Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Саражинский, Равновесные меры и крамеровские асимптотики в необратимой динамической системе со степенным перемешиванием, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 127–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:21:50

УДК 517.987

Д. С. Саражинский

Равновесные меры и крамеровские асимптотики в необратимой динамической системе со степенным перемешиванием

Рассматривается динамическая система, порожденная сдвигом на пространстве конечнозначных односторонних последовательностей. Исследуются спектральные свойства сопряженных с данной системой операторов Перрона–Фробениуса, зависимость потенциальных функций которых от номера члена последовательности убывает со степенной скоростью. С их помощью на фазовом пространстве строится семейство равновесных инвариантных вероятностных мер, обладающих свойством степенного перемешивания. По отношению к этим мерам для функций на фазовом пространстве доказывается справедливость центральной предельной теоремы и теоремы Крамера о вероятностях больших отклонений.

Подобные результаты для существенно более легкого случая экспоненциального убывания зависимости потенциалов от номера члена последовательности были получены ранее автором статьи.

Библиография: 4 названия.

Инвариантные конусы операторов Перрона–Фробениуса. Пусть X – пространство всех последовательностей $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ с элементами из конечного множества M . На X определим метрику ρ следующим образом: для $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $y = \{y_1, y_2, \dots\}$ положим $\rho(x, y) = 1/i(x, y)$, где $i(x, y) = \min\{j : x_j \neq y_j\}$. Легко видеть, что (X, ρ) – компактное метрическое пространство с единичным диаметром.

Обозначим через $H^\alpha(X)$ банахову алгебру вещественнозначных гёльдеровских функций на X с показателем $\alpha > 0$ и нормой

$$\|f\|_\alpha = \sup |f| + \text{Hol}_\alpha f, \quad \text{Hol}_\alpha f = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho^\alpha(x, y)}.$$

Пусть $\sigma: X \rightarrow X$ – оператор сдвига: $\sigma(\{x_1, x_2, \dots\}) = \{x_2, x_3, \dots\}$. Для некоторой функции $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$ рассмотрим оператор Перрона–Фробениуса A_φ на $H^\alpha(X)$, определяемый формулой

$$[A_\varphi f](x) = \sum_{x' \in \sigma^{-1}(x)} e^{\varphi(x')} f(x'). \quad (1)$$

Поскольку $H^{\alpha+1}(X) \subset H^\alpha(X)$, линейный оператор A_φ непрерывен на $H^\alpha(X)$. Очевидно, что этот оператор переводит неотрицательные функции в неотрицательные. Кроме того, для него выполняется “гомологическое тождество”

$$A_\varphi((f \circ \sigma)g) = f A_\varphi g. \quad (2)$$

Напомним, что *конусом* в вещественном банаховом пространстве называется такое замкнутое выпуклое множество K , что если $v \in K \setminus \{0\}$ и $\lambda > 0$, то $\lambda v \in K$, а $-\lambda v \notin K$. Тогда с учетом сказанного выше оператор A_φ оставляет инвариантным конус всех неотрицательных функций в $H^\alpha(X)$. Более того, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если функция f из $H^\alpha(X)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю, то функция $A_\varphi^n f$ строго положительна при всех достаточно больших n .*

Это вытекает из того, что при $n > \varepsilon^{-1}$ множество $\sigma^{-n}(x)$ образует ε -сеть на X , и из существования такой точки из X , что в некоторой ее ε -окрестности функция f положительна.

Для любых положительных чисел C, α определим множество

$$K_C^\alpha = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq f(x) \leq f(y) e^{C\rho^\alpha x, y} \text{ для всех } x, y \in X\}. \quad (3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [1; предложение 1]. *Множество K_C^α , определяемое формулой (3), является конусом в $H^\alpha(X)$. Если $f \in K_C^\alpha$, то $\|f\|_\alpha \leq e^{2C} \inf f$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$ и $C > \|\varphi\|_{\alpha+1}/\alpha$. Тогда*

$$A_\varphi K_C^\alpha \subset K_C^\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x, y \in X$ и положим $\rho = \rho(x, y)$. Рассмотрим две точки $x' \in \sigma^{-1}(x)$ и $y' \in \sigma^{-1}(y)$, у которых совпадают первые координаты: $x'_1 = y'_1$. Тогда $\rho(x', y') = \rho/(1 + \rho)$. Поэтому для любой функции $f \in K_C^\alpha$ имеем

$$\begin{aligned} f(x') e^{\varphi(x')} &\leq f(y') e^{C\rho^\alpha(x', y')} e^{\varphi(y') + \|\varphi\|_{\alpha+1} \rho^{\alpha+1}(x', y')} \\ &= f(y') e^{\varphi(y')} \exp \left\{ \frac{C\rho^\alpha}{(1 + \rho)^\alpha} + \frac{\|\varphi\|_{\alpha+1} \rho^{\alpha+1}}{(1 + \rho)^{\alpha+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Суммируя последнее неравенство по $x'_1 = y'_1 \in M$, получаем

$$[A_\varphi f](x) \leq [A_\varphi f](y) \exp \left\{ \frac{C\rho^\alpha}{(1 + \rho)^\alpha} + \frac{\|\varphi\|_{\alpha+1} \rho^{\alpha+1}}{(1 + \rho)^{\alpha+1}} \right\}, \quad \rho = \rho(x, y). \quad (4)$$

По условию $\|\varphi\|_{\alpha+1} < C\alpha$. Поэтому для любого числа $\rho \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{C\rho^\alpha}{(1 + \rho)^\alpha} + \frac{\|\varphi\|_{\alpha+1} \rho^{\alpha+1}}{(1 + \rho)^{\alpha+1}} &\leq \frac{C\rho^\alpha(1 + \rho) + \|\varphi\|_{\alpha+1} \rho^{\alpha+1}}{(1 + \rho)^{\alpha+1}} \\ &\leq \frac{C\rho^\alpha(1 + (\alpha + 1)\rho)}{(1 + \rho)^{\alpha+1}} \leq C\rho^\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4), (5) следует, что $A_\varphi f \in K_C^\alpha$.

Собственные векторы операторов Перрона–Фробениуса. Обозначим через $L_+^\alpha(X)$ множество положительных линейных функционалов $\nu: H^\alpha(X) \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. таких функционалов, что $\nu(f) \geq 0$ для всякой неотрицательной функции $f \in H^\alpha(X)$. Для любых функционала $\nu \in L_+^\alpha(X)$ и функции $f \in H^\alpha(X)$ справедливы неравенства $\nu(f) \leq \nu(\sup |f|) \leq \|f\|_\alpha \nu(1)$. Отсюда вытекает, что если $\nu \neq 0$, то $\nu(1) > 0$.

Следующие два предложения аналогичны соответствующим утверждениям из [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любой функции $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$ существуют такое вещественное число λ_φ и функционал $\nu_\varphi \in L_+^\alpha(X)$, что $\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M(X) = \{\nu \in L_+^\alpha(X) \mid \nu(1) = 1\}$. Это множество состоит из функционалов с единичной нормой и поэтому компактно в $*$ -слабой топологии. Рассмотрим на $M(X)$ отображение $G(\nu) = \nu(A_\varphi 1)^{-1} \nu \circ A_\varphi$. Так как A_φ переводит неотрицательные функции в неотрицательные и $A_\varphi 1 > 0$, то G – непрерывное отображение выпуклого компакта $M(X)$ в себя. По теореме Шаудера–Тихонова существует неподвижная точка ν_φ отображения G . Для нее $\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi$, где $\lambda_\varphi = \ln \nu_\varphi(A_\varphi 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$ и для вещественного числа λ_φ и ненулевого функционала $\nu_\varphi \in L_+^\alpha(X)$ выполняется равенство $\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi$. Тогда существует единственная функция $h_\varphi \in H^\alpha(X)$, удовлетворяющая условиям $A_\varphi h_\varphi = e^{\lambda_\varphi} h_\varphi$ и $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$. При этом h_φ содержится во всяком конусе K_C^α из (3), для которого $C > \|\varphi\|_{\alpha+1}/\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функционал ν_φ положителен, для всякой функции $f \in K_C^\alpha$ с учетом предложения 2

$$\|f\|_\alpha \leq e^{2C} \inf f \leq e^{2C} \frac{\nu_\varphi(f)}{\nu_\varphi(1)}. \quad (6)$$

Рассмотрим множество $\Lambda = \{f \in K_C^\alpha \mid \nu_\varphi(f) = 1\}$. Это непустое выпуклое множество. Из предложения 3 и определения функционала ν_φ следует, что оно инвариантно относительно действия оператора $e^{-\lambda_\varphi} A_\varphi$.

Для всякой функции $f \in \Lambda$ в силу (6) можем записать

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_\alpha \rho^\alpha(x, y) \leq \frac{e^{2C}}{\nu_\varphi(1)} \rho^\alpha(x, y).$$

Таким образом, множество Λ равномерно непрерывно и замкнуто в равномерной норме. По теореме Арцела–Асколи оно компактно в $C(X)$. Так как оператор $e^{-\lambda_\varphi} A_\varphi$ непрерывен на $C(X)$, то, применяя теорему Шаудера–Тихонова, находим такую функцию $h_\varphi \in \Lambda$, что $A_\varphi h_\varphi = e^{\lambda_\varphi} h_\varphi$ и $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$.

Для доказательства единственности этой функции предположим, что в $H^\alpha(X)$ существует двумерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению e^{λ_φ} . Рассмотрим любую функцию h , лежащую на пересечении этого подпространства с границей конуса всех неотрицательных функций в $H^\alpha(X)$. Так

как h граничная, то она в некоторой точке $x \in X$ должна принимать нулевое значение, что в силу предложения 1 невозможно. Полученное противоречие доказывает единственность собственного вектора h_φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$, то оператор A_φ имеет единственную неотрицательную собственную функцию $h_\varphi \in H^\alpha(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование положительной собственной функции $h_\varphi \in H^\alpha(X)$ и ее единственность для соответствующего собственного значения вытекает из предложений 4, 5. Остается рассмотреть случай существования неотрицательных собственных функций h_1, h_2 с различными собственными значениями.

В соответствии с предложением 1 эти функции должны быть строго положительными. Поэтому при достаточно малом $\theta > 0$ будет положительной также и функция $h = h_1 - \theta h_2$. Не ограничивая общности, можно считать, что собственное значение для h_2 больше собственного значения для h_1 . Тогда при достаточно большом натуральном n функция $A_\varphi^n h$ уже не будет неотрицательной. Получили противоречие.

Предложение доказано.

Далее через $r(A_\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_\varphi^n\|^{1/n}$ будем обозначать спектральный радиус оператора A_φ на пространстве $H^\alpha(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$ и существуют такое вещественное число λ_φ и ненулевой функционал $\nu_\varphi \in L_+^\alpha(X)$, что $\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi$. Тогда $e^{\lambda_\varphi} = r(A_\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_C^α — конус (3) с константой $C > \|\varphi\|_{\alpha+1}/\alpha$. Очевидно, единичная функция является внутренней точкой K_C^α . Если функция f настолько мала, что $1 + f \in K_C^\alpha$, то в силу (6)

$$\|A_\varphi^n f\|_\alpha \leq \|A_\varphi^n(1 + f)\|_\alpha + \|A_\varphi^n 1\|_\alpha \leq e^{n\lambda_\varphi} \frac{e^{2C}}{\nu_\varphi(1)} \nu_\varphi(2 + f).$$

Отсюда вытекает искомый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. В условиях предложения 7 собственному значению e^{λ_φ} отвечает единственный положительный (с точностью до умножения на константу) собственный функционал ν_φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует не коллинеарный функционалу ν_φ положительный собственный функционал ν'_φ с тем же собственным значением. Для достаточно большого положительного C рассмотрим конус K_C^α . Согласно предложению 5 в нем лежит единственный собственный вектор h_φ оператора A_φ с собственным значением e^{λ_φ} , удовлетворяющий равенству $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$. Отнормируем функционал ν'_φ условием $\nu'_\varphi(h_\varphi) = 1$. Так как конус K_C^α имеет внутренние точки, то в нем существует различающая функционалы ν_φ и ν'_φ функция f^* . Не ограничивая общности, можно считать, что $\nu_\varphi(f^*) = 1$. Тогда $\nu'_\varphi(f^*) \neq 1$. Рассмотрим множество

$$V = \{f \in K_C^\alpha \mid \nu_\varphi(f) = 1, \nu'_\varphi(f) = \nu'_\varphi(f^*)\}.$$

Оно является выпуклым замкнутым подмножеством множества $\Lambda = \{f \in K_C^\alpha \mid \nu_\varphi(f) = 1\}$, которое компактно в $C(X)$ (см. доказательство предложения 5). Значит, множество V тоже компактно в $C(X)$. Теперь, пользуясь инвариантностью V относительно действия оператора $e^{-\lambda_\varphi} A_\varphi$ и теоремой Шаудера–Тихонова, заключаем, что в V есть неподвижная точка этого оператора. По предложению 5 она совпадает с h_φ . Но тогда $\nu'_\varphi(h_\varphi) = \nu'_\varphi(f^*) \neq 1$, что противоречит условию $\nu'_\varphi(h_\varphi) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$, то оператор A_φ имеет единственный положительный собственный линейный функционал $\nu_\varphi \in L_+^\alpha(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование положительного собственного линейного функционала $\nu_\varphi \in L_+^\alpha(X)$ вытекает из предложения 4. По предложению 7 любой собственный положительный функционал имеет собственное значение $r(A_\varphi)$. А по предложению 8 этому собственному значению отвечает единственный собственный функционал. Предложение доказано.

Объединим результаты предложений 4–9 в одной теореме.

ТЕОРЕМА 1. Для всякой функции $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$:

- 1) существуют число λ_φ , положительный линейный функционал $\nu_\varphi \in L_+^\alpha(X)$ и положительная функция $h_\varphi \in H^\alpha(X)$ такие, что

$$\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi, \quad A_\varphi h_\varphi = e^{\lambda_\varphi} h_\varphi, \quad \nu_\varphi(h_\varphi) = 1;$$

- 2) число e^{λ_φ} совпадает со спектральным радиусом оператора A_φ на $H^\alpha(X)$;
- 3) собственный функционал ν_φ является единственным (с точностью до умножения на константу) положительным собственным линейным функционалом оператора A_φ на $H^\alpha(X)$;
- 4) функция h_φ является единственной (с точностью до умножения на константу) неотрицательной собственной функцией оператора A_φ на $H^\alpha(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$. Тогда функция h_φ из теоремы 1 содержится во всяком конусе K_C^α из (3), для которого $C > \|\varphi\|_{\alpha+1}/\alpha$, и является единственной отвечающей собственному значению e^{λ_φ} оператора A_φ на $H^\alpha(X)$ ненулевой собственной функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$. Тогда для произвольного положительного $\beta < \alpha$ линейный функционал ν_φ из теоремы 1, являющийся положительным собственным функционалом оператора A_φ на $H^\alpha(X)$, однозначно продолжается до положительного собственного линейного функционала оператора A_φ на $H^\beta(X)$.

Действительно, пользуясь тем, что $\varphi \in H^{\beta+1}(X)$, из теоремы 1 заключаем, что у оператора A_φ на $H^\beta(X)$ существует единственный ненулевой положительный собственный линейный функционал. Сужение этого функционала на $H^\alpha(X)$ будет ненулевым положительным собственным линейным функционалом для оператора A_φ на $H^\alpha(X)$ и поэтому в силу единственности ν_φ обязано совпадать с последним.

Устойчивость собственного вектора. Фиксируем функцию $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$. По теореме 1 и замечанию 2 к ней этой функции соответствуют вещественное число λ_φ , положительная функция $h_\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$, а также определенный и положительный на всяком пространстве $H^\beta(X)$, $\beta > 0$, линейный функционал ν_φ такие, что $\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi$, $A_\varphi h_\varphi = e^{\lambda_\varphi} h_\varphi$ и $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$. В дальнейшем нам будет удобно считать, что $\lambda_\varphi = 0$ (чего всегда можно добиться, заменяя φ на $\varphi - \lambda_\varphi$). Отнормируем также для однозначности функционал ν_φ и функцию h_φ условиями $\nu_\varphi(1) = 1$, $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$ и $\lambda_\varphi = 0$. Тогда найдутся малое положительное $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \varphi)$ и большое положительное число $R = R(\alpha, \varphi)$ такие, что для всякого положительного $\beta \leq \alpha$ при любых $f \in H^\beta(X)$, $l \in \mathbb{N}$ и $x, y \in X$ будут выполняться неравенства

$$h_\varphi^{-1} A_\varphi^l f|_x^y \leq \text{Hol}_\beta(h_\varphi^{-1} f)(1+l)^{-\beta} + (1-\varepsilon) \text{osc}(h_\varphi^{-1} f), \quad (7)$$

$$h_\varphi^{-1} A_\varphi^l f|_x^y \leq \text{Hol}_\beta(h_\varphi^{-1} f) \frac{\rho^\beta(x, y)}{(1+l\rho(x, y))^\beta} + R \text{osc}(h_\varphi^{-1} f) \rho^{\alpha+1}(x, y), \quad (8)$$

где $f|_x^y = f(y) - f(x)$ и $\text{osc}(f) = \sup f - \inf f$. При этом можно положить

$$\varepsilon(\alpha, \varphi) = \frac{\inf^2 h_\varphi}{\sup^2 h_\varphi} e^{-\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi)(\alpha+1)^{-1}},$$

$$R(\alpha, \varphi) = \left(2 \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi)}{\inf h_\varphi} + \frac{\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi)}{\alpha+1} \right) \exp \left\{ \left(2 \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi)}{\inf h_\varphi} + \frac{\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi)}{\alpha+1} \right) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение функцию $\tilde{g} = h_\varphi^{-1} f - \inf(h_\varphi^{-1} f)$. Она неотрицательна и для нее

$$\text{Hol}_\beta(h_\varphi^{-1} f) = \text{Hol}_\beta(\tilde{g}), \quad \text{osc}(h_\varphi^{-1} f) = \sup(\tilde{g}), \quad h_\varphi^{-1} A_\varphi^l f|_x^y = h_\varphi^{-1} A_\varphi^l(\tilde{g} h_\varphi)|_x^y.$$

Пусть $S_l \varphi = \varphi + \varphi \circ \sigma + \dots + \varphi \circ \sigma^{l-1}$. Зафиксируем $x, y \in X$ и $\rho = \rho(x, y)$ и рассмотрим две точки $x' \in \sigma^{-l}(x)$ и $y' \in \sigma^{-l}(y)$, у которых совпадают первые l координат: $x'_i = y'_i$, $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда левая часть в неравенствах (7), (8) есть сумма по x', y' слагаемых вида

$$(h_\varphi \circ \sigma^l)^{-1} e^{S_l \varphi} \tilde{g} h_\varphi|_{x'}^{y'} = h_\varphi^{-1}(y) e^{S_l \varphi(y')} (\tilde{g}(y') - \tilde{g}(x')) h_\varphi(y') \\ + \tilde{g}(x') (h_\varphi^{-1}(y) e^{S_l \varphi(y')} h_\varphi(y') - h_\varphi^{-1}(x) e^{S_l \varphi(x')} h_\varphi(x')). \quad (9)$$

Заметим, что $\rho(x', y') = \rho/(1+l\rho)$. Поэтому первое слагаемое в правой части (9) оценивается сверху величиной $h_\varphi^{-1}(y) e^{S_l \varphi(y')} h_\varphi(y') \text{Hol}_\beta(\tilde{g}) \rho^\beta / (1+l\rho)^\beta$. В силу определения оператора A_φ и функции h_φ сумма этих оценок по $y' \in \sigma^{-l}(y)$ равна $\text{Hol}_\beta(\tilde{g}) \rho^\beta / (1+l\rho)^\beta$ и, поскольку $\rho \leq 1$, не превосходит $\text{Hol}_\beta(\tilde{g}) (1+l)^{-\beta}$. Последние два выражения дают первые слагаемые в правой части неравенств (7), (8).

Обратимся ко второму слагаемому в правой части (9). С одной стороны, его можно представить как

$$\tilde{g}(x') h_\varphi^{-1}(y) e^{S_l \varphi(y')} h_\varphi(y') \left(1 - \frac{h_\varphi^{-1}(x)}{h_\varphi^{-1}(y)} \frac{h_\varphi^{-1}(x')}{h_\varphi^{-1}(y')} e^{S_l \varphi(x') - S_l \varphi(y')} \right), \quad (10)$$

а с другой – как

$$\tilde{g}(x') h_\varphi^{-1}(x) e^{S_l \varphi(x')} h_\varphi(x') \left(\frac{h_\varphi^{-1}(y)}{h_\varphi^{-1}(x)} \frac{h_\varphi^{-1}(y')}{h_\varphi^{-1}(x')} e^{S_l \varphi(y') - S_l \varphi(x')} - 1 \right). \quad (11)$$

С учетом неотрицательности $\tilde{g}$, неравенства $\rho \leq 1$ и того, что

$$\begin{aligned} |S_l \varphi(y') - S_l \varphi(x')| &\leq \text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi) \sum_{t=1}^l \left(\frac{\rho}{1+t\rho} \right)^{\alpha+2} \\ &\leq \text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi) \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{1+t\rho} \right)^{\alpha+2} dt \leq \text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi) (\alpha+1)^{-1} \rho^{\alpha+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

нетрудно видеть, что

$$\frac{h_\varphi^{-1}(x)}{h_\varphi^{-1}(y)} \frac{h_\varphi^{-1}(x')}{h_\varphi^{-1}(y')} e^{S_l \varphi(x') - S_l \varphi(y')} \geq \varepsilon(\alpha, \varphi) = \frac{\inf^2 h_\varphi}{\sup^2 h_\varphi} e^{-\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi) (\alpha+1)^{-1}}.$$

Поэтому суммирование (10) по прообразам даст величину, не превосходящую $\sup(\tilde{g})(1 - \varepsilon)$. Это есть второе слагаемое в правой части неравенства (7).

Далее, поскольку $h_\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$, то для любых $u, v \in X$

$$\frac{h_\varphi(u)}{h_\varphi(v)} \leq 1 + \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi) \rho^{\alpha+1}(u, v)}{h_\varphi(v)} \leq \exp \left\{ \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi)}{\inf(h_\varphi)} \rho^{\alpha+1}(u, v) \right\}.$$

Из этой оценки и (12) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\frac{h_\varphi^{-1}(y)}{h_\varphi^{-1}(x)} \frac{h_\varphi^{-1}(y')}{h_\varphi^{-1}(x')} e^{S_l \varphi(y') - S_l \varphi(x')} - 1 \\ &\leq \exp \left\{ \left(2 \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi)}{\inf(h_\varphi)} + \frac{\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi)}{\alpha+1} \right) \rho^{\alpha+1} \right\} - 1 \leq R(\alpha, \varphi) \rho^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

где $\rho = \rho(x, y)$ и

$$R(\alpha, \varphi) = \left(2 \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi)}{\inf(h_\varphi)} + \frac{\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi)}{\alpha+1} \right) \exp \left\{ \left(2 \frac{\text{Hol}_{\alpha+1}(h_\varphi)}{\inf(h_\varphi)} + \frac{\text{Hol}_{\alpha+2}(\varphi)}{\alpha+1} \right) \right\}.$$

Поэтому сумма величин (11) по всем прообразам не превзойдет $\sup(\tilde{g}) R \rho^{\alpha+1}$. Это есть второе слагаемое в правой части неравенства (8). Лемма доказана.

Для всяких $\Xi > 1$ и $\beta \in (0, \alpha+1]$ определим на $H^\beta(X)$ полунорму

$$|f|_{\beta, \Xi} = \max \{ \text{Hol}_\beta(h_\varphi^{-1} f), \Xi \text{osc}(h_\varphi^{-1} f) \}. \quad (13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для всякой функции $f \in \ker \nu_\varphi \cap H^\beta(X)$

$$a\|f\|_\beta \leq |f|_{\beta,\Xi} \leq b\|f\|_\beta,$$

где $a = \|h_\varphi\|_\beta^{-1}/3$, $b = \Xi\|h_\varphi^{-1}\|_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \neq 0$ и $g = h_\varphi^{-1}f$. Так как $gh_\varphi \in \ker \nu_\varphi$, а ν_φ — положительный функционал, то g — знакопеременная либо принимающая хотя бы в одной точке нулевое значение функция. Поэтому $\sup |g| \leq \text{osc}(g) \leq |f|_{\beta,\Xi}$, а значит,

$$\begin{aligned} \|f\|_\beta &= \sup |gh_\varphi| + \text{Hol}_\beta(gh_\varphi) \leq \sup(h_\varphi)|f|_{\beta,\Xi} + \text{Hol}_\beta(gh_\varphi) \\ &\leq \sup(h_\varphi)|f|_{\beta,\Xi} + \sup |g| \text{Hol}_\beta(h_\varphi) + \sup(h_\varphi) \text{Hol}_\beta(g) \leq 3\|h_\varphi\|_\beta |f|_{\beta,\Xi}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили оценку снизу для $|f|_{\beta,\Xi}$. Оценка сверху вытекает из неравенств

$$|f|_{\beta,\Xi} \leq \Xi \text{Hol}_\beta(h_\varphi^{-1}f) \leq \Xi\|h_\varphi^{-1}\|_\beta \|f\|_\beta.$$

Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$, причем $\lambda_\varphi = 0$. И пусть для положительного $\beta \leq \alpha$ числа Ξ и $l \in \mathbb{N}$ настолько велики, что

$$(1 - 2^{-\beta})^{-1}R < \Xi < (1 + l)^\beta \varepsilon,$$

где R, ε — константы из леммы 1. Тогда найдется такое малое $\delta > 0$, что для любых $f \in H^\beta(X)$ и $g \in H^{\beta+1}(X)$, удовлетворяющих условию $|g|_{\beta+1,\Xi} \leq \delta|f|_{\beta,\Xi}$, будет выполняться

$$|A_\varphi^l f + g|_{\beta,\Xi} \leq |f|_{\beta,\Xi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x, y \in X$, $\rho = \rho(x, y) \leq 1$, используя оценки леммы 1, можем записать

$$\begin{aligned} \Xi h_\varphi^{-1}(A_\varphi^l f + g)|_x^y &\leq \Xi|f|_{\beta,\Xi}(1 + l)^{-\beta} + (1 - \varepsilon)|f|_{\beta,\Xi} + |g|_{\beta+1,\Xi} \\ &\leq |f|_{\beta,\Xi} \left(\frac{\Xi}{(1 + l)^\beta} + 1 - \varepsilon + \delta \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} h_\varphi^{-1}(A_\varphi^l f + g)|_x^y &\leq |f|_{\beta,\Xi} \frac{\rho^\beta}{(1 + l\rho)^\beta} + R \frac{|f|_{\beta,\Xi}}{\Xi} \rho^{\beta+1} + |g|_{\beta+1,\Xi} \rho^{\beta+1} \\ &\leq |f|_{\beta,\Xi} \rho^\beta \left((1 + l\rho)^{-\beta} + \left(\frac{R}{\Xi} + \delta \right) \rho \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14) видно, что при достаточно малых значениях δ будет выполняться

$$\Xi \text{osc}(h_\varphi^{-1}(A_\varphi^l f + g)) \leq |f|_{\beta,\Xi}.$$

Обратимся к (15). Так как функция $(1 + l\rho)^{-\beta} + (R/\Xi + \delta)\rho$ строго выпукла по ρ , то ее максимальное значение на отрезке $[0, 1]$ достигается при $\rho = 0$ или $\rho = 1$. Поэтому при достаточно малых δ оно не превзойдет единицы. В этом случае из (15) будет следовать, что

$$\text{Hol}_\beta(h_\varphi^{-1}(A_\varphi^l f + g)) \leq |f|_{\beta,\Xi}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$ и $\lambda_\varphi = 0$. Тогда для любого положительного $\beta < \alpha$ существует такое большое положительное число C , что для всякой функции $f \in H^\alpha(X)$ при всех $l = 1, 2, \dots$ будет выполняться неравенство

$$\sup |A_\varphi^l f h_\varphi - \nu_\varphi(f h_\varphi) h_\varphi| \leq C \text{Hol}_\alpha(f) l^{-\beta}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение линейный оператор

$$a_\varphi: f \mapsto h_\varphi^{-1} A_\varphi f h_\varphi.$$

Тогда, как нетрудно видеть, $A_\varphi^l f h_\varphi = h_\varphi a_\varphi^l f$. Из леммы 1 вытекает, что найдутся такое малое положительное $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \varphi)$ и большое положительное число $R = R(\alpha, \varphi)$, что при всех $l \in \mathbb{N}$

$$\text{osc}(a_\varphi^l f) \leq \text{Hol}_\alpha(f) (1+l)^{-\alpha} + (1-\varepsilon) \text{osc}(f), \quad (17)$$

$$\text{Hol}_\alpha(a_\varphi^l f) \leq \text{Hol}_\alpha(f) + R \text{osc}(f) \leq (R+1) \text{Hol}_\alpha(f). \quad (18)$$

Представим натуральное число l в виде $l = l_1 l_2 + r$, где l_1, l_2 и r — также некоторые натуральные числа. Тогда $a_\varphi^l f = (a_\varphi^{l_1})^{l_2} g$, где $g = a_\varphi^r f$. Поэтому, применяя последовательно l_2 раза к функции g оператор $a_\varphi^{l_1}$ и производя на каждом шаге с помощью (17), (18) оценки осцилляций, заключаем, что

$$\begin{aligned} \text{osc}(a_\varphi^l f) &\leq (R+1) \text{Hol}_\alpha(g) (1 + (1-\varepsilon) + \dots + (1-\varepsilon)^{l_2-1}) (1+l_1)^{-\alpha} \\ &\quad + (1-\varepsilon)^{l_2} \text{osc}(g) \leq \frac{R+1}{\varepsilon} \text{Hol}_\alpha(g) l_1^{-\alpha} + (1-\varepsilon)^{l_2} \text{osc}(g). \end{aligned} \quad (19)$$

Положим $l_1 = [l^{\beta/\alpha}]$, $l_2 = [l^{1-\beta/\alpha}]$ и воспользуемся тем, что $u/2 \leq [u]$ для любого числа $u \geq 1$. Тогда из (19) с учетом оценок

$$\text{osc}(g) \leq \text{Hol}_\alpha(g) \leq (R+1) \text{Hol}_\alpha(f)$$

вытекает, что при некотором не зависящем от l достаточно большом положительном C' будет выполняться

$$\text{osc}(a_\varphi^l f) \leq C' \text{Hol}_\alpha(f) l^{-\beta}. \quad (20)$$

Далее, для любого фиксированного $x \in X$ можем записать

$$a_\varphi^l f(x) - a_\varphi^l f \leq \text{osc}(a_\varphi^l f), \quad a_\varphi^l f - a_\varphi^l f(x) \leq \text{osc}(a_\varphi^l f). \quad (21)$$

Умножая левые и правые части неравенств (21) на функцию h_φ и применяя положительный функционал ν_φ с учетом тождеств $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$, $\nu_\varphi(h_\varphi a_\varphi^l f) = \nu_\varphi(f h_\varphi)$, получаем

$$|a_\varphi^l f(x) - \nu_\varphi(f h_\varphi)| \leq \text{osc}(a_\varphi^l f).$$

Отсюда с учетом (20) и вытекает искомая оценка (16).

Асимптотика возмущений операторов Перрона–Фробениуса. Как и прежде, будем рассматривать функцию $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$, а также соответствующие ей вещественное число λ_φ , положительную функцию $h_\varphi \in H^{\alpha+1}(X)$ и определенный и положительный на всяком пространстве $H^\beta(X)$, $\beta > 0$, линейный функционал ν_φ , для которых $\nu_\varphi \circ A_\varphi = e^{\lambda_\varphi} \nu_\varphi$, $A_\varphi h_\varphi = e^{\lambda_\varphi} h_\varphi$ и $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$. При этом по-прежнему для удобства будем считать, что оператор A_φ отнормирован таким образом, что $\lambda_\varphi = 0$.

Рассмотрим последовательность функций $S_n f = f + f \circ \sigma + \dots + f \circ \sigma^{n-1}$. Введем обозначение

$$] \alpha [= \begin{cases} [\alpha], & \alpha \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha - 1, & \alpha \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$, причем $\lambda_\varphi = 0$, и $f \in H^\alpha(X)$. Тогда существуют такое малое положительное r , такие большие положительные D, Ξ и такие наборы больших положительных констант B_m, C_m , $m = 1, 2, \dots,] \alpha [$, что для любого $n = 1, 2, \dots$ найдутся вещественные числа $\Gamma_{m,n}$, функции $h_{m,n} \in H^{\alpha-m}(X)$ и семейство $G_n(\xi, x)$, вообще говоря, комплекснозначных функций на X , аналитически зависящее от малого комплексного параметра ξ и вещественное при вещественных ξ , для которых выполняются условия:

- а) $A_\varphi^n(e^{\xi S_n f + \xi^{] \alpha [+1} G_n(\xi, x)} h_\varphi) = e^{\sum_{m=1}^{] \alpha [} \Gamma_{m,n} \xi^m} (h_\varphi + \sum_{m=1}^{] \alpha [} h_{m,n} \xi^m)$ для всех n и $|\xi| < r$;
- б) $|G_n(\xi, x)| \leq Dn$, $|\xi| < r$;
- в) $|\Gamma_{m,n}| \leq C_m n$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha [$;
- г) $h_{m,n} \in \ker \nu_\varphi$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha [$;
- д) $|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi} \leq B_m$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha [$, где $|\cdot|_{\alpha-m, \Xi}$ – полунормы (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что достаточно провести доказательство для функции, совпадающей с f с точностью до положительного числового множителя. Таким образом, величину $\|f\|_\alpha$ в дальнейшем можем полагать сколь угодно малой.

Доказательство теоремы будем проводить индукцией по n . Для этого выберем некоторые удовлетворяющие теореме 2 степень l оператора A_φ и число $\Xi > 1$ и докажем справедливость теоремы 4 для всех $n = 1, 2, \dots, l$.

С этой целью, пользуясь единственностью разложения аналитической функции в ряд Тейлора, определим $\Gamma_{m,n}$, $h_{m,n}$ и $G_n(\xi, x)$ последовательно из соотношений

$$\nu_\varphi(e^{\xi S_n f} h_\varphi) = e^{\sum_{m=1}^{] \alpha [} \Gamma_{m,n} \xi^m} \pmod{\xi^{] \alpha [+1}}, \quad (22)$$

$$\sum_{m=1}^{] \alpha [} h_{m,n} \xi^m = e^{-\sum_{m=1}^{] \alpha [} \Gamma_{m,n} \xi^m} A_\varphi^n(e^{\xi S_n f} h_\varphi) - h_\varphi \pmod{\xi^{] \alpha [+1}}, \quad (23)$$

$$\sum_{m=1}^{] \alpha [} h_{m,n} \xi^m = e^{-\sum_{m=1}^{] \alpha [} \Gamma_{m,n} \xi^m} A_\varphi^n(e^{\xi S_n f + \xi^{] \alpha [+1} G_n(\xi, x)} h_\varphi) - h_\varphi. \quad (24)$$

Соотношения (22), (23) однозначно определяют $\Gamma_{m,n}$ и $h_{m,n}$ соответственно. Чтобы удовлетворить равенству (24), определим семейство $G_n(\xi, x)$ формулой $G_n(\xi, x) = G'_n(\xi, \sigma^n x)$, где

$$G'_n(\xi, x) = -\frac{1}{\xi^{|\alpha|+1}} \ln \left(\frac{e^{-\sum_{m=1}^{|\alpha|} \Gamma_{m,n} \xi^m} A_\varphi^n(e^{\xi S_n f} h_\varphi)}{h_\varphi + \sum_{m=1}^{|\alpha|} h_{m,n} \xi^m} \right) (x), \quad (25)$$

где выбирается главное значение логарифма.

Из определения функций $h_{m,n}$ следует их принадлежность пространству $H^\alpha(X)$, а значит, и $H^{\alpha-m}(X)$. Применяя к правой части (23) функционал ν_φ и учитывая соотношение (22), убеждаемся в том, что $\nu_\varphi(h_{m,n}) = 0$.

Далее, из (22) видно, что путем уменьшения $\|f\|_\alpha$ можно добиться сколь угодно малости $\Gamma_{m,n}$ для всех $n = 1, 2, \dots, l$. Тогда из (23) следует, что нормы $\|h_{m,n}\|_{\alpha-m}$ тоже можно сделать сколь угодно малыми, а значит, в силу предложения 10 можно сделать малыми и полунормы $|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi}$, $m = 1, 2, \dots, l$. Тем самым, удовлетворяются условия в)–д) при $n = 1, 2, \dots, l$.

Обратимся к условию б). Из (23) видно, что функция

$$R_n(\xi, x) = \xi^{-|\alpha|+1} \left(e^{-\sum_{m=1}^{|\alpha|} \Gamma_{m,n} \xi^m} A_\varphi^n(e^{\xi S_n f} h_\varphi) - \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{|\alpha|} h_{m,n} \xi^m \right) \right) (x) \quad (26)$$

аналитически зависит от ξ в некоторой окрестности нуля и вещественна при вещественных ξ . Тогда из (25), (26) с учетом строгой положительности h_φ видно, что функция $G'_n(\xi, x)$ обладает аналогичными свойствами.

Таким образом, мы доказали справедливость теоремы для всех $n \leq l$.

Проведем теперь шаг индукции. Предположим, что заключение теоремы выполняется для всех номеров, меньших некоторого $n > l$. Докажем его теперь для данного n . Для этого, используя гомологическое тождество (2), перепишем для номера $n-l$ условие а) в виде

$$(A_\varphi e^{\xi f})^{n-l} (e^{\xi^{|\alpha|+1} G_{n-l}(\xi, x)} h_\varphi) = e^{\sum_{m=1}^{|\alpha|} \Gamma_{m,n-l} \xi^m} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{|\alpha|} h_{m,n-l} \xi^m \right)$$

и применим к нему оператор $(A_\varphi(e^{\xi f} \cdot))^l$. В результате получим

$$\begin{aligned} & (A_\varphi e^{\xi f})^n (e^{\xi^{|\alpha|+1} G_{n-l}(\xi, x)} h_\varphi) \\ &= e^{\sum_{m=1}^{|\alpha|} \Gamma_{m,n-l} \xi^m} A_\varphi^l \left(e^{\xi S_l f} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{|\alpha|} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) видно, что для проведения шага индукции достаточно найти такие вещественные константы $\gamma_{m,n}$, функции $h_{m,n} \in H^{\alpha-m}(X)$, $m = 1, 2, \dots, l$, и семейст-

во функций $g'_n(\xi, x)$, аналитически зависящее от комплексного параметра ξ и вещественное при вещественных ξ , для которых

$$\begin{aligned} \text{a')} \quad & A_\varphi^l \left(e^{\xi S_l f} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right) \\ & = e^{\sum_{m=1}^{] \alpha[} \gamma_{m,n} \xi^m - \xi^{] \alpha[+1} g'_n(\xi, x)} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n} \xi^m \right) \end{aligned}$$

в некоторой не зависящей от n окрестности точки $\xi = 0$;

б') $|g'_n(\xi, x)|$ ограничены не зависящей от n константой в той же окрестности;

в') $|\gamma_{m,n}|$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha[$, ограничены не зависящими от n константами;

г') $\nu_\varphi(h_{m,n}) = 0$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha[$;

д') $|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi} \leq B_m$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha[$.

Определим $\gamma_{m,n}$, $h_{m,n}$ и $g'_n(\xi, x)$ последовательно из соотношений

$$\nu_\varphi \left(e^{\xi S_l f} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right) = e^{\sum_{m=1}^{] \alpha[} \gamma_{m,n} \xi^m} \pmod{\xi^{] \alpha[+1}}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n} \xi^m &= e^{-\sum_{m=1}^{] \alpha[} \gamma_{m,n} \xi^m} \\ &\times A_\varphi^l \left(e^{\xi S_l f} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right) - h_\varphi \pmod{\xi^{] \alpha[+1}}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n} \xi^m &= e^{-\sum_{m=1}^{] \alpha[} \gamma_{m,n} \xi^m + \xi^{] \alpha[+1} g'_n(\xi, x)} \\ &\times A_\varphi^l \left(e^{\xi S_l f} \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right) - h_\varphi. \quad (30) \end{aligned}$$

Так как для $h_{m,n-l}$ выполняются г'), д'), то, используя предложение 10, из (28) заключаем, что $\gamma_{m,n}$ ограничены некоторыми константами, зависящими только от B_m , но не от n . Значит, справедливо в'). В свою очередь, (28) и (29) обеспечивают выполнение г') для $h_{m,n}$.

Проверим д'). Для этого сначала покажем, что в (28) числа $\gamma_{m,n}$ определяются только функциями $h_{i,n-l}$ с номерами $i \leq m-1$. Действительно, так как $\nu_\varphi(h_\varphi) = 1$, а $\nu_\varphi(h_{m,n-l}) = 0$, то (28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & 1 + \nu_\varphi((e^{\xi S_l f} - 1)h_\varphi) + \nu_\varphi \left(\frac{e^{\xi S_l f} - 1}{\xi} \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n-l} \xi^{m+1} \right) \\ & = e^{\sum_{m=1}^{] \alpha[} \gamma_{m,n} \xi^m} \pmod{\xi^{] \alpha[+1}}. \quad (31) \end{aligned}$$

При разложении левой части этого соотношения в ряд Тейлора, как легко видеть, при каждой степени ξ получается коэффициент, зависящий от функций $h_{i,n-l}$, у которых индекс i меньше степени ξ . Отсюда и вытекает, что

$$\gamma_{m,n} = \gamma_m(f; h_\varphi, h_{1,n-l}, \dots, h_{m-1,n-l}).$$

Теперь, разлагая в (29) экспоненты в ряды Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{[\alpha]} h_{m,n} \xi^m &= A_\varphi^l \left[\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\xi S_l f - \sum_{m=1}^{[\alpha]} \gamma_{m,n} \xi^m \right)^k \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{[\alpha]} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right] - h_\varphi \\ &= \sum_{m=1}^{[\alpha]} \xi^m A_\varphi^l h_{m,n-l} + A_\varphi^l \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\xi S_l f - \sum_{m=1}^{[\alpha]} \gamma_{m,n} \xi^m \right)^k \right. \\ &\quad \left. \times \left(h_\varphi + \sum_{m=1}^{[\alpha]} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right] \pmod{\xi^{[\alpha]+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом сделанного относительно $\gamma_{m,n}$ замечания вытекает, что

$$h_{m,n} = A_\varphi^l h_{m,n-l} + F_m(f; h_\varphi, h_{1,n-l}, \dots, h_{m-1,n-l}). \quad (32)$$

Используя (32), попытаемся оценить величину $|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi}$. Пусть δ – положительная малая константа из теоремы 2, соответствующая выбранным выше l и Ξ . Вначале предположим, что в (32)

$$|F_m(f; h_\varphi, h_{1,n-l}, \dots, h_{m-1,n-l})|_{\alpha-m+1, \Xi} > \delta |A_\varphi^l h_{m,n-l}|_{\alpha-m, \Xi}. \quad (33)$$

Тогда с учетом предложения 10 из (32) получаем

$$|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi} < b_m (1 + \delta^{-1}) \|F_m(f; h_\varphi, h_{1,n-l}, \dots, h_{m-1,n-l})\|_{\alpha-m+1}, \quad (34)$$

где $b_m = \Xi \|h_\varphi^{-1}\|_{\alpha-m+1}$ – соответствующая константа из предложения 10. Так как для функций $h_{m,n-l}$, $m = 1, 2, \dots, [\alpha]$, выполняются условия д'), то из (34) с учетом предложения 10 заключаем, что $|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi}$ ограничена сверху некоторой не зависящей от n величиной

$$B_m'' = B_m''(a_m, b_m, \delta, \|f\|_{\alpha-m+1}; \|h_\varphi\|_{\alpha-m+1}, B_1, B_2, \dots, B_{m-1}),$$

где $a_m = \|h_\varphi\|_{\alpha-m+1}^{-1}/3$ – соответствующая константа из предложения 10. Тогда в качестве константы B_m в д') может быть выбрана $B_m = \max\{B_m', B_m''\}$, где $B_m' = \max_{n \leq l} |h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi}$. Рассмотрим противоположную (33) ситуацию, когда

$$|F_m(f; h_\varphi, h_{1,n-l}, \dots, h_{m-1,n-l})|_{\alpha-m+1, \Xi} \leq \delta |A_\varphi^l h_{m,n-l}|_{\alpha-m, \Xi}. \quad (35)$$

В этом случае мы можем применить теорему 2 и получить оценку $|h_{m,n}|_{\alpha-m, \Xi} \leq |h_{m,n-l}|_{\alpha-m, \Xi} \leq B_m$ независимо от выбора B_m . Таким образом, найдены константы B_m , для которых выполняется условие д').

Осталось добиться выполнения условия б'). Из (30) получаем

$$g'_n(\xi, x) = -\frac{1}{\xi^{[\alpha]+1}} \ln \left(\frac{e^{-\sum_{m=1}^{[\alpha]} \gamma_{m,n} \xi^m} A_\varphi^l (e^{\xi S_l f} (h_\varphi + \sum_{m=1}^{[\alpha]} h_{m,n-l} \xi^m))}{h_\varphi + \sum_{m=1}^{[\alpha]} h_{m,n} \xi^m} \right) (x), \quad (36)$$

где выбирается главное значение логарифма. Из (29) видно, что функция

$$r_{n-l}(\xi, x) = \xi^{-] \alpha[-1} \left(e^{-\sum_{m=1}^{] \alpha[} \gamma_{m,n} \xi^m} A_{\varphi}^l \left(e^{\xi S_l f} \left(h_{\varphi} + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n-l} \xi^m \right) \right) - \left(h_{\varphi} + \sum_{m=1}^{] \alpha[} h_{m,n} \xi^m \right) \right) \quad (37)$$

аналитична по ξ в некоторой не зависящей от n окрестности нуля и вещественна при вещественных ξ . Из условий $d')$, $g')$ и предложения 10 следует равномерная по n ограниченность $\max |h_{m,n}|$, $m = 1, 2, \dots,] \alpha[$. Тогда из (36), (37) с учетом строгой положительности h_{φ} видно, что в некоторой не зависящей от n окрестности нуля функция $g'_n(\xi, x)$ тоже будет аналитической, к тому же независимо от n ограниченной. А это означает выполнение условия $b')$.

Теорема доказана.

Большие уклонения и крамеровские асимптотики. Определим на $H^{\alpha}(X)$ линейный функционал μ_{φ} формулой

$$\mu_{\varphi}(f) = \nu_{\varphi}(f \cdot h_{\varphi}), \quad (38)$$

где h_{φ} и ν_{φ} — положительные собственные вектор и линейный функционал оператора Перрона–Фробениуса A_{φ} . Очевидно, что функционал μ_{φ} положителен (принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях) и нормирован (т.е. $\mu_{\varphi}(1) = 1$). Тогда по теореме Рисса его можно отождествить с борелевской вероятностной мерой на X . Из гомологического тождества (2) следует, что

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi}(f \circ \sigma) &= \nu_{\varphi}(f \circ \sigma \cdot h_{\varphi}) = \nu_{\varphi}(e^{-\lambda_{\varphi}} A_{\varphi}(f \circ \sigma \cdot h_{\varphi})) \\ &= \nu_{\varphi}(f \cdot e^{-\lambda_{\varphi}} A_{\varphi} h_{\varphi}) = \mu_{\varphi}(f). \end{aligned}$$

Значит, мера μ_{φ} инвариантна относительно отображения сдвига σ . Для любых $f, g \in H^{\alpha}(X)$ можем записать

$$\mu_{\varphi}(fg \circ \sigma^l) = e^{-l\lambda_{\varphi}} \nu_{\varphi}(A_{\varphi}^l(fg \circ \sigma^l \cdot h_{\varphi})) = \nu_{\varphi}(g \cdot e^{-l\lambda_{\varphi}} A_{\varphi}^l(f \cdot h_{\varphi})).$$

Из теоремы 3 следует, что при $l \rightarrow \infty$ последнее выражение стремится со степенной скоростью к $\nu_{\varphi}(g \cdot \nu_{\varphi}(f \cdot h_{\varphi}) h_{\varphi}) = \mu_{\varphi}(f) \mu_{\varphi}(g)$. Следовательно, сдвиг σ по отношению к мере μ_{φ} обладает свойством степенного перемешивания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. При всех $\psi \in H^{\alpha+1}(X)$ справедливо неравенство

$$\lambda_{\varphi+\psi} - \lambda_{\varphi} \geq \mu_{\varphi}(\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность функционалов $\lambda_n(\psi) = n^{-1} \ln \nu_\varphi(A_\psi^n h_\varphi)$, $n = 1, 2, \dots$. Используя гомологическое тождество (2), можем записать

$$\lambda_n(\varphi + \psi) = n^{-1} \ln \nu_\varphi(A_\varphi^n e^{S_n \psi} h_\varphi) = \lambda_\varphi + n^{-1} \ln \mu_\varphi(e^{S_n \psi}).$$

В силу неравенства Йенсена $\mu_\varphi(e^{S_n \psi}) \geq \exp(\mu_\varphi(S_n \psi)) = e^{n\mu_\varphi(\psi)}$, поэтому

$$\lambda_n(\varphi + \psi) - \lambda_\varphi \geq \mu_\varphi(\psi). \quad (39)$$

Из (39) и оценки

$$\lambda_n(\varphi + \psi) \leq n^{-1} \ln \|\nu_\varphi\| + n^{-1} \ln \|A_{\varphi+\psi}^n\| + n^{-1} \ln \|h_\varphi\|,$$

используя предельный переход по n , получаем искомое неравенство. Предложение доказано.

Из этого предложения вытекает, что функционал λ_φ выпукло зависит от φ , а μ_φ является его субдифференциалом в точке φ . В рамках представленного в [3] термодинамического формализма меру μ_φ в этом случае принято называть равновесной, что, в частности, обосновывается тем, что она удовлетворяет характеризующему равновесные термодинамические системы вариационному принципу.

Любую функцию $f \in H^\alpha(X)$ можно рассматривать как случайную величину по отношению к вероятностной мере μ_φ . Рассмотрим последовательность случайных величин $S_n f = f + f \circ \sigma + \dots + f \circ \sigma^{n-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$ и $f \in H^\alpha(X)$. Тогда существуют такое малое положительное r , большое положительное D и набор больших положительных констант C_m , $m = 1, 2, \dots, [\alpha]$, что для любого $n = 1, 2, \dots$ найдутся такие вещественные числа $\Gamma_{m,n}$ и семейство $G_n(\xi, x)$, вообще говоря, комплекснозначных функций на X , аналитически зависящее от малого комплексного параметра ξ и вещественное при вещественных ξ , что

- а) $\mu_\varphi(e^{\xi S_n f + \xi^{[\alpha]+1} G_n(\xi, x)}) = e^{\sum_{m=1}^{[\alpha]} \frac{\Gamma_{m,n}}{m!} \xi^m}$ для всех $|\xi| < r$;
- б) $|G_n(\xi, x)| \leq Dn$, $|\xi| < r$;
- в) $|\Gamma_{m,n}| \leq C_m n$, $m = 1, 2, \dots, [\alpha]$.

Это предложение вытекает непосредственно из теоремы 4. Чтобы убедиться в этом, достаточно в последней применить к соотношению а) функционал ν_φ с учетом соотношения г) и вместо величин $\Gamma_{m,n}$ взять $\Gamma_{m,n} m!$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из соотношения а) предложения 12 следует, что числа $\Gamma_{m,n}$ являются семиинвариантами случайных величин $S_n f$. В частности, $\Gamma_{2,n}$ является дисперсией и поэтому неотрицательно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Если $f \in H^\alpha(X)$, $\alpha > 2$, и $\mu_\varphi(f) = 0$, то при некоторой достаточно большой $C > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $v > 0$ будет выполняться неравенство

$$\mu_\varphi(S_n f > v) \leq \exp \left\{ -\frac{v^2}{C(\Gamma_{2,n} + \sqrt{nv} + r^{-1}v)} \right\},$$

где $\Gamma_{2,n} = \mu_\varphi((S_n f)^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 12

$$\mu_\varphi(e^{\xi S_n f + \xi^3 G_n(\xi, x)}) = e^{\frac{\Gamma_{2,n}}{2!} \xi^2} \quad \text{для всех } |\xi| < r,$$

причем $|G_n(\xi, x)| \leq Dn$. Тогда в соответствии с неравенством Бернштейна

$$\mu_\varphi(S_n f > v) \leq \inf_{\xi > 0} \mu_\varphi(e^{\xi(S_n f - v)}) \leq \inf_{\xi > 0} e^{\frac{\Gamma_{2,n}}{2!} \xi^2 + Dn \xi^3 - \xi v}. \quad (40)$$

Можно показать, что инфимум в (40) достигается, если взять ξ порядка

$$\xi' = \frac{v}{2(\Gamma_{2,n} + \sqrt{nv} + r^{-1}v)}.$$

В этом случае

$$\frac{\Gamma_{2,n}}{2!} \xi'^2 + Dn \xi'^3 - \xi' v \leq \frac{v^2/8 + v^2/8 - v^2/2}{\Gamma_{2,n} + \sqrt{nv} + r^{-1}v} = -\frac{v^2}{4(\Gamma_{2,n} + \sqrt{nv} + r^{-1}v)}.$$

Тем самым, предложение доказано.

Из предложения видно, что если $\Gamma_{2,n}$ по порядку больше $n^{2/3}$, то с вероятностью, близкой к единице, случайная величина $S_n f$ принимает значения в области размера порядка $\Gamma_{2,n}^{1/2}$, а вероятность того, что $S_n f$ отличается от своего математического ожидания на величину, по порядку превосходящую $\Gamma_{2,n}^{1/2}$, экспоненциально мала. Если же $\Gamma_{2,n}$ по порядку меньше $n^{2/3}$, то экспоненциально малы отклонения по порядку, превосходящие $n^{1/3}$.

Далее, из предложения 12 видно, что $\Gamma_{2,n}$ по порядку не превосходит n . Покажем теперь, что если дисперсия $\Gamma_{2,n}$ растет со скоростью порядка n , то последовательность случайных величин $S_n f$ удовлетворяет центральной предельной теореме и, более того, для нее выписываются крамеровские асимптотики вероятностей больших отклонений.

Обозначим через Φ нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha > 2$ и $\varphi \in H^{\alpha+2}(X)$. Для произвольной функции $f \in H^\alpha(X)$ и любого натурального n обозначим через $\Gamma_{m,n}$, $m = 1, 2, \dots, [\alpha]$, семиинварианты порядка m случайной величины $S_n f = f + f \circ \sigma + \dots + f \circ \sigma^{n-1}$. Положим

$$\lambda_n(\xi) = \sum_{m=1}^{[\alpha]} \frac{\Gamma_{m,n}}{m!} \xi^m. \quad (41)$$

Пусть для некоторого $c > 0$ при всех достаточно больших n выполняется неравенство $\Gamma_{2,n} > cn$. Тогда для всех $a > 0$ справедливо тождество

$$\mu_\varphi(S_n f > \lambda'_n(a)) = e^{\lambda_n(a) - a\lambda'_n(a) + a^2\lambda''_n(a)/2} (1 - \Phi(a\sqrt{\lambda''_n(a)})) \times e^{r_n(a)}, \quad (42)$$

где

$$r_n(a) = O\left((a + n^{-\frac{1}{2}})n^{\frac{3}{2} \frac{1}{[\alpha]+2}}\right). \quad (43)$$

Символ $O(\eta)$ обозначает функцию, для которой $|O(\eta)| \leq \Delta|\eta|$ при всех $|\eta| < \delta$, где Δ и δ — универсальные положительные постоянные.

Если выбирать a такими, что $an^{1/3} \rightarrow 0$, то асимптотика (42) существенно упрощается. Прежде всего, в этом случае показатель $\lambda_n(a) - a\lambda'_n(a) + a^2\lambda''_n(a)/2$ стремится к нулю и его можно просто опустить. Далее, введем обозначение $x = (\lambda'_n(a) - \lambda'_n(0))/\sqrt{\lambda''_n(0)}$. Тогда $a\sqrt{\lambda''_n(a)} \sim x + O(a^2n^{1/2})$ при $a \rightarrow 0$ и при условии $a < n^{-1/3}$ аргумент $a\sqrt{\lambda''_n(a)}$ в правой части (42) можно заменить на x . В итоге получаем асимптотику

$$\mu_\varphi(S_n f > n\mu_\varphi(f) + x\sqrt{\Gamma_{2,n}}) \sim 1 - \Phi(x) \quad \text{при } xn^{-1/6} \rightarrow 0.$$

(Условие $xn^{-1/6} \rightarrow 0$ равносильно $an^{1/3} \rightarrow 0$.) В частности, при значениях x порядка 1 отсюда вытекает центральная предельная теорема для последовательности случайных величин $S_n f$.

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется следующий результат.

ТЕОРЕМА 6 (см. [4]). Пусть S — вещественная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, для которой в некотором круге $|\xi - a| < R$, где $a \in \mathbb{R}$, выполняется тождество

$$E e^{\xi S + G(\xi)} = e^{\lambda(\xi) + \omega(\xi)}, \quad (44)$$

в котором $G(\xi)$ — семейство ограниченных случайных величин, аналитическое зависящее от комплексного параметра ξ и вещественное при вещественных ξ , а $\lambda(\xi)$ и $\omega(\xi)$ — вещественные аналитические функции. Пусть константа Γ и неубывающая при $t > 0$ функция $\gamma(t)$ таковы, что

$$\sup_{|\xi - a| < R} |\lambda(\xi)| \leq \Gamma, \quad \sup_{|\xi - a| < R} |\omega(\xi)| \leq 1, \quad \sup_{|\xi - a| < t} \sup_{\Omega} |G(\xi)| \leq \gamma(t). \quad (45)$$

Тогда если числа a и $d = \lambda''(a)$ положительны, то

$$P(S > \lambda'(a)) = e^{\lambda(a) - a\lambda'(a) + a^2\lambda''(a)/2} (1 - \Phi(a\sqrt{\lambda''(a)})) \times e^{(1+a\sqrt{d})O(\eta) + \omega(a)},$$

где

$$\eta = \inf_{0 < t < dR^3/\Gamma} \left(\frac{1}{t\sqrt{d}} + \gamma(t) \right). \quad (46)$$

Символ $O(\eta)$ обозначает функцию, для которой $|O(\eta)| \leq \Delta|\eta|$ при всех $|\eta| < \delta$, где Δ и δ — универсальные положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Из предложения 12 следует, что для всякой случайной величины $S_n f$ и точки a , для которой $|a| < r/2$, в круге $|\xi - a| < R$, где $R = r/2$, будет выполняться тождество (44), в котором $S = S_n f$, $G(\xi) = \xi^{|\alpha|+1} G_n(\xi, x)$, $\lambda(\xi) = \lambda_n(\xi)$, а $\omega(\xi) \equiv 0$. С учетом пп. б), в) предложения 12

$$\sup_{|\xi-a|<R} |\lambda_n(\xi)| \leq \sup_{|\xi-a|<R} \sum_{m=1}^{|\alpha|} \frac{|\Gamma_{m,n}|}{m!} |\xi|^m \leq n\Gamma,$$

где Γ – некоторое достаточно большое число, не зависящее от n ;

$$\sup_{|\xi-a|<t} \sup_X |\xi^{|\alpha|+1} G_n(\xi, x)| \leq \sup_{|\xi-a|<t} |\xi^{|\alpha|+1}| Dn \leq \gamma_n(t),$$

где $\gamma_n(t) = (|a| + t)^{|\alpha|+1} Dn$.

Положим $d_n = \lambda_n''(a)$. Из замечания к предложению 12 следует, что $\lambda_n''(0) = \Gamma_{2,n} > 0$, к тому же по условию теоремы эта величина порядка n . Поэтому при достаточно малых a , как нетрудно видеть, для всех n будет выполняться $d_n > 0$. Теперь в соответствии с (46) определим

$$\eta_n = \inf_{0 < t < d_n R^3 / (n\Gamma)} \left(\frac{1}{t\sqrt{d_n}} + \gamma_n(t) \right). \quad (47)$$

По определению “О-большой” в выражении (43) достаточно рассмотреть значения $a < n^{-\frac{3}{2} \frac{1}{|\alpha|+2}}$. При таких a возьмем $t = n^{-\frac{3}{2} \frac{1}{|\alpha|+2}}$ в (47). Тогда с учетом того, что d_n – величина порядка n , нетрудно проверить, что η_n не превосходит по порядку $n^{\frac{3}{2} \frac{1}{|\alpha|+2} - 1/2}$. С учетом сказанного из теоремы 6 вытекает искомый результат.

Автор выражает благодарность В. И. Бахтину за постановку задачи и обсуждение возникавших в ходе ее решения вопросов.

Список литературы

1. *Саражинский Д. С.* Инвариантные конусы и собственные векторы операторов Перрона–Фробениуса в пространствах гёльдеровских функций // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. 2002. № 2. С. 53–56.
2. *Бойэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
3. *Антоневич А. Б., Бахтин В. И., Лебедев А. В., Саражинский Д. С.* Лежандров анализ, термодинамический формализм и спектры операторов Перрона–Фробениуса // Докл. НАН Беларусі. 2003. Т. 390. № 3. С. 1–3.
4. *Бахтин В. И.* Теорема Крамера с двумя невязками // Докл. НАН Беларусі. 2001. Т. 45. № 6. С. 49–53.

Белорусский государственный университет
E-mail: sarazhinsky@mail.ru

Поступила в редакцию
10.09.2003 и 16.03.2004