Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов, Аппроксимации
Эрмита–Паде экспоненциальных функций, *Матем. сб.*,
2016, том 207, номер 6, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:22:24

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов

Аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций

В работе изучаются свойства диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^k$ с произвольными различными комплексными параметрами $\{\lambda_k\}_{k=0}^k$: установлена асимптотика остаточной функции, описана область локализации нулей; при действительных значениях параметров найдены асимптотики и описаны экстремальные свойства. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя.

Библиография: 43 названия.

Ключевые слова: система экспонент, многочлены Паде, многочлены Эрмита–Паде, асимптотические равенства, метод Лапласа, метод перерыва.

DOI: 10.4213/sm8470

§ 1. Введение

В последние годы наблюдается повышенный интерес к аппроксимациям Эрмита–Паде экспоненциальных функций и их обобщениям, в частности, в задачах приближения аналитических функций [1]–[3] и аналитического продолжения [4], [5], в приложениях к случайным матрицам [6]–[8], теории операторов [9], [10], диофантовым приближениям, в том числе для измерения иррациональности [11], [12], в доказательствах трансцендентности [12], [13], в исследованиях алгебраической природы математических констант [14] (подробнее см. обзоры [4], [5], [12], [15]–[17]).

Саму конструкцию этих аппроксимаций предложил Ш. Эрмит в связи с исследованием арифметических свойств числа e . С тех пор аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций привлекали и привлекают внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и известных современных математиков.

Далее будем придерживаться терминологии, принятой в работах [5], [18], [19].

Диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ назовем набор из рациональных функций

$$\pi_{n,n}^j(z; e^{jz}) = \frac{P_n^j(z)}{Q_n(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 годы.

где многочлены $P_n^1, P_n^2, \dots, P_n^k, Q_n$ (их будем называть *диагональными многочленами Эрмита–Паде 2-го рода для системы экспонент* $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$) имеют степени не выше kn и определяются из условий

$$Q_n(z)e^{jz} - P_n^j(z) = O(z^{kn+n+1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Впервые рациональные дроби $\{\pi_{n,n}^j(z; e^{j\xi})\}_{j=1}^k$ появились в известной работе Ш. Эрмита [20], посвященной доказательству трансцендентности числа e . Ф. Линдеман (см. [21]) определил аналоги дробей Эрмита для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=1}^k$, где λ_p – различные алгебраические числа, и применил их, в частности, для доказательства трансцендентности числа π . А. И. Аптекаревым (см. [22]) была установлена равномерная сходимость рациональных функций $\pi_{n,n}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$ для систем экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ с произвольными различными и отличными от нуля комплексными множителями λ_j в показателях экспонент. При $k = 1$ этот результат хорошо известен и принадлежит А. Паде (см. [23]). В работах [24]–[26] описаны асимптотики поведения разностей $e^{\lambda_j z} - \pi_{n,n}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$ в том случае, когда λ_j – произвольные различные и отличные от нуля действительные либо чисто мнимые числа (см. также работу [27]).

Немного позже Ш. Эрмит [28] ввел в рассмотрение многочлены $A_0, A_1, \dots, A_k$ (их будем называть *диагональными многочленами Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент* $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$) степени не выше $n-1$, одновременно тождественно не равные нулю, для которых

$$\sum_{p=0}^k A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Опираясь на описанные в [28] свойства многочленов Эрмита–Паде 1-го рода, К. Малер [29] нашел еще одно доказательство трансцендентности числа e .

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1.1), (1.2), принадлежит А. Паде (см. [23]), а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения свойств многочленов и аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода (определение аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода см., например, в [19]) для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [13], [29], [30] (об участии других авторов в создании формальной теории см. [15], [16], [31]). Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае, как мы уже отмечали, имеют множество приложений в различных областях анализа.

При $k = 1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. В этом случае теорема Паде утверждает, что для многочленов Паде

$$A_0(z) = -P_{n-1}^1(z), \quad A_1(z) = Q_{n-1}(z),$$

нормированных так, что $A_1(0) = 1$, при $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т.е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad A_1(z) = e^{z/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

С помощью явных формул П. Борвейн (см. [32]) нашел асимптотику диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$ при $k = 2$. Этот результат обобщен Ф. Вилонским в [33] на случай произвольного k . В [34] доказан аналог теоремы Борвейна для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$ с произвольными различными действительными $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

В настоящей статье изучаются некоторые свойства диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными комплексными параметрами $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$. В частности, для многочленов $\{A_n^p\}_{p=0}^k$, $\deg A_n^p \leq n - 1$, удовлетворяющих условиям

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^k A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

найдена асимптотика остаточной функции R_n , а в случае действительных параметров $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ найдены асимптотики A_n^p . Установлено, что при действительных множителях λ_p в показателях экспонент нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_{n+1}^p\}_{p=0}^k$ являются решением следующей экстремальной задачи:

при заданном n найти многочлены a_n^p , $p = 0, 1, \dots, k$, степени не выше n , со старшим коэффициентом многочлена a_n^k , равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве

$$E_n = E_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k; \rho) = \min_{\{a_n^p(z)\}_{p=0}^k} \left\| \sum_{p=0}^k a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_{\rho}, \quad (1.4)$$

где $\|h\|_{\rho} = \max\{|h(z)| : z \in D_{\rho}\}$, $D_{\rho} = \{z : |z| \leq \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Считаем, что конечной целью задачи является нахождение асимптотики убывания последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.

При $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \dots, k$, для $k = 2$ и $\rho = 1$ данная задача была поставлена и решена П. Борвейном (см. [32]). Ф. Вилонский в [33] исследовал случай, когда $k \geq 2$ и $\rho < \pi/k$. Еще раньше при $k = 1$ решение задачи для круга и отрезка получено Л. Трефезеном (см. [35]) и Д. Браессом (см. [36]).

Сформулируем один из основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ – произвольные действительные числа, а $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E_n \sim \frac{n! \lambda^{n+1}}{(kn + n + k)!} \rho^{kn+n+k},$$

где

$$\lambda = \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p).$$

Все основные утверждения статьи, в том числе и теорема 1, получены в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений остаточной функции R_n и многочленов A_n^p . Асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода экспоненциальных функций изучались

(с помощью метода Лапласа) в [24]–[26]. В данном случае метод Лапласа применяется в сочетании с методом перевала. Технология их применения является результатом дальнейшего совершенствования метода Ф. Вилонского, изложенного им в основополагающей работе [33] (см. также [24]–[26]).

§ 2. Предварительные результаты

В этом и в следующем параграфах λ_p – произвольные различные комплексные числа, занумерованные так, что $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|$.

Многочлены $A_n^0, A_n^1, \dots, A_n^k$, удовлетворяющие равенствам (1.3), могут быть получены решением линейной системы $kn + n - 1$ однородных уравнений с $kn + n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, k$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \leq p \leq k, \quad (2.1)$$

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad (2.2)$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1) \dots (\xi - \lambda_k)$, удовлетворяют (1.3) и всем другим условиям.

Далее будем рассматривать нормированную функцию $\tilde{R}_{n-1}$, полученную делением R_n на старший коэффициент многочлена A_n^k . Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n - 1$ раз равенство (2.1) при $p = k$. В результате получим, что значение старшего коэффициента A_n^k совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i(n-1)!} \int_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k)(\xi - \lambda_0)^n(\xi - \lambda_1)^n \dots (\xi - \lambda_{k-1})^n},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$\frac{1}{(n-1)! \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^n} = \frac{\lambda^{-n}}{(n-1)!}.$$

Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые в дальнейшем утверждения (см. [37; гл. VII, § 43, § 45]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (метод Лапласа). Пусть $f(x), S(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a, b]$, т.е. $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $S''(x_0) \neq 0$ и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда при $n \rightarrow +\infty$ и $f(x_0) \neq 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \left(f(x_0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 (метод перевала). Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой области G , содержащей кусочно гладкую кривую γ и

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max\{\operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in \gamma\}$ достигается только в точке z_0 , которая является внутренней точкой контура γ и простой точкой перевала, т.е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора (см. [37; гл. VII, § 45]), в которых $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $f(z_0) \neq 0$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \left(f(z_0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (2.3)$$

Выбор ветви корня в (2.3) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а l – линия наискорейшего спуска, проходящая через точку z_0 , т.е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ при $z \in l$; $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ при $z \in l$, $z \neq z_0$.

Напомним, что две бесконечно большие или две бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ называют эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$) при $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n / \beta_n = 1$.

§ 3. Асимптотика остаточной функции R_n

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по z на компактах в $\mathbb{C}$

$$R_n(z) \sim \frac{\exp\left\{\frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k}{k+1} z\right\}}{(kn + n - 1)!} z^{kn+n-1}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_0 = 0$. Общий случай сводится к рассматриваемому. Для этого достаточно равенство (1.3) умножить на $e^{-\lambda_0 z}$.

Так как $R_n(0) = 0$, то при $z = 0$ соотношение (3.1) справедливо. Возьмем произвольное фиксированное $z \neq 0$. В равенстве (2.2) сделаем замену $z = nw$. Тогда

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w} \varphi(\xi)]^n}. \quad (3.2)$$

Будем искать критические точки функции $\psi(\xi) = e^{-\xi w} \varphi(\xi)$, т.е. нули $\psi'(\xi)$. Они являются корнями уравнения

$$w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi),$$

которое можно записать в виде

$$w = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - \lambda_1} + \dots + \frac{1}{\xi - \lambda_k}. \quad (3.3)$$

Контур C_∞ охватывает все точки λ_p . Будем искать критическую точку, лежащую на контуре C_∞ , достаточно далеко удаленную от нуля. Точнее, будем считать, что расстояние критической точки от нуля больше $2|\lambda_k|$. В таком случае, сделав замену $\zeta = 1/\xi$, представим правую часть равенства (3.3) в виде степенного ряда

$$w = (k+1)\zeta + (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)\zeta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2)\zeta^3 + \dots. \quad (3.4)$$

Обращая ряд (3.4) с использованием формул Бурмана–Лагранжа (см. [37; гл. V, § 31]) и возвращаясь к прежней переменной ξ , получим зависимость поведения критической точки ξ_0 от значений w , которые с учетом замены $z = nw$ находятся в достаточно малой окрестности нуля:

$$\xi_0 = \frac{k+1}{w} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} + O(w). \quad (3.5)$$

Определим теперь контур C_∞ так, чтобы он проходил через ξ_0 , охватывал все точки $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, а модуль функции $\psi(\xi)$ достигал на C_∞ своего наименьшего значения в единственной точке ξ_0 . С этой целью рассмотрим линии уровня функций $\varphi(\xi)$ и $e^{-w\xi}$, проходящие через точку ξ_0 :

$$L = \{\xi \in \mathbb{C} : |\varphi(\xi)| = |\varphi(\xi_0)|\}, \quad L_1 = \{\xi \in \mathbb{C} : |e^{-w\xi}| = |e^{-w\xi_0}|\}.$$

L является лемнискатой, а L_1 – прямой, проходящей через ξ_0 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол равный $\arg(i/w)$. Уравнение лемнискаты L запишем в виде

$$\left| \varphi(\xi_0) + \frac{\varphi'(\xi_0)}{1!}(\xi - \xi_0) + \dots + \frac{\varphi^{(k+1)}(\xi_0)}{(k+1)!}(\xi - \xi_0)^{(k+1)} \right| = |\varphi(\xi_0)|.$$

Опираясь на это соотношение и равенство $\varphi'(\xi_0) = w\varphi(\xi_0)$, легко показать, что угловой коэффициент касательной к L в точке ξ_0 равен $\operatorname{tg}(\arg(i/w))$. Таким образом, L_1 является касательной к L в точке ξ_0 .

При достаточно малых $|w|$ лемниската L является (см. [38; гл. III, § 3.3]) жордановой аналитической кривой и охватывает все нули $\varphi(\xi)$, а прямая L_1

разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (полуплоскость Ω) содержит L . В полуплоскости Ω модуль $e^{-w\xi}$ больше модуля $e^{-w\xi_0}$. Лемниската L разбивает плоскость на две связные области – внутреннюю и внешнюю. Если ξ принадлежит внешней области, то $|\varphi(\xi)| > |\varphi(\xi_0)|$.

Учитывая возможность деформирования контура интегрирования в интеграле (3.2), построим теперь необходимый контур C_∞ . Для этого возьмем отрезок с центром в точке ξ_0 , принадлежащий L_1 , и соединим его концы гладкой жордановой кривой, которая лежит в полуплоскости Ω и охватывает L . Построенный контур C_∞ соответствует всем необходимым требованиям.

Заметим, что число корней уравнения $\varphi'(\xi) = 0$ равно k и все они лежат в выпуклом многоугольнике, содержащем все нули $\varphi(\xi)$, т.е. если η является нулем $\varphi'(\xi)$, то [39; часть III, гл. 1, § 3, задача 31]

$$\eta = m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + \dots + m_k\lambda_k,$$

где $m_p \geq 0$, $m_0 + m_1 + \dots + m_k = 1$. Отсюда следует, что $|\eta| \leq |\lambda_k|$. Если $w \rightarrow 0$, то $\xi_0 \rightarrow \infty$, а остальные k корней уравнения $w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi)$ находятся в достаточной близости от корней уравнения $\varphi'(\xi) = 0$ и, следовательно, лежат в круге с центром в нуле и радиуса $2|\lambda_k|$. Поэтому на контуре C_∞ лежит единственная критическая точка ξ_0 функции $\psi(\xi)$.

В силу принципа аргумента при обходе точкой ξ контура C_∞ в положительном направлении приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно $2(k+1)\pi$. Поэтому C_∞ можно разбить на два контура C_∞^j , $j = 0, 1$, так, что на контуре C_∞^1 приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно $(2k+1)\pi$. Без ограничения общности можно считать, что ξ_0 лежит внутри контура C_∞^0 и $-\pi/2 \leq \arg \varphi(\xi) \leq \pi/2$, если $\xi \in C_\infty^0$. В противном случае правую часть равенства (3.2) следует умножить и разделить на $e^{i\alpha}$, где действительное число α выбирается так, чтобы $-\pi/2 \leq \arg(e^{i\alpha}\varphi(\xi)) \leq \pi/2$, и далее вместо $\varphi(\xi)$ рассматривать функцию $e^{i\alpha}\varphi(\xi)$. Здесь и далее i – мнимая единица.

Определим функцию $S(\xi)$, полагая

$$S(\xi) = w\xi - \ln \varphi(\xi), \quad \xi \in C_\infty^0,$$

где $\ln \varphi(\xi) = \ln |\varphi(\xi)| + i \arg_0 \varphi(\xi)$ – однозначная ветвь логарифма, для которой $\arg_0 \varphi(\xi) \in [-\pi/2, \pi/2]$. $S(\xi)$ является сужением на $C_\infty^0 \subset G$ однозначной аналитической функции $S(\xi)$, определенной в односвязной области G , не содержащей нулей $\varphi(\xi)$. В этой области справедливы равенства

$$\begin{aligned} S'(\xi) &= w - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = w - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \dots - \frac{1}{\xi - \lambda_k}, \\ S''(\xi) &= \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{1}{(\xi - \lambda_k)^2}, \end{aligned}$$

из которых следует, что $S'(\xi_0) = 0$, $S''(\xi_0) \neq 0$.

Для всех $\xi \in C_\infty$

$$\frac{1}{|\psi(\xi)|^n} = \exp\{n(\operatorname{Re}(w\xi) - \ln |\varphi(\xi)|)\},$$

а функция $\operatorname{Re}(w\xi) - \ln |\varphi(\xi)|$ достигает на C_∞ своего наибольшего значения в единственной точке ξ_0 . Введем в рассмотрение интегралы

$$F_j(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty^j} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w} \varphi(\xi)]^n}, \quad j = 0, 1.$$

Рассуждая как и при доказательстве неравенств (8) в [37; гл. VII, § 45], нетрудно показать, что

$$|F_1(n)| \leq c |e^{n(S(\xi_0) - \delta)}|, \quad (3.6)$$

где $c, \delta > 0$ – постоянные. Интеграл $F_0(n)$ представляется в виде

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty^0} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Так как $\max\{\operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in C_\infty^0\}$ достигается в единственной точке ξ_0 , которая является внутренней точкой контура C_∞^0 и простой точкой перевала, то для нахождения асимптотики этого интеграла применим метод перевала (утверждение 2). В результате получим

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}} e^{nS(\xi_0)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Из неравенств (3.6) следует, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл $F_1(n)$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(\xi_0)}$. Значит основной вклад в асимптотику $R_n(nw)$ вносит интеграл $F_0(n)$. Поэтому

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}} e^{nS(\xi_0)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.7)$$

Точка ξ_0 достаточно далеко удалена от нуля. Поэтому

$$\begin{aligned} S(\xi_0) &= w\xi_0 - (k+1) \ln \xi_0 - \ln\left(1 - \frac{\lambda_1}{\xi_0}\right) - \dots - \ln\left(1 - \frac{\lambda_k}{\xi_0}\right) \\ &= w\xi_0 + (k+1) \ln \frac{1}{\xi_0} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{\xi_0} + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.5) следует, что

$$S(\xi_0) = k+1 + (k+1) \ln \frac{w}{k+1} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} w + O(w^2).$$

Тогда

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{(k+1)n} \left(\frac{w}{k+1}\right)^{(k+1)n} \exp\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} nw\right\} (1 + O(nw^2)).$$

Если перейти здесь от переменной w к z , то при $n \rightarrow \infty$ получим

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{(k+1)n} \left(\frac{z}{(k+1)n}\right)^{(k+1)n} \exp\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} z\right\} \left(1 + O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right). \quad (3.8)$$

Из полученного ранее равенства для $S''(\xi)$ следует, что

$$S''(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2} \left(k + 1 + 2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{\xi_0} + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right) \right).$$

Отсюда и из (3.5) вытекает

$$S''(\xi_0) = \frac{w^2}{k+1} (1 + O(w)),$$

поэтому

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{\frac{-(k+1)}{w^2}} (1 + O(w)).$$

Учитывая, что для контура C_∞^0 угол $\varphi_0 = \arg(i/w)$, переходя к переменной z , окончательно получаем

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{k+1} \frac{i}{w} (1 + O(w)) = i\sqrt{k+1} \frac{n}{z} \left(1 + O\left(\frac{z}{n}\right) \right). \quad (3.9)$$

Из (3.7)–(3.9) следует, что

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \sqrt{\frac{(k+1)n}{2\pi}} \left(\frac{e}{(k+1)n} \right)^{(k+1)n} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} z \right\} z^{kn+n-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом формулы Стирлинга, вытекает справедливость асимптотического равенства (3.1) для любого фиксированного комплексного числа z .

Равномерность асимптотики в (3.1) следует из теоремы Витали и того, что последовательность функций

$$(kn + n - 1)! \exp \left\{ -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} z \right\} \frac{R_n(z)}{z^{kn+n-1}}, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots,$$

по модулю равномерно ограничена на компактах в $\mathbb{C}$. Действительно,

$$|R_n(nw)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \exp \{ n(\operatorname{Re}(w\zeta(t)) - \ln |\varphi(\zeta(t))|) \} |\zeta'(t)| dt,$$

где контур интегрирования C_∞ прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha, \beta]$. Если обозначить через $[\alpha_1, \beta_1]$ отрезок, соответствующий параметризации контура C_∞^0 , то при достаточно больших n

$$|R_n(nw)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \exp \{ n \operatorname{Re} S(\zeta(t)) \} |\zeta'(t)| dt. \quad (3.10)$$

Для нахождения асимптотики интеграла в (3.10) применим метод Лапласа (утверждение 1). В результате получим, что

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(\xi_0)} |\zeta'(t_0)| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (3.11)$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = \xi_0$. В достаточно малой окрестности точки $\xi_0 = x_0 + iy_0$ кривая C_∞^0 задается параметрическим уравнением

$$\zeta(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [-\tau, \tau], \quad \tau > 0,$$

где

$$\begin{aligned} x(t) &= \beta t + x_0, & y(t) &= \alpha t + y_0, & w &= \alpha + i\beta, \\ t_0 &= 0, & \zeta(0) &= \xi_0, & |\zeta'(t_0)| &= |w|. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $\operatorname{Re} S(\zeta(t))$ в точке t_0 имеет локальный максимум, с помощью элементарных вычислений получим, что

$$-[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=0} = \sum_{p=0}^k \frac{|w|^2}{|\xi_0 - \lambda_p|^2} - 2 \sum_{p=0}^k \left[\frac{\operatorname{Im}(w(\xi_0 - \lambda_p))}{|\xi_0 - \lambda_p|^2} \right]^2.$$

Опираясь на это соотношение, используя (3.5) и легко проверяемое равенство

$$2[\operatorname{Im}\{w(\xi_0 - \lambda_p)\}]^2 = |w|^2 |\xi_0 - \lambda_p|^2 - \operatorname{Re}\{w^2(\xi_0 - \lambda_p)^2\},$$

нетрудно показать, что при достаточно больших n

$$-[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=0} = \frac{|w|^4}{k+1} (1 + O(w)).$$

Переходя здесь к переменной z и учитывая (3.8)–(3.11), при достаточно больших n получаем необходимое неравенство

$$|R_n(z)| \leq \frac{2|z|^{kn+n-1}}{(kn+n-1)!} \left| \exp \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} z \right\} \right|.$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Вслед за Л. Трефезеном [35] и Д. Браессом [36] рассмотрим сдвиг многочленов Эрмита–Паде 1-го рода и n -го порядка. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ – произвольные действительные числа,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n^p(z) &= n! \lambda^{n+1} A_{n+1}^p(z - z_n), & 0 \leq p \leq k, \\ \tilde{R}_n(z) &= n! \lambda^{n+1} R_{n+1}(z - z_n), & E_n^* = \|\tilde{R}_n\|_\rho, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$z_n = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} \frac{\rho^2}{kn + n + k},$$

а множитель $n! \lambda^{n+1}$ в приведенных выше формулах нормализует многочлен $\tilde{a}_n^k$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. При $n \rightarrow \infty$

$$E_n^* \sim \frac{n! \lambda^{n+1}}{(kn + n + k)!} \rho^{kn+n+k}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 и эквивалентности

$$(z - z_n)^{kn+n+k} \sim z^{kn+n+k} \exp \left\{ -\frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1} \frac{\rho^2}{z} \right\}$$

следует, что при $n \rightarrow \infty$ для $|z| = \rho$

$$|R_{n+1}(z - z_n)| \sim \frac{\rho^{kn+n+k}}{(kn + n + k)!}.$$

Отсюда и из определения E_n^* (см. (4.1)) следует (4.2). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$, то для достаточно больших n $E_n = E_n^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом работ [32], [33]. Достаточно показать, что $E_n^* \leq E_n$ при больших n . Предположим, что это не так. Тогда $E_n < E_n^*$ и, следовательно, найдутся многочлены a_n^p , $p = 0, 1, \dots, k$, $\deg a_n^p \leq n$, a_n^k имеет старший коэффициент, равный 1, такие, что

$$\left\| \sum_{p=0}^k a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\| < \left\| \sum_{p=0}^k \tilde{a}_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n для $|z| = \rho$

$$\left| \sum_{p=0}^k a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right| < \left| \sum_{p=0}^k \tilde{a}_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right|.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$\sum_{p=0}^k (a_n^p(z) - \tilde{a}_n^p(z)) e^{\lambda_p z} \quad (4.3)$$

имеет в D_ρ по крайней мере $kn + n + k$ нулей. Но это не так. Действительно, рассмотрим многочлены $b_n^p = a_n^p - \tilde{a}_n^p$, $p = 0, 1, \dots, k$. Пусть h – сумма степеней всех этих многочленов. Известно (см. [39; часть III, гл. 4, § 4, задача 206.2]), что функция

$$\sum_{p=0}^k b_n^p(z) e^{\lambda_p z}$$

в круге D_ρ может иметь не больше $h + k + (\lambda_k - \lambda_0)\rho/\pi$ нулей. В нашем случае $h \leq (k+1)n - 1$ и $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. Поэтому функция (4.3) может иметь в D_ρ не больше, чем $kn + n + k - 1$ нулей. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

§ 5. Асимптотика многочленов A_n^p

В этом параграфе $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – различные действительные числа. Без ограничения общности далее считаем, что $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$. Общий случай сводится к рассматриваемому.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ – нули многочлена φ' . Ясно, что x_j – действительные числа и $x_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^k \subset G \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^k$. Тогда (см. [37; гл. IV, § 24, пример 6]) функция

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi),$$

где

$$\begin{aligned} S(x_1) &= -\ln |\varphi(x_1)|, & \text{если } \varphi(x_1) > 0, \\ S(x_1) &= -\ln |\varphi(x_1)| - i\pi, & \text{если } \varphi(x_1) < 0, \end{aligned}$$

является однозначной аналитической функцией в G . Значения функции S вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\ln |\varphi(\xi)| - i[\operatorname{Im} S(x_1) + \Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ , а $\Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ .

Если $\xi \in G$, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} S'(\xi) &= -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \dots - \frac{1}{\xi - \lambda_k}, \\ S''(\xi) &= -\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{1}{(\xi - \lambda_k)^2}, \end{aligned}$$

из которых следует, что $S'(x_j) = 0$, $S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_j)}} e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

ТЕОРЕМА 3. Для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ и $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(z) = B_n(x_1) e^{x_1 z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} A_n^p(z) &= B_n(x_{p+1}) e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\quad - B_n(x_p) e^{(x_p - \lambda_p)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad 1 \leq p \leq k-1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$A_n^k(z) = -B_n(x_k) e^{(x_k - \lambda_k)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad (5.4)$$

докажем равенство (5.1). Для этого в интеграле (5.4) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R , принадлежащий полуплоскости

$$\{z : -\infty < \operatorname{Re} z < \lambda_1\},$$

с вершинами в точках $A(-a', -r)$, $B(-a', r)$, $C(a, r)$, $D(a, -r)$, где r — достаточно большое положительное число, $a \in (0, \lambda_1)$, $a' > 0$. Так как

$$|\varphi(a + it)| = \prod_{j=0}^k \sqrt{(a - \lambda_j)^2 + t^2} > |\varphi(a)|, \quad t \in [-r, r] \setminus \{0\},$$

то на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D , минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a . Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B , минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке $-a'$. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $|\varphi(\xi)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках $-a'$ и a . Действительно, если $r > 2 \max\{a', \lambda_k\}$, то при $t \in [-a, a]$

$$|\varphi(t \pm ir)| = \prod_{j=0}^k \sqrt{(t - \lambda_j)^2 + r^2} > \max\{|\varphi(a)|, |\varphi(-a')|\}.$$

Определимся теперь с выбором a' и a . Положим $a = x_1$, а a' возьмем таким, чтобы $|\varphi(-a')| > |\varphi(a)|$. Такой выбор возможен, так как $|\varphi(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \in \mathbb{R}$ и $t \rightarrow -\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L, N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L, N]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[L, N]} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}.$$

Область G можно выбрать так, чтобы $[D, C] \subset G$. Поэтому

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[D, C]} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

В силу выбора точки a максимум функции $\operatorname{Re} S(\xi)$ на отрезке $[D, C]$ достигается в единственной точке x_1 , которая является простой точкой перевала. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла $F_n^{[D, C]}$ можно применить метод перевала (утверждение 2). В результате получим

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (5.5)$$

Выбираем ветвь корня в (5.5) с учетом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (5.6)$$

К интегралу $F_n^{[B,A]}$ применимы аналогичные рассуждения. Учитывая при этом выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|F_n^{[B,A]}(z)| \leq \theta |e^{n(S(x_1) - \delta)}|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}$, $F_n^{[A,D]}$. Значит, основной вклад в асимптотику A_n^0 вносит интеграл по отрезку $[D, C]$. Поэтому из (5.6) следует справедливость равенства (5.1).

Равенство (5.3) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учетом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенств (3.2). Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Представив многочлен A_n^p , $1 \leq p \leq k-1$, в виде (2.1), деформируем контур интегрирования C_p в прямоугольник R^* , принадлежащий области $\{z : \lambda_{p-1} < \operatorname{Re} z < \lambda_{p+1}\}$, с вершинами в точках $A^*(a', -r)$, $B^*(a', r)$, $C^*(a, r)$, $D^*(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a' \in (\lambda_{p-1}, \lambda_p)$, $a \in (\lambda_p, \lambda_{p+1})$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки D^* и C^* , минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a , а на отрезке $[B^*, A^*]$ он достигается в единственной точке a' . При достаточно большом r ($r > 2\lambda_k$) значения $|\varphi(\xi)|$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[B^*, C^*]$ и $[A^*, D^*]$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках a' , a . Если положить $a' = x_p$, $a = x_{p+1}$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику A_n^p будут вносить интегралы по отрезкам $[B^*, A^*]$ и $[D^*, C^*]$. Применив к ним предыдущие рассуждения, получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$F_n^{[D^*, C^*]}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_{p+1})}} e^{nS(x_{p+1})} e^{x_{p+1} z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (5.7)$$

$$F_n^{[B^*, A^*]}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}} e^{nS(x_p)} e^{x_p z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (5.8)$$

При выборе ветви корня в (5.7) учитываем, что $\varphi_0 = \pi/2$, а при выборе ветви корня в (5.8) замечаем, что $\varphi_0 = -\pi/2$. С учетом этого из (5.7) и (5.8) следует равенство (5.2). Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A_n^0(0) &= B_n(x_1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \\ A_n^p(0) &= B_n(x_{p+1}) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) - B_n(x_p) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad 1 \leq p \leq k-1, \\ A_n^k(0) &= -B_n(x_k) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из (5.9) следует, что при достаточно больших n имеем $A_n^0(0) \neq 0$ и $A_n^k(0) \neq 0$. При таких n определим две последовательности нормированных многочленов

$$\tilde{A}_n^0(z) = \frac{A_n^0(z)}{A_n^0(0)}, \quad \tilde{A}_n^k(z) = \frac{A_n^k(z)}{A_n^k(0)}.$$

Чтобы определить аналогичные последовательности при $1 \leq p \leq k-1$, рассмотрим три возможных ситуации, каждая из которых реализуется для конкретных систем экспонент.

А) $|\varphi(x_p)| \neq |\varphi(x_{p+1})|$. Обозначим через $\tilde{x}_p$ ту из точек x_p, x_{p+1} , для которой

$$\min\{|\varphi(x_p)|, |\varphi(x_{p+1})|\} = |\varphi(\tilde{x}_p)|.$$

В этом случае при достаточно больших n имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$.

В) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) \neq S''(x_p)$. При больших n имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$.

С) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) = S''(x_p)$. Поскольку $(-1)^{k+p+1}\varphi(x_p) > 0$, то

$$\begin{aligned} e^{nS(x_p)} &= (-1)^{n(k+p+1)} e^{-n \ln |\varphi(x_p)|}, \\ e^{nS(x_{p+1})} &= (-1)^{n(k+p+1)+n} e^{-n \ln |\varphi(x_p)|}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_n^p(0) = (-1)^{n(k+p+1)} \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}} e^{-n \ln |\varphi(x_p)|} ((-1)^n - 1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Тогда при достаточно больших n имеем $A_{2n+1}^p(0) \neq 0$ и, следовательно, определена последовательность многочленов $\tilde{A}_{2n+1}^p(z) = A_{2n+1}^p(z)/A_{2n+1}^p(0)$.

Производную многочлена A_n^p можно представить в виде

$$\frac{dA_n^p}{dz}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} (\xi - \lambda_p) \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}. \quad (5.10)$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики A_n^p , применив к интегралу в правой части равенства (5.10) при $z = 0$ метод перевала, получим

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0) = B_n(x_{p+1})(x_{p+1} - \lambda_p) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) - B_n(x_p)(x_p - \lambda_p) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Тогда при сделанных предположениях

$$\frac{dA_{2n}^p}{dz}(0) = (-1)^{n(k+p+1)} \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}} e^{-n \ln |\varphi(x_p)|} (x_{p+1} - x_p) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и определена последовательность многочленов $\tilde{A}_{2n}^p(z) = A_{2n}^p(z)/(A_{2n}^p)'(0)$.

ТЕОРЕМА 4. При $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по z

$$\tilde{A}_n^0(z) \Rightarrow e^{x_1 z}, \quad \tilde{A}_n^k(z) \Rightarrow e^{(x_k - \lambda_k)z}. \quad (5.11)$$

Если $1 \leq p \leq k-1$, то локально равномерно по z при $n \rightarrow \infty$:

в случае А) имеем

$$\tilde{A}_n^p(z) \Rightarrow e^{(\tilde{x}_p - \lambda_p)z}; \quad (5.12)$$

в случае В) имеем

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) \Rightarrow \left(\frac{e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{e^{(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}} \right)^{-1}, \quad (5.13)$$

$$\tilde{A}_{2n+1}^p(z) \Rightarrow \left(\frac{e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{e^{(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}} \right)^{-1}; \quad (5.14)$$

в случае С) имеем

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) \Rightarrow \frac{1}{x_{p+1} - x_p} (e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z} - e^{(x_p - \lambda_p)z}), \quad (5.15)$$

$$\tilde{A}_{2n+1}^p(z) \Rightarrow \frac{1}{2} (e^{(x_{p+1} + \lambda_p)z} + e^{(x_p - \lambda_p)z}). \quad (5.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поточечная сходимость в (5.11)–(5.16) доказана в теореме 3. Остается доказать, что многочлены $\tilde{A}_n^p$ при $0 \leq p \leq k$ в каждом из случаев А), В) и С) равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к соответствующим функциям. Докажем это, например, для $\tilde{A}_n^0$.

Если предположить, что $|z| \leq \rho$ и $\xi \in R$, то модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M = e^{4\rho \max\{a', \lambda_k\}}$. Опираясь на равенство (5.4), в этом случае получим

$$|A_n^0(z)| \leq \frac{M}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-n \ln |\varphi(\zeta(t))|} |\zeta'(t)| dt \quad (5.17)$$

при условии, что контур интегрирования R прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha, \beta]$. При больших n неравенство (5.17) сохраняется, если вместо R взять отрезок $[D, C]$. Пусть его параметризации соответствует значение параметра $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (5.17) применим метод Лапласа (утверждение 1). В результате получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt \\ &= \sqrt{\frac{-2\pi}{n [\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(x_1)} |\zeta'(t_0)| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = x_1$. Нетрудно показать, что

$$[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=t_0} = -S''(x_1)|\zeta'(t_0)|^2.$$

Отсюда, учитывая (5.9), (5.18), при достаточно больших n получаем неравенство $|\tilde{A}_n^0(z)| \leq 2M$, из которого следует, что последовательность $\{\tilde{A}_n^0(z)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z : |z| \leq \rho\}$. Тогда по теореме Витали эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{x_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z : |z| \leq \rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 4. Теорема 4 доказана.

§ 6. Иллюстрирующие примеры

6.1. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Введем обозначения

$$p = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}, \quad h = 5\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2.$$

Тогда несложные вычисления приводят к равенствам

$$\begin{aligned} x_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 - p)/3, & x_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + p)/3, \\ \varphi(x_1) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h + 2p^3}{27}, & \varphi(x_2) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h - 2p^3}{27}, \\ S''(x_1) &= \ln \frac{54p}{(\lambda_1 + \lambda_2)h + 2p^3}, & S''(x_2) &= \ln \frac{-54p}{(\lambda_1 + \lambda_2)h - 2p^3}. \end{aligned}$$

Из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. При $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A_n^0(z) &= B_n(x_1)e^{x_1 z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ A_n^1(z) &= B_n(x_2)e^{(x_2 - \lambda_1)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - B_n(x_1)e^{(x_1 - \lambda_1)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ A_n^2(z) &= -B_n(x_2)e^{(x_2 - \lambda_2)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

В этом примере так же, как и в примерах из работ [32], [33] реализуются только случаи А) и С). Причем случай С) реализуется, когда $h = 0$, т.е. при $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Если предположить, что $\lambda_2 = 2\lambda_1$, то

$$\begin{aligned} S(x_1) &= \ln\left(\frac{27}{2p^3}\right), & S(x_2) &= \ln\left(\frac{27}{2p^3}\right) + i\pi, & S''(x_1) &= S''(x_2) = \frac{27}{p^2}, \\ A_n^1(0) &= \sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}} \left(\frac{27}{2p^3}\right)^n [(-1)^n - 1] \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Поэтому при достаточно больших n имеем $A_{2n+1}^1(0) \neq 0$. Далее, с помощью уже известных рассуждений легко показать, что

$$\frac{dA_{2n}^1}{dz}(0) = \sqrt{\frac{p^2}{108\pi n}} \left(\frac{27}{2p^3}\right)^{2n} (x_2 - x_1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда из теоремы 4 в данном случае получим

СЛЕДСТВИЕ 3.

$$\tilde{A}_n^0(z) \Rightarrow e^{x_1 z}, \quad \tilde{A}_n^2(z) \Rightarrow e^{(x_2 - \lambda_2)z}.$$

В случае, когда $\lambda_2 \neq 2\lambda_1$,

$$\tilde{A}_n^1(z) \Rightarrow e^{(x_2 - \lambda_1)z},$$

а если $\lambda_2 = 2\lambda_1$,

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z) \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{(x_2 - \lambda_1)z} + e^{(x_1 - \lambda_1)z}), \quad \tilde{A}_{2n}^1(z) \Rightarrow \frac{1}{x_2 - x_1}(e^{(x_2 - \lambda_1)z} - e^{(x_1 - \lambda_1)z}).$$

Для сравнения переформулируем с учетом принятых обозначений аналогичный результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода, полученный в [24] (см. также работы [27] и [40], в которых с помощью метода матричной задачи Римана–Гильберта найдены очень точные асимптотики преобразованных путем масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций и многочленов Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода в случае, когда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\pi_{n,n}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$, $j = 1, 2$, – аппроксимации Эрмита–Паде 2-го рода для набора $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$, где λ_1, λ_2 – различные не равные нулю действительные числа. Тогда при $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по z

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 z} - \pi_{n,n}^1(z; e^{\lambda_1 \xi}) &= B_n^*(x_1; z) e^{(\lambda_1 - x_1)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ e^{\lambda_2 z} - \pi_{n,n}^2(z; e^{\lambda_2 \xi}) &= B_n^*(x_1; z) e^{(\lambda_2 - x_1)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\quad + (-1)^n B_n^*(x_2; z) e^{(\lambda_2 - x_2)z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

где

$$B_n^*(x_j; z) = \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)z/3} \sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_j)}} e^{-nS(x_j)}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть теперь

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Тогда при $0 < \varepsilon < 1$ из теоремы 3 следует, что

$$\begin{aligned} A_n^0(z) &\sim \sqrt{\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h} \right)^n e^{(2+\varepsilon-p)z/3}, \\ A_n^1(z) &\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h} \right)^n e^{(-1+\varepsilon+p)z/3}, \\ A_n^2(z) &\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h} \right)^n e^{(-1-2\varepsilon+p)z/3}. \end{aligned}$$

Сравнение этих соотношений показывает, что главные члены асимптотик значений многочленов $A_n^1(z)$ и $A_n^2(z)$ в точке z отличаются на множитель $e^{\varepsilon z}$, который при $\varepsilon \rightarrow 0$ локально равномерно стремится к единице. При $\varepsilon = 1$ из теоремы 3 получим асимптотические равенства, которые согласуются с соответствующими утверждениями из работ [32] и [33]:

$$\begin{aligned} A_n^0(z) &\sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z}, \\ A_n^1(z) &\sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n (e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}}), \\ A_n^2(z) &\sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}. \end{aligned}$$

Полезно сравнить предыдущие асимптотические равенства с равенствами, вытекающими в этом случае из теоремы 5:

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n,n}^1(z; e^\xi) &\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n e^{z/\sqrt{3}}, \\ e^{\lambda_2 z} - \pi_{n,n}^2(z; e^{2\xi}) &\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

При $0 < \varepsilon < 1$ из теоремы 5 получим

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\pi_{n,n}^1(z; e^\xi)$, $\pi_{n,n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi})$ – аппроксимации Эрмита–Паде 2-го рода для набора $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n,n}^1(z; e^\xi) &\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{27} \right)^n e^{(3+p)z/3}, \\ e^{(1+\varepsilon)z} - \pi_{n,n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi}) &\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{27} \right)^n e^{(3+3\varepsilon+p)z/3}. \end{aligned}$$

Следствие 4 позволяет утверждать, что при малых значениях ε асимптотики соответствующих уклонений аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода отличаются несущественно и с убыванием ε к нулю стремятся к общему значению. При

этом зависящий от ε множитель $(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)/27)^n$, определяющий поведение главного члена асимптотики, стремится к $(2/(3\sqrt{3}))^{2n}$. Это несколько неожиданно, если принять во внимание равенство (6.1), так как наблюдается эффект существенного роста (почти в $(2/(3\sqrt{3}))^n$ раз) скорости приближения функции e^z аппроксимациями Эрмита–Паде из следствия 4.

6.2. Приведем пример, когда реализуется случай В). Для этого рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1 - \varepsilon, \quad \lambda_2 = 2 + \varepsilon, \quad \lambda_3 = 3, \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

При выбранных значениях параметров

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 2(1 - \varepsilon)(2 + \varepsilon)}, & x_2 &= \frac{3}{2}, \\ x_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 2(1 - \varepsilon)(2 + \varepsilon)}, \\ \varphi(x_1) &= \varphi(x_3) = -\frac{1}{4}(1 - \varepsilon)^2(2 + \varepsilon)^2, & \varphi(x_2) &= \frac{9}{4}(0, 5 + \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Тогда при $\varepsilon = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}, & x_2 &= \frac{3}{2}, & x_3 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \\ \varphi(x_2) &= -\varphi(x_1) = -\varphi(x_3) = \frac{81}{8}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), \end{aligned}$$

в то время как

$$\varphi''(x_2) = -18 + 9\sqrt{2}, \quad \varphi''(x_1) = \varphi''(x_3) = 36 - 18\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$S'''(x_1) = S'''(x_3) = \frac{16}{9}(2 - \sqrt{2}), \quad S'''(x_2) = \frac{32}{9}.$$

Следовательно, случай В) реализуется при $p = 1$ и $p = 2$. Из теоремы 4, например при $p = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2n}^1(z) &\Rightarrow \frac{e^{3(\sqrt{2}-1)z/2}}{1 - \sqrt{1 - \sqrt{2}}/2} \left[e^{-3\sqrt{2-\sqrt{2}}z/2} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right], \\ \tilde{A}_{2n+1}^1(z) &\Rightarrow \frac{e^{3(\sqrt{2}-1)z/2}}{1 + \sqrt{1 - \sqrt{2}}/2} \left[e^{-3\sqrt{2-\sqrt{2}}z/2} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right]. \end{aligned}$$

§ 7. Локализация нулей многочленов A_n^p

Поведение нулей многочленов Тейлора степенных рядов, связанных с экспоненциальными функциями, изучалось Г. Сегё в [41]. Э. Сафф и Р. Варга в [42] исследовали область локализации нулей аппроксимаций Паде экспоненты и,

в частности, нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде. Г. Шталь в [18] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода для системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости (см. также работы [27] и [40]). Ф. Вилонский в [33] доказал аналог теоремы Саффа и Варги для многочленов Эрмита–Паде A_p , удовлетворяющих равенствам (1.2).

Следующая теорема дополняет и обобщает результаты Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, Ф. Вилонского.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n \geq 2$, $k \geq 1$ нули A_n^p , т.е. нули многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, лежат в круге $\{z : |z| < R_n^p\}$, где

$$R_n^p = 2 \left(n - \frac{1}{3} \right) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^k \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_j|}.$$

Доказательство теоремы 6 проводится с помощью метода, описанного в работе [33]. Подробности здесь опускаем.

В заключение заметим, что результаты данной статьи частично анонсированы в [43].

Список литературы

- [1] J. P. Boyd, “Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler’s equation: a Chebyshev–Hermite–Padé method”, *J. Comput. Appl. Math.*, **223**:2 (2009), 693–702.
- [2] B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky, “How well does the Hermite–Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon?”, *Math. Comp.*, **80**:274 (2011), 931–958.
- [3] В. Н. Сорокин, “Циклические графы и теорема Апері”, *УМН*, **57**:3(345) (2002), 99–134; англ. пер.: V. N. Sorokin, “Cyclic graphs and Apéry’s theorem”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 535–571.
- [4] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1(343) (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [5] С. П. Суетин, “Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение”, *УМН*, **70**:5(425) (2015), 121–174; англ. пер.: S. P. Suetin, “Distribution of the zeros of Padé polynomials and analytic continuation”, *Russian Math. Surveys*, **70**:5 (2015), 901–951.
- [6] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials”, *Int. Math. Res. Not.*, **2004**:3 (2004), 109–129.
- [7] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [8] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.

- [9] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100; англ. пер.: V. A. Kalyagin, “Hermite–Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 199–216.
- [10] А. И. Аптекарев, В. А. Калыгин, Е. В. Сэфф, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.
- [11] G. V. Chudnovsky, “Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π ”, *The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications* (Bures-sur-Yvette/New York, 1979/1980), *Lecture Notes in Math.*, **925**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 299–322.
- [12] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence”, *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation* (Columbia, MO, 1998), *Contemp. Math.*, **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.
- [13] K. Mahler, “Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms”, *Math. Ann.*, **168** (1967), 200–227.
- [14] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 84 с.; англ. пер.: *Rational approximants for the Euler constant and recurrence relations*, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**:, suppl. 2 (2011), S138–S190.
- [15] А. И. Аптекарев, Н. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials”, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, 1990), *Springer Ser. Comput. Math.*, **19**, Springer-Verlag, New York, 1992, 127–167.
- [16] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131.
- [17] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [18] Н. Stahl, “Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function”, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 2002, № 14, 195–222.
- [19] Г. Лопес Лагомасино, С. Медина Перальта, У. Фидальго Прието, “Аппроксимации Эрмита–Паде для некоторых систем мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **206**:2 (2015), 57–76; англ. пер.: G. López Lagomasino, S. Medina Peralta, U. Fidalgo Prieto, “Hermite–Padé approximation for certain systems of meromorphic functions”, *Sb. Math.*, **206**:2 (2015), 225–241.
- [20] Ch. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Akad. Sci. (Paris)*, **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
- [21] Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. 1: *Арифметика. Алгебра. Анализ*, в 2-х т., 4-е изд., Наука, М., 1987, 432 с.; пер. с нем.: F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, v. 1: *Arithmetik, Algebra, Analysis*, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 1924, xii+321 pp.
- [22] А. И. Аптекарев, “О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1981, № 1, 68–74; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Convergence of rational approximations to a set of exponents”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **36**:1 (1981), 81–86.

- [23] H. Padé, “Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d’introduction à la théorie des fractions continues algébriques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **16** (1899), 395–426.
- [24] А. П. Старовойтов, “Аппроксимации Эрмита–Паде для системы функций Миттаг-Леффлера”, *ПФМТ*, 2013, № 1(14), 81–87.
- [25] А. П. Старовойтов, “О свойствах аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг-Леффлера”, *Докл. НАН Беларуси*, **57**:1 (2013), 5–10.
- [26] А. П. Старовойтов, “Об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг-Леффлера”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 9, 59–68; англ. пер.: A. P. Starovoitov, “The asymptotic form of the Hermite–Padé approximations for a system of Mittag-Leffler functions”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **58**:9 (2014), 49–56.
- [27] A. B. J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Type II Hermite–Padé approximation to the exponential function”, *J. Comput. Appl. Math.*, **207**:2 (2007), 227–244.
- [28] Ch. Hermite, “Sur la généralisation des fractions continues algébriques”, *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2A*, **21** (1893), 289–308.
- [29] K. Mahler, “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus”, I, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1932), 118–136; II, 137–150.
- [30] K. Mahler, “Perfect systems”, *Compositio Math.*, **19** (1968), 95–166.
- [31] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988, 256 с.; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+221 pp.
- [32] P. B. Borwein, “Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function”, *Constr. Approx.*, **2**:4 (1986), 291–302.
- [33] F. Wielonsky, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé approximants to e^z ”, *J. Approx. Theory*, **90**:2 (1997), 283–298.
- [34] А. П. Старовойтов, “Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций”, *ПФМТ*, 2014, № 1(18), 74–80.
- [35] L. N. Trefethen, “The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk”, *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 380–383.
- [36] D. Braess, “On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x . II”, *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 375–379.
- [37] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, 3-е изд., Наука, М., 1989, 478 с.
- [38] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961, 508 с.; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **XX**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960, x+398 pp.
- [39] Г. Поля, Г. Серё, *Задачи и теоремы из анализа*, т. I, 3-е изд., Наука, М., 1978, 392 с.; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. 1, 3. bericht. Aufl., Grundlehren Math. Wiss., **19**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964, xvi+338 pp.; англ. пер.: G. Pólya, G. Szegő, *Problems and theorems in analysis*, v. 1, Springer Study Edition, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976, xix+389 pp.
- [40] A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function: a Riemann–Hilbert approach”, *Constr. Approx.*, **21**:3 (2005), 351–412.
- [41] G. Szegő, “Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, 1924, № 23, 50–64.

- [42] E. B. Saff, R. S. Varga, “On the zeros and poles of Padé approximants to e^z . II”, *Padé and rational approximation. Theory and applications* (Univ. South Florida, Tampa, FL, 1976), Academic Press, New York, 1977, 195–213.
- [43] А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов, “Экстремальные свойства аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций”, *Докл. НАН Беларуси*, **58**:2 (2014), 32–37.

Анастасия Владимировна Астафьева
(Anastasiya V. Astafieva)

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Белоруссия
E-mail: astafieva@gsu.by

Поступила в редакцию
08.01.2015 и 20.03.2016

Александр Павлович Старовойтов
(Alexandr P. Starovoitov)

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Белоруссия
E-mail: svoitov@gsu.by