Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Киселев, О всюду плотной обмотке 2-мерного тора,
Матем. сб., 2016, том 207, номер 4, 113–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 09:36:54

УДК 512.623.3+512.622+517.977.5

Д. Д. Киселев

О всюду плотной обмотке 2-мерного тора

В решении некоторого класса задач оптимального управления важную роль играет многочлен специального вида степени $2(n-1)$ с целыми коэффициентами. Линейная независимость набора из k специальных корней этого многочлена над полем $\mathbb{Q}$ влечет существование решения исходной задачи с оптимальным управлением в виде всюду плотной обмотки k -мерного клиффордова тора, проходимой за конечное время. В работе показано, что для всех натуральных $n > 3$ в качестве k можно выбрать 2.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: оптимальное управление, всюду плотная обмотка, группа Галуа, линейная независимость.

DOI: 10.4213/sm8471

§ 1. Введение

1.1. Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие M^{2n} . Пусть $(2n-1)$ -мерное стратифицированное подмногообразие $S \subset M$ разделяет M на конечное число открытых областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$: $M = \bigcup \overline{\Omega_i}$. Рассмотрим непрерывный гамильтониан $H(q, p): M \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которого $H_i = H|_{\Omega_i}$ на любое множество Ω_i определяет гладкую функцию, C^∞ -продолжимую на окрестность множества $\overline{\Omega_i}$.

Одной из основных целей теории оптимального управления является построение оптимального синтеза, т.е. фазового портрета экстремалей, проходящих через каждую начальную точку x_0 . Принцип максимума Понтрягина сводит эту проблему к изучению гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, причем разрывы достигаются в тех точках $x_0 \in S$, для которых максимум достигается при нескольких различных значениях управления. В таких точках стандартные теоремы существования и единственности не применимы. Вопросы существования обобщенного решения рассматриваются с помощью вспомогательного дифференциального уравнения с многозначной правой частью. В правой части этого уравнения стоит выпуклое замыкание всех предельных точек фазовых скоростей, полученных при стремлении окрестных точек к точке x_0 . Единственность решения, проходящего через x_0 , принципиально не имеет места. Здесь на первый план выходит проблема описания с помощью функций H_i соответствующей интегральной воронки – конуса решений, входящих в точку x_0 или выходящих из этой точки. Порядок особенности определяется числом кратных скобок Пуассона от функций H_i , которые обращаются в нуль в точке x_0 (см. [1]).

Для одномерного управления, или, что то же самое, для поверхности разрыва коразмерности 1 при особенности первого порядка, в типичной ситуации интегральная воронка состоит из трех экстремалей: две из них лежат по разные стороны от поверхности разрыва, а третья проходит по этой поверхности. При особенности второго порядка ситуация общего положения была найдена и исследована в работах И. Купки [2], М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [3]. Экстремали подходят к точке x_0 (и отходят от этой точки) за конечное время со счетным числом пересечений поверхности разрыва (chattering-режим).

Особенности второго порядка для многомерного управления в случае, когда областью изменения управления является сфера, были описаны в работах А. А. Милютина [4], М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [3], М. И. Зеликина, Л. В. Локуциевского и Р. Хильдебранда [1]. При подходе к точке x_0 управление за конечное время совершает счетное число оборотов по некоторой окружности. Соответствующая траектория $x(t)$ попадает в точку x_0 , проходя за конечное время некоторый аналог логарифмической спирали. В ряде случаев возможны комбинации таких решений, лежащих в различных двумерных подпространствах. Феномен заключается в том, что оптимальное управление движется вдоль иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, вложенного в сферу. Оптимальная траектория, отвечающая такому управлению, представляет собой обобщенную логарифмическую спираль, натянутую на иррациональную обмотку. В отличие от особенности типа фокуса в обыкновенных дифференциальных уравнениях, движение по этой спирали занимает конечное время, причем оптимальная траектория за конечное время попадает в начало координат. При этом иррациональность обмотки тора достигается за счет линейной независимости над полем $\mathbb{Q}$ корней многочленов с целыми коэффициентами специального вида (см. [1], [5]).

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \langle x, Cx \rangle dt \rightarrow \min \quad (1.1)$$

на траекториях управляемой системы

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= u, & |u| &\leq 1, & x &\in V, & u &\in U = V, \\ x^{(k)}(0) &= x_k^0, & k &\leq n-1. \end{aligned}$$

Здесь V – конечномерное евклидово пространство достаточно высокой размерности со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а C – некоторый самосопряженный линейный оператор. Функция $x(t)$ считается абсолютно непрерывной вместе со своими $2n-1$ производными. Управление $u(t) \in L_1(0; +\infty)$ – измеримая функция.

В работах [1], [5] было установлено, что в задаче (1.1) существует оптимальное управление, проходящее за конечное время всюду плотную обмотку k -мерного тора при $k \leq [n/2]$, если некоторые k корней (из определенным образом выбранного $[n/2]$ -элементного множества корней A) многочлена $f(x^2)$

степени $2(n-1)$, где

$$xf(x^2) = \operatorname{Im} \prod_{j=1}^{2n} (ix + j),$$

линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, а оператор C выбран подходящим образом (см. [5; теоремы 2, 3]). Там же, в [5; лемма 1], показано, что положительный ответ на вопрос о линейной независимости всех корней из множества A можно получить, установив вложение $A_{n-1} \hookrightarrow \operatorname{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$. При $n < 16$ данное вложение было установлено (см. [5; § 3]).

В настоящей работе мы покажем, что для любого $n > 3$ в качестве k можно выбрать 2. Иными словами, в задаче (1.1) при $n > 3$ можно, подходящим образом выбрав оператор C согласно [5; теорема 3], построить решение, траектория оптимального управления которого за конечное время проходит всюду плотную обмотку 2-мерного тора.

1.2. Обозначения. Через $\sigma_{k,m}$ мы будем обозначать элементарный симметрический многочлен степени k от $\{j \in \mathbb{N} \mid j \leq m\}$; $\mathbb{R}_{>0}$ – множество положительных действительных чисел; $\mathbb{R}_{<0}$ – множество отрицательных действительных чисел; $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ – множество целых неотрицательных чисел.

§ 2. Основной результат

2.1. Фиксируем произвольным образом натуральное число $n > 3$ и рассмотрим многочлен $f_n(x)$, определенный условием

$$xf_n(x^2) = \operatorname{Im} \prod_{j=1}^{2n} (ix + j). \quad (2.1)$$

Обозначим $F_n(x) := f_n(x^2)$. Аргумент¹ множителя $ix + j$ при $x \in \mathbb{R}_{>0}$ принимает все значения из интервала $(0, \pi/2)$ и возрастает с ростом x . Поэтому аргумент произведения $(ix+1) \cdots (ix+2n)$ пробегает все значения из интервала $(0, \pi n)$ и возрастает с ростом x . При $x \in \mathbb{R}_{<0}$ аргумент множителя² принимает все значения из интервала $(-\pi/2, 0)$ и убывает с убыванием x . Поэтому аргумент произведения $(ix+1) \cdots (ix+2n)$ пробегает все значения из интервала $(-\pi n, 0)$ и убывает с убыванием x . Таким образом, многочлен $F_n(x)$ сепарабелен, имеет $n-1$ положительных корней и $n-1$ отрицательных корней. В частности, многочлен $f_n(x)$ имеет $n-1$ различных положительных действительных корней.

Пусть n четно. Тогда положим $A = \{v_k\}_{k=1}^{[n/2]} \subset \mathbb{R}_{>0}$, где v_k – единственный действительный корень уравнения

$$\sum_{s=1}^{2n} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{s} = (2k-1)\pi. \quad (2.2)$$

¹Здесь мы берем значение аргумента как значение соответствующего арктангенса.

²И здесь под аргументом мы понимаем значение арктангенса.

Пусть n нечетно. Тогда положим $A = \{v_k\}_{k=1}^{[n/2]} \subset \mathbb{R}_{>0}$, где v_k – единственный действительный корень уравнения

$$\sum_{s=1}^{2n} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{s} = 2k\pi. \quad (2.3)$$

Согласно [5; теорема 2] множество $B = \{\sqrt{x} \mid x \in A\}$ и есть “критическое множество” корней многочлена $F_n(x)$: линейная независимость некоторых k корней этого множества над полем $\mathbb{Q}$ влечет существование³ решения задачи (1.1), траектории оптимального управления которого проходят за конечное время всюду плотную обмотку k -мерного тора⁴.

Выберем произвольным образом 2 элемента множества B и обозначим их w_1, w_2 . Если w_1 и w_2 линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, то и их квадраты также линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому если мы найдем 2 линейно независимых над $\mathbb{Q}$ элемента множества A , то мы найдем 2 линейно независимых над $\mathbb{Q}$ элемента множества B . Поэтому в дальнейшем будем работать с множеством A .

Продолжая рассуждения, полезно заметить, что многочлен $f_n(x)$ имеет вид

$$f_n(x) = (-1)^{n-1} \sigma_{1,2n} x^{n-1} + (-1)^{n-2} \sigma_{3,2n} x^{n-2} + \dots + \sigma_{2n-1,2n}. \quad (2.4)$$

ЛЕММА 1. *Для любого натурального n имеем $\sigma_{1,2n} \mid \sigma_{2k+1,2n}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таких, что $2k+1 < 2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\sigma_{1,2n} = n(2n+1)$. Также ясно, что $(n, 2n+1) = 1$. Поэтому достаточно показать, что $n \mid \sigma_{2k+1,2n}$, а также что $(2n+1) \mid \sigma_{2k+1,2n}$.

Рассмотрим произведение $(ix+1) \cdots (ix+2n)$. Непосредственная проверка показывает, что мнимая часть данного произведения есть многочлен от x , коэффициенты которого равны соответствующим числам $\sigma_{2k+1,2n}$, причем коэффициентов вида $\sigma_{2k,2n}$ мнимая часть не содержит. Редуцируем произведение $(ix+1) \cdots (ix+2n)$ по модулю $2n+1$. В таком случае мы получим в кольце $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})[i, x]/(i^2+1)$ равенство

$$(ix+1) \cdots (ix+2n) = (ix+1)(ix-1) \cdots (ix+n)(ix-n) = (-x^2-1^2) \cdots (-x^2-n^2),$$

т.е. мнимая часть исчезает. Поэтому $(2n+1) \mid \sigma_{2k+1,2n}$.

Редуцируем произведение $(ix+1) \cdots (ix+2n)$ по модулю n . В таком случае мы получим в кольце $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[i, x]/(i^2+1)$ равенство

$$\begin{aligned} (ix+1) \cdots (ix+2n) &= -x^2(ix+1)(ix-1) \cdots (ix+(n-1))(ix-(n-1)) \\ &= -x^2(-x^2-1^2) \cdots (-x^2-(n-1)^2). \end{aligned}$$

Таким образом, мнимая часть снова исчезает. Итак, $n \mid \sigma_{2k+1,2n}$. Лемма доказана.

³Разумеется, при подходящем выборе оператора C , но такой выбор всегда возможен (см. [5; теорема 3]).

⁴При $t > 0$ проходит половина обмотки; другая половина проходит при $t < 0$, где t – временная переменная.

ЛЕММА 2. Пусть $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – неприводимый над полем $\mathbb{Q}$ многочлен степени $t \geq 2$. Пусть все корни многочлена $f(x)$ вещественны и одного знака. Тогда любые два корня многочлена $f(x)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольным образом два корня многочлена $f(x)$ и обозначим их через v_1, v_2 . Предположим, что имеется линейная зависимость над $\mathbb{Q}$ вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0. \quad (2.5)$$

В силу неприводимости многочлена $f(x)$ над $\mathbb{Q}$ его группа Галуа действует на корнях транзитивно. Поэтому найдется элемент $g \in \text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ такой, что $v_1^g = v_2$. Предположим без ограничения общности, что $\alpha_2 \neq 0$ в (2.5). Тогда $v_2 = \lambda v_1$, где $\lambda = -\alpha_1/\alpha_2$. Поэтому $v_2^g = \lambda v_2$, и более общим образом $v_2^{g^s} = \lambda^s v_2$. Так как элемент g имеет конечный порядок, то для некоторого натурального s_0 мы получаем $\lambda^{s_0} = 1$. Так как $\lambda \in \mathbb{Q}$, то $\lambda \in \{-1, 1\}$. Во всех случаях получаем противоречие: при $\lambda = -1$ противоречие с условиями леммы, при $\lambda = 1$ противоречие с неприводимостью многочлена $f(x)$ над $\mathbb{Q}$, ибо неприводимость над полем нулевой характеристики влечет сепарабельность. Лемма доказана.

Теперь мы можем исследовать до конца случай четного n .

ТЕОРЕМА 1. Пусть n – четное натуральное число, большее 3, а многочлен $f_n(x)$ определен согласно (2.4). Пусть $A = \{v_k\}_{k=1}^{n/2}$ – множество корней многочлена $f_n(x)$, удовлетворяющих (2.2). Тогда некоторые два элемента множества A линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, многочлен $f_n(x)$ имеет степень $n - 1$, является сепарабельным, причем все его корни вещественны и положительны. Разложим многочлен $f_n(x)$ на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$. Если нашлась хотя бы одна неприводимая компонента, имеющая не менее двух корней из множества A , то результат следует из леммы 2. Поэтому без ограничения общности можно считать, что каждая неприводимая компонента имеет не более одного корня из множества A . Согласно лемме 1, а также (2.4) можно заключить, что если многочлен $f_n(x)$ имеет рациональные корни, то они necessarily целые. Заметим, что если хотя бы один элемент множества A является целым числом, то либо найдутся два искомым линейно независимых над $\mathbb{Q}$ элемента множества A , либо справедливо включение $A \subset \mathbb{N}$. Но тогда и корень $v_1 \in \mathbb{N}$. Однако корень v_1 должен являться решением уравнения (2.2) при $k = 1$. Если $n < 16$, то это невозможно согласно результатам §3 работы [5]. Пусть теперь $n \geq 16$. Тогда справедлива следующая оценка (вычисленная с помощью системы компьютерной алгебры Maple V):

$$\arctg \frac{\sqrt{1}}{1} + \arctg \frac{\sqrt{1}}{2} + \dots + \arctg \frac{\sqrt{1}}{2 \cdot 16} > \pi. \quad (2.6)$$

Оценка (2.6) вместе с равенством (2.2) при $k = 1$ показывает, что $v_1 \notin \mathbb{N}$.

Итак, можно предполагать без ограничения общности, что каждая неприводимая компонента многочлена $f_n(x)$, имеющая корень из A , не является многочленом степени 1. Без ограничения общности число таких компонент равно $[n/2]$. Но так как n четно, то мы получим противоречие: степень многочлена $f_n(x)$ равна $n - 1$, с другой стороны она не меньше $2[n/2] = n$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно обосновать оценку типа (2.6) для больших n без применения компьютера.

В самом деле, функция $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ выпукла вверх на отрезке $[0, 1]$, поэтому для всех $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\operatorname{arctg} x \geq \pi x/4$. Далее,

$$\sum_{k=1}^{2n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k} \geq \frac{\pi}{4} \int_1^{2n+1} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \ln(2n+1).$$

При $2n+1 > e^4$ требуемое неравенство выполняется.

2.2. Рассмотрим случай нечетного $n > 3$. Следующая лемма представляет собой вариацию “постулата Бертрана”.

ЛЕММА 3. Пусть n – нечетное натуральное число такое, что $n \geq 17$. Тогда интервал $((2n+1)/3, n)$ содержит хотя бы одно простое число p , причем $p \nmid \sigma_{1,2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $n > 32$. Пусть r – натуральное число, удовлетворяющее свойствам

$$\frac{n+r}{2} > \frac{2n+1}{3}, \quad n > 8 + \frac{5r}{3}, \quad n+r > 48. \quad (2.7)$$

Такое число найдется, ибо при $n > 32$ имеем⁵

$$\frac{n+2}{3} + 1 < \frac{3n-8}{5}, \quad n+r > 8 + \frac{8r}{3} > 48.$$

Но тогда согласно [6; следствие 3.2] интервал $((n+r)/2, n-2)$ содержит хотя бы одно простое число p . В силу (2.7) интервал $((2n+1)/3, n)$ также содержит p .

Пусть $n \in (16, 32) \cap \mathbb{N}$, причем n нечетно. Тогда интервал $((2n+1)/3, n)$ содержит простое число p , что проверяется непосредственно.

Покажем, что если $p \in ((2n+1)/3, n)$ – простое число, то $p \nmid \sigma_{1,2n}$. В самом деле, если $p \mid n$, то $n = pu$ для некоторого натурального $u \geq 2$. Но тогда

$$\frac{2pu}{3} < p < pu,$$

откуда $u < 3/2$, что противоречит неравенству $u \geq 2$. Если же $p \mid (2n+1)$, то $2n+1 = pv$ для некоторого натурального $v \geq 3$. В таком случае имеем

$$\frac{2nv}{3} < pv < nv \implies \begin{cases} 2n+1 < nv, \\ 2n+1 > \frac{2nv}{3}. \end{cases}$$

Но тогда $v = 3$, т.е. $p = (2n+1)/3$, что невозможно. Лемма доказана.

⁵Мы берем такое r , чтобы было выполнено неравенство $8 + 8r/3 > 48$.

Напомним, что $A = \{v_k\}_{k=1}^{[n/2]}$, где v_k удовлетворяют (2.3).

ЛЕММА 4. Пусть $n > 3$ – нечетное натуральное число. Пусть далее $A \not\subset \mathbb{N}$. Тогда некоторые два элемента множества A линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [5; теорема 8] можно считать $n \geq 17$. Предположим, что каждая неприводимая над $\mathbb{Q}$ компонента многочлена $f_n(x)$ имеет не более одного корня из множества A (в противном случае просто применим лемму 2, по которой найдутся два линейно независимых над $\mathbb{Q}$ элемента множества A).

По условию $A \not\subset \mathbb{N}$. В таком случае без ограничения общности ни один элемент множества A не является натуральным числом (иначе найдутся два элемента множества A : натуральное число и число, не являющееся рациональным⁶; они будут линейно независимы над $\mathbb{Q}$). Это означает, что каждая неприводимая компонента многочлена $f_n(x)$, имеющая корень из множества A , не является многочленом степени 1. Так как $|A| = (n-1)/2$, а степень многочлена $f_n(x)$ равна $n-1$, то многочлен $f_n(x)$ необходимо разлагается над $\mathbb{Q}$ на неприводимые квадратичные множители в количестве $(n-1)/2$. При этом каждый квадратичный множитель данного разложения имеет ровно один корень из множества A . Но тогда если никакие два элемента множества A не являются линейно независимыми над $\mathbb{Q}$, то $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_n) \cong Z_2$. Действительно, так как при указанных допущениях группа Галуа многочлена $f_n(x)$ над $\mathbb{Q}$ является элементарной абелевой 2-группой, то при $|\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_n)| > 2$ непременно найдутся два неприводимых квадратичных множителя $u(x)$ и $v(x)$ такие, что их поля разложения линейно разделены над $\mathbb{Q}$. Однако тогда $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(uv) \cong V_4$. Поэтому если $v_j \in A$ – корень $u(x)$, а $v_l \in A$ – корень $v(x)$, то найдется элемент $g \in \text{Gal}_{\mathbb{Q}}(uv)$, действующий неподвижно на v_l и нетривиально действующий на v_j . Но это означает, что v_j и v_l линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Итак, если $A \not\subset \mathbb{N}$, то либо найдутся два линейно независимых над $\mathbb{Q}$ элемента множества A , либо $|\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_n)| = 2$. Пусть

$$\tilde{f}_n(x) = (-1)^{n-1} \sigma_{1,2n}^{-1} f_n(x).$$

Тогда в силу леммы 1 $\tilde{f}_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причем старший коэффициент равен единице. Так как по предположению $|\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f_n)| = 2$, то при допущении линейной зависимости над $\mathbb{Q}$ любых двух элементов множества A справедливо следующее разложение на неприводимые квадратичные множители над $\mathbb{Q}$:

$$\tilde{f}_n(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + \alpha_1 ax + \alpha_1^2 b) \cdots (x^2 + \alpha_{(n-3)/2} ax + \alpha_{(n-3)/2}^2 b), \quad (2.8)$$

где $a, b \in \mathbb{Z}$, причем $b > 0$, $a < 0$ (так как все корни многочлена $\tilde{f}_n$ вещественны и положительны); числа α_j являются рациональными и положительными, причем $\alpha_j a \in \mathbb{Z}$, а также $\alpha_j^2 b \in \mathbb{Z}$ для всех j .

⁶Напомним, что согласно лемме 1 $A \cap \mathbb{Q} = A \cap \mathbb{N}$.

По лемме 3 найдется простое число p из интервала $((2n+1)/3, n)$ такое, что $p \nmid \sigma_{1,2n}$. Покажем, что $p \mid \sigma_{2n-1,2n}$, но $p^2 \nmid \sigma_{2n-1,2n}$. В самом деле, $2p < 2n$, а $3p > 2n$. Поэтому $p \mid \sigma_{2n-1,2n}$ ($\sigma_{2n-1,2n}$ представляет собой сумму произведений натуральных чисел, не превосходящих $2n$, причем в каждом таком произведении вычеркивается ровно одно натуральное число, меньшее $2n+1$). Далее $p^2 \nmid \sigma_{2n-1,2n}$. Действительно, все слагаемые в $\sigma_{2n-1,2n}$ делятся на p^2 , кроме двух: одно получается из набора $[1, 2n] \cap \mathbb{N}$ вычеркиванием p , а другое вычеркиванием $2p$. После сокращения на p в этих двух слагаемых их сумма не будет делиться на p , так как полученная сумма есть утроенное произведение натуральных чисел из набора $[1, 2n] \cap (\mathbb{N} \setminus \{p, 2p\})$.

Поскольку $p \nmid \sigma_{1,2n}$, то $p \mid \tilde{f}_n(0)$, но $p^2 \nmid \tilde{f}_n(0)$. Таким образом,

$$\nu(\tilde{f}_n(0)) = 1.$$

Но тогда из разложения (2.8) мы получаем следующее равенство:

$$1 = \nu(\tilde{f}_n(0)) = \nu(b) + \sum_{i=1}^{(n-3)/2} (\nu(b) + 2\nu(\alpha_i)), \quad (2.9)$$

где все слагаемые суммы справа суть целые неотрицательные числа⁷. Если $\nu(b) = 1$, то значение суммы справа не меньше $1 + (n-3)/2$, что в силу (2.9) возможно лишь при $n \leq 3$. Однако по условию $n > 3$. Противоречие. Если же $\nu(b) = 0$, то равенство (2.9) выполняется лишь тогда, когда для некоторого $i_0 \in [1, (n-3)/2] \cap \mathbb{N}$ верно $2\nu(\alpha_{i_0}) = 1$, а для всех индексов $i \neq i_0$ соответственно $2\nu(\alpha_i) = 0$. Но это означает справедливость равенства $\nu(\alpha_{i_0}) = 1/2$, что невозможно в силу рациональности числа α_{i_0} . Снова получаем противоречие. Лемма доказана.

Разберем случай $A \subset \mathbb{N}$. В этом случае корень $v_1 \in A$ уравнения (2.3) при $k = 1$ также является натуральным числом. Справедлива следующая оценка (вычисленная с помощью системы компьютерной алгебры Maple V):

$$\arctg \frac{\sqrt{1}}{1} + \arctg \frac{\sqrt{1}}{2} + \dots + \arctg \frac{\sqrt{1}}{2 \cdot 199} > 2\pi. \quad (2.10)$$

Оценка (2.10) вместе с равенством (2.3) при $k = 1$ показывает, что $v_1 \notin \mathbb{N}$ при всех нечетных $n \geq 199$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть n – нечетное натуральное число, большее 3, а многочлен $f_n(x)$ определен согласно (2.4). Пусть $A = \{v_k\}_{k=1}^{n/2}$ – множество корней многочлена $f_n(x)$, удовлетворяющих (2.3). Тогда некоторые два элемента множества A линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4, оценки (2.10), а также теоремы 8 работы [5] достаточно доказать, что для всех нечетных $n \in [17, 197] \cap \mathbb{N}$ уравнение (2.3) при $k = 1$ неразрешимо в натуральных числах. Дальнейшие оценки вычислены с помощью Maple V.

⁷То есть $\nu(b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а также $2\nu(\alpha_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ для всех i .

Заметим, что

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4}}{1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 17} > 2\pi. \quad (2.11)$$

Поэтому при нечетных $n \geq 17$ если корень v_1 уравнения (2.10) при $k = 1$ является натуральным числом, то $v_1 \in \{1, 2, 3\}$. При этом если $n \geq 37$, то $v_1 = 1$, ибо справедлива оценка

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 37} > 2\pi. \quad (2.12)$$

С другой стороны, решение уравнения

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot m} = 2\pi \quad (2.13)$$

больше 1 при $m = 197$. Поскольку с ростом m корень v_1 уравнения (2.13) уменьшается, то при $n \in [17, 197] \cap \mathbb{N}$ заведомо $v_1 \neq 1$. Итак, из (2.11) и (2.12) вытекает, что $v_1 \in \{2, 3\}$, причем $n < 37$. Решение уравнения (2.13) при $m = 35$ больше 2, при $m = 19$ меньше 3, а при $m = 17$ больше 3. Это означает (так как с ростом m корень уравнения (2.13) уменьшается), что уравнение (2.13) не имеет целочисленных, а значит (в силу леммы 1), и рациональных решений для всех нечетных $n > 3$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В задаче оптимального управления (1.1) при всех натуральных $n > 3$ можно подобрать оператор C так, чтобы (1.1) имела оптимальное решение, управление которого за конечное время проходит всюду плотную обмотку 2-мерного клиффордова тора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно воспользоваться теоремами 1 и 2 настоящей работы, а также результатом [5; теорема 3].

Список литературы

- [1] М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, Р. Хильдебранд, “Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением”, *Математическая теория управления и дифференциальные уравнения*, Сб. статей, Тр. МИАН, **277**, МАИК, М., 2012, 74–90; англ. пер.: M. I. Zelikin, L. V. Lokutsievskiy, R. Hildebrand, “Geometry of neighborhoods of singular trajectories in problems with multidimensional control”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **277** (2012), 67–83.
- [2] I. Kupka, “Generic properties of extremals in optimal control problems”, *Differential geometric control theory* (Houghton, Mich., 1982), Progr. Math., **27**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, 310–315.
- [3] M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994, xvi+242 pp.

- [4] А. А. Милютин, А. Е. Илотович, Н. П. Осмоловский, С. В. Чуканов, *Оптимальное управление в линейных системах*, Наука, М., 1993, 269 с.
- [5] М. И. Зеликин, Д. Д. Киселев, Л. В. Локуциевский, “Оптимальное управление и теория Галуа”, *Матем. сб.*, **204**:11 (2013), 83–98; англ. пер.: M. I. Zelikin, D. D. Kiselev, L. V. Lokutsievskii, “Optimal control and Galois theory”, *Sb. Math.*, **204**:11 (2013), 1624–1638.
- [6] F. Hajir, “Algebraic properties of a family of generalized Laguerre polynomials”, *Canad. J. Math.*, **61**:3 (2009), 583–603.

Денис Дмитриевич Киселев
(Denis D. Kiselev)

Всероссийская академия внешней торговли,
г. Москва
E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступила в редакцию
09.01.2015 и 09.10.2015