Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев, О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством линейной нильпотентности, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 11, 113–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:40:29

УДК 512.552.4

А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев

О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности

Изучаются центральные многочлены относительно свободной лиево нильпотентной степени n алгебры $F^{(n)}$. Доказана теорема о произведении, обобщающая известные результаты В. Н. Латышева и И. Б. Воличенко. Построены обобщенные многочлены Холла, с помощью которых доказана нетривиальность ядерного центра алгебры $F^{(n)}$ для любого $n \geq 5$. Для $n = 5, 6$ получен ряд специальных результатов.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: тождество лиевой нильпотентности, центр алгебры, ядерный многочлен, собственный многочлен, расширенная алгебра Грассмана.

DOI: 10.4213/sm8474

Введение

Пусть $F = \text{Ass}[X]$ – свободная ассоциативная k -алгебра над счетным множеством $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ свободных порождающих. Как обычно, через $[x_1, \dots, x_n]$ обозначается коммутатор длины $n \geq 2$, т.е. $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ и по индукции $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$ при $n \geq 3$. Всюду ниже $T^{(n)}$ обозначает Т-идеал, порожденный коммутатором $[x_1, \dots, x_n]$. Пусть $F^{(n)} = F/T^{(n)}$ – относительно свободная алгебра с тождеством $[x_1, \dots, x_n] = 0$, которое называется *тождеством лиевой нильпотентности степени n* и обозначается $\text{LN}(n)$.

В 60-е годы XX века В. Н. Латышев (см. [1], [2]) первым начал изучать алгебры $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$. В частности, им был построен аддитивный базис алгебры $F^{(3)}$ и доказана шпехтовость многообразия ассоциативных алгебр с тождеством $\text{LN}(4)$ над полем характеристики 0. В 1978 г. И. Б. Воличенко (см. [3]) построил аддитивный базис алгебры $F^{(4)}$ над полем характеристики 0.

К настоящему времени изучению алгебр $F^{(n)}$ с разных точек зрения посвящено значительное количество работ (см. [1]–[15]). Особую роль при этом играет алгебра $F^{(3)}$. С одной стороны, если $\text{char } k = 0$, то алгебра $F^{(3)}$ изоморфна свободной алгебре многообразия $\text{var } G$, порожденного алгеброй Грассмана G , которая существенно использовалась в работах А. Р. Кемера [16], [17] при положительном решении проблемы Шпехта. С другой стороны, если $\text{char } k = p > 0$, то алгебра $F^{(3)}$ является первым и пока единственным источником конструкций бесконечно базируемых Т-пространств и Т-идеалов (см. [5]–[7]).

В работах [12], [13] описаны центры алгебр $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$ над полем характеристики $p > 3$. Там же сформулирована задача описания центров алгебр $F^{(n)}$ при $n \geq 5$.

Кроме того, представляют интерес и неассоциативные алгебры с тождеством $\text{LN}(n)$. Альтернативные алгебры с тождеством $\text{LN}(5)$ изучал А. Н. Ваулин

(см. [18], [19]). В частности, им были найдены тождества алгебры Грассмана в указанном многообразии. Правоальтернативные алгебры с тождеством $\text{LN}(n)$, $n \leq 6$, изучались в [20]–[22]. Наконец, недавно интересные результаты о многообразиях правоальтернативных метабелевых алгебр с тождеством $\text{LN}(n)$ получил А. М. Кузьмин (см. [23]).

Настоящая работа посвящена изучению алгебр $F^{(n)}$ при $n \geq 5$. Она состоит из шести параграфов. Всюду, если не оговорено противное, $\text{char } k \neq 2, 3$.

В § 1 доказывается теорема 1: $T^{(m)}T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-1)}$, если хотя бы одно из чисел m или n нечетно. Эта теорема является естественным продолжением известных результатов В. Н. Латышева [2] и И. Б. Воличенко [3].

В § 2 вводится понятие ядра $Z^*(F^{(n)})$ алгебры $F^{(n)}$; это наибольший идеал алгебры $F^{(n)}$, содержащийся в центре $Z(F^{(n)})$. Отметим, что в 1970 г. К. А. Жевлаков сформулировал вопрос о существовании ядерных элементов в свободной альтернативной алгебре $\text{Alt}[X]$. Известна замечательная теорема Филиппова о существовании ненулевых ядерных элементов в k -алгебре $\text{Alt}[x_1, \dots, x_n]$ ранга $n \geq 5$ (см. [24]).

В § 2 для многочленов Холла $h := [[x, y]^2, z]$ и $h' := [[x, y]^2, x]$ доказаны соотношения

$$h \in Z(F^{(5)}) \setminus Z^*(F^{(5)}), \quad h' \in Z^*(F^{(5)}),$$

при этом всюду ниже для простоты обозначений мы отождествляем многочлены из алгебры F с их образами в алгебрах $F^{(n)}$.

Кроме того, доказана теорема 2: $Z^*(F^{(n)}) \neq 0$ для любого $n \geq 4$. Важную роль при изучении алгебры $F^{(2n+1)}$ играет расширенная алгебра Грассмана $E^{(n)}$, построенная в [11] и называемая там модельной алгеброй многообразия $\text{var } F^{(2n+1)}$, так как на ней выполнено тождество $\text{LN}(2n+1)$. Заметим, что всякий ядерный элемент алгебры $F^{(2n+1)}$ является тождеством алгебры $E^{(n)}$; отсюда вытекает отрицательный ответ на вопрос, сформулированный в [11], а именно, доказано, что алгебра $E^{(n)}$ при $n \geq 2$ обладает тождествами, не вытекающими из $\text{LN}(2n+1)$.

В § 3 изучаются центральные и собственные многочлены от двух переменных алгебр $F^{(5)}$ и $F^{(6)}$ на поле k характеристики 0. Доказано, что всякий многочлен $f(a, b)$ от двух переменных удовлетворяет условиям:

- если $f(a, b) \in Z(F^{(5)})$, то $f(a, b) \in T^{(4)}$;
- если $f(a, b) \in Z(F^{(6)})$, то $f(a, b) \in Z^*(F^{(6)})$.

Легко понять, что $h' \in V^{(4)}$. В § 4 доказано, что $h \notin V^{(4)}$, где $V^{(4)}$ – Т-пространство, порожденное коммутатором степени 4.

В § 5 показано, что алгебра $E^{(2)}$ не имеет тождеств степени ≤ 4 , следовательно, слабый многочлен Холла h' является ядерным элементом алгебры $F^{(5)}$ наименьшей возможной степени.

В § 6 формулируются некоторые нерешенные задачи.

§ 1. Произведения Т-идеалов $T^{(m)}T^{(n)}$

В 1965 г. В. Н. Латышев (см. [2]) доказал, что для любых натуральных $m, n \geq 2$ верно включение $T^{(m)}T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-2)}$. Позже И. Б. Воличенко (см. [3]) заметил, что для $n = 3$ имеет место более сильное соотношение

$T^{(m)}T^{(3)} \subseteq T^{(m+2)}$. Тем самым, возник вопрос: для каких чисел m, n верно $T^{(m)}T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-1)}$?

В настоящей работе будет дан исчерпывающий ответ на этот вопрос.

1.1. Вспомогательные леммы. Всюду ниже $V^{(n)}$ обозначает Т-пространство, порожденное коммутатором $[x_1, \dots, x_n]$. Заметим, что $V^{(2)} = [F, F]$, $V^{(n)} = [V^{(n-1)}, F]$ и $T^{(2)} = F'$ – коммутант алгебры F , $T^{(n)} = V^{(n)} \circ F$, где $x \circ y = xy + yx$ – йорданово произведение элементов x, y .

Всюду в этом параграфе считаем, что $v_i \in V^{(i)}$, $x, y, z, t, a, b \in F$.

ЛЕММА 1. $[V^{(m)}, x][V^{(n-1-m)}, x] \subseteq T^{(n)}$ для любого $x \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a = v_m$, $b = v_{n-1-m}$, то

$$[a, x] \circ [x, b] = [[a, x] \circ x, b] - [a, x, b] \circ x = [a, x^2, b] - [a, x, b] \circ x \in T^{(n)},$$

поскольку $[V^{(m+1)}, V^{(n-m-1)}] \subseteq V^{(n)}$. Отсюда, очевидно, вытекает требуемое.

Обозначим, как обычно, через $D_a: x \rightarrow [x, a]$ внутреннее дифференцирование алгебры F , определенное элементом a .

ЛЕММА 2. Верно включение $T^{(i)}D_xD_y \subseteq T^{(i+2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя правило Лейбница и лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} (v_i a)D_xD_y &= (v_i D_xD_y)a + v_i(aD_xD_y) + (v_i D_x)(aD_y) + (v_i D_y)(aD_x) \\ &\in V^{(i+2)}F + V^{(i)}V^{(3)} + T^{(i+2)} \subseteq T^{(i+2)}. \end{aligned}$$

Доказательство следующей леммы приведено для полноты изложения.

ЛЕММА 3 (см. [3]). $T^{(n-2)}T^{(3)} + T^{(3)}T^{(n-2)} \subseteq T^{(n)}$, если $n \geq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим рассуждения в виде ряда шагов, действуя в алгебре $F^{(n)}$.

1°. $[v_{n-3}, x] \circ [x, y, z] = 0$. Полагая $v_{n-2} = v_{n-3}D_x$, в силу леммы 1 имеем

$$0 = [v_{n-3}, x^2]D_yD_z = (v_{n-2} \circ x)D_yD_z = v_{n-2} \circ (xD_yD_z) = [v_{n-3}, x] \circ [x, y, z].$$

2°. Элемент $f = [v_{n-3}, x] \circ [y, z, t]$ кососимметричен по x, y, z, t .

Кососимметричность f по x, y, z вытекает из п. 1°, а кососимметричность по x, t следует из леммы 1.

3°. $V^{(n-2)}V^{(3)} = 0$. Сначала заметим, что в силу п. 2° $v_{n-2} \circ [x, y, y] = 0$. Поскольку в силу тождества Якоби $3[a, b, c]$ является линейной комбинацией элементов вида $[x, y, y]$, то выполнено равенство $V^{(n-2)} \circ V^{(3)} = 0$. Осталось заметить, что $[V^{(n-2)}, V^{(3)}] = 0$. Из п. 3° вытекает требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 1. Верно включение $T^{(3)}T^{(2)} + [T^{(3)}, F] \subseteq T^{(4)}$.

1.2. Теорема о произведениях $T^{(m)}T^{(n)}$.

ТЕОРЕМА 1. Если одно из чисел $m, n \geq 2$ нечетно, то верно включение

$$T^{(m)}T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что m нечетно, и проведем индукцию по m . Основание индукции при $m = 3$ верно в силу леммы 3. Сделав предположение индукции $T^{(m)}T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-1)}$, в силу лемм 1 и 2 имеем по модулю $T^{(m+n+1)}$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (v_m v_n) D_y D_z \\ &= (v_m D_y D_z) v_n + v_m (v_n D_y D_z) + (v_m D_y)(v_n D_z) + (v_m D_z)(v_n D_y) \\ &\equiv (v_m D_y D_z) v_n, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Позже мы покажем (см. лемму 6), что для четных $m, n \geq 2$ верно

$$T^{(m)}T^{(n)} \not\subseteq T^{(m+n-1)}.$$

§ 2. Алгебра $E^{(m)}$ и ядро алгебры $F^{(2m+1)}$

2.1. Расширенная алгебра Грассмана $E^{(m)}$. Напомним конструкцию алгебр $E^{(m)}$, введенную в [11]. Пусть E – ассоциативная алгебра с единицей 1 над полем k , заданная множеством порождающих e_m ($m \in \mathbb{N}$), θ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq j$) и определяющими соотношениями

$$e_i e_j + e_j e_i = \theta_{ij}, \quad [\theta_{ij}, e_m] = 0.$$

Пусть Θ – идеал алгебры E , порожденный элементами θ_{ij} . Расширенной алгеброй Грассмана кратности m назовем факторалгебру $E^{(m)} = E/\Theta^m$; в [11] доказано, что алгебра $E^{(m)}$ удовлетворяет тождеству $\text{LN}(2m+1)$.

Заметим, что $E^{(1)} = G$ – обычная алгебра Грассмана.

Покажем, что алгебра E обладает аддитивным базисом из элементов

$$v(\dots, \theta_{ij}, \dots) e_{i_1} \cdots e_{i_n},$$

где $v(\dots, \theta_{ij}, \dots)$ – коммутативно-ассоциативные одночлены от указанных переменных и $1 \leq i_1 < \dots < i_n$.

Пусть $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ – базис пространства V , на котором определена симметрическая билинейная форма $q(e_i, e_j) = \theta_{ij} \cdot 1$, если $i \leq j$. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\text{Cl}(V, q)$ пространства V над полем рациональных функций $k(\theta_{ij} \mid 1 \leq i \leq j)$ от указанных переменных (см. [25]). Обозначим через V^* подалгебру над полем k в $\text{Cl}(V, q)$, порожденную множеством V . Если ξ – гомоморфизм $E \rightarrow V^*$, продолжающий отображение $e_i \rightarrow b_i$, то элементы $(v(\dots, \theta_{ij}, \dots) e_{i_1} \cdots e_{i_n})\xi$ линейно независимы над полем k .

2.2. Ядерные элементы и тождества алгебр $E^{(m)}$. Назовем множество

$$Z^*(F^{(n)}) = \{z \in Z(F^{(n)}) \mid (\forall x \in F^{(n)}) \quad zx \in Z(F^{(n)})\}$$

ядром алгебры $F^{(n)}$. Легко понять, что ядро совпадает с наибольшим идеалом алгебры $F^{(n)}$, содержащимся в ее центре. Элементы ядра $Z^*(F^{(n)})$ назовем *ядерными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякий ядерный элемент алгебры $F^{(2m+1)}$ является тождеством алгебры $E^{(m)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $E^{(m)}$ имеет нулевое ядро $Z^*(E^{(m)})$. В самом деле, если $0 \neq f \in Z^*(E^{(m)})$, то в алгебре $E^{(m)}$ ненулевым является элемент $[f \cdot e_N, e_{N+1}]$ для достаточно большого числа N , что противоречит ядерности элемента f .

2.3. Многочлены Холла. Рассмотрим следующие многочлены:

$$h(a, b, c) := [[a, b]^2, c] \text{ (многочлен Холла);}$$

$$h'(a, b) := [[a, b]^2, b] \text{ (слабый многочлен Холла).}$$

ЛЕММА 4. *Справедливы соотношения:*

$$\text{а) } h(a, b, c) \in Z(F^{(5)}) \setminus Z^*(F^{(5)});$$

$$\text{б) } 0 \neq h'(a, b) \in Z^*(F^{(5)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку $[a, b]^2 = 0$ в алгебре $F^{(3)}$, то $[a, b]^2 \in T^{(3)}$. Тогда в силу леммы 2 имеем

$$[a, b]^2 D_z D_t \in T^{(3)} D_z D_t \subseteq T^{(5)}.$$

Тем самым, доказана центральность многочлена Холла.

Докажем теперь, что многочлен Холла отличен от нуля в алгебре $E^{(2)}$. Про-ведем вычисления в алгебре E по модулю Θ^2 :

$$f = [e_1, e_2] \circ [e_1, e_3 e_4] = (2e_1 e_2 - \theta_{12}) \circ (e_1 e_3 e_4 - e_3 e_4 e_1).$$

Поскольку

$$e_3 e_4 e_1 = e_3(-e_1 e_4 + \theta_{14}) = -e_3 e_1 e_4 + \theta_{14} e_3 = e_1 e_3 e_4 - \theta_{13} e_4 + \theta_{14} e_3,$$

то

$$f = [e_1, e_2] \circ [e_1, e_3 e_4] = (2e_1 e_2 - \theta_{12}) \circ (\theta_{13} e_4 - \theta_{14} e_3) = 2(e_1 e_2) \circ (\theta_{13} e_4 - \theta_{14} e_3).$$

Далее, учитывая равенство

$$e_4 e_1 e_2 = -e_1 e_4 e_2 + \theta_{14} e_2 = e_1 e_2 e_4 - \theta_{24} e_1 + \theta_{14} e_2,$$

получаем

$$(e_1 e_2) \circ e_4 = e_1 e_2 e_4 + e_4 e_1 e_2 = 2e_1 e_2 e_4 - \theta_{24} e_1 + \theta_{14} e_2.$$

Аналогично, $(e_1 e_2) \circ e_3 = 2e_1 e_2 e_3 - \theta_{23} e_1 + \theta_{13} e_2$. Следовательно,

$$f = 2(e_1 e_2) \circ (\theta_{13} e_4 - \theta_{14} e_3) = 2e_1 e_2 e_4 \theta_{13} - 2e_1 e_2 e_3 \theta_{14},$$

$$[f, e_5] = 2[e_1 e_2 e_4, e_5] \theta_{13} - 2[e_1 e_2 e_3, e_5] \theta_{14} = 4e_1 e_2 e_4 e_5 \theta_{13} - 4e_1 e_2 e_3 e_5 \theta_{14}.$$

Отсюда, разумеется, вытекает, что многочлен Холла не аннулируется никакой степенью коммутанта алгебры $E^{(2)}$, в частности $h \notin Z^*(E^{(2)})$.

б) Положим $(x, y, z)^+ := (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$. Хорошо известно и легко проверяется, что

$$(x, y, z)^+ = [y, [x, z]]. \quad (2.1)$$

Представим дальнейшие рассуждения в виде последовательности шагов.

1°. Поскольку $[V^{(2)}, V^{(2)}, F] = [V^{(2)}, F, V^{(2)}] \subseteq T^{(5)}$, то всякий йорданов ассоциатор $(u, v, x)^+$, $(u, x, v)^+$, $(x, u, v)^+$, содержащий элементы $u, v \in V^{(2)}$, $x \in F$, равен нулю в силу равенства (2.1).

2°. Пусть, как и прежде, $w = [a, b]$. Тогда

$$f := [w^2, a] \circ [x, y] = [w, a] \circ w \circ [x, y] = -w \circ [b, a, a] \circ [x, y].$$

3°. $[x^2, a, a] = [x, a, a] \circ x + 2[x, a]^2$.

4°. $w \circ [x, a, a] \circ [x, y] = 0$.

В самом деле, применяя указанное в п. 3° тождество, в силу лемм 1 и 3 имеем

$$\begin{aligned} w \circ [x, a, a] \circ [x, y] &= w \circ \{ [x \circ [x, y], a, a] - x \circ [[x, y], a, a] - 2[x, a] \circ [x, y, a] \} \\ &= w \circ [[x^2, y], a, a] - w \circ [[x, y], a, a] \circ x - 2(w \circ [x, a]) \circ [x, y, a] \\ &\in ([a, b] \circ [V^{(3)}, a]) \circ F + T^{(3)}T^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

5°. $f = -w \circ [b, a, a] \circ [x, y] = w \circ [x, a, a] \circ [b, y] \in T^{(3)}T^{(3)} = 0$ по лемме 3.

6°. $[[a, b]^2, a] \neq 0$ в $F^{(5)}$. Действительно, элемент $h'(a, b)$ имеет степень 5 и не содержится в $V^{(5)}$, поскольку в универсальной обертывающей для свободной алгебры Ли $\text{Lie}[a, b]$ элемент $[a, b][a, b, a]$ и коммутаторы степени 5 линейно независимы по теореме Пуанкаре–Бирхгофа–Витта (теореме ПБВ); см. [26].

2.4. Обобщенные многочлены Холла. Пусть $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ – набор различных порождающих, отличных от a, b, c . Тогда обобщенными многочленами Холла степени $2n + 5$ назовем многочлены

$$H_n = [h, y_1, z_1, \dots, y_n, z_n], \quad H'_n = [h', y_1, z_1, \dots, y_n, z_n],$$

при этом многочлены Холла h и h' совпадают с H_0 и H'_0 соответственно.

Аналогично лемме 4 доказывается

ЛЕММА 5. Для любого $n \geq 0$ справедливы соотношения

$$0 \neq H_n \in Z(F^{(2n+5)}) \cap T^{(2n+4)}, \quad 0 \neq H'_n \in Z^*(F^{(2n+5)}).$$

2.5. Ядро алгебры $F^{(n)}$ ($n \geq 4$). Из результатов работ [1], [3] вытекает, что если $\text{char } k = 0$, то

$$\begin{aligned} Z(F^{(3)}) &= [F^{(3)}, F^{(3)}], & Z^*(F^{(3)}) &= 0, \\ Z(F^{(4)}) &= T^{(3)} + [F^{(4)}, F^{(4)}]^2, & Z^*(F^{(4)}) &= T^{(3)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. $aD_b^{2n-1} \cdot [x_1, y_1] \cdots [x_N, y_N] \notin T^{(2n+1)}$. Кроме того,

$$T^{(2m)}T^{(2n)} \not\subset T^{(2n+2m-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно понять, что $aD_b^{2n-1} \notin \Theta^n$ в алгебре E .

Положим $a = e_1$, $b = e_2$, $\theta = \theta_{12}$, $\eta = \theta_{22}$. Докажем по индукции равенство

$$aD_b^{2m} = 2^m \eta^{m-1} (\eta a - \theta b). \quad (2.2)$$

Проверим сначала основание индукции при $m = 1$:

$$aD_b^2 = -[b, [a, b]] = -(a, b, b)^+ = -2(\theta b - \eta a) = 2(\eta a - \theta b).$$

Сделав предположение индукции, имеем

$$aD_b^{2(m+1)} = 2^m[\eta^{m-1}(\eta a - \theta b), b, b] = 2^m\eta^m[a, b, b] = 2^{m+1}\eta^m(\eta a - \theta b),$$

что и доказывает индуктивный переход.

Наконец, используя равенство (2.2), получаем

$$\begin{aligned} aD_b^{2n-1} &= [aD_b^{2(n-1)}, b] = 2^{n-1}\eta^{n-2}[(\eta a - \theta b), b] = 2^{n-1}\eta^{n-1}[a, b] \\ &= 2^n\eta^{n-1}(2ab - \theta) \equiv 2^{n+1}\eta^{n-1}ab \pmod{\Theta^n}, \end{aligned}$$

т.е. $aD_b^{2n-1} \notin \Theta^n$.

Поскольку по доказанному имеют место представления

$$\begin{aligned} e_1D_{e_2}^{2m-1} &= 2^{m+1}\theta_{22}^{m-1}e_1e_2 + \theta^{(m)}, \quad \text{где } \theta^{(m)} \in \Theta^m, \\ e_3D_{e_4}^{2n-1} &= 2^{n+1}\theta_{44}^{n-1}e_3e_4 + \theta^{(n)}, \quad \text{где } \theta^{(n)} \in \Theta^n, \end{aligned}$$

то

$$e_1D_{e_2}^{2m-1} \cdot e_3D_{e_4}^{2n-1} \equiv 2^{m+n+2}\theta_{22}^{m-1}\theta_{44}^{n-1}e_1e_2e_3e_4 \pmod{\Theta^{(m+n-1)}},$$

значит,

$$T^{(2m)}T^{(2n)} \not\subset T^{(2n+2m-1)}.$$

Заметим, что лемма 6 показывает существенность ограничений в теореме 1.

Кроме того, из теоремы 1 и лемм 4, 5 вытекает

ТЕОРЕМА 2. $Z^*(F^{(n)}) \neq 0$ для любого $n \geq 4$.

Таким образом, при четном $n \geq 4$ алгебра $F^{(n)}$ содержит ядерный элемент степени $n - 1$, при нечетном $n \geq 4$ алгебра $F^{(n)}$ содержит ядерный элемент степени n . Позже мы докажем, что алгебра $F^{(5)}$ не содержит ядерных элементов степени 4. Очевидно, что алгебра $F^{(n)}$ не содержит центральных элементов степени $\leq n - 2$.

§ 3. Собственные и центральные многочлены от двух переменных в алгебрах $F^{(5)}$ и $F^{(6)}$

Всюду в этом параграфе предполагается, что $\text{char}(k) = 0$. Напомним, что многочлен $f \in F$ называется *собственным*, если $\partial f / \partial x_i = 0$ для любого i . Коммутаторы от порождающих (лиевы одночлены) являются собственными многочленами. Известно, что собственные многочлены образуют подалгебру F_0 алгебры F , которая порождается лиевыми одночленами. Более того, теорема ПБВ описывает аддитивный базис алгебры F , состоящий из стандартных одночленов от базисных элементов свободной алгебры Ли (см. [26]).

3.1. Центральные многочлены от двух переменных в $F^{(5)}$.

ЛЕММА 7. Пусть A – алгебра, порожденная элементами a, b и удовлетворяющая тождествам $\text{LN}(5)$ и h' . Тогда $A'^3 = 0$, где A' – коммутант алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения представим в виде ряда шагов, считая, что

$$T^{(m)} = T^{(m)}(A), \quad V^{(m)} = V^{(m)}(A).$$

В силу п. 1° из леммы 4 заметим, что йордановы ассоциаторы $(u, v, x)^+$, $(u, x, v)^+$, $(x, u, v)^+$, содержащие элементы $u, v \in V^{(2)}$, $x \in A$, равны 0.

1°. $w^2 \in Z(A)$, $w^3 = 0$, где $w = [a, b]$.

Из слабого тождества Холла h' следует $w^2 \in Z(A)$ и

$$0 = [[a, b^2] \circ w, a] = [(b \circ w) \circ w, a] = 2[b \circ w^2, a] = -4w^3.$$

Нам потребуются следующие два представления идеалов A' и $T^{(m)}$, проверка которых тривиальна.

2°. $A' = wA + T^{(3)} = Aw + T^{(3)}$, $(A')^2 \subset T^{(3)}$.

3°. $T^{(m)} = \sum_{c \in \{a, b\}} A[V^{(m-1)}, c] + T^{(m+1)}$.

4°. $T^{(4)} \cdot A' = 0$. В самом деле, используя пп. 2°, 3°, в силу лемм 1 и 3 имеем

$$\begin{aligned} T^{(4)} \cdot A' &= \left(\sum_{c \in \{a, b\}} A[V^{(3)}, c] \right) \cdot (wA + T^{(3)}) \\ &\subseteq \sum_{c \in \{a, b\}} A[V^{(3)}, c]wA + T^{(4)}T^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

5°. $[T^{(3)}, A'] = 0$. На основании следствия 1 и пп. 2°, 4° имеем

$$\begin{aligned} [T^{(3)}, A'] &= [T^{(3)}, Aw + T^{(3)}] = [T^{(3)}, Aw] = [V^{(3)}A, Aw] = [V^{(3)}, Aw]A \\ &\subseteq [V^{(3)}, A]wA \subseteq T^{(4)} \cdot A' = 0. \end{aligned}$$

6°. $A'^3 = 0$. В самом деле, аналогично предыдущему имеем

$$A'^2 = (Aw + T^{(3)})(wA + T^{(3)}) \subseteq T^{(3)}w + Aw^2,$$

следовательно, $A'^3 \subseteq (T^{(3)}w + Aw^2)(wA + T^{(3)}) = 0$, поскольку $w^2 \in T^{(3)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Всякий центральный многочлен $f(a, b)$ от двух переменных алгебры $F^{(5)}$ содержится в T -идеале $T^{(4)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный многочлен $f(a, b)$ представим в виде

$$f(a, b) = \sum_{i, j} f_{i, j} a^i b^j,$$

где $f_{i, j}$ – собственные многочлены.

Если $f(a, b)$ централен, то, применяя необходимое число раз операторы $\partial/\partial a$, $\partial/\partial b$, получаем, что $f_{i, j}$ также центральны. Из соображений однородности можно считать, что $f_{i, j}$ являются однородными многочленами. Значит, без

ограничения общности можно считать, что $f(a, b)$ – однородный собственный многочлен. Поскольку свободная ассоциативная алгебра F не имеет ненулевых центральных элементов, то $\deg f \geq 4$.

Из леммы 7 следует, что f является следствием слабого многочлена Холла h' в $F^{(5)}$, если $\deg f \geq 6$. Если же $\deg f = 5$, то f является линейной комбинацией элементов вида $[a_1, a_2, a_3][a_4, a_5]$, где $a_1, \dots, a_5 \in \{a, b\}$. Но всякий такой элемент в алгебре $F^{(5)}$ пропорционален h' . Заметим, что $h' \in T^{(4)}$.

Наконец, если $\deg f = 4$, то f является линейной комбинацией элементов вида $[a_1, a_2, a_3, a_4]$, $[a_1, a_2][a_3, a_4]$, где $a_1, \dots, a_4 \in \{a, b\}$. Заметим, что $[a_1, a_2][a_3, a_4]$ пропорционален элементу w^2 , где $w = [a, b]$. Осталось заметить, что $[V^{(4)}, x] = 0$ и $[w^2, x] = h(a, b, x) \neq 0$ по лемме 4.

3.2. Собственные многочлены от двух переменных в $F^{(5)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Верно соотношение $[a, b]^3 \notin T^{(5)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = [a, b] \in V^{(2)}$. Тогда

$$\begin{aligned} [a, b^2, x, y, z] &= [w \circ b, x, y, z] \in [V^{(2)} \circ F, x, y, z] \subseteq [V^{(3)} \circ F + V^{(2)} \circ V^{(2)}, y, z] \\ &\subseteq [V^{(4)} \circ F + V^{(3)} \circ V^{(2)}, z] \subseteq V^{(5)} \circ F + V^{(4)} \circ V^{(2)} + V^{(3)} \circ V^{(3)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что всякий собственный многочлен степени 6, содержащийся в идеале $T^{(5)}$, представим в виде линейной комбинации элементов u_6, u_4u_2, u_3v_3 , где u_i, v_i – коммутаторы степени i . Применяя теорему ПБВ к свободной алгебре Ли $\text{Lie}[a, b]$, получаем, что $[a, b]^3 \notin T^{(5)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. а) Собственные центральные многочлены от двух переменных степеней 5 и 6 в алгебре $F^{(5)}$ исчерпываются элементами вида

$$[[a, b]^2, a], \quad [a, b]^3.$$

б) Собственные многочлены от двух переменных степени ≥ 7 являются тождествами в алгебре $F^{(5)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По существу этот пункт доказан в предложении 2.

б) Пусть $a_1, a_2, \dots \in \{a, b\}$. Коммутаторы вида $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, где $m \geq 2$, назовем *регулярными*. Достаточно понять, что нулевым является произведение $\pi := v_1 v_2 \cdots v_l$ регулярных коммутаторов $v_1, v_2, \dots, v_l$, в котором

$$\sum_{i=1}^l \deg(v_i) \geq 7, \quad 4 \geq \deg(v_1) \geq \dots \geq \deg(v_l) \geq 2.$$

Если $\deg(v_1) = 2$, то $\pi = w^l$, где $w = [a, b]$ и $l \geq 4$. Поскольку $w^2 \in T^{(3)}$, то $\pi \in (T^{(3)})^2 \subseteq T^{(5)}$ по лемме 3.

Если $\deg(v_1) = 3$, то либо $\deg(v_2) = 3$, либо $\deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$; значит, снова $\pi \in (T^{(3)})^2 \subseteq T^{(5)}$.

Аналогично рассматривается случай $\deg(v_1) = 4$.

3.3. Центральные многочлены от двух переменных в $F^{(6)}$.

ЛЕММА 8. $[[a, b]^2, b, b] \neq 0$, $[[a, b]^3, b] \neq 0$ в алгебре $F^{(6)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим второе соотношение, поскольку первое очевидно в силу теоремы ПБВ. Для этого достаточно понять, что всякий многочлен вида $[a, b^2, x, y, z, t]$ содержится в пространстве $V^{(6)} \circ F + V^{(5)} \circ V^{(2)} + V^{(4)} \circ V^{(3)}$. Пусть $w = [a, b] \in V^{(2)}$; тогда

$$\begin{aligned} [a, b^2, x, y, z, t] &= [w \circ b, x, y, z, t] \in [V^{(2)} \circ F, x, y, z, t] \\ &\subseteq [V^{(3)} \circ F + V^{(2)} \circ V^{(2)}, y, z, t] \subseteq [V^{(4)} \circ F + V^{(3)} \circ V^{(2)}, z, t] \\ &\subseteq [V^{(5)} \circ F + V^{(4)} \circ V^{(2)} + V^{(3)} \circ V^{(3)}, t] \\ &\subseteq V^{(6)} \circ F + V^{(5)} \circ V^{(2)} + V^{(4)} \circ V^{(3)}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Всякий центральный многочлен $f(a, b)$ от двух переменных алгебры $F^{(6)}$ является ядерным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f(a, b) = \sum_{i,j} f_{i,j} a^i b^j,$$

где $f_{i,j}$ – собственные многочлены.

Следуя предложению 2, можно считать, что $f(a, b)$ – однородный собственный многочлен и $\deg f \geq 5$. Если $\deg f = 5$ и $f \notin T^{(5)}$, то можно считать, что $f = [a, b, b][a, b]$. Однако $[a, b, b][a, b] \notin Z(F^{(6)})$ по лемме 8. Значит, собственный многочлен степени 5 является центральным, только если он лежит в $V^{(5)}$.

Пусть $\deg f \geq 6$. По теореме 1 имеем $V^{(i)}V^{(j)} \subseteq Z(F^{(6)})$, если $i + j \geq 6$, и $T^{(i)}T^{(j)} = 0$, если $i + j \geq 7$. Поскольку $[[a, b]^3, b] \neq 0$ по лемме 8, то, как легко видеть, достаточно поверить следующие соотношения:

$$g_1, g_2, g_3 \in Z^*(F^{(6)}),$$

где $[ab^m] = aD_b^m$ и $g_1 = [ab^3][a, b]$, $g_2 = [ab^2][a, b]^2$, $g_3 = [a, b]^4$.

Проверим каждое из трех указанных соотношений:

$$g_1[x, y] = [ab^3][x, y][a, b] = (-[ab^2, x][b, y] + t^{(5)}[a, b]) = 0,$$

где $t^{(5)} \in T^{(5)}$,

$$g_2[x, y] = [ab^2][a, b]^2[x, y] \in T^{(3)}T^{(3)}T^{(2)} \subseteq T^{(5)}T^{(2)} = 0,$$

$$g_3[x, y] = [a, b]^4[x, y] \in T^{(3)}T^{(3)}T^{(2)} = 0.$$

§ 4. Многочлены Холла и Т-пространство $V^{(4)}$

Легко видеть, что $h'(x, y) \in V^{(4)}$, где $V^{(4)}$ – Т-пространство, порожденное коммутатором степени 4. В самом деле,

$$[[x, y]^2, x] = [[x, y], [x, y] \circ x] = [[x, y], [x^2, y]].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Верно соотношение $h(x, y, z) \notin V^{(4)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим от противного, что $h(x, y, z) \in V^{(4)}$.

Заметим, что элемент степени 5 из $V^{(4)}$ является линейной комбинацией коммутаторов вида $[a, pq, b, c]$. Считая, что $w = [a, p]$, имеем

$$\begin{aligned} [a, p^2, b, c] &= [w \circ p, b, c] = [[w, b] \circ p + w \circ [p, b], c] \\ &= [w, b, c] \circ p + [w, b] \circ [p, c] + [w, c] \circ [p, b] + w \circ [p, b, c]. \end{aligned}$$

Следовательно, $h(x, y, z)$ является линейной комбинацией элементов вида

$$\begin{aligned} [a, pq, b, c] &= [a, p, b, c]q + [a, q, b, c]p + [a, p, b][q, c] + [a, q, b][p, c] \\ &\quad + [a, p, c][q, b] + [a, q, c][p, b] + [a, p][q, b, c] + [a, q][p, b, c] \end{aligned}$$

и коммутаторов длины 5.

Запишем необходимые элементы вида $[a, pq, b, c]$ от переменных x, y, z степеней 2, 2 и 1 соответственно.

а) Если z стоит на первом месте набора (a, p, q, b, c) , то получаем четыре элемента

$$[z, x^2, y, y], \quad [z, y^2, x, x], \quad [z, xy, x, y], \quad [z, xy, y, x].$$

б) Если z – второй элемент набора (a, p, q, b, c) , то можно считать, что $a = x$, $q = y$; тогда получаем два элемента

$$[x, zy, x, y], \quad [x, zy, y, x].$$

в) Если $b = z$, то имеем еще два элемента

$$[x, y^2, z, x], \quad [y, x^2, z, y].$$

г) Если $c = z$, то получаем два элемента

$$[x, y^2, x, z], \quad [y, x^2, y, z].$$

Таким образом, для подходящих скаляров $\lambda_1, \dots, \lambda_{10}$ верно сравнение по модулю $V^{(5)}$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 ([z, x, y, y]x + 2[z, x, y][x, y] + [x, y, y][z, x]) \\ &\quad + \lambda_2 ([z, y, x, x]y + 2[z, y, x][y, x] + [y, x, x][z, y]) \\ &\quad + \lambda_3 ([z, x, x, y]y + [z, y, x, y]x + [z, y, x][x, y] \\ &\quad \quad + [z, x, y][y, x] + [y, x, y][z, x] + [x, x, y][z, y]) \\ &\quad + \lambda_4 ([z, x, y, x]y + [z, y, y, x]x + [z, x, y][y, x] \\ &\quad \quad + [z, y, x][x, y] + [x, y, x][z, y]) \\ &\quad + \lambda_5 ([x, z, x, y]y + [x, y, x, y]z + [x, y, x][z, y] \\ &\quad \quad + 2[x, y, y][z, x] + 2[z, x, y][x, y]) \\ &\quad + \lambda_6 ([x, z, y, x]y + [x, y, y, x]z + [x, z, y][y, x] + [x, y, y][z, x] \\ &\quad \quad + [x, y, x][z, y] + [z, y, x][x, y]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_7([x, y, z, x]y + [x, y, z][y, x] + [x, y, x][y, z] + [y, z, x][x, y]) \\
& + \lambda_8([y, x, z, y]x + [y, x, z][x, y] + [y, x, y][x, z] + [x, z, y][y, x]) \\
& + \lambda_9([x, y, x, z]y + [x, y, x][y, z] + [x, y, z][y, x] + [y, x, z][x, y]) \\
& + \lambda_{10}([y, x, y, z]x + [y, x, y][x, z] + [y, x, z][x, y] + [x, y, z][y, x]) \\
& \equiv [x, y, z][x, y].
\end{aligned}$$

Используя теорему ПБВ, запишем систему линейных уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых базисных произведениях.

1) Применяя оператор $\partial/\partial x$, получаем

$$\lambda_1[z, x, y, y] + \lambda_3[z, y, x, y] + \lambda_4[z, y, y, x] + \lambda_8[y, x, z, y] + \lambda_{10}[y, x, y, z] = 0.$$

Далее, для сокращения записи вместо $[a, b, c, d]$ будем писать $[abcd]$. Учитывая, что

$$\begin{aligned}
[y, x, z, y] &= [z, [x, y], y] = [zxyy] - [zyxy], \\
[y, x, y, z] &= [z, [x, y], y] = [z, [x, y], y] - [z, y, [x, y]] = [zxyy] - 2[zyxy] + [zyyx],
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
& \lambda_1[zxyy] + \lambda_3[zyxy] + \lambda_4[zyyx] + \lambda_8([zxyy] - [zyxy]) \\
& + \lambda_{10}([zxyy] - 2[zyxy] + [zyyx]) = 0,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1[zxyy] + \lambda_8[zxyy] + \lambda_{10}[zxyy] + \lambda_3[zyxy] - \lambda_8[zyxy] \\
& - 2\lambda_{10}[zyxy] + \lambda_4[zyyx] + \lambda_{10}[zyyx] = 0;
\end{aligned}$$

значит,

$$\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_{10} = 0, \quad (4.1)$$

$$\lambda_3 - \lambda_8 - 2\lambda_{10} = 0, \quad (4.2)$$

$$\lambda_4 + \lambda_{10} = 0. \quad (4.3)$$

2) Применяя оператор $\partial/\partial y$, получаем

$$\begin{aligned}
& \lambda_2[z, y, x, x] + \lambda_3[z, x, x, y] + \lambda_4[z, x, y, x] \\
& - \lambda_5[z, x, x, y] - \lambda_6[z, x, y, x] + \lambda_7[x, y, z, x] + \lambda_9[x, y, x, z] = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
& \lambda_2[z y x x] + \lambda_3[z x x y] + \lambda_4[z x y x] - \lambda_5[z x x y] - \lambda_6[z x y x] \\
& + \lambda_7[z y x x] - \lambda_7[z x y x] + \lambda_9[z y x x] - 2\lambda_9[z x y x] + \lambda_9[z x x y] = 0;
\end{aligned}$$

значит,

$$\lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_9 = 0, \quad (4.4)$$

$$\lambda_3 - \lambda_5 + \lambda_9 = 0, \quad (4.5)$$

$$\lambda_4 - \lambda_6 - \lambda_7 - 2\lambda_9 = 0. \quad (4.6)$$

3) Применяя оператор $\partial/\partial z$, получаем

$$\lambda_5[x, y, x, y] + \lambda_6[x, y, y, x] = 0.$$

Поскольку $[x, y, x, y] = [x, y, y, x]$, то

$$\lambda_5 + \lambda_6 = 0. \quad (4.7)$$

4) Сравним коэффициенты при элементе $[x, y, y][z, x]$:

$$\lambda_1 + 2\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_8 + \lambda_{10} = 0. \quad (4.8)$$

5) Сравним коэффициенты при элементе $[y, x, x][z, y]$:

$$\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_9 = 0. \quad (4.9)$$

6) Сравним коэффициенты при элементах $[z, x, y][x, y]$ и $[z, y, x][x, y]$:

$$\begin{aligned} & (2\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_8)[z, x, y][x, y] \\ & + (2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_7)[z, y, x][y, x] \\ & + (\lambda_7 + \lambda_8 + 2\lambda_9 + 2\lambda_{10} + 1)[z, [x, y]][x, y] = 0; \end{aligned}$$

значит, имеем

$$\begin{aligned} & (2\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_8 + (\lambda_7 + \lambda_8 + 2\lambda_9 + 2\lambda_{10} + 1))[z, x, y][x, y] \\ & + (2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_7 - (\lambda_7 + \lambda_8 + 2\lambda_9 + 2\lambda_{10} + 1))[z, y, x][y, x] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем еще два равенства:

$$2\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + 2\lambda_8 + 2\lambda_9 + 2\lambda_{10} + 1 = 0, \quad (4.10)$$

$$2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 - 2\lambda_7 - \lambda_8 - 2\lambda_9 - 2\lambda_{10} - 1 = 0. \quad (4.11)$$

Легко проверить, что система уравнений (4.1)–(4.11) противоречива.

§ 5. О тождествах алгебры $E^{(2)}$

ЛЕММА 9. Элемент $[a, x, x, b][x, c] \neq 0$ кососимметричен по линейным переменным в алгебре $F^{(5)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых,

$$[a, x, x, b][x, c] = -[a, x, x, x][b, c] \neq 0 \quad \text{в } E^{(2)}.$$

Во-вторых,

$$[a, x, x, b][x, b] = 0,$$

ибо $[x, y, z, b][t, b] = 0$ по лемме 1. В-третьих,

$$2[a, x, x, a][x, c] = [a, x, x, c] \circ [a, x] = [[a, x, x] \circ [a, x], c] = [h'(a, x), c] = 0.$$

ЛЕММА 10. В расширенной алгебре Грассмана $E^{(2)}$ не выполняется нетривиальное тождество степени не выше 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу ограничений на характеристику можно считать, что речь идет о собственных полилинейных тождествах $f = 0$. Очевидно, что в $E^{(2)}$ нет тождеств степеней 2 и 3.

Допустим, что в $E^{(2)}$ выполнено тождество $f = 0$ степени 4. Тогда f имеет вид

$$f(y, x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_\sigma [y, x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}] + \sum_{\sigma \in A_3} \beta_\sigma [y, x_{1\sigma}] \circ [x_{2\sigma}, x_{3\sigma}],$$

где S_3 и A_3 – симметрическая и знакопеременная группы степени 3 соответственно.

Докажем, что все скаляры β_σ равны 0. Пусть это не верно. Так как $f \in Z(F^{(5)})$, то

$$[y, a] \circ [b, c] + \lambda[y, b] \circ [c, a] + \mu[y, c] \circ [a, b] \in Z(E^{(2)}).$$

Поскольку многочлен Холла отличен от нуля в $E^{(2)}$, то получаем $\lambda = \mu = 1$. Тогда

$$g(y, x_1, x_2, x_3, x) := \sum_{\sigma \in A_3} [[y, x_{1\sigma}][x_{2\sigma}, x_{3\sigma}], x] = 0.$$

В частности, $g(y, x_1, x_2, x_3, y) = 0$. Покажем, что это тождество не может выполняться в алгебре $E^{(2)}$. Проведем вычисления в алгебре E , считая, что $\theta_{ij} = 0$ ($i \neq j$):

$$[e_1, e_2][e_3, e_4] = [e_1, e_3][e_4, e_2] = [e_1, e_4][e_2, e_3] = 4e_1e_2e_3e_4.$$

Значит,

$$g(e_1, e_2, e_3, e_4, e_1) = 12e_1e_2e_3e_4.$$

Далее, учитывая равенства $[e_ie_j, e_p] = 0$, если индексы i, j, p различны, $2e_1^2 = \theta_{11}$ и

$$[e_1e_2e_3e_4, e_1] = \theta_{11}e_2e_3e_4,$$

получаем

$$g(e_1, e_2, e_3, e_4, e_1) = 12\theta_{11}e_2e_3e_4 \neq 0.$$

Тем самым, f имеет вид

$$f(y, x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_\sigma [y, x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, x_{3\sigma}],$$

т.е.

$$\begin{aligned} f(y, x_1, x_2, x_3) = & \alpha_1[y, x_1, x_2, x_3] + \beta_1[y, x_1, x_3, x_2] + \alpha_2[y, x_2, x_1, x_3] \\ & + \beta_2[y, x_2, x_3, x_1] + \alpha_3[y, x_3, x_1, x_2] + \beta_3[y, x_3, x_2, x_1]. \end{aligned}$$

Поскольку $f[x_1, x_2] = 0$, то

$$(\alpha_1[y, x_1, x_2, x_3] + \alpha_2[y, x_2, x_1, x_3])[x_1, x_2] = 0.$$

Следовательно, по лемме 9

$$(\alpha_1 + \alpha_2)[y, x_1, x_1, x_3][x_1, x_2] = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Аналогично, $\beta_1 + \alpha_3 = 0$, $\beta_2 + \beta_3 = 0$. Таким образом,

$$f(y, x_1, x_2, x_3) = \alpha[y, [x_1, x_2], x_3] + \beta[y, [x_1, x_3], x_2] + \gamma[y, [x_2, x_3], x_1],$$

где $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \beta_2$. Тогда

$$f(x_1, x_1, x_1, x_3) = (\beta + \gamma)[x_1, [x_1, x_3], x_1];$$

значит, $\beta + \gamma = 0$ по лемме 6. Аналогично,

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = 0.$$

Тогда

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

стало быть, $f = 0$. Лемма доказана.

Попутно мы доказали два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Элемент степени 4 является центральным в алгебре $F^{(5)}$, только если он содержится в Т-пространстве $V^{(4)}$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Алгебра $F^{(5)}$ не содержит ненулевых ядерных элементов степени 4, т.е. слабый многочлен Холла h' является ядерным элементом наименьшей возможной степени.*

§ 6. Некоторые нерешенные задачи

В предыдущих параграфах были приведены результаты в основном о центрах $Z(F^{(n)})$ и $Z^*(F^{(n)})$ для $n = 5, 6$.

В общем случае полное описание центров алгебр $F^{(n)}$ не получено, но можно дать частичное описание (т.е. найти достаточно существенную часть центра) при некоторых ограничениях на характеристику.

Для этого напомним следующие факты.

В случае характеристики $p > 0$ важную роль играет следующее определение (см. [11]). Пусть W_p – Т-пространство в $F^{(n)}$, порожденное всеми p -словами, т.е. одночленами, в которые каждая переменная входит с кратностью p . Отметим, что Т-пространство W_p является подалгеброй в алгебре $F^{(n)}$. Если $p \geq n > 2$, то имеет место равенство

$$W_p = D_p \oplus CD_p,$$

где $D_p = \{x_i^p\}^T$ – Т-пространство, порожденное p -й степенью переменной (подалгебра, изоморфная алгебре коммутативных многочленов от счетного набора переменных), и

$$CD_p = W_p \cap T^{(2)}.$$

Перечислим основные известные результаты о центрах.

1. $Z(F^{(3)}) = V^{(2)}$, если $\text{char } k = 0$;
 $Z(F^{(3)}) = D_p \oplus CD_p$, если $\text{char } k = p > 0$.
2. $Z(F^{(4)}) = T^{(3)} + (V^{(2)})^2$, если $\text{char } k = 0$;
 $Z(F^{(4)}) = (T^{(3)} + CD_p^2) \oplus D_p$, если $\text{char } k = p > 3$.
3. $Z(F^{(5)}) \supseteq V^{(4)} + (h')^T + \{h\}^T$, если $\text{char } k = 0$;
 $Z(F^{(5)}) \supseteq (V^{(4)} + (h')^T + \{h\}^T) \oplus D_p$, если $\text{char } k = p > 5$;
здесь $\{h\}^T$ – Т-пространство, порожденное многочленом h .
4. $Z(F^{(6)}) \supseteq T^{(5)} + Z(F^{(5)})V^{(2)} + Z(F^{(3)})V^{(4)}$, если $\text{char } k = 0$;
 $Z(F^{(6)}) \supseteq (T^{(5)} + Z(F^{(5)})V^{(2)} + Z(F^{(3)})V^{(4)}) \oplus D_p$, если $\text{char } k = p > 6$.
5. $Z(F^{(2m+5)}) \supseteq V^{(2m+4)} + (H'_m)^T + \{H_m\}^T$, если $\text{char } k = 0$;
 $Z(F^{(2m+5)}) \supseteq (V^{(2m+4)} + (H'_m)^T + \{H_m\}^T) \oplus D_p$, если $\text{char } k = p > 2m + 5$;
здесь H'_m и H_m – обобщенные многочлены Холла степени $2m + 5$.
6. $Z(F^{(2m+6)}) \supseteq T^{(2m+5)} + Z(F^{(2m+5)})V^{(2)} + Z(F^{(2m+3)})V^{(4)}$
 $+ \dots + Z(F^{(3)})V^{(2m+4)}$, если $\text{char } k = 0$;
 $Z(F^{(2m+6)}) \supseteq (T^{(2m+5)} + Z(F^{(2m+5)})V^{(2)} + Z(F^{(2m+3)})V^{(4)}$
 $+ \dots + Z(F^{(3)})V^{(2m+4)}) \oplus D_p$, если $\text{char } k = p > 2m + 6$.

Доказательства п. 1 и п. 2 см. в [12] и [13] соответственно. Ключевыми результатами для нахождения центральных многочленов в $F^{(n)}$ являются теорема 1 и лемма 5. В случае характеристики p рассуждения абсолютно аналогичны; добавляется только Т-пространство D_p , которое лежит в центре в силу тождества $[x^p, y] = 0$ в алгебре $F^{(n)}$, когда $p \geq n$.

Отметим некоторые нерешенные задачи.

- 1) Верно ли, что пп.3–6 имеют место равенства?
- 2) Легко понять, что $H'_n \in V^{(2n+4)}$. Верно ли, что $H_n \notin V^{(2n+4)}$?
- 3) Верно ли, что $Z(F^{(5)}) \subseteq T^{(4)}$, $Z^*(F^{(6)}) = T^{(5)}$?
- 4) Верно ли, что $Z^*(F^{(5)}) = T(E^{(2)}) = (\text{LN}(5), h')^T$?

Авторы признательны А. Н. Красильникову за полезные обсуждения и указание на работу [27], в которой доказан факт, аналогичный теореме 1 настоящей работы, правда, в частном случае поля комплексных чисел в качестве коэффициентов.

Список литературы

- [1] В. Н. Латышев, “О выборе базы в одном Т-идеале”, *Сиб. матем. журн.*, 4:5 (1963), 1122–1127.

- [2] В. Н. Латышев, “О конечной порожденности Т-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **6:6** (1965), 1432–1434.
- [3] И. Б. Воличенко, Т-идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Препринт № 22, Ин-т матем. АН БССР, Минск, 1978, 13 с.
- [4] D. Krakowski, A. Regev, “The polynomial identities of the Grassman algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181** (1973), 429–438.
- [5] А. В. Гришин, “Примеры не конечной базирюемости Т-пространств и Т-идеалов в характеристике 2”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5:1** (1999), 101–118.
- [6] A. V. Grishin, “On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity $x^{32} = 0$ ”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **6** (2000), 50–51.
- [7] В. В. Щиголев, “Примеры бесконечно базирюемых Т-пространств”, *Матем. сб.*, **191:3** (2000), 143–160; англ. пер.: V. V. Shchigolev, “Examples of T-spaces with an infinite basis”, *Sb. Math.*, **191:3** (2000), 459–476.
- [8] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, “Две теоремы о строении относительно свободной алгебры Грассмана”, *УМН*, **63:4(382)** (2008), 181–182; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, “Two theorems on the structure of a relatively free Grassmann algebra”, *Russian Math. Surveys*, **63:4** (2008), 782–784.
- [9] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, “О Т-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана”, *Матем. сб.*, **200:9** (2009), 41–80; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, “On the multiplicative and T-space structure of the relatively free Grassmann algebra”, *Sb. Math.*, **200:9** (2009), 1299–1338.
- [10] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, “О структуре относительно свободной алгебры Грассмана”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15:8** (2009), 3–93; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, “On the structure of a relatively free Grassmann algebra”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **171:2** (2010), 149–212.
- [11] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, А. А. Шокола, “О Т-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16:3** (2010), 135–148; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, A. A. Shokola, “On T-spaces and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras”, *J. Math. Sci.*, **177:6** (2011), 868–877.
- [12] А. В. Гришин, “О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана”, *УМН*, **65:4(394)** (2010), 191–192; англ. пер.: A. V. Grishin, “On the structure of the centre of a relatively free Grassmann algebra”, *Russian Math. Surveys*, **65:4** (2010), 781–782.
- [13] А. В. Гришин, “О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4”, *Матем. заметки*, **91:1** (2012), 147–148; англ. пер.: A. V. Grishin, “On the center of a relatively free Lie-nilpotent algebra of index 4”, *Math. Notes*, **91:1** (2012), 139–140.
- [14] А. В. Гришин, “О Т-пространствах в относительно свободной дупорождённой лиевски нильпотентной алгебре индекса 4”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17:4** (2012), 133–139; англ. пер.: A. V. Grishin, “On T-spaces in a relatively free two-generated Lie nilpotent associative algebra of index 4”, *J. Math. Sci.*, **191:5** (2013), 686–690.
- [15] П. Ж. Чирипов, П. Н. Сидеров, “О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр”, *Плиска*, **2** (1981), 103–115.
- [16] А. Р. Кемер, “Многообразия и Z_2 -градуированные алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48:5** (1984), 1042–1059; англ. пер.: A. R. Kemer, “Varieties and Z_2 -graded algebras”, *Math. USSR-Izv.*, **25:2** (1985), 359–374.
- [17] А. Р. Кемер, “Конечная базирюемость тождеств ассоциативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **26:5** (1987), 597–641; англ. пер.: A. R. Kemer, “Finite basis property of identities of associative algebras”, *Algebra and Logic*, **26:5** (1987), 362–397.

- [18] А. Н. Ваулин, “Об одном многообразии альтернативных алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **10**:4 (2004), 23–34; англ. пер.: A. N. Vaulin, “On one variety of alternative algebras”, *J. Math. Sci.*, **140**:2 (2007), 191–199.
- [19] А. Н. Ваулин, *Многообразия альтернативных алгебр с тождеством $[x_1, x_2, \dots, x_5] = 0$* , Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Моск. пед. гос. ун-т, М., 2005, 12 с.
- [20] С. В. Пчелинцев, “Изотопы первичных $(-1, 1)$ - и йордановых алгебр”, *Алгебра и логика*, **49**:3 (2010), 388–423; англ. пер.: S. V. Pchelintsev, “Isotopes of prime $(-1, 1)$ - and Jordan algebras”, *Algebra and Logic*, **49**:3 (2010), 262–288.
- [21] С. В. Пчелинцев, “О ступени коммутаторной нильпотентности гомотопов строго $(-1, 1)$ -алгебр”, *Матем. заметки*, **93**:5 (2013), 764–771; англ. пер.: S. V. Pchelintsev, “On the commutator nilpotency step of strictly $(-1, 1)$ -algebras”, *Math. Notes*, **93**:5 (2013), 756–762.
- [22] С. В. Пчелинцев, “Коммутаторные тождества гомотопов $(-1, 1)$ -алгебр”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:2 (2013), 417–435; англ. пер.: S. V. Pchelintsev, “Commutator identities of the homotopes of $(-1, 1)$ -algebras”, *Siberian Math. J.*, **54**:2 (2013), 325–340.
- [23] A. Kuz'min, “On the topological rank of the variety of right alternative metabelian Lie-nilpotent algebras”, *J. Algebra Appl.*, **14**:10 (2015), 1550144, 15 pp.
- [24] В. Т. Филиппов, “О центральных идеалах свободной конечно-порожденной альтернативной алгебры”, *Алгебра и логика*, **25**:4 (1986), 470–491; англ. пер.: V. T. Filippov, “The central ideals of a free finitely generated alternative algebra”, *Algebra and Logic*, **25**:4 (1986), 296–311.
- [25] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968, 564 с.; пер. с англ.: S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965, xvii+508 pp.
- [26] Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, М., 1964, 355 с.; пер. с англ.: N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **10**, Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York–London, 1962, ix+331 pp.
- [27] A. Bapat, D. Jordan, “Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories”, *J. Algebra*, **373** (2013), 299–311.

Александр Владимирович Гришин
(Aleksandr V. Grishin)

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Поступила в редакцию
13.01.2015

Сергей Валентинович Пчелинцев
(Sergey V. Pchelintsev)

Финансовый университет при Правительстве
Российской Федерации, г. Москва

E-mail: pchelinzev@mail.ru