Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Авхадиев, Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 12, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:59:28

УДК 517.54

Ф. Г. Авхадиев

Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения

Доказаны новые интегральные неравенства типа неравенств Харди для финитных функций в произвольных плоских областях гиперболического типа. Изучены их специальные случаи для областей с равномерно совершенными границами и рассмотрены некоторые применения. В доказательствах существенно используются базовые уравнения и формулы для гиперболической метрики, а также восходящие к Тейхмюллеру модульные характеристики областей.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: метрика Пуанкаре, конформные отображения, равномерно совершенные множества, неравенства Харди.

DOI: 10.4213/sm8477

§ 1. Введение

1.1. Обозначения и известные результаты. Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа, т.е. область, имеющая не менее трех граничных точек на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда в любой точке $z = x + iy \in \Omega$ определен (см. [1]–[3]) гиперболический радиус $R(z, \Omega) = 1/\lambda_\Omega(z)$, где λ_Ω – коэффициент метрики Пуанкаре с гауссовой кривизной $k = -4$.

Целью настоящей работы является доказательство новых вариационных неравенств типа неравенств Харди с весовыми функциями, являющимися степенями гиперболического радиуса. В ряде работ рассматривалось следующее конформно инвариантное неравенство: для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq c(\Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u|^2}{R^2(z, \Omega)} dx dy, \quad (1.1)$$

где ∇u – градиент функции u , константа $c(\Omega)$ определена однозначно как постоянная, максимальная из возможных в этом вариационном неравенстве. Гладкость функции $u(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ понимается как гладкость $u(1/z)$ в точке $z = 0$.

Функционал $c(\Omega)$ хорошо изучен в спектральной теории оператора Лапласа–Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны (см. [4] и библиографию в этой работе). Известно, в частности, что константа $c(\Omega) \in [0, 1]$ для любой области и $c(\Omega)$ равна единице для любой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00351 и № 15-41-02433-поволжье).

односвязной или двусвязной области гиперболического типа. Эти факты являются следствиями формулы Элстродта–Паттерсона–Сулливана (см. [4; с. 333]):

$$c(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}; \\ 4\beta(1 - \beta) & \text{для } \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 \end{cases},$$

где $\beta = \beta(\Omega)$ – критический показатель сходимости рядов Пуанкаре–Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω .

Существуют области, для которых $c(\Omega) = 0$, т.е. существуют области, для которых неравенство (1.1) не является содержательным. Доказано (см. [5]), что для любой конечно-связной области Ω гиперболического типа константа $c(\Omega)$ положительна тогда и только тогда, когда хотя бы одна из граничных компонент области содержит более одной точки, т.е. является континуумом.

Х. Л. Фернандес и Х. М. Родригес (см. [5; с. 182]) отмечают, что было бы интересно иметь критерий положительности $c(\Omega)$ для бесконечно-связных областей в терминах евклидовой геометрии. Такой критерий пока не найден, известно следующее достаточное условие (см. [6]): $c(\Omega) > 0$, если конечен максимальный конформный модуль $M(\Omega)$ – точная верхняя граница модулей всех двусвязных областей Ω' , лежащих в области Ω и разделяющих ее границу. Здесь и далее выражение типа “двусвязная область Ω' , лежащая в области Ω и разделяющая ее границу” означает, что $\Omega' \subset \Omega$ и каждая из двух компонент множества $\mathbb{C} \setminus \Omega'$ содержит хотя бы одну граничную точку Ω .

С другой стороны, имеется обширная литература (см. [7]–[13] и библиографию в этих работах), посвященная изучению константы Харди $\tilde{c}_p(s, \Omega)$, определяемой равенством

$$\tilde{c}_p(s, \Omega) = \inf_{\substack{u \in C_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{\text{dist}^{s-p}(z, \partial\Omega)} dx dy \left(\iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{\text{dist}^s(z, \partial\Omega)} dx dy \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

где параметры $p \in [1, \infty)$ и $s \in (-\infty, \infty)$, весовые функции являются степенями евклидова расстояния $\text{dist}(z, \partial\Omega) := \inf_{\zeta \in \partial\Omega} |z - \zeta|$.

Определим новый функционал, родственный константе (1.2) и совпадающий с функционалом $c(\Omega)$ при $p = s = 2$. А именно, пусть $c_p(s, \Omega)$ – максимальная из возможных постоянная в следующей L_s^p -версии неравенства (1.1):

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{s-p}(z, \Omega)} dx dy \geq c_p(s, \Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^s(z, \Omega)} dx dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \quad (1.3)$$

Отметим, что для любого $p \in [1, \infty)$ максимальная константа $c_p(s, \Omega)$ из (1.3) является конформно инвариантной при $s = 2$ и инвариантной относительно линейных конформных преобразований области при любом s . В статьях [10], [11] автором было анонсировано утверждение, равносильное следующему: если Ω – односвязная или двусвязная область гиперболического типа и $p \in [1, \infty)$, то $c_p(2, \Omega) \geq 2^p/p^p$.

1.2. Краткое содержание статьи. В § 2 для $c(\Omega) = c_2(2, \Omega)$ рассматривается аналог одной задачи Брезиса и Маркуса. Эта задача связана с точной

константой $\tilde{c}_2(2, \Omega) = 1/4$ для выпуклых областей Ω и изучалась ранее в статьях [8], [9], [12] и других работах. В теореме 1 представлены усиленные варианты (1.1), в которых добавлен положительный член в правой части неравенства в случае односвязных и двусвязных областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Приведем лишь одно следствие, относящееся к случаю выпуклых областей: если Ω – выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx dy + \frac{1}{4} \iint_{\Omega} |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx dy,$$

где g – любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость. Обе постоянные $1/4$ являются точными в том смысле, что их нельзя заменить постоянными $1/4 + \varepsilon_0$ при любом $\varepsilon_0 > 0$.

Теорема 2 (см. § 3) утверждает: *если $s > 2$, то*

$$c_p(s, \Omega) \geq \frac{4^p(s-2)^{p/2}}{p^p}$$

для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа и для любого $p \in [2, \infty)$. Ранее нами было доказано (см. [10]), что

$$\tilde{c}_p(s, \Omega) \geq \frac{(s-2)^p}{p^p}$$

при выполнении условия $s > 2$ для $p \in [1, \infty)$ и произвольной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$.

В § 4 доказаны следующее новое неравенство (см. лемму 4 ниже)

$$\iint_{\Omega} \frac{|(\nabla u, \nabla R)|^p}{R^{2-p}} dx dy \geq \frac{4^p}{p^p} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2} dx dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

и его следствие

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u| dx dy}{\text{dist}(z, \partial\Omega)} \geq 2 \iint_{\Omega} \frac{|u| dx dy}{R^2} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Здесь $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$, u – вещественнозначная функция, $(\nabla u, \nabla R)$ – скалярное произведение градиентов функций. Приведенные неравенства универсальны в том смысле, что они справедливы для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа при любом $p \in [1, \infty)$. С использованием этих неравенств в теореме 3 получены оценки снизу константы $c_p(2, \Omega)$ в зависимости от $M_0(\Omega)$ в областях с равномерно совершенными границами, т.е. в областях, удовлетворяющих условию $M(\Omega) < \infty$. Существенно используются также известные оценки Бирдона и Поммеренке [14] и восходящая к Тейхмюллеру оценка $M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1$, приводимая в § 4 с кратким доказательством.

Отметим, что евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ определен как точная верхняя граница модулей

$$M(A) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2(A)}{r_1(A)}$$

на множестве колец A , удовлетворяющих требованиям: они лежат в области Ω , разделяют ее границу и имеют вид $r_1(A) < |z - z(A)| < r_2(A)$, причем их центры $z(A)$ являются точками границы области Ω .

В § 5 даны некоторые дополнения и приложения. Получены, в частности, оценки жесткости кручения области, обобщающие основной результат статьи автора [15]. Кроме того, доказано, что для каждой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что константа $c_p(s, \Omega)$ и ее аналог из (1.2) положительны для любых $s \in (2 - \varepsilon_0, \infty)$ и $p \in [1, \infty)$.

Подчеркнем еще раз, что мы рассматриваем метрику Пуанкаре с гауссовой кривизной $k = -4$, как это принято в теории функций комплексного переменного. При такой фиксации кривизны $1/\lambda_\Omega(z)$ в точности совпадает с классическим конформным радиусом области Ω в точке $z \in \Omega$ для односвязных областей гиперболического типа, не содержащих бесконечно удаленной точки. В частности, $R(z, D) = 1 - |z|^2$ для единичного круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $R(z, H_+) = 2y$ для верхней полуплоскости $H_+ = \{z \in \mathbb{C} : y = \text{Im } z > 0\}$, $R(z, Q_\pi) = 2 \sin y$ для полосы $Q_\pi = \{z \in \mathbb{C} : 0 < y = \text{Im } z < \pi\}$.

§ 2. Неравенства типа Брезиса–Маркуса для новых весов

2.1. О задаче Брезиса–Маркуса. Известно, что постоянная $\tilde{c}_2(2, \Omega)$ равна $1/4$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ (см. работу [13] и библиографию в этой работе). Результат Х. Брезиса и М. Маркуса [8] может быть сформулирован так: если Ω – ограниченная выпуклая область, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} + \frac{1}{4 \text{diam}^2(\Omega)} \iint_{\Omega} |u|^2 dx dy.$$

Для выпуклых областей с конечным диаметром как простое следствие результата Брезиса–Маркуса получаем строгое неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy > \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad u \neq 0,$$

где $H_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева, полученное замыканием $C_0^1(\Omega)$ по норме

$$\|u\| = \left(\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Подчеркнем еще раз, что в приведенном строгом неравенстве постоянная $1/4$ является точной, т.е. не может быть заменена постоянной $1/4 + \varepsilon_0$ при любом $\varepsilon_0 > 0$. Было доказано, что эффект Брезиса–Маркуса, связанный с усилением неравенства Харди с точной константой $1/4$ с помощью добавления положительного интегрального слагаемого, имеет место и для некоторых неограниченных выпуклых областей. А именно, доказано, что в неравенстве вида

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} + \lambda(\Omega) \iint_{\Omega} |u|^2 dx dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega)$$

постоянная $\lambda = \lambda(\Omega)$ допускает оценки снизу положительным числом для выпуклых областей с конечной площадью [9] и конечным внутренним радиусом [12]. Но, как показано в [12], если внутренний радиус

$$\delta_0(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} \text{dist}(z, \partial\Omega) = \infty,$$

то для такой области $\lambda = \lambda(\Omega) = 0$, т.е. эффект Брезиса–Маркуса исчезает.

2.2. Усиление неравенства (1.1) для односвязных и двусвязных областей. Для односвязных и двусвязных областей точная константа $c(\Omega)$ в неравенстве (1.1) равна единице и также известно, что она недостижима. Возникает естественный вопрос: возможен ли эффект Брезиса–Маркуса для неравенства (1.1) в случае односвязных и двусвязных областей? Положительный ответ на этот вопрос, за исключением двусвязных областей с бесконечным модулем, дан в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область гиперболического типа, g – любое из однолистных конформных отображений Ω на верхнюю полуплоскость $H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{R^2(z, \Omega)} + \frac{1}{4} \iint_{\Omega} |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx dy, \quad (2.1)$$

где $z = x + iy$. Постоянная $1/4$ не может быть заменена большей величиной.

2) Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – двусвязная область с модулем $M(\Omega) < \infty$, g – однолистное конформное отображение Ω на кольцо $A_q = \{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$, $q = \exp(-2\pi M(\Omega))$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{R^2(z, \Omega)} + \frac{1}{16M^2(\Omega)} \iint_{\Omega} |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx dy, \quad (2.2)$$

где $z = x + iy$. Постоянная $1/16$ не может быть заменена большей величиной.

Второй интеграл в правой части (2.2) не зависит от выбора конформного отображения. Действительно, поскольку конформные автоморфизмы кольца A_q представляют собой преобразования вида $w = a\zeta$ ($|a| = 1$) и $w = b/\zeta$ ($|b| = q$), то при любом выборе однолистного конформного отображения $g_1: \Omega \rightarrow A_q$

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \equiv \left| \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} \right|^2, \quad z \in \Omega.$$

Как следствие мы получаем прямой аналог неравенства Брезиса–Маркуса для произвольных выпуклых областей $\Omega \neq \mathbb{C}$ с видоизмененным вторым слагаемым. Действительно, для выпуклой области $R(z, \Omega) \leq 2 \text{dist}(z, \partial\Omega)$, $z \in \Omega$, в силу теоремы Лёвнера (см., например, [3; с. 45]). Поэтому из первой части теоремы 1 получаем следующее новое неравенство, аналогичное неравенству Брезиса–Маркуса в произвольной выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{C}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью, g – любое из однолистных конформных отображений Ω на верхнюю полуплоскость H_+ . Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx dy + \frac{1}{4} \iint_{\Omega} |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx dy,$$

где $z = x + iy$. Обе постоянные $1/4$ являются точными.

Хорошо известно, что по теореме Кёбе об одной четвертой для односвязных областей, не содержащих бесконечно удаленной точки, справедливо неравенство $R(z, \Omega) \leq 4 \text{dist}(z, \partial\Omega)$, $z \in \Omega$. Его применение дает следующее усиление результата Анконы [7].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область гиперболического типа, g – любое из однолистных конформных отображений Ω на верхнюю полуплоскость H_+ . Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{1}{16} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx dy + \frac{1}{4} \iint_{\Omega} |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx dy,$$

где $z = x + iy$.

2.3. Доказательство теоремы 1. Докажем сначала одно новое интегральное неравенство, аналогичное неравенству Пуанкаре и Харди на конечном отрезке.

ЛЕММА 1. Для любой абсолютно непрерывной функции $v: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $v(0) = v(\pi) = 0$, $v \not\equiv 0$, $v' \in L^2(0, \pi)$, имеет место неравенство

$$\int_0^\pi (v')^2(\theta) d\theta > \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{4} \int_0^\pi v^2(\theta) d\theta. \quad (2.3)$$

Постоянные $1/4$ при обоих интегралах в правой части являются точными в следующем смысле: если одна из них фиксирована, т.е. равна $1/4$, то другую нельзя заменить на $(1 + \varepsilon_0)/4$ при любом $\varepsilon_0 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – функция, удовлетворяющая условиям леммы. Рассмотрим вспомогательную функцию $v_0(\theta) = \sqrt{\sin \theta}$ и несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I(v) &= \int_0^\pi \left(v'(\theta) - v(\theta) \frac{v'_0(\theta)}{v_0(\theta)} \right)^2 d\theta \\ &= \int_0^\pi \left((v')^2(\theta) - 2v(\theta)v'(\theta) \frac{v'_0(\theta)}{v_0(\theta)} + v^2(\theta) \frac{(v'_0)^2(\theta)}{v_0^2(\theta)} \right) d\theta, \end{aligned}$$

понимаемый как предел интеграла по отрезку $[a, b] \subset (0, \pi)$ при $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \pi$. Если интеграл $I(v) = 0$, то $v(\theta) = Cv_0(\theta)$, $C = \text{const} \neq 0$. Но тогда $v'_0 \in L^2(0, \pi)$, что невозможно, так как

$$\int_0^\pi (v'_0)^2(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta = +\infty.$$

Если интеграл $I(v)$ расходится, то $I(v) = +\infty$ в силу неотрицательности подынтегральной функции. Таким образом, имеем $0 < I(v) \leq +\infty$. На самом деле этот интеграл сходится, и $I(v)$ является положительным числом. В этом можно убедиться следующим образом.

Для малых положительных θ

$$|v(\theta)| \leq \int_0^\theta |v'(t)| dt \leq \sqrt{\theta \int_0^\theta |v'(t)|^2 dt} = o(\sqrt{\theta}),$$

и аналогично получаем соотношение $|v(\theta)| = o(\sqrt{\pi - \theta})$ для малых положительных $\pi - \theta$. Поэтому

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{v^2(\theta)v'_0(\theta)}{v_0(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{v^2(\theta)}{2 \sin \theta} = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{v^2(\theta)v'_0(\theta)}{v_0(\theta)} = - \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{v^2(\theta)}{2 \sin \theta} = 0.$$

Интегрируя по частям среднее слагаемое во втором выражении для $I(v)$ с учетом указанного поведения $v^2(\theta)$ вблизи концевых точек интервала интегрирования, получаем равенства

$$\begin{aligned} I(v) &= \int_0^\pi (v')^2(\theta) d\theta + \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow \pi^-}} \int_a^b \frac{v''_0(\theta)}{v_0(\theta)} v^2(\theta) d\theta \\ &\quad - \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} v^2(\theta) \frac{v'_0(\theta)}{v_0(\theta)} + \lim_{\theta \rightarrow 0^+} v^2(\theta) \frac{v'_0(\theta)}{v_0(\theta)} \\ &= \int_0^\pi (v')^2(\theta) d\theta - \frac{1}{4} \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow \pi^-}} \int_a^b \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) v^2(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Можем записать итоговое равенство

$$I(v) = \int_0^\pi (v')^2(\theta) d\theta - \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) v^2(\theta) d\theta. \quad (2.4)$$

Последний интеграл сходится, так как в противном случае он равнялся бы $+\infty$ в силу неотрицательности подынтегральной функции. Но тогда $I(v) = -\infty$, что противоречит установленным выше неравенствам $0 < I(v) \leq +\infty$. Таким образом, $I(v)$ является положительным числом, и (2.4) влечет доказываемое неравенство (2.3).

Остается показать точность констант. Пусть $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. Докажем, что ни одну из констант $1/4$ в неравенстве (2.3) нельзя заменить на $(1 + \varepsilon_0)/4$. Для

этого рассмотрим допустимую функцию v_ε , определяемую равенством $v_\varepsilon(\theta) = (\sin \theta)^{1/2+\varepsilon/2}$, где ε – положительный параметр. Покажем, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция v_ε удовлетворяет неравенствам

$$\int_0^\pi (v'_\varepsilon)^2(\theta) d\theta < X_1(v_\varepsilon), \quad \int_0^\pi (v'_\varepsilon)^2(\theta) d\theta < X_2(v_\varepsilon), \quad (2.5)$$

где

$$X_1(v_\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int_0^\pi \frac{v_\varepsilon^2(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{4} \int_0^\pi v_\varepsilon^2(\theta) d\theta,$$

$$X_2(v_\varepsilon) = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{v_\varepsilon^2(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta + \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int_0^\pi v_\varepsilon^2(\theta) d\theta.$$

Имеем

$$\int_0^\pi (v'_\varepsilon)^2(\theta) d\theta = \frac{(1+\varepsilon)^2}{4} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{\sin^{1-\varepsilon} \theta} d\theta,$$

$$X_1(v_\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^{1-\varepsilon} \theta} + \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^{1+\varepsilon} \theta d\theta,$$

и первое неравенство в (2.5) справедливо, если $0 < \varepsilon \leq \sqrt{1+\varepsilon_0} - 1$. Далее, имеем

$$X_2(v_\varepsilon) = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^{1-\varepsilon} \theta} + \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int_0^\pi \sin^{1+\varepsilon} \theta d\theta,$$

и простые преобразования показывают, что

$$\int_0^\pi (v'_\varepsilon)^2(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^{1-\varepsilon} \theta} + \frac{1+\varepsilon}{4} \int_0^\pi \sin^{1+\varepsilon} \theta d\theta,$$

поэтому второе неравенство в (2.5) справедливо, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Лемма 1 доказана полностью.

Заменой переменных $\theta = -C \ln r$, где $0 < q \leq r \leq 1$ и $C = \pi / \ln(1/q)$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $q \in (0, 1)$. Для любой абсолютно непрерывной функции $v: [q, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $v(q) = v(1) = 0$, $v \neq 0$, $v' \in L^2(q, 1)$, имеет место неравенство

$$\int_q^1 (v')^2(r) r dr > \int_q^1 \frac{v^2(r)}{\rho^2(x)} r dr + \frac{\pi^2}{4 \ln^2 q} \int_q^1 \frac{v^2(r)}{r} dr, \quad (2.6)$$

где

$$\rho(r) = \frac{2r \ln q}{\pi} \sin \frac{\pi \ln r}{\ln q}.$$

Постоянная $\pi^2/4$ в (2.6) является точной.

Завершим теперь доказательство теоремы 1.

1) Случай односвязных областей. Заменой переменных $\zeta = g(z)$, $\zeta = \xi + i\eta$, легко убеждаемся в том, что (2.1) равносильно следующему неравенству

$$\iint_{H_+} |\nabla u|^2 d\xi d\eta \geq \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{R^2(\zeta, Q)} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{|\zeta|^2} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

для функций $u \in C_0^1(H_+)$. Докажем неравенство (2.7).

Пусть $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |\zeta| > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$, и $u \in C_0^1(H_+)$ – вещественнозначная функция. Применим к этой функции неравенство (2.3) по переменной $\varphi = \theta$ при любом фиксированном $\rho > 0$. Будем иметь

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \geq \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{|u|^2}{\sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{1}{4} \int_0^\pi |u|^2 d\varphi.$$

Делим обе части этого неравенства на $\rho > 0$ и интегрируем по переменной $\rho \in (0, \infty)$. Получаем неравенство

$$\iint_{H_+} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 d\xi d\eta \geq \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{4\rho^2 \sin^2 \varphi} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{\rho^2} d\xi d\eta,$$

которое влечет неравенство (2.7) в силу хорошо известных фактов: конформный радиус верхней полуплоскости в точке $\rho e^{i\varphi}$ равен $R(\rho e^{i\varphi}, H_+) = 2\eta = 2\rho \sin \varphi$ и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 = |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Из точности констант $1/4$ в лемме 1 легко следует, что константа $1/4$ в неравенствах (2.1) и (2.7) является точной.

2) *Случай двусвязных областей.* Рассмотрим вещественнозначную функцию $u \in C_0^1(A)$, где $A_q = \{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta = r e^{i\theta}$. Применим к функции u неравенство (2.6) по переменной $r = |\zeta|$, затем проинтегрируем по $\theta \in [0, 2\pi]$. В результате будем иметь

$$\iint_{A_q} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr d\theta \geq \iint_{A_q} \frac{u^2}{\rho^2(r)} r dr d\theta + \frac{\pi^2}{4 \ln^2 q} \iint_{A_q} \frac{u^2}{r^2} r dr d\theta.$$

Отсюда немедленно следует неравенство

$$\iint_{A_q} |\nabla u|^2 d\xi d\eta \geq \iint_{A_q} \frac{u^2}{R^2(\zeta, A_q)} d\xi d\eta + \frac{1}{16M^2(A_q)} \iint_{A_q} \frac{u^2}{|\zeta|^2} d\xi d\eta, \quad (2.8)$$

так как $|\partial u / \partial r| \leq |\nabla u|$, конформный радиус вычисляется по формуле

$$R(\zeta, A_q) = -\rho(|\zeta|)$$

и модуль кольца $M(A_q) = (2\pi)^{-1} \ln(1/q)$.

Для обоснования точности постоянной $1/16$ рассмотрим радиальные функции, т.е. функции вида $u(\xi, \eta) \equiv v(r)$, где $v \in C_0^1(q, 1)$. Легко видеть, что для таких функций точность $1/16$ в (2.8) равносильна точности второй постоянной $1/4$ в неравенстве (2.3) на множестве функций $v \in C_0^1(0, \pi)$. Этот факт верен, так как функция u_ε , использованная в лемме 1 при доказательстве точности констант, лежит в замыкании семейства $C_0^1(0, \pi)$ по норме

$$\|v\| := \left(\int_0^\pi (v')^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Доказываемое неравенство (2.2) получается из (2.8) заменой переменных $\zeta = g(z)$. Этим и завершается доказательство теоремы 1.

§ 3. Неравенства в произвольных областях гиперболического типа

3.1. Предварительные сведения. Нам потребуются некоторые формулы и уравнения для коэффициента метрики Пуанкаре и гиперболического радиуса. Наиболее известными являются следующее эллиптическое уравнение с нелинейной правой частью

$$\Delta U = -4e^{-2U}, \quad \text{где } U = -\ln \lambda_\Omega(z), \quad (3.1)$$

и эквивалентная формула $e^{2U} \Delta U = -4$, определяющая гауссову кривизну метрики. Известно также эквивалентное (3.1) уравнение Лиувилля, которое записывают в двух видах:

$$R \Delta R = |\nabla R|^2 - 4 \quad \text{или} \quad R \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial \bar{z}} = \left| \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} \right|^2 - 1,$$

где $R = R(z, \Omega)$. Все эти уравнения можно получить как следствия формулы

$$R(z, \Omega) = \frac{1}{\lambda_\Omega(z)} = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2),$$

где $z = f(\zeta)$, а $f: D \rightarrow \Omega$ — однолистное конформное отображение единичного круга $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ на область Ω , если Ω — односвязная область гиперболического типа, и накрывающее конформное отображение Римана–Пуанкаре, если Ω — многосвязная область гиперболического типа. Как следствие формулы для гиперболического радиуса получаем также, что если $\infty \in \Omega$, то существуют пределы

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|z|}{R(z, \Omega)} \frac{\partial R(z, \Omega)}{\partial |z|} = 2, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{R(z, \Omega)}{|z|^2} \in (0, \infty). \quad (3.2)$$

3.2. Оценки снизу $c_p(s, \Omega)$ для произвольной области гиперболического типа при $s \in (2, \infty)$ и $p \in [2, \infty)$. В работе [10] (см. также [11]) автором было доказано, что если $s > 2$, то $\tilde{c}_p(s, \Omega) \geq (s - 2)^p / p^p > 0$ для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, при любом $p \in [1, \infty)$. Следующая теорема представляет собой аналог этого утверждения для $c_p(s, \Omega)$ при $p \in [2, \infty)$. Отметим еще раз, что константа $c_p(s, \Omega)$ для $s \neq 2$ не является конформно инвариантной величиной, поэтому теорема 2 не является тривиальной даже для односвязных областей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — произвольная область гиперболического типа, $s \in (2, \infty)$, $p \in [2, \infty)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{s-p}(z, \Omega)} dx dy \geq \frac{4^p (s - 2)^{p/2}}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^s(z, \Omega)} dx dy, \quad (3.3)$$

где $z = x + iy$. При $p = 2$ и любом $s \in (3, \infty)$ постоянная перед интегралом в правой части является точной для любой ограниченной конечно-связной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей.

Утверждение о точности постоянной в этой теореме означает, что $c_2(s, \Omega) = 4(s - 2)$ для любой ограниченной конечно-связной области с гладкой границей при любом $s \in (3, \infty)$.

Доказательство теоремы 2 проведем в три этапа. Докажем сначала одно полезное тождество для вещественнозначных функций $u \in C_0^1(\Omega)$. В последующей лемме докажем теорему для случая $p = 2$. Затем получим доказательство неравенства (3.3) в общем случае.

ЛЕММА 2. Пусть σ – положительное число, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – произвольная область гиперболического типа. Для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место равенство

$$\iint_{\Omega} \frac{(\nabla u, \nabla R)}{R^{1+\sigma}} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{(4 + \sigma |\nabla R|^2)u}{R^{2+\sigma}} dx dy, \quad (3.4)$$

где $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$, $(\nabla u, \nabla R)$ – скалярное произведение градиентов функций u и R .

Если $\infty \notin \Omega$, то тождество (3.4) имеет место для произвольных вещественных чисел σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – функция, удовлетворяющая условиям леммы. Поскольку тождество (3.4) не является конформно инвариантным, то придется рассматривать отдельно случаи $\infty \in \Omega$ и $\infty \notin \Omega$.

Предположим сначала, что $\infty \notin \Omega$. Пусть Ω' – конечно-связная область с гладкой границей, причем $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ и Ω' содержит носитель функции u . Применим формулу Грина

$$\iint_{\Omega'} (U \Delta V + (\nabla U, \nabla V)) dx dy = \int_{\partial \Omega'} U \frac{\partial V}{\partial n} |dz|$$

к паре функций U и V , определяемых в Ω равенствами: $z = x + iy$, $U(x, y) = u(x, y)R^{-\sigma}$, $V(x, y) = \ln R$, где $R = R(z, \Omega)$. С учетом равенства $\Delta \ln R = -4R^{-2}$, вытекающего из соотношения (3.1), и обращения в нуль функции U на множестве $\Omega \setminus \Omega'$ будем иметь равенство

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{4u}{R^{2+\sigma}} + (\nabla(uR^{-\sigma}), \nabla \ln R) \right) dx dy = 0,$$

что равносильно доказываемому тождеству (3.4).

Предположим теперь, что $\infty \in \Omega$. Рассмотрим снова некоторую конечно-связную область Ω' с гладкой границей, причем $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ и Ω' содержит носитель функции u . Но формулу Грина применяем в области $\Omega' \setminus \{z : |z| \geq r\}$ для достаточно больших r . В правой части формулы Грина появится дополнительное слагаемое

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(r \cos \theta, r \sin \theta)}{R^{1+\sigma}(re^{i\theta}, \Omega)} \frac{\partial R(re^{i\theta}, \Omega)}{\partial r} r d\theta,$$

которое стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ в силу (3.2), и, таким образом, результат не меняется.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть σ – положительное число, $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – произвольная область гиперболического типа. Для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{R^\sigma} dx dy \geq 4\sigma \iint_{\Omega} \frac{u^2}{R^{2+\sigma}} dx dy, \quad (3.5)$$

где $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$. Постоянная 4σ является точной для любой ограниченной конечно-связной области Ω с гладкой границей при $\sigma > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество (3.4) для функции $u^2 \in C_0^1(\Omega)$, воспользуемся элементарными неравенствами $|(\nabla u, \nabla R)| \leq |\nabla u| |\nabla R|$ и $2ab \leq \sigma a^2 + b^2/\sigma$, полагая

$$a = \frac{u|\nabla R|}{R^{1+\sigma/2}}, \quad b = \frac{|\nabla u|}{R^{\sigma/2}}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{(4 + \sigma|\nabla R|^2)u^2}{R^{2+\sigma}} dx dy &= 2 \iint_{\Omega} \frac{u(\nabla u, \nabla R)}{R^{1+\sigma}} dx dy \\ &\leq \iint_{\Omega} \left(\sigma \frac{u^2|\nabla R|^2}{R^{2+\sigma}} + \frac{1}{\sigma} \frac{|\nabla u|^2}{R^\sigma} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Подынтегральные функции в первом и последнем интегралах имеют одинаковые слагаемые, содержащие множитель $|\nabla R|^2$. После удаления этих слагаемых получаем неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{4u^2}{R^{2+\sigma}} dx dy \leq \iint_{\Omega} \frac{1}{\sigma} \frac{|\nabla u|^2}{R^\sigma} dx dy,$$

равносильное (3.5).

Докажем утверждение о точности постоянной 4σ . Пусть $\sigma > 1$, Ω – ограниченная конечно-связная область, каждая граничная компонента которой является замкнутой гладкой кривой. В силу хорошо известных результатов нам достаточно указать вещественнозначную функцию $u_\sigma \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, обращающуюся в нуль на границе области Ω , обладающую свойством

$$\iint_{\Omega} \frac{u_\sigma^2}{R^{2+\sigma}} dx dy < \infty, \quad \iint_{\Omega} \frac{|\nabla u_\sigma|^2}{R^\sigma} dx dy < \infty$$

и реализующую знак равенства в неравенстве (3.5), т.е.

$$Y(u_\sigma) := \iint_{\Omega} \frac{|\nabla u_\sigma|^2}{R^\sigma} dx dy - 4\sigma \iint_{\Omega} \frac{u_\sigma^2}{R^{2+\sigma}} dx dy = 0.$$

Рассмотрим функцию, определяемую равенством $u_\sigma(x, y) = R^\sigma = R^\sigma(x + iy, \Omega)$. Она удовлетворяет всем предварительным требованиям, остается проверить

равенство $Y(R^\sigma) = 0$, пользуясь уравнением (3.1) и формулой Грина. Имеем

$$\begin{aligned} Y(R^\sigma) &= \iint_{\Omega} \sigma^2 R^{\sigma-2} |\nabla R|^2 dx dy - 4\sigma \iint_{\Omega} R^{\sigma-2} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \sigma^2 R^{\sigma-2} |\nabla R|^2 dx dy + \sigma \iint_{\Omega} R^\sigma \Delta \ln R dx dy \\ &= \sigma \iint_{\Omega} (R^\sigma \Delta \ln R + \sigma R^{\sigma-2} |\nabla R|^2) dx dy \\ &= \sigma \int_{\partial\Omega} R^{\sigma-1} \frac{\partial R}{\partial n} |dz| = -2\sigma \int_{\partial\Omega} R^{\sigma-1} |dz| = 0. \end{aligned}$$

Итак, лемма 3, представляющая собой случай теоремы 2 при $p = 2$, $s = 2 + \sigma$, доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Пользуемся стандартным приемом, основанным на применении неравенства Гёльдера. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ и $p > 2$. Тогда $|u|^{p/2} \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к этой функции неравенство (3.5), затем неравенство Гёльдера с показателями $p' = p/(p-2)$, $q' = p/2$ к произведению функций $|u|^{p-2}/R^{(2+\sigma)(1-2/p)}$, $|\nabla u|^2/R^{(2+\sigma-p)^2/2}$, имеем

$$\begin{aligned} 4\sigma \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^{2+\sigma}} dx dy &\leq \frac{p^2}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^{p-2} |\nabla u|^2}{R^\sigma} dx dy \\ &\leq \frac{p^2}{4} \left(\iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^{2+\sigma}} dx dy \right)^{1-2/p} \left(\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2+\sigma-p}} dx dy \right)^{2/p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2+\sigma-p}(z, \Omega)} dx dy \geq \left(\frac{16\sigma}{p^2} \right)^{p/2} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^{2+\sigma}(z, \Omega)} dx dy,$$

равносильное доказываемому неравенству (3.3) теоремы 2 при $s = 2 + \sigma$.

Теорема 2 доказана полностью.

3.3. Усиление L_2^p -неравенств для односвязных и двусвязных областей. В односвязных и двусвязных областях L_2^p -версия неравенства (1.1) известна с точной константой $c_p(2, \Omega) = 2^p/p^p$. А именно, если Ω – односвязная или двусвязная область гиперболического типа и $p \in [1, \infty)$, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dx dy}{R^{2-p}(x+iy, \Omega)} \geq \frac{2^p}{p^p} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p dx dy}{R^2(x+iy, \Omega)}. \quad (3.6)$$

Очевидно, (3.6) при $p = 2$ равносильно (1.1) с постоянной $c(\Omega) = 1$. Для односвязных областей и любых $p \in [1, \infty)$ это неравенство легко обосновывается. А именно, устанавливается сначала для полуплоскости с применением одномерного неравенства Харди, а затем распространяется на односвязные области гиперболического типа с использованием конформной инвариантности. Неравенство (3.6) анонсировано автором в работах [10], [11] (см. также [3; гл. 3]).

Здесь мы докажем неравенство (3.6) в усиленном варианте, когда под интегралом в левой части имеется положительный множитель, меньший единицы. А именно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $p \in [1, \infty)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область гиперболического типа или двусвязная область с конечным модулем, $z = x + iy$. Тогда существует непрерывная функция $\theta_\Omega: \Omega \rightarrow (0, \pi)$ такая, что для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z, \Omega)} (1 - \sin^2 \theta_\Omega(z))^{p/2} dx dy \geq \frac{2^p}{p^p} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z, \Omega)} dx dy.$$

Если модуль двусвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа равен бесконечности, то имеет место неравенство (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ – вещественнозначная функция. Предположим, что доказываемое неравенство имеет место при $p = 1$. Это неравенство для функции $|u|^p \in C_0^1(\Omega)$ при любом $p \in (1, \infty)$ записывается в виде

$$\frac{p}{2} \iint_{\Omega} \frac{|u|^{p-1} |\nabla u|}{R(z, \Omega)} (1 - \sin^2 \theta_\Omega(z))^{1/2} dx dy \geq \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2(z, \Omega)} dx dy$$

и влечет доказываемое утверждение при любом $p \in (1, \infty)$ в результате оценки левой части с помощью неравенства Гёльдера с показателями $p/(p-1)$ и p , примененного к произведению функций $|u|^{p-1}/R^{2-2/p}(z, \Omega)$ и $p|\nabla u|/(2R^{2/p-1}(z, \Omega))$.

Итак, нам достаточно доказать неравенство только для $p = 1$. При обосновании этого факта следуем схеме доказательства теоремы 1 в том смысле, что сначала получим некоторые одномерные интегральные неравенства типа Харди, затем применим их в областях по одной из переменных и воспользуемся неравенствами вида $|\nabla u| \geq |\partial u / \partial y|$ и $|\nabla u| \geq |\partial u / \partial r|$, где $y = \text{Im } z$, $r = |z|$.

Обозначим $g(\theta) = \int_0^\theta |v'(\varphi)| d\varphi$, где $v \in C_0^1(0, \pi)$ – вещественнозначная функция. Поскольку $|v(\theta)| \leq g(\theta)$, то интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{|v(\theta)|}{\sin^2 \theta} d\theta &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^\varphi g'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} |v'(\theta)| d\theta \int_\theta^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \int_0^{\pi/2} |v'(\theta)| \text{ctg } \theta d\theta. \end{aligned}$$

Это неравенство вместе с его аналогом для отрезка $[\pi/2, \pi]$ приводит к утверждению: для любой вещественнозначной функции $v \in C_0^1(0, \pi)$ справедливо неравенство

$$\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)| \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} d\theta \geq \int_0^\pi \frac{|v(\theta)|}{\sin^2 \theta} d\theta. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь полосу $Q_\pi = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < \eta = \text{Im } \zeta < \pi\}$ с конформным радиусом $R(\zeta, Q_\pi) = 2 \sin \eta$, $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть $u \in C_0^1(Q_\pi)$. Применяя неравенство (3.7) к функции u по переменной η при любом фиксированном ξ , учитывая неравенство $|\nabla u| \geq |\partial u / \partial \eta|$ и интегрируя затем по ξ , получаем

$$\frac{1}{2} \iint_{Q_\pi} \frac{|\nabla u|}{R(\zeta, Q_\pi)} (1 - \sin^2 \eta)^{1/2} d\xi d\eta \geq \iint_{Q_\pi} \frac{|u|}{R^2(\zeta, Q_\pi)} d\xi d\eta.$$

С помощью однолистного конформного отображения $g: \Omega \rightarrow Q_\pi$ для односвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа эту формулу перепишем в виде неравенства

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|}{R(z, \Omega)} (1 - \sin^2(\operatorname{Im} g(z)))^{1/2} dx dy \geq \iint_{\Omega} \frac{|u|}{R^2(z, \Omega)} dx dy$$

для функций $u \in C_0^1(\Omega)$. Итак, предложение доказано для случая односвязных областей.

Нам остается доказать соответствующие неравенства для концентрических колец $A_q = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$, где $q \in [0, 1)$. Снова воспользуемся ключевым неравенством (3.7), точнее, его следствиями.

Из неравенства (3.7) заменой переменных $\theta = -C \ln r$, где $0 < q \leq r \leq 1$, $C = \pi / \ln(1/q)$, с последующим переходом к пределу при $q \rightarrow 0$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. 1) Пусть $q \in (0, 1)$, $M_q = (2\pi)^{-1} \ln(1/q)$. Для любой вещественнозначной функции $v \in C_0^1(q, 1)$ имеет место неравенство

$$\int_q^1 \frac{|v'(r)| \sqrt{1 - \sin^2 \theta_q(r)}}{\rho_q(r)} r dr \geq 2 \int_q^1 \frac{|v(r)|}{\rho_q^2(r)} r dr, \quad (3.8)$$

где

$$\rho_q(r) = 4M_q r \sin \frac{\pi \ln r}{\ln q}, \quad \theta_q(r) = \pi \frac{\ln(1/r)}{\ln(1/q)} \in (0, \pi).$$

2) Для любой вещественнозначной функции $v \in C_0^1(0, 1)$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 \frac{|v'(r)|}{\rho_0(r)} r dr \geq 2 \int_0^1 \frac{|v(r)|}{\rho_0^2(r)} r dr, \quad (3.9)$$

где $\rho_0(r) = 2r \ln(1/r)$.

Неравенства (3.7) и (3.8) равносильны, получаются друг из друга заменой переменных. Неравенство (3.9) обосновывается следующим образом. Пусть $v \in C_0^1(0, 1)$. Носитель этой функции лежит на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо (3.8) для любого $q \in (0, \varepsilon)$. При $q \rightarrow 0^+$ и фиксированной функции v подынтегральные функции из (3.8) сходятся равномерно на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ к соответствующим подынтегральным функциям из (3.9) с учетом того, что $\rho_q(r) \rightarrow \rho_0(r)$ и $\theta_q(r) \rightarrow 0$ равномерно на $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Пусть $u \in C_0^1(A_q)$. Заметим, что гиперболический радиус кольца A_q для любого $q \in [0, 1)$ определяется формулой $R(z, A_q) = \rho_q(|z|)$ (см., например, [3; гл. 3]). Ясно, что применение оценки (3.8) к функции u по переменной $r = |z|$ и последующее интегрирование по угловой переменной приводят к следующему неравенству для кольца A_q при $q \in (0, 1)$:

$$\iint_{A_q} \frac{|\nabla u|}{R(z, A_q)} (1 - \sin^2 \theta_q(|z|))^{1/2} dx dy \geq 2 \iint_{A_q} \frac{|u|}{R^2(z, A_q)} dx dy, \quad z = x + iy.$$

Остается воспользоваться конформной инвариантностью для перехода к произвольным двусвязным областям с конечными модулями. Очевидно, в случае

$q = 0$ с применением (3.9) получаем требуемое неравенство для кольца A_0 с бесконечным модулем и, следовательно, для двусвязных областей гиперболического типа с бесконечными модулями.

§ 4. Области с равномерно совершенными границами

4.1. Определения. Будем пользоваться следующим конформно инвариантным определением равномерно совершенных множеств, приведенным в монографии Л. Карлесона и Т. Гамелина [2; с. 63–64]:

компактное собственное подмножество E расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ называется *равномерно совершенным*, если 1) множество E содержит не менее двух точек и 2) равномерно ограничены модули разделяющих E двусвязных областей из $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$.

Точную верхнюю границу упомянутых модулей обозначим через M_E , полагая $M_E = 0$, если множество разделяющих E двусвязных областей Ω' , $\Omega' \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, является пустым. Очевидно, равномерно совершенное множество не имеет изолированных точек, т.е. является совершенным множеством. В частности, если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – конечно-связная область, то ее граница $\partial\Omega$ является равномерно совершенной, т.е. $M_{\partial\Omega} < \infty$, тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ совершенна.

Рассмотрим теперь множество A_E разделяющих E концентрических колец A из $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ вида $r_1(A) < |z - z(A)| < r_2(A)$, где $z(A) \in E$. Евклидова характеристика $M_{0E} \leq M_E$ определяется формулой

$$M_{0E} = \sup_{A \in A_E} (2\pi)^{-1} \ln \frac{r_2(A)}{r_1(A)}.$$

Если A_E пусто, то полагаем $M_{0E} = 0$. Хорошо известно, что требования $M_{0E} < \infty$ и $M_E < \infty$ равносильны, подробнее этот вопрос мы обсудим ниже.

В случае, когда $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа и $E = \partial\Omega$, мы пользуемся обозначениями $M(\Omega) := M_{\partial\Omega}$, $M_0(\Omega) := M_{0\partial\Omega}$ и говорим, что область Ω имеет равномерно совершенную границу, если $M_0(\Omega) < \infty$. Величину $M_0(\Omega)$ будем называть евклидовым максимальным модулем области Ω . Она будет использована в следующей теореме при оценке $c_p(2, \Omega)$ снизу.

4.2. Оценки $c_p(s, \Omega)$ для области с равномерно совершенной границей при $s = 2$ и $p \in [1, \infty)$. Поскольку $c_p(2, \Omega)$ для односвязных и двусвязных областей известны (см. неравенство (3.6) и предложение 1), в следующем утверждении мы рассматриваем лишь области с границами, состоящими из трех или более компонент.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < \infty$. Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dx dy}{R^{2-p}(x + iy, \Omega)} \geq \frac{1}{p^p h^p(\Omega)} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p dx dy}{R^2(x + iy, \Omega)}, \quad (4.1)$$

где

$$h(\Omega) = h_1(\Omega) := \pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}, \quad \text{если } \infty \notin \Omega, \quad (4.2)$$

$$h(\Omega) = h_2(\Omega) := 2\pi M_0(\Omega) + \pi + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}, \quad \text{если } \infty \in \Omega, \quad (4.3)$$

Γ – гамма-функция Эйлера.

Докажем сначала одно неравенство, справедливое в любой области гиперболического типа (без предположения о равномерной совершенности ее границы).

ЛЕММА 4. Пусть $1 \leq p < \infty$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – произвольная область гиперболического типа. Для любой функции $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $u \in C^1(\mathbb{C})$ с носителем $\text{supp } u \subset \Omega$, имеет место неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|(\nabla u, \nabla R)|^p}{R^{2-p}} dx dy \geq \frac{4^p}{p^p} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2} dx dy + \frac{4^p \pi}{p^{p-1}} |u(\infty)|^p, \quad (4.4)$$

где $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$, $(\nabla u, \nabla R)$ – скалярное произведение градиентов функций.

Если в условии этой леммы рассматривать лишь функции $u \in C_0^1(\Omega)$, то нужно различать два случая. А именно, если $\infty \in \Omega$, то имеет место (4.4); если же $\infty \notin \Omega$, то внеинтегральное слагаемое в (4.4) нужно взять равным нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – вещественнозначная функция, удовлетворяющая условиям леммы. Повторяя построения и преобразования, проведенные при доказательстве леммы 2 для параметра $\sigma = 0$, получаем тождество

$$\iint_{\Omega} \frac{(\nabla u, \nabla R)}{R} dx dy = 4 \iint_{\Omega} \frac{u}{R^2} dx dy + 4\pi u(\infty). \quad (4.5)$$

Для любого $p > 1$ условие $u|_{\Omega} \in C_0^1(\Omega)$ влечет $|u|^p|_{\Omega} \in C_0^1(\Omega)$, причем $\nabla |u|^p = p|u|^{p-1} \text{sign } u \nabla u$. Поэтому из тождества (4.5) следует неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2} dx dy + \pi |u(\infty)|^p \leq \frac{p}{4} \iint_{\Omega} \frac{|u|^{p-1} |(\nabla u, \nabla R)|}{R} dx dy. \quad (4.6)$$

Очевидно, для фиксированной функции u при $p \rightarrow 1^+$ функция $|u|^p|_{\Omega}$ стремится к $|u|_{\Omega}$ равномерно в области Ω , существует и не превосходит единицы предел $\|u\|_{C(\Omega)}^{p-1}$ и, кроме того, имеет место оценка

$$\iint_{\Omega} \frac{|u|^{p-1} |(\nabla u, \nabla R)|}{R} dx dy \leq \|u\|_{C(\Omega)}^{p-1} \iint_{\Omega} \frac{|(\nabla u, \nabla R)|}{R} dx dy.$$

Поэтому, переходя к пределу при $p \rightarrow 1^+$ в неравенстве (4.6) с учетом того, что $\text{supp } u \subset \Omega$, получаем, что это неравенство справедливо и для $p = 1$. Таким образом, для $p = 1$ требуемое неравенство (4.4) доказано.

Снова берем число $p > 1$. Оценивая сверху интеграл в правой части (4.6) с применением неравенства Юнга $a^{p-1}b \leq (1 - 1/p)a^{p/(p-1)} + (1/p)b^p$ для функций

$$a = \frac{|u|^{p-1}}{R^{2-2/p}}, \quad b = \frac{p|(\nabla u, \nabla R)|}{4R^{2/p-1}},$$

непосредственными вычислениями получаем требуемое неравенство (4.4) для любого числа $p > 1$.

Этим и завершается доказательство леммы 4.

Для областей, не содержащих бесконечно удаленной точки, известно несколько критериев равномерной совершенности границ в терминах гиперболического радиуса и его градиента. В частности, для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа (см. [14], а также [3; гл. 3])

$$M_0(\Omega) < \infty \iff \alpha(\Omega) > 0 \iff \gamma(\Omega) < \infty,$$

где величины $\alpha(\Omega)$ и $\gamma(\Omega)$ определены равенствами

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z \in \Omega} \frac{\text{dist}(z, \partial\Omega)}{R(z, \Omega)}, \quad \gamma(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z, \Omega)|.$$

Нам потребуются следующие оценки: если Ω – область гиперболического типа, $\infty \notin \Omega$, то справедливо неравенство Бирдона и Поммеренке с уточненной константой a_0 (см. [14], а также [3; гл. 3])

$$\frac{1}{2\alpha(\Omega)} \leq \pi M_0(\Omega) + a_0, \quad a_0 = \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} \approx 4.3768796, \quad (4.7)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера, и неравенство Осгуда (см. [3; гл. 3])

$$\gamma(\Omega) \leq \frac{2}{\alpha(\Omega)}. \quad (4.8)$$

Нам также потребуется количественное сравнение модулей M_{0E} и M_E . Поскольку $M_{0E} \leq M_E$ по определению, то требуется оценить лишь сверху M_E при условии $M_{0E} < \infty$. В обзорной работе [16] и в книге [3; гл. 3] имеется несколько оценок для величин $M_0(\Omega)$ и $M(\Omega)$. Следующее утверждение представляет версию известных оценок с уточнением второй константы c_2 в неравенствах вида $M_E \leq c_1 M_{0E} + c_2$ (c_1 равняется 1 или 2). Заметим, что постоянная c_1 в этой оценке не может быть меньше 1, так как $M_{0E} \leq M_E$ и неравенство $M_E \leq c_1 M_{0E} + c_2$ должно выполняться для сколь угодно больших модулей.

ЛЕММА 5. Пусть E – компактное собственное подмножество расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $M_{0E} < \infty$. Если $\infty \in E$, то

$$M_E \leq M_{0E} + \frac{1}{2}. \quad (4.9)$$

Если же $\infty \notin E$, то

$$M_E \leq 2M_{0E} + 1. \quad (4.10)$$

Постоянная $1/2$ в неравенстве (4.9) и постоянная 2 в неравенстве (4.10) являются точными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. О. Тейхмюллером (см. [1; с. 75]) доказано, что среди всех двусвязных областей, отделяющих пару $\{-1, 0\}$ от пары $\{w_0, \infty\}$ с фиксированным $t = |w_0|$, наибольший модуль $\Lambda(t)$ будет иметь область $G_t = \mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [t, \infty])$. Известно также (см. [1; с. 75]), что $\Lambda(1) = 1/2$ и

$$t = t(q) = \frac{1}{16q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n}} \right)^8, \quad q = e^{-2\pi\Lambda(t)}. \quad (4.11)$$

Ясно, что для обоснования (4.9) и (4.10) достаточно сравнить величины $M(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$ для каждой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, являющейся компонентой связности открытого множества $\mathbb{C} \setminus E$. Действительно, пусть $\mathbb{C} \setminus E = \bigcup_{n \in S} \Omega_n$ – объединение областей, попарно не пересекающихся и являющихся компонентами связности открытого множества $\mathbb{C} \setminus E$, где S – конечное или счетное подмножество натуральных чисел. Понятно, что

$$\sup_{n \in S} M(\Omega_n) = M_E, \quad \sup_{n \in S} M_0(\Omega_n) \leq M_{0E},$$

так как при формировании M_{0E} могут участвовать концентрические кольца A , лежащие в одной из областей Ω_n , но центры которых принадлежат $E \setminus \partial\Omega_n$. Таким образом, оценки (4.9) и (4.10) будут справедливы, если для областей гиперболического типа $\Omega \subset \mathbb{C}$ с конечными евклидовыми модулями $M_0(\Omega)$ имеют место два следующих утверждения:

(P1) если $\infty \notin \Omega$, то $M(\Omega) \leq M_0(\Omega) + 1/2$;

(P2) если $\infty \in \Omega$, то $M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1$.

Оценка (P1) с обоснованием приведена в [3; гл. 3]. А именно, масштабированием и стандартными рассуждениями показано, что (P1) является следствием приведенной выше теоремы Тейхмюллера и неравенства

$$\Lambda(t) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln t, \quad 1 \leq t < \infty.$$

Эта оценка для $\Lambda(t)$ вытекает из двух простых фактов: $\Lambda(1) = 1/2$ и $qt(q)$ является убывающей функцией от $q \in (0, 1)$ в силу формулы Альфорса (4.11).

Таким образом, справедливы утверждение (P1) и неравенство (4.9), так как при условии $\infty \in E$ ни одна из компонент связности множества $\mathbb{C} \setminus E$ не содержит бесконечно удаленной точки.

Неравенство (4.10) вытекает из совокупности утверждений (P1) и (P2). Таким образом, нам остается доказать (P2), т.е. получить для максимального конформного модуля оценку $M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1$ при условиях: $\infty \in \Omega$, $M_0(\Omega) < \infty$ и $M(\Omega) \in (1, \infty]$. При выполнении этих условий существует последовательность двусвязных областей $\Omega'_n \subset \Omega$, каждая из которых разделяет $\partial\Omega$, конформный модуль $M(\Omega'_n) \in (1, \infty)$ для любого натурального n и $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\Omega'_n) = M(\Omega)$. Очевидно, достаточно доказать неравенство $M(\Omega'_n) \leq 2M_0(\Omega) + 1$ при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$.

Пусть f_n – однолиственное конформное отображение двусвязной области $\Omega'_n \subset \Omega$ на круговое кольцо $q_n < |\zeta| < 1/q_n$, где $q_n = \exp(-\pi M(\Omega'_n))$. Пусть $L_n \subset \Omega$ – прообраз единичной окружности $|\zeta| = 1$ при отображении f_n . Замкнутая

жорданова кривая L_n делит расширенную плоскость на две односвязные области Ω^+ и Ω^- , по крайней мере одна из которых не содержит бесконечно удаленной точки.

Предположим для определенности, что $\infty \notin \Omega^+$. Тогда

$$M(\Omega \cap \Omega^+) \leq M_0(\Omega \cap \Omega^+) + \frac{1}{2}$$

в силу утверждения (P1). Но $M_0(\Omega \cap \Omega^+) \leq M_0(\Omega)$ в силу определения евклидова максимального модуля, и, кроме того, $M(\Omega'_n \cap \Omega^+) = M(\Omega'_n)/2$ в силу того, что двусвязная область $\Omega'_n \cap \Omega^+$ конформно эквивалентна одному из колец $q_n < |\zeta| < 1$ и $1 < |\zeta| < 1/q_n$. Следовательно, получаем неравенство $M(\Omega'_n)/2 \leq M_0(\Omega) + 1/2$, что и требовалось доказать.

Точность постоянной 2 в неравенстве (4.10) показывает следующий пример. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, $a = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, и пусть E^ε – объединение двух окружностей $|z - 1| = \varepsilon$ и $|z + 1| = \varepsilon$.

Нетрудно видеть, что евклидов максимальный модуль E^ε равен модулю кольца $2\varepsilon < |z + 1 + \varepsilon| < 2$. При конформном отображении $w = (z - a)/(z + a)$ двусвязная компонента $\mathbb{C} \setminus E^\varepsilon$ переходит в концентрическое кольцо с отношением радиусов, равным $(1 + a)^2/\varepsilon^2$. Таким образом, несложные вычисления приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \pi M_{E^\varepsilon} &= \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \ln(1 + a), & \pi M_{0E^\varepsilon} &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \\ M_{E^\varepsilon} - 2M_{0E^\varepsilon} &= \frac{1}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}) > 0. \end{aligned}$$

С учетом произвольности $\varepsilon \in (0, 1)$ эти соотношения показывают точность постоянной 2 в неравенстве (4.10) и в неравенстве утверждения (P2). Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной. Предположим сначала, что $\infty \notin \Omega$. Тогда $\gamma(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z, \Omega)| < \infty$ и для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ из (4.4) следует неравенство

$$\gamma^p(\Omega) \iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}} dx dy \geq \frac{4^p}{p^p} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^2} dx dy.$$

Отсюда получаем доказываемое неравенство (4.1), где $h(\Omega)$ определяется формулой (4.2), так как $\gamma(\Omega) \leq 4h(\Omega) = 4h_1(\Omega)$ в силу (4.7) и (4.8).

Предположим теперь, что $\infty \in \Omega$. Возьмем точку $z_0 \in \partial\Omega$ и рассмотрим область Ω_0 – образ области Ω при конформном отображении $w = 1/(z - z_0)$. Так как $\infty \notin \Omega_0$, то в области Ω_0 будет справедливо неравенство (4.1) с $h(\Omega_0) = h_1(\Omega_0)$, определяемой формулой (4.2) с заменой $M_0(\Omega)$ на $M_0(\Omega_0)$. Но $M(\Omega_0) = M(\Omega)$, поэтому $M_0(\Omega_0) \leq M(\Omega) \leq 2M_0(\Omega) + 1$ в силу леммы 5 и $h_1(\Omega_0) \leq h_2(\Omega)$, где $h_2(\Omega)$ определяется формулой (4.3). В силу конформной инвариантности (4.1), получаем доказываемое неравенство для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$, $\infty \in \Omega$, где $h(\Omega)$ определяется формулой (4.3). Таким образом, теорема 3 доказана.

С учетом определений величин $\alpha(\Omega)$ и $\gamma(\Omega)$ из леммы 4 вытекают два следующих утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{4}{\gamma^2(\Omega)} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{R^2(z, \Omega)} \geq \frac{4\alpha^2(\Omega)}{\gamma^2(\Omega)} \iint_{\Omega} \frac{|u|^2 dx dy}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)}, \quad (4.12)$$

где $z = x + iy$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $1 \leq p < \infty$, $z = x + iy$. Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p dx dy}{\text{dist}^{2-p}(z, \partial\Omega)} \geq \frac{2^p \alpha^{2p}(\Omega)}{p^p} \iint_{\Omega} \frac{|u|^p dx dy}{\text{dist}^2(z, \partial\Omega)}.$$

Применяя поточечный вариант неравенства Осгуда в виде

$$\frac{|\nabla R(z, \Omega)|}{R(z, \Omega)} \leq \frac{2}{\text{dist}(z, \partial\Omega)}$$

(см. [3; гл. 3]) к неравенству (4.4) леммы 4 при $p = 1$, непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – произвольная область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u| dx dy}{\text{dist}(z, \partial\Omega)} \geq 2 \iint_{\Omega} \frac{|u| dx dy}{R^2(z, \Omega)}, \quad z = x + iy.$$

§ 5. Некоторые дополнения и приложения

5.1. Оценки максимальных конформных модулей. Хорошо известно, что модульные характеристики областей играют важную роль в теории конформных и квазиконформных отображений. В силу простоты неравенства (4.9) и (4.10) могут быть полезны для оценки трудно вычисляемого конформного модуля, так как евклидов максимальный модуль определяется достаточно просто во многих случаях. Приведем два простых примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $K \subset [0, 1]$ – классическое канторово множество. Для области $\Omega_K := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ евклидов максимальный модуль определяется легко как $M_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus K) = (2\pi)^{-1} \ln 3$. По-видимому, вычисление максимального конформного модуля $M(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$ представляет собой весьма сложную проблему. Но на основании (4.10) легко получаются оценки

$$\frac{1}{2\pi} \ln 3 \leq M(\overline{\mathbb{C}} \setminus K) \leq 1 + \frac{1}{\pi} \ln 3 \approx 1.3.$$

ПРИМЕР 2. Пусть E – объединение окружностей $|z - 4n| = 1$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $M_{0E} = (2\pi)^{-1} \ln 2$ и на основании (4.9) справедливы неравенства

$$0 \leq M_E - \frac{1}{2\pi} \ln 2 \leq \frac{1}{2}.$$

5.2. Критерии равномерной совершенности. Области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа с равномерно совершенными границами сыграли ключевую роль при изучении функционала $\tilde{c}_p(2, \Omega)$. Опираясь на оценки А. Ф. Бирдона и Х. Поммеренке (см. [14]), а также А. Анконы (см. [7]), в статье [6] Х. Л. Фернандес доказал следующую эквивалентность

$$\tilde{c}_2(2, \Omega) > 0 \iff M_0(\Omega) < \infty.$$

Иным методом это утверждение было обобщено автором [10] на любые значения показателя $p \in [1, \infty)$:

если $M_0(\Omega) < \infty$, то $\tilde{c}_p(2, \Omega) > 0$ для любого $p \in [1, \infty)$;

если $\tilde{c}_p(2, \Omega) > 0$ для некоторого фиксированного $p \in [1, \infty)$, то $M_0(\Omega) < \infty$.

Понятно, что требование $\tilde{c}_p(2, \Omega) > 0$ с параметром $p \in [1, \infty)$ представляет собой бесконечную серию критериев равномерной совершенности границы области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Попутно отметим, что в [10] для константы $\tilde{c}_p(2, \Omega)$ получены явные двусторонние оценки, зависящие лишь от евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ и показателя пространства $p \in [1, \infty)$. В частности, для всех $p \in [1, \infty)$ доказаны следующие оценки сверху:

$$\tilde{c}_p(2, \Omega) \leq \frac{\max\{2^{-p}, p^{-p}\}}{M_0^p(\Omega)}.$$

Для $c_p(s, \Omega)$ подобное неравенство не имеет места, так как равномерная совершенность границы области не является необходимым условием положительности этой величины. Отметим, что сравнение констант $c_p(s, \Omega)$ и $\tilde{c}_p(2, \Omega)$ основано на следующих поточечных неравенствах:

$$\alpha(\Omega)R(z, \Omega) \leq \text{dist}(z, \partial\Omega) \leq R(z, \Omega), \quad z \in \Omega,$$

где правое неравенство является простым следствием принципа гиперболической метрики и имеет место для любой области гиперболического типа. Очевидно, левое неравенство является нетривиальным лишь при условии положительности $\alpha(\Omega)$, что равносильно двум требованиям: $\infty \notin \Omega$ и граница области равномерно совершенна.

5.3. Оценки констант Харди при $s < 2$. Как было уже упомянуто, для функционала $\tilde{c}_p(s, \Omega)$ справедливо неравенство $\tilde{c}_p(s, \Omega) \geq (s - 2)^p / p^p > 0$ при любых $s \in (2, \infty)$, $p \in [1, \infty)$ и для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, не совпадающей со всей плоскостью. Если $s = 2$, то положительность $\tilde{c}_p(s, \Omega)$ равносильна равномерной совершенности границы области. Но разработанные в [10] методы не позволяют исследовать положительность $\tilde{c}_p(s, \Omega)$ для невыпуклых областей ни при каком $s < 2$.

Опираясь на формулы, полученные выше, покажем, что $\tilde{c}_p(s, \Omega) > 0$ при любом $p \in [1, \infty)$, если граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной и $s < 2$, но $(2 - s)$ – достаточно малое положительное число.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область гиперболического типа с равномерно совершенной границей, то существует число $\varepsilon_0 = 4/\gamma^2(\Omega) > 0$ такое, что $c_p(s, \Omega) > 0$ и $\tilde{c}_p(s, \Omega) > 0$ для любых $s \in (2 - \varepsilon_0, \infty)$ и $p \in [1, \infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{dist}(z, \partial\Omega) \asymp R(z, \Omega)$ в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей, то нам достаточно показать положительность одной из констант $c_p(s, \Omega)$ и $\tilde{c}_p(s, \Omega)$. С учетом того, что $\tilde{c}_p(s, \Omega) > 0$ при $s \geq 2$, нам остается рассмотреть случай, когда $s \in (2 - \varepsilon_0, 2)$. В этом случае мы покажем положительность $c_p(s, \Omega)$.

Пусть $s \in (2 - \varepsilon_0, 2)$. Обозначая для краткости, как и ранее, $R = R(z, \Omega)$, будем иметь неравенство $4 - (2 - s)|\nabla R|^2 \geq 4 - (2 - s)\gamma^2(\Omega) > 0$. Поскольку $\infty \notin \Omega$, то тождество (3.4) будет справедливо для любого числа $\sigma = s - 2 \in (-\infty, \infty)$. Поэтому для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеем равенство

$$\iint_{\Omega} \frac{(\nabla u, \nabla R)}{R^{s-1}} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{(4 - (2 - s)|\nabla R|^2)u}{R^s} dx dy.$$

Подставляя сюда $|u|^p \in C_0^1(\Omega)$ с параметром $p \in (1, \infty)$ вместо $u \in C_0^1(\Omega)$ и оценивая градиенты гиперболического радиуса, получаем

$$p\gamma(\Omega) \iint_{\Omega} \frac{|u|^{p-1}|\nabla u|}{R^{s-1}} dx dy \geq (4 - (2 - s)\gamma^2(\Omega)) \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^s} dx dy.$$

Это соотношение в сочетании с неравенством Гёльдера приводит к оценке

$$\iint_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{R^{s-p}} dx dy \geq \left(\frac{4 - (2 - s)\gamma^2(\Omega)}{p\gamma(\Omega)} \right)^p \iint_{\Omega} \frac{|u|^p}{R^s} dx dy$$

для любого $p \in (1, \infty)$. Полученное неравенство будет верно и при $p = 1$, в чем легко убедиться предельным переходом при $p \rightarrow 1^+$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$. Следовательно, для любого $p \in [1, \infty)$ и любого $s \in (2 - \varepsilon_0, 2)$ имеем: $4 - (2 - s)\gamma^2(\Omega) > 0$ и

$$c_p(s, \Omega) \geq \left(\frac{4 - (2 - s)\gamma^2(\Omega)}{p\gamma(\Omega)} \right)^p = 2^p \left(\frac{\varepsilon_0 - 2 + s}{p\sqrt{\varepsilon_0}} \right)^p > 0,$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что $\varepsilon_0 = 4/\gamma^2(\Omega) \leq 1$, так как $\gamma(\Omega) \geq 2$ (см., например, [3; гл. 3]) для любой области.

5.4. Двусторонние оценки жесткости кручения. Рассмотрим теперь функционал, определенный формулой

$$P(\Omega) = \sup_{\substack{u \in C_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \left(2 \iint_{\Omega} u(x, y) dx dy \right)^2 \left(\iint_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy \right)^{-1}.$$

Функционал $P(\Omega)$ имеет несколько физических интерпретаций. Если Ω является односвязной областью, то по классической модели Сен-Венана $P(\Omega)$ – коэффициент жесткости кручения упругой балки с поперечным сечением Ω . Для неодносвязных областей жесткость кручения определяется по более сложной модели. Но для произвольной плоской области $P(\Omega)$ также имеет физический смысл, он является, по модели Буссинеске, характеристикой расхода вязкой жидкости, текущей в трубе с поперечным сечением Ω (см. [17], а также [18]). Следующее утверждение для односвязных областей было доказано автором ранее в статье [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область гиперболического типа, $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$. Если Ω – односвязная или двусвязная область, то имеют место неравенства

$$\iint_{\Omega} R^2 dx dy \leq P(\Omega) \leq 4 \iint_{\Omega} R^2 dx dy.$$

Если же граница области Ω имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то справедливы неравенства

$$\iint_{\Omega} R^2 dx dy \leq P(\Omega) \leq \gamma^2(\Omega) \iint_{\Omega} R^2 dx dy,$$

где $\gamma(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z, \Omega)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению $P(\Omega)/4$ является наилучшей постоянной в неравенстве

$$\left(\iint_{\Omega} u(x, y) dx dy \right)^2 \leq \frac{P(\Omega)}{4} \iint_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

С другой стороны, применяя последовательно неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем неравенство (1.1) с постоянной $c(\Omega) = c_2(2, \Omega)$, для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\iint_{\Omega} u(x, y) dx dy \right)^2 &\leq \iint_{\Omega} R^2 dx dy \iint_{\Omega} \frac{u^2}{R^2} dx dy \\ &\leq \frac{\iint_{\Omega} R^2 dx dy}{c_2(2, \Omega)} \iint_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(\Omega) \leq \frac{4 \iint_{\Omega} R^2 dx dy}{c_2(2, \Omega)}.$$

Тем самым верхние оценки доказаны, так как $c(\Omega) = c_2(2, \Omega) = 1$ для односвязных и двусвязных областей, а в общем случае $c(\Omega) = c_2(2, \Omega) \geq 4/\gamma^2(\Omega)$ в силу неравенства (4.12).

Докажем нижние оценки. Воспользуемся тем, что с ростом области гиперболический радиус и функционал $P(\Omega)$ растут, точнее, $P(\Omega') \leq P(\Omega)$ и

$R(z, \Omega') \leq R(z, \Omega)$ во всех точках $z \in \Omega'$, если область $\Omega' \subset \Omega$. Поэтому нижние оценки достаточно доказать для конечно-связной области Ω' , каждая граничная компонента которой является замкнутой аналитической кривой. Но для такой области гиперболический радиус является гладкой функцией, обращающейся в нуль на границе области и принадлежащей замыканию $C_0^1(\Omega')$ по норме

$$\|u\| = \left(\iint_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Поэтому, подставляя вместо пробной функции $R^2 = R^2(z, \Omega')$, получаем

$$\begin{aligned} P(\Omega') &\geq \left(2 \iint_{\Omega'} R^2(z, \Omega') dx dy \right)^2 \left(\iint_{\Omega'} |\nabla R^2(z, \Omega')|^2 dx dy \right)^{-1} \\ &= \iint_{\Omega'} R^2(z, \Omega') dx dy, \end{aligned}$$

так как

$$\iint_{\Omega'} |\nabla R^2(z, \Omega')|^2 dx dy - 4 \iint_{\Omega'} R^2(z, \Omega') dx dy = 0.$$

Это равенство устанавливается с применением уравнения Лиувилля для гиперболического радиуса и формулы Грина так же, как и при доказательстве точности констант в лемме 3. Таким образом, предложение 3 доказано.

Отметим, Р. Г. Салахудиновым (см. [19]) доказано, что нижняя оценка из [15] для жесткости кручения в случае односвязных областей может быть усилена следующим образом:

$$\frac{3}{2} \iint_{\Omega} R^2(z, \Omega) dx dy \leq P(\Omega),$$

причем в этой оценке достигается равенство, если область является кругом. В дополнение к этому факту в [20] показано, что равенство

$$P(\Omega) = \frac{3}{2} \iint_{\Omega} R^2(z, \Omega) dx dy$$

невозможно для областей, отличных от круга и имеющих конечную жесткость кручения.

Остается неясным, можно ли уточнить константы в нижних и верхних оценках предложения 3 в общем случае.

Список литературы

- [1] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973, ix+157 pp.
- [2] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Universitext Tracts Math., Springer-Verlag, New York, 1993, x+175 pp.
- [3] F. G. Avkhadiiev, K.-J. Wirths, *Schwarz–Pick type inequalities*, Front. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, viii+156 pp.
- [4] D. Sullivan, “Related aspects of positivity in Riemannian geometry”, *J. Differential Geom.*, **25**:3 (1987), 327–351.

- [5] J. L. Fernández, J. M. Rodríguez, “The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15**:1 (1990), 165–183.
- [6] J. L. Fernández, “Domains with strong barrier”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **5**:1-2 (1989), 47–65.
- [7] A. Ancona, “On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbf{R}^n$ ”, *J. London Math. Soc.* (2), **34**:2 (1986), 274–290.
- [8] H. Brezis, M. Marcus, “Hardy’s inequalities revisited. Dedicated to Ennio De Giorgi”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **25**:1-2 (1997), 217–237.
- [9] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev, “A geometrical version of Hardy’s inequality”, *J. Func. Anal.*, **189**:2 (2002), 539–548.
- [10] F. G. Avkhadiyev, “Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants”, *Lobachevskii J. Math.*, **21** (2006), 3–31 (electronic).
- [11] Ф. Г. Авхадиев, “Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 8–18; англ. пер.: F. G. Avkhadiyev, “Hardy-type inequalities on planar and spatial open sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **255**:1 (2006), 2–12.
- [12] F. G. Avkhadiyev, K.-J. Wirths, “Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **87**:8-9 (2007), 632–642.
- [13] Ф. Г. Авхадиев, “Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна $1/4$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:5 (2014), 3–26; англ. пер.: F. G. Avkhadiyev, “A geometric description of domains whose Hardy constant is equal to $1/4$ ”, *Izv. Math.*, **78**:5 (2014), 855–876.
- [14] A. F. Beardon, Ch. Pommerenke, “The Poincaré metric of plane domains”, *J. London Math. Soc.* (2), **18**:3 (1978), 475–483.
- [15] Ф. Г. Авхадиев, “Решение обобщенной задачи Сен-Венана”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 3–12; англ. пер.: F. G. Avkhadiyev, “Solution of the generalized Saint Venant problem”, *Sb. Math.*, **189**:12 (1998), 1739–1748.
- [16] T. Sugawa, “Uniformly perfect sets: analytic and geometric aspects”, *Sugaku Expositions*, **16**:2 (2003), 225–242.
- [17] Г. Поля, Г. Серё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, ГИФМЛ, М., 1962, 336 с.; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Stud., **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951, xvi+279 pp.
- [18] F. G. Avkhadiyev, A. R. Kacimov, “Analytical solutions and estimates for microlevel flows”, *J. Porous Media*, **8**:2 (2005), 125–148.
- [19] R. G. Salahudinov, “Isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane”, *J. Inequal. Appl.*, **6**:3 (2001), 253–260.
- [20] D. A. Abramov, F. G. Avkhadiyev, D. Kh. Giniyatova, “Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity”, *Lobachevskii J. Math.*, **32**:2 (2011), 149–158.

Фарит Габидинович Авхадиев

(Farit G. Avkhadiyev)

Казанский (Приволжский) федеральный
университет

E-mail: favhadiyev@kpfu.ru

Поступила в редакцию

17.01.2015 и 21.07.2015