsilon] - 1).$$

Индекс эллиптического оператора (не семейства!) в последней формуле выражается через η -инварианты по формуле Атьи–Патоуди–Зингера [23]

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(N \operatorname{Im} \Pi_+ (\pi_! A) \xrightarrow{\Pi_+(A_0)} nN \operatorname{Im} \Pi_+ (A_0)) \\ = N\eta(A) - nN\eta(A_0) + \langle [\sigma(A_0)], [\pi_! 1] \rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где угловыми скобками обозначено значение спаривания

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: K^1(T^*X) \times K^1(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q} \quad (5.17)$$

разностного элемента эллиптического самосопряженного оператора A_0 ,

$$[\sigma(A_0)] \in K^1(T^*X),$$

и элемента $[\pi_! 1] \in K^1(X, \mathbb{Q})$, который определяется тривиализованным плоским расслоением $N\pi_! 1$ (подробнее об этой формуле см. книгу [27]).

2) Оказывается, что при указанном выборе тривиализации (5.13) последнее слагаемое в выражении (5.16) равно нулю.

В самом деле, рассмотрим классифицирующее отображение $f: X \rightarrow BG_{N'}$. Тогда можно перенести вычисление спаривания (5.17) на классифицирующее пространство следующим образом:

$$\langle [\sigma(A_0)], [\pi_! 1] \rangle = \langle f_*[\sigma(A_0)], [\gamma] \rangle, \quad [\pi_! 1] = f^*[\gamma] \in K^1(X, \mathbb{Q}), \quad (5.18)$$

где через $[\gamma] \in K^1(BG_{N'}) \otimes \mathbb{Q}$ обозначен элемент, определяемый тривиализованным плоским расслоением $N\gamma$. Вложение $BG_{N'} \subset BG_{N'+L'}$ индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K^1(T^*BG_{N'}) & \times & K^1(BG_{N'}) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ K^1(T^*BG_{N'+L'}) & \times & K^1(BG_{N'+L'}) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}. \end{array}$$

Из этой диаграммы и свойства (5.4) вытекает тривиальность спаривания (5.18).

Таким образом, выражение индекса $\text{ind } \Phi[D]$ сводится к искомому равенству

$$\text{ind } \Phi[D] = \widetilde{\text{ind}}[D].$$

4. Для завершения доказательства теоремы осталось только проверить, что значение спаривания Пуанкаре (5.11) $\langle [\sigma(D)], [\widetilde{\pi_! 1}] \rangle$ совпадает с индексом семейства $\Phi(D)$.

Умножение на элемент $[\widetilde{\pi_! 1}]$ обозначим через φ :

$$\varphi: K(\overline{T^*M}^\pi) \rightarrow K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}).$$

ЛЕММА 5.4. В предположениях леммы 5.3 следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \text{Ell}(\overline{M}^\pi) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Ell}(M, \pi, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi' \\ K(\overline{T^*M}^\pi) & \xrightarrow{\varphi} & K(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}), \end{array} \quad (5.19)$$

где отображение χ' индуцировано разностной конструкцией для семейств (см. § 3, п. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в формулу произведения (5.1) определения элементов $[\sigma(D)], [\widetilde{\pi_! 1}]$ (в соответствии с пп. 4 и 5 предыдущего параграфа), получаем, что искомое произведение $\varphi[\sigma(D)]$ определяется семейством нелокальных символов, которые вдали от края имеют вид

$$N\sigma(D) \otimes 1_\varepsilon \oplus N\sigma(D)^{-1} \otimes 1. \quad (5.20)$$

Прямой образ ограничения такого символа на край равен

$$\begin{aligned} N\pi_!(\sigma(D) \otimes 1_\varepsilon \oplus \sigma(D)^{-1} \otimes 1) &= (\sigma(D_0) \otimes 1_{N\varepsilon \otimes \pi_! 1} \oplus \sigma(D_0)^{-1} \otimes 1_{N\pi_! 1}) \\ &\simeq (\sigma(D_0) \oplus \sigma(D_0)^{-1}) \otimes 1_{\mathbb{C}^n N}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В последнем переходе были использованы изоморфизмы $N\pi_!1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^{nN}$, $\mathbb{C}^{nN}_\varepsilon \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^{nN}$. В окрестности края символ доопределяется при использовании гомотопии прямой суммы $\sigma(D_0) \oplus \sigma(D_0)^{-1}$ к единичному символу.

Осталось только показать равенство разностных элементов для главного символа семейства задач (5.14) и выражения (5.20), (5.21). Вдали от края многообразия такое совпадение очевидно, так как отличие есть только в компонентах $\sigma(D^*)$ и $\sigma(D)^{-1}$, которые соединяются стандартной гомотопией

$$\sigma(D^*)[\sigma(D)\sigma(D^*)]^{-s}, \quad s \in [0, 1].$$

В окрестности края читатель также может показать совпадение, если воспользуется формулами редукции порядка краевых задач из замечания 2.2.

Из утверждения лемм 5.4 и 5.3 вытекает справедливость теоремы. Доказательство теоремы завершено.

§6. Приложения

1. Теорема 5.1 о дефекте индекса позволяет выразить дробную часть η -инварианта в следующей ситуации.

Пусть M – четномерное спинорное многообразие, край которого является таким накрытием с базой X и проекцией π , что спинорная структура на крае поднимается с базы. Фиксируем векторное расслоение $E \in \text{Vect}(M)$, которое на крае также поднимается $E|_{\partial M} \simeq \pi^*E_0$ с базы накрытия. На многообразии M выберем метрику прямого произведения в воротниковой окрестности края, которая на границе является поднятием метрики с базы. Рассмотрим, наконец, аналогичную связность в расслоении E .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Оператор Дирака D_M на многообразии M с коэффициентами в расслоении E удовлетворяет условиям теоремы 5.1, и имеет место формула для дробной части η -инварианта*

$$\{\eta(D_X)\} = \frac{1}{n} \left(\int_M \widehat{A}(M) \text{ch } E - \langle [\sigma(D_M)], [\widetilde{\pi_!1}] \rangle \right) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

где через D_X обозначен самосопряженный оператор Дирака с коэффициентами в расслоении E_0 на базе накрытия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведенная формула получается из теоремы 5.1, если применить к индексу спектральной задачи формулу Атьи–Патоли–Зингера:

$$\text{ind}(D_M, \Pi_+) = \int_M \widehat{A}(M) \text{ch } E - \eta(D_{\partial M}).$$

2. В ряде случаев инвариант $\widetilde{\text{ind}}$ может быть эффективно вычислен с использованием теории Лефшеца.

Предположим, что действие G на крае ∂M продолжается до действия на многообразии M (не свободного, вообще говоря). Пусть D — G -инвариантный эллиптический дифференциальный оператор первого порядка на многообразии M . Через $L(D, g) \in \mathbb{C}$ для элемента $g \in G$ обозначим вклад в обычную формулу Лефшеца (см. [28]) для оператора D от множества неподвижных точек диффеоморфизма g .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Справедливо сравнение*

$$\widetilde{\text{ind}} D \equiv - \sum_{g \neq e} L(D, g) \pmod{n}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквивариантный индекс-характер $\text{ind}_g(D, \Pi_+)$ задачи Атьи–Патоли–Зингера и эквивариантную η -функцию (см. [28]) касательного оператора A на крае.

Обозначим через $(D, \Pi_+)^G$ и A^G сужения соответствующих операторов на подпространства G -инвариантных сечений. Очевидно, что оператор A^G эквивалентен оператору A_0 на базе X накрытия. С другой стороны, справедливы выражения

$$\text{ind}(D, \Pi_+)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{ind}_g(D, \Pi_+) \quad \eta(A^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \eta(A, g)$$

инвариантов обычных через эквивариантные (их нетрудно проверить, используя теорию характеров). Пользуясь этими выражениями, запишем инвариант $\widetilde{\text{ind}} D$ в виде

$$\widetilde{\text{ind}} D = \text{ind}_e(D, \Pi_+) - \sum_{g \neq e} \eta(A, g).$$

Подставим в эту формулу выражение η -инвариантов, даваемое эквивариантной формулой Атьи–Патоли–Зингера (см. [28])

$$-\eta(A, g) = \text{ind}_g(D, \Pi_+) - L(D, g).$$

Получаем

$$\widetilde{\text{ind}} D = |G| \text{ind}(D, \Pi_+)^G - \sum_{g \neq e} L(D, g).$$

Отсюда следует искомое равенство (6.1).

§ 7. Изоморфизмы Пуанкаре

1. Гладкое замкнутое многообразие. Хорошо известно (см., например, [29], [8] или монографию [30]), что эллиптические операторы нулевого порядка на гладком замкнутом многообразии определяют K -теорные элементы

$$[\sigma(D)] \in K^*(T^*(M \setminus \partial M)), \quad [D] \in K^*(C(M)) \equiv K_*(M).$$

Последняя группа – группа аналитических K -гомологий, а градуировка равна единице для самосопряженных операторов и нулю в противном случае. Для фиксации обозначений напомним соответствующее определение. Первый элемент есть разностный элемент символа оператора. Для определения второго элемента рассмотрим эллиптический оператор D нулевого порядка как фредгольмов оператор

$$D: L^2(M, E) \rightarrow L^2(M, F),$$

где оба пространства являются модулями над алгеброй $C(M)$ (модульная структура определяется умножением функций). При этом оператор D коммутирует с модульной структурой с точностью до компактных операторов. Тогда для самосопряженного оператора D пара $(L^2(M, E), D)$, состоящая из оператора, действующего в $C(M)$ -модуле, является элементом

$$[D] \in K^1(C(M)).$$

Для несамосопряженного эллиптического оператора D рассматривается матричный оператор

$$T = \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

который является самосопряженным оператором в естественно $\mathbb{Z}_2$ -градуированном $C(M)$ -модуле $L^2(M, E) \oplus L^2(M, F)$. Оператор T является нечетным относительно этой градуировки. Поэтому он определяет элемент, обозначаемый через

$$[D] \in K^0(C(M)).$$

2. Многообразие с краем. Эллиптические операторы первого порядка на многообразии с краем определяют аналогичные элементы

$$[\sigma(D)] \in K^i(T^*M), \quad [D] \in K_i(M \setminus \partial M).$$

Первый из них по-прежнему есть разностный элемент Атьи–Зингера, а второй определяется следующим образом. Рассмотрим вложение

$$M \subset \widetilde{M}$$

многообразия M в замкнутое многообразие $\widetilde{M}$ той же размерности (например дубль $2M$). Через $\widetilde{D}$ обозначим произвольное эллиптическое продолжение оператора D на него. На многообразии $\widetilde{M}$ рассмотрим оператор нулевого порядка

$$\widetilde{F} = (1 + \widetilde{D}^* \widetilde{D})^{-1/2} \widetilde{D}.$$

Определим сужение этого оператора на подмногообразие как следующий ограниченный оператор

$$F = i^* \widetilde{F} i_*: L^2(M, E) \rightarrow L^2(M, F), \quad (7.2)$$

где $i_*: L^2(M) \rightarrow L^2(\widetilde{M})$ – продолжение нулем, а $i^*: L^2(\widetilde{M}) \rightarrow L^2(M)$ – сужение.

В случае, когда оператор D формально самосопряжен, для оператора F нетрудно проверить выполнение соотношений

$$F - F^* \in \mathcal{K}, \quad f(F^2 - 1) \in \mathcal{K}, \quad [F, f] \in \mathcal{K},$$

для функции $f \in C_0(M \setminus \partial M)$, обращающейся в нуль на границе. Здесь через $\mathcal{K}$ обозначен идеал компактных операторов. Указанные соотношения показывают, что оператор F определяет элемент группы $K^1(C_0(M \setminus \partial M))$ (см. [31]).

Если оператор D не является самосопряженным, то рассматривается матричный оператор T из (7.1), в который подставляется F . Он определяет элемент группы $K^0(C_0(M \setminus \partial M))$.

Известно (см., например, [8]), что отображения

$$\begin{aligned} K^*(T^*M) &\rightarrow K_*(M \setminus \partial M), \\ K^*(T^*(M \setminus \partial M)) &\rightarrow K_*(M), \\ [\sigma(D)] &\mapsto [D], \end{aligned}$$

индуцированные сопоставлением символам операторов, определяют *изоморфизмы Пуанкаре* на гладком многообразии M с краем. Второй изоморфизм отвечает эллиптическим операторам нулевого порядка на M , которые в окрестности края индуцированы изоморфизмами расслоений.

3. Многообразие с особенностями. Для нелокального эллиптического оператора D нулевого порядка определены элементы

$$[\sigma(D)] \in K_*(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}), \quad [D] \in K^*(C(\overline{M}^\pi)) \simeq K_*(\overline{M}^\pi).$$

Здесь первый элемент определяется разностной конструкцией из § 2. Для определения второго элемента заметим, что оператор D нулевого порядка почти коммутирует не со всеми функциями алгебры $C(M)$, а только с теми, которые поднимаются с пространства $\overline{M}^\pi$. Это приводит к сужению соответствующей алгебры.

С другой стороны, операторы из §§ 4, 5, которые в окрестности края поднимаются с базы накрытия, определяют аналогичные элементы

$$[\sigma(D)] \in K^*(\overline{T^*M}^\pi), \quad [D] \in K_*(\mathcal{A}_{M, \pi}),$$

так как в этом случае соответствующие операторы (7.2), наоборот, почти коммутируют не только с функциями из алгебры $C_0(M \setminus \partial M)$, но и со всеми элементами алгебры $\mathcal{A}_{M, \pi}$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для произвольного многообразия с накрытием на крае (M, π) имеют место изоморфизмы Пуанкаре*

$$\begin{aligned} K_*(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}) &\rightarrow K_*(\overline{M}^\pi), \\ K^*(\overline{T^*M}^\pi) &\rightarrow K^*(\mathcal{A}_{M, \pi}), \\ [\sigma(D)] &\mapsto [D]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Установим сначала первый изоморфизм.

В алгебре $\mathcal{A}_{T^*M, \pi}$ рассмотрим идеал

$$I = C_0(T^*(X \times (0, 1)), \text{End } p^* \pi_! 1)$$

с факторалгеброй $\mathcal{A}_{T^*M, \pi}/I \simeq C_0(T^*M)$. Поэтому длинная точная последовательность пары в этом случае принимает вид

$$\rightarrow K(T^*X) \xrightarrow{\alpha} K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}) \rightarrow K(T^*M) \rightarrow K^1(T^*X) \rightarrow \dots \quad (7.3)$$

Здесь мы воспользовались изоморфизмом

$$K_*(C_0(Y, \text{End } G)) \simeq K_*(C_0(Y)) \simeq K^*(Y),$$

справедливым для векторного расслоения $G \in \text{Vect}(Y)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & K^0(T^*X) & \rightarrow & K_0(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}) & \rightarrow & K^0(T^*M) & \rightarrow & K^1(T^*X) & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & K_0(X) & \rightarrow & K_0(\overline{M}^\pi) & \rightarrow & K_0(M, \partial M) & \rightarrow & K_1(X) & \dots \end{array}$$

Здесь нижняя последовательность — точная последовательность пары $X \subset \overline{M}^\pi$ в K -гомологиях. Вертикальные отображения диаграммы (кроме второго) являются изоморфизмами (см. [32], [8]). Поэтому в силу леммы о пяти гомоморфизмах получаем, что и среднее отображение

$$K_*(\mathcal{A}_{T^*M, \pi}) \rightarrow K_*(\overline{M}^\pi)$$

является изоморфизмом.

2) Во втором случае доказательство следует той же схеме, но рассматривается диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \leftarrow & K^1(T^*X) & \leftarrow & K^0(\overline{T^*M}^\pi) & \leftarrow & K^0(T^*(M \setminus \partial M)) & \leftarrow & K^0(T^*X) & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \leftarrow & K_1(X) & \leftarrow & K^0(\mathcal{A}_{M, \pi}) & \leftarrow & K_0(M) & \leftarrow & K_0(X) & \dots \end{array}$$

(здесь верхняя строка отвечает паре пространств $\mathbb{R} \times T^*X \subset \overline{T^*M}^\pi$).

Теорема доказана.

§ 8. Двойственность Пуанкаре

Аналог спаривания групп $K^0(\overline{T^*M}^\pi)$ и $K_0(\mathcal{A}_{M,\pi})$ из §5 имеет место также и для нечетных групп. Его определение оставим читателю.

ТЕОРЕМА 8.1. *На многообразии M с накрытием π на крае спаривания*

$$K^i(\overline{T^*M}^\pi) \times K_i(\mathcal{A}_{M,\pi}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \quad (8.1)$$

являются невырожденными для свободных частей групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируя первый аргумент спаривания, получаем отображение

$$K^i(\overline{T^*M}^\pi) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K'_i(\mathcal{A}_{M,\pi}),$$

где для краткости положено $G' = \text{Hom}(G, \mathbb{Q})$. Это отображение вкладывается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} K^1(T^*X) \otimes \mathbb{Q} & \leftarrow & K^0(\overline{T^*M}^\pi) \otimes \mathbb{Q} & \leftarrow & K^0(T^*(M \setminus \partial M)) \otimes \mathbb{Q} & \leftarrow & K^0(T^*X) \otimes \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^{1'}(X) & \leftarrow & K'_0(\mathcal{A}_{M,\pi}) & \leftarrow & K^{0'}(M) & \leftarrow & K^{0'}(X). \end{array}$$

В этой диаграмме вертикальные отображения, кроме второго слева, являются изоморфизмами (в силу двойственности Пуанкаре на замкнутом многообразии и на многообразии с краем). Поэтому по лемме о пяти гомоморфизмах получаем, что и второе отображение является изоморфизмом. Таким образом, спаривание (8.1) невырождено по второму аргументу.

Аналогично проверяется невырожденность по первому аргументу.

В качестве примера рассмотрим многообразие M со spin^c -структурой в касательном расслоении, которая на крае индуцирована некоторой spin^c -структурой на базе X накрытия π . Тогда группа $K^*(\overline{T^*M}^\pi)$ является свободным $K^{*+n}(\overline{M}^\pi)$ -модулем с одной образующей ($n = \dim M$), в качестве которой можно взять разностный элемент

$$[\sigma(D)] \in K^n(\overline{T^*M}^\pi)$$

символа оператора Дирака на многообразии M (это доказывается аналогично обычному случаю замкнутых многообразий, см., например, [33]). Следовательно, можно определить спаривание двойственности Пуанкаре

$$K^{*+n}(\overline{M}^\pi) \times K_*(\mathcal{A}_{M,\pi}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

при помощи композиции $K^{*+n}(\overline{M}^\pi) \rightarrow K(\overline{T^*M}^\pi)$. Из теоремы 8.1 следует, что это спаривание является невырожденным для свободных частей групп.

Список литературы

1. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1975. V. 77. P. 43–69.
2. *Freed D., Melrose R.* A mod k index theorem // Invent. Math. 1992. V. 107. № 2. P. 283–299.
3. *Higson N.* An approach to $\mathbb{Z}/k$ -index theory // Internat. J. Math. 1990. V. 1. № 2. P. 189–210.
4. *Zhang W.* On the mod k index theorem of Freed and Melrose // J. Differential Geom. 1996. V. 43. № 1. P. 198–206.
5. *Botvinnik B.* Manifolds with singularities accepting a metric of positive scalar curvature // Geom. Topol. 2001. V. 5. P. 683–718.
6. *Rosenberg J.* Groupoid C^* -algebras and index theory on manifolds with singularities // Geom. Dedicata. 2003. V. 100. P. 65–84.
7. *Connes A.* Noncommutative geometry. San Diego, CA: Academic Press, 1994.
8. *Kasparov G.* Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture // Invent. Math. 1988. V. 91. № 1. P. 147–201.
9. *Melrose R., Piazza P.* Analytic K -theory on manifolds with corners // Adv. Math. 1992. V. 92. № 1. P. 1–26.
10. *Kawasaki T.* The index of elliptic operators over V -manifolds // Nagoya Math. J. 1981. V. 84. P. 135–157.
11. *Farsi C.* K -theoretical index theorems for orbifolds // Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2). 1992. V. 43. P. 183–200.
12. *Антонович А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Университетское, 1988.
13. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
14. *Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* The homotopy classification and the index of boundary value problems for general elliptic operators // Preprint N 99/20, Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Oktober 1999; arXiv: math/9911055.
15. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators. I // Ann. of Math. (2). 1968. V. 87. P. 484–530.
16. *Kohn J., Nirenberg L.* An algebra of pseudo-differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. P. 269–305.
17. *Мищенко А. С.* Векторные расслоения и их применения. М.: Наука, 1984.
18. *Hsiung Ch.-Ch.* The signature and G -signature of manifolds with boundary // J. Differential Geom. 1972. V. 6. P. 595–598.
19. *Palais R. S.* Seminar on the Atiyah–Singer index theorem. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1965.
20. *Brylinski J.-L., Nistor V.* Cyclic cohomology of étale groupoids // K -Theory. 1994. V. 8. P. 341–365.
21. *Higson N.* On the K -theory proof of the index theorem // Index theory and operator algebras. Proc. CBMS regional conference on K -homology and index theory, August 1991, Boulder, CO, USA / ed. J. Fox et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 67–86. (Contemp. Math. V. 148.)
22. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators. IV // Ann. of Math. (2). 1971. V. 93. P. 119–138.
23. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1976. V. 79. P. 71–99.
24. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1976. V. 78. P. 405–432.

25. *Atiyah M. F.* Characters and cohomology of finite groups // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1961. V. 9. P. 23–64.
26. *Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic operators in subspaces and the eta invariant // *K-Theory*. 2002. V. 27. №3. P. 253–272.
27. *Gilkey P. B.* Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
28. *Donnelly H.* Eta-invariants for G -spaces // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. P. 889–918.
29. *Atiyah M. F.* Global theory of elliptic operators // Proc. Int. Conf. Funct. Anal. Rel. Topics, Tokyo, 1969. Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1970. P. 21–30.
30. *Higson N., Roe J.* Analytic K -homology. Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.
31. *Соловьев Ю. П., Троицкий Е. В.* C^* -алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии. М.: Факториал, 1996.
32. *Baum P., Douglas R. G.* K -homology and index theory // Operator algebras and applications / ed. R. Kadison. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1982. P. 117–173. (Proc. Sympos. Pure Math. V. 38.)
33. *Lawson H. B., Michelsohn M. L.* Spin geometry. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1989.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: sternin@mail.ru
antonsavin@mail.ru

Поступила в редакцию
10.07.2001 и 30.12.2003