Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, А. А. Хаджи, Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 8, 99–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:39:29

УДК 517.956.25

Л. М. Кожевникова, А. А. Хаджи

**Существование решений
анизотропных эллиптических уравнений
с нестепенными нелинейностями
в неограниченных областях**

Работа посвящена исследованию разрешимости задачи Дирихле для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с младшими членами и нестепенными нелинейностями

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{\alpha}(x, u, \nabla u))_{x_{\alpha}} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega.$$

На каратеодориевы функции $a_{\alpha}(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, накладывается условие совокупной монотонности по аргументам $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}_n$. Ограничения на их рост по s_0, s формулируются в терминах специального класса выпуклых функций. Изучаются условия существования решений задачи Дирихле в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Доказана теорема существования без ограничений на поведение решений и рост исходных данных при $|x| \rightarrow \infty$.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, нестепенные нелинейности, пространство Соболева–Орлича, существование решения, неограниченная область.

DOI: 10.4213/sm8482

§ 1. Введение

Пусть Ω – произвольная неограниченная область пространства

$$\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}_n, \quad n \geq 2.$$

Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{\alpha}(x, u, \nabla u))_{x_{\alpha}} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00081-а).

Предполагается, что функции $a_\alpha(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, \dots, n$, измеримы по $x \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$ и непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_{n+1}$ для п.в. $x \in \Omega$.

Пусть существуют измеримые неотрицательные функции $\psi(x), \psi_1(x), \varphi(x), \varphi_1(x)$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и $\mathbf{s} = (s_0, s)$, $\mathbf{t} = (t_0, t) \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$, справедливы неравенства

$$\sum_{\alpha=0}^n a_\alpha(x, s_0, s) s_\alpha \geq \varphi(x) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) - \psi(x), \quad (1.3)$$

$$\sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(a_\alpha(x, s_0, s)) \leq \varphi_1(x) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) + \psi_1(x), \quad (1.4)$$

$$\sum_{\alpha=0}^n (a_\alpha(x, s_0, s) - a_\alpha(x, t_0, t))(s_\alpha - t_\alpha) > 0. \quad (1.5)$$

Здесь $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ — N -функции, удовлетворяющие Δ_2 -условию, а $\bar{B}_0(z), \bar{B}_1(z), \dots, \bar{B}_n(z)$ — дополнительные к ним (см. § 1).

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^n (2\varphi(x) B'_\alpha(u_{x_\alpha}) + f_\alpha(x))_{x_\alpha} - 2\varphi(x) B'_0(u) - f_0(x) = 0 \quad (1.6)$$

с непрерывно дифференцируемыми N -функциями $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$. В § 4 (см. замечание 5) показано, что для уравнения (1.6) все условия (1.3)–(1.5) выполнены.

Уравнения с функциями нестепенного роста в ограниченных областях рассматривались в работах [1], [2]. Ограничения на функции $a_i(x, s_0, s)$, $i = 0, 1, \dots, n$, (см. уравнение (1.1)) в этих работах выражаются через классические N -функции.

В работе [3] в ограниченной области Ω исследовалась задача Дирихле для нелинейного эллиптического включения с вектор-функцией $\mathbf{a}(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s))$, удовлетворяющей нестандартным условиям роста, описанным в терминах N -функций, зависящих от x . Доказано существование ренормализованного решения, а при условии монотонности функции $\mathbf{a}(x, s)$ по аргументу s установлена его единственность. Приведены достаточные условия, гарантирующие, что ренормализованное решение является слабым решением рассматриваемой задачи.

В настоящей работе исследуется разрешимость задачи (1.1), (1.2) в неограниченных областях Ω , никаких дополнительных условий на поведение решений и рост исходных данных при $|x| \rightarrow \infty$ не накладывается.

Решение задачи с несуммируемыми данными, как правило, принадлежит соответствующему пространству локально суммируемых функций. При этом сразу возникает вопрос о том, в каком смысле следует понимать для таких функций граничные условия Дирихле $u|_{\partial\Omega} = u_0$ с $u_0 \in L_2(\partial\Omega)$. Впервые ответ на этот вопрос был дан в работе В. П. Михайлова [4], в которой установлены

условия корректности задачи Дирихле из локального пространства $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ для линейного эллиптического уравнения в ограниченной области Ω с правой частью $f \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. Этому направлению исследований посвящен цикл работ В. П. Михайлова, А. К. Гущина (см., например, [5] и имеющиеся там ссылки). В нашей работе рассматриваются локальные пространства Орлича и Соболева–Орлича с функциями, суммируемыми вплоть до границы области Ω , и проблем с трактовкой однородного граничного условия не возникает.

Для линейных эллиптических уравнений в неограниченных областях естественно наложить условие на рост исходных данных, чтобы решение принадлежало наиболее широкому классу единственности.

О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян в работах [6], [7] получили априорные оценки обобщенного решения краевой задачи с граничными условиями первого, второго и третьего типов для линейного эллиптического уравнения второго порядка, аналогичные оценкам, выражающим принцип Сен-Венана в теории упругости. На основе этих оценок установлены теоремы существования и широкие классы единственности решений в случае неограниченных областей.

Л. М. Кожевниковой выделены классы единственности решений задачи Дирихле для квазиэллиптических (см. [8]) и псевдодифференциальных эллиптических (см. [9]) уравнений в областях с некомпактными границами. Доказано существование решений, принадлежащих установленным классам единственности. Для уравнения Лапласа построен пример неединственности решения задачи Дирихле, показывающий, что найденный класс единственности нельзя существенно расширить.

Некоторое представление о классах единственности в случае квазилинейных уравнений можно получить, рассмотрев решение

$$\int_1^{|y|} (\theta^{p_0} - 1)^{-1/p} d\theta = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/p} |x|$$

уравнения $|y'|^{p-2}y'' = |y|^{p_0-2}y$. Если $p > p_0$, то это решение имеет степенной рост и нарушает единственность нулевого решения. Если $p < p_0$, то решение уходит в бесконечность на конечном интервале, и следует ожидать единственность без ограничений на рост решения. Если же $p = p_0$, то $y = e^x$ является частным решением и класс единственности будет содержать экспоненциально растущие функции, как в случае линейного уравнения. Приведем теперь несколько работ, результаты которых соответствуют изложенным соображениям.

А. Л. Гладковым в [10] рассматривалась задача Дирихле в неограниченной области с компактной границей для уравнения

$$-\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + a_0(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad p > 2,$$

$a_0(x) \in L_{\infty,\text{loc}}(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$, $f(x) \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. В частности, в этой работе доказано, что для уравнения с функцией $a_0(x)$ такой, что

$$c_1(c_2 + |x|^2)^\beta \leq a_0(x) \leq c_3(c_4 + |x|^2)^\gamma$$

для п.в. $x \in \Omega$ с положительными постоянными $c_1, \dots, c_4$ и $0 \leq \beta \leq \gamma$, решение задачи Дирихле единственно в классе функций, удовлетворяющих для п.в. $x \in \Omega$ при достаточно малой постоянной M неравенству

$$|u(x)| \leq M(c_5 + |x|^2)^{(2\beta+p)/(2(p-2))}.$$

В этом же классе функций доказано существование решения.

Для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в работе [11] А. Е. Шишковым установлены априорные оценки решений задачи Дирихле в областях с некомпактными границами, относящихся к классу “узких” в окрестности бесконечности. На основе этих оценок доказано существование решений в классе экспоненциально растущих функций при экспоненциальном росте правой части.

В 1984 г. Х. Брезис установил (см. [12]) для полулинейного уравнения

$$-\Delta u + |u|^{p_0-2}u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad p_0 > 2, \quad (1.7)$$

существование и единственность обобщенного решения $u \in L_{p_0-1, \text{loc}}(\mathbb{R}_n)$ при $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}_n)$ без предположений о поведении решения и росте исходных данных на бесконечности.

М. М. Бокало (см. [13]) распространил этот результат на случай задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений и доказал непрерывную зависимость обобщенного решения от правой части уравнения.

Обобщение результатов Х. Брезиса на уравнения высокого порядка было проведено Ф. Бернисом (см. [14]). В частности, он доказал существование единственного обобщенного решения полулинейного эллиптического уравнения $2m$ -порядка, заданного во всем пространстве

$$(-\Delta)^m u + |u|^{p_0-2}u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $p_0 > 2$, если $1 \leq n \leq 2m$; и $p_0 \in (2, \frac{2m+n}{n-2m}]$, если $n > 2m$, с функцией $f \in L_{p_0/(p_0-1), \text{loc}}(\mathbb{R}_n)$.

В работе [15] О. А. Олейник и Ж. И. Дياز, пользуясь методом интеграла энергии и устанавливая априорные оценки решения, доказали существование и единственность решения краевой задачи с однородными граничными условиями первого и второго типа (в частности, задач Дирихле и Неймана) для полулинейных уравнений с переменными коэффициентами

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + a_0(x)|u|^{p_0-2}u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad p_0 > 2,$$

$a_{ij}(x) \in L_{\infty, \text{loc}}$, $a_0(x) \in L_{1, \text{loc}}(\Omega)$, $a_0(x) \geq a_0 > 0$, без условий на бесконечности.

Л. Боккардо, Т. Галуа и Ж. Вазкез в работе [16] доказали существование решения уравнения

$$-\sum_{i=1}^n (|\nabla u|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + |u|^{p_0-2}u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

без условий на бесконечности при $f(x) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_n)$, $p > 2 - 1/n$, $p_0 > p$. Кроме того, авторы показали, что условие $p_0 > p$ необходимо для существования решения, если на рост функции f на бесконечности не накладывается дополнительных ограничений.

В работе [17] Г. Г. Лаптевым изучались условия существования решений уравнений

$$-\sum_{i=1}^n (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} + a_0(x, u) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad n \geq 2. \quad (1.8)$$

Функции $a_i(x, s_0, s)$, $i = 1, \dots, n$, $a_0(x, s_0)$, $f(x)$ могут расти произвольно при $|x| \rightarrow \infty$. Эти функции удовлетворяют обобщенным условиям теории монотонных операторов по аргументам $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}_n$. Функции $a_i(x, s_0, s)$, $i = 1, \dots, n$, по переменным $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}_n$ имеют степенной рост с показателями $p - 1$, $p_0(p - 1)/p$ соответственно. При условии, что $n < p < p_0$, доказана теорема существования решения $u \in W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_n)$.

Исследование обобщений уравнения (1.8) на случай, когда показатели нелинейности различные для различных производных, проведено в работах [18], [19]. В частности, М. Бендаман и К. Карлсен в [19] доказали существование решения для нелинейного анизотропного эллиптического уравнения с младшими членами

$$-\sum_{i=1}^n (a_i(x) |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} - \sum_{i=1}^n (g_i(u))_{x_i} + |u|^{p_0-2} u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где

$$p_0 - 1 > p_i > 1, \quad p_i > \frac{p^*(n-1)}{n(p^*-1)},$$

$$p^* < n, \quad p^* = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \right)^{-1}, \quad 0 < a_i(x) \leq a_i,$$

функции $g_i(s_0)$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, имеют поведение типа $|s_0|^{q-1}$, $q \in (1, p_0 - 1)$, $f(x) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_n)$. Установлено, что если $f(x) \in L_1(\mathbb{R}_n)$ и $p^* > n$, то $u \in L_{\infty,\text{loc}}(\mathbb{R}_n)$.

В работах [20], [21] М. М. Бокало и Е. В. Доманская исследовали краевые задачи в неограниченных областях для класса эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейности, модельным примером которых является уравнение

$$-\sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} + |u|^{p_0(x)-2} u = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Корректность постановки краевых задач доказана без ограничений на рост решений и исходных данных задач на бесконечности.

Таким образом, имеется широкий круг работ, в которых установлены существование или единственность решений краевых задач для эллиптических

уравнений в неограниченных областях без ограничений на рост решений и данных задач на бесконечности. Настоящая работа относится именно к этому направлению исследований, в ней выделен некоторый класс эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями, для которых доказана разрешимость задачи Дирихле в произвольных неограниченных областях Ω . Вопрос о широких классах единственности в рамках настоящей статьи не рассматривается, и, насколько известно авторам, он остается открытым. Результаты по существованию решений уравнений вида (1.1) с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях авторам настоящей работы также не известны.

§ 2. N -функции и пространства Соболева–Орлича

Приведем некоторые сведения из теории N -функций и пространств Соболева–Орлича (см. [22]). Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z)$, $z \in \mathbb{R}_1$, называется N -функцией, если она четна и

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{M(z)}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{M(z)}{z} = \infty.$$

Отметим, что $M(\varepsilon z) \leq \varepsilon M(z)$ при $0 < \varepsilon \leq 1$. Для N -функции $M(z)$ имеет место интегральное представление

$$M(z) = \int_0^{|z|} m(\theta) d\theta,$$

где функция $m(\theta)$ – положительная при $\theta > 0$, неубывающая и непрерывна справа при $\theta \geq 0$, такая, что $m(0) = 0$, $\lim_{\theta \rightarrow \infty} m(\theta) = \infty$. Очевидно, справедливо неравенство

$$M(z) \leq |z|m(|z|), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

N -функция

$$\overline{M}(z) = \sup_{y \geq 0} (y|z| - M(y))$$

называется дополнительной к N -функции $M(z)$. Известны следующие неравенства:

$$|zy| \leq M(z) + \overline{M}(y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

– неравенство Юнга (см. [22; гл. I, неравенство (2.6)]),

$$z \leq M^{-1}(z) \overline{M}^{-1}(z) \leq 2z, \quad z \geq 0, \quad (2.3)$$

где верхний индекс -1 означает обратную функцию (см. [22; гл. I, неравенство (2.10)]), и равенство

$$|z|m(z) = M(z) + \overline{M}(m(z)), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Для N -функций $P(z)$, $M(z)$ записывают $P(z) \prec M(z)$, если существуют числа $l > 0$, $z_0 \geq 0$ такие, что

$$P(z) \leq M(lz), \quad z \geq z_0. \quad (2.5)$$

N -функции $P(z)$, $M(z)$ называются сравнимыми, если имеет место одно из соотношений $P(z) \prec M(z)$ или $M(z) \prec P(z)$. N -функции $P(z)$ и $M(z)$ называются эквивалентными, если $P(z) \prec M(z)$ и $M(z) \prec P(z)$.

N -функция $P(z)$ растет медленнее N -функции $M(z)$ ($P(z) \prec\prec M(z)$), если для любого числа $l > 0$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{M(lz)} = 0. \quad (2.6)$$

N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при больших значениях z , если существуют числа $c > 0$, $z_0 \geq 0$ такие, что $M(2z) \leq cM(z)$ для любых $z \geq z_0$. Δ_2 -условие эквивалентно выполнению при $z \geq z_0$ неравенства

$$M(lz) \leq c(l)M(z), \quad (2.7)$$

где l – любое число больше единицы, $c(l)$ больше нуля.

N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $c > 1$, $z_0 \geq 0$ такие, что при $z \geq z_0$ справедливо неравенство

$$zm(z) < cM(z) \quad (2.8)$$

(см. [22; гл. I, теорема 4.1]). В каждом классе эквивалентных N -функций, подчиняющихся Δ_2 -условию, имеются N -функции, удовлетворяющие неравенствам (2.7), (2.8) при всех z . В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2 -условие для рассматриваемых N -функций выполняется при всех значениях $z \geq 0$ (т.е. $z_0 = 0$).

Для N -функции $M(z)$ ввиду выпуклости и оценки (2.7) справедливо неравенство

$$M(y+z) \leq cM(z) + cM(y), \quad z, y \geq 0. \quad (2.9)$$

Пусть Q – произвольная область пространства $\mathbb{R}_n$. Классом Орлича $K_M(Q)$, соответствующем N -функции $M(z)$, называется множество измеримых в Q функций v таких, что

$$\int_Q M(v(x)) dx < \infty.$$

Пространством Орлича $L_M(Q)$ называется линейная оболочка $K_M(Q)$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_M(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_M(Q)} = \|v\|_{M,Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \int_Q M\left(\frac{v(x)}{k}\right) d\mathbf{x} \leq 1 \right\}.$$

Справедливо неравенство (см. [22; гл. II, неравенство 9.21])

$$\int_Q M\left(\frac{v(x)}{\|v\|_{M,Q}}\right) dx \leq 1, \quad (2.10)$$

в котором имеет место знак равенства, если N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию.

Нормы в пространствах $L_1(Q)$, $L_\infty(Q)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$ соответственно.

Класс Орлича $K_M(Q)$ совпадает с пространством Орлича $L_M(Q)$ тогда и только тогда, когда $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию (см. [22; гл. II, теорема 8.2]). Если N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то сходимость в среднем эквивалентна сходимости по норме пространства $L_M(Q)$ (см. [22; гл. II, теорема 9.4]).

Для функции $v \in L_M(Q)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{M,Q} \leq \int_Q M(v) dx + 1 \quad (2.11)$$

(см. [22; гл. II, неравенство (9.12)]). Кроме того, если N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то для $v \in L_M(Q)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \int_Q M(v) dx &= \int_Q M\left(\|v\|_{M,Q} \frac{v}{\|v\|_{M,Q}}\right) dx \\ &\leq c(\|v\|_{M,Q}) \int_Q M\left(\frac{v}{\|v\|_{M,Q}}\right) dx = c(\|v\|_{M,Q}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для функций $u \in L_M(Q)$, $v \in L_{\overline{M}}(Q)$ имеет место неравенство Гёльдера (см. [22; гл. II, неравенства (9.24), (9.27)]):

$$\left| \int_Q u(x)v(x) dx \right| \leq 2\|u\|_{M,Q}\|v\|_{\overline{M},Q}. \quad (2.13)$$

Известно, что если N -функции $P(z) \prec M(z)$ и $\text{mes } Q < \infty$, то справедливо вложение $L_M(Q) \subset L_P(Q)$ (см. [22; гл. II, теорема 13.1]) и выполнено неравенство (см. [22; гл. II, теорема 13.3])

$$\|v\|_{P,Q} \leq A_1(\text{mes } Q)\|v\|_{M,Q}, \quad v \in L_M(Q). \quad (2.14)$$

Очевидно, что для любой N -функции $M(z)$, если $\text{mes } Q < \infty$, то $L_\infty(Q) \subset L_M(Q)$ и справедливо неравенство (см. [22; гл. II, п. 9.1])

$$\|v\|_{M,Q} \leq A_2(\text{mes } Q)\|v\|_{\infty,Q}, \quad v \in L_\infty(Q). \quad (2.15)$$

Для любой N -функции $M(z)$, если $\text{mes } Q < \infty$, то $L_M(Q) \subset L_1(Q)$ и выполнено неравенство

$$\|v\|_{1,Q} \leq A_3(\text{mes } Q)\|v\|_{M,Q}, \quad v \in L_M(Q). \quad (2.16)$$

Пусть $B_1(z), \dots, B_n(z)$ — N -функции; определим пространство Соболева–Орлича $\dot{H}_B^1(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}.$$

Положим

$$h(t) = t^{-1/n} \left(\prod_{\alpha=1}^n B_\alpha^{-1}(t) \right)^{1/n}$$

и будем предполагать, что интеграл $\int_0^1 \frac{h(t)}{t} dt$ сходится. Тогда можно определить N -функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} \frac{h(t)}{t} dt.$$

Приведем теорему вложения А. Г. Королева (см. [23]), доказанную для ограниченных областей Q .

ЛЕММА 1. Пусть $v \in \dot{H}_B^1(Q)$.

1) Если

$$\int_1^\infty \frac{h(t)}{t} dt = \infty, \quad (2.17)$$

то $\dot{H}_B^1(Q) \subset L_{B^*}(Q)$ и

$$\|v\|_{B^*,Q} \leq A_4 \|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)}. \quad (2.18)$$

2) Если

$$\int_1^\infty \frac{h(t)}{t} dt < \infty, \quad (2.19)$$

то $\dot{H}_B^1(Q) \subset L_\infty(Q)$ и

$$\|v\|_{\infty,Q} \leq A_5 \|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)}. \quad (2.20)$$

Здесь

$$A_4 = \frac{n-1}{n}, \quad A_5 = \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если выполнено условие (2.19), $\text{mes } Q < \infty$, то для любой N -функции $M(z)$ имеет место вложение $\dot{H}_B^1(Q) \subset L_M(Q)$ и из (2.15), (2.20) следует неравенство

$$\|v\|_{M,Q} \leq A_6(\text{mes } Q) \|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)}, \quad v \in \dot{H}_B^1(Q). \quad (2.21)$$

Здесь положительные числа A_1, A_2, A_3, A_6 зависят от $\text{mes } Q$.

§ 3. Формулировка основного результата

Пусть $Q \subseteq \Omega$ (Q может совпадать с Ω), $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ — N -функции, удовлетворяющие Δ_2 -условию, $\overline{B}_0(z), \overline{B}_1(z), \dots, \overline{B}_n(z)$ — дополнительные к ним. Через $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)$ обозначим пространство $L_{\overline{B}_0}(Q) \times L_{\overline{B}_1}(Q) \times \dots \times L_{\overline{B}_n}(Q)$ с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)} = \|g_0\|_{\overline{B}_0,Q} + \|g_1\|_{\overline{B}_1,Q} + \dots + \|g_n\|_{\overline{B}_n,Q}, \quad \mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q).$$

Определим пространства Соболева–Орлича $W_{\mathbf{B}}^1(Q)$, $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$ как пополнения пространств $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{W_{\mathbf{B}}^1(Q)} = \|v\|_{\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)} = \|v\|_{B_0,Q} + \|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)}.$$

В случае выполнения условия (2.17) будем считать, что

$$B_0(z) \prec B^*(z), \quad (3.1)$$

а при выполнении (2.19), что $B_0(z)$ – произвольная N -функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\text{mes } Q < \infty$, то пространства $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$ и $\dot{H}_B^1(Q)$ изоморфны.

Действительно, очевидно вложение $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q) \subset \dot{H}_B^1(Q)$, изоморфизм следует из эквивалентности норм этих пространств. Если выполнены условия (2.17), (3.1), то в силу (2.14), (2.18) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|v\|_{\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)} &= \|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)} + \|v\|_{B_0, Q} \leq \|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)} + C_1(\text{mes } Q)\|v\|_{B^*, Q} \\ &\leq C_2(\text{mes } Q)\|v\|_{\dot{H}_B^1(Q)}, \quad v \in \dot{H}_B^1(Q). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть (см. (2.21)), что такая же оценка имеет место, если выполнено условие (2.19).

Определим $L_{\infty, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$ и $\dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ как пространства, состоящие из функций $v(x)$, определенных в Ω , для которых при любой ограниченной $Q \subset \Omega$ найдется функция из пространства $L_{\infty}(\Omega)$, $L_1(\Omega)$ и $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ соответственно, совпадающая с функцией $v(x)$ в Q . Аналогично определяется пространство $\mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}, \text{loc}}(\bar{\Omega})$.

Будем считать, что неотрицательные функции $\psi, \psi_1 \in L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $\varphi, 1/\varphi, \varphi_1 \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, поэтому для всякой ограниченной области $Q \subset \Omega$ существуют положительные числа $\bar{a}(Q) \leq \hat{a}(Q)$, $\hat{a}_1(Q)$ такие, что $\bar{a}(Q) \leq \varphi(x) \leq \hat{a}(Q)$, $\varphi_1(x) \leq \hat{a}_1(Q)$ для п.в. $x \in Q$.

Определим оператор $\mathbf{B}: \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega}) \rightarrow L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$ формулой

$$\mathbf{B}(v) = B_0(v) + \sum_{\alpha=1}^n B_{\alpha}(v_{x_{\alpha}}), \quad v \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega}).$$

Пусть $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}_{n+1}$ и

$$\mathbf{a}(x, \mathbf{s}) = (a_0(x, \mathbf{s}), a_1(x, \mathbf{s}), \dots, a_n(x, \mathbf{s})).$$

Далее полагаем, что $Q \subset \Omega$, Q – ограниченная область в $\mathbb{R}_n$. Из условия (1.4), пользуясь неравенством (2.11), для $u \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ выводим оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}(x, u, \nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}}(Q)} &= \sum_{\alpha=0}^n \|a_{\alpha}(x, u, \nabla u)\|_{\bar{B}_{\alpha}, Q} \\ &\leq \sum_{\alpha=0}^n \int_Q \bar{B}_{\alpha}(a_{\alpha}(x, u, \nabla u)) dx + n + 1 \leq \hat{a}_1(Q) \|\mathbf{B}(u)\|_{1, Q} + \|\psi_1\|_{1, Q} + n + 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(x, u, \nabla u) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ для $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ и фиксированному множеству Q определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством

$$(\mathbf{A}(u), v)_Q = \int_Q \mathbf{a}(x, u, \nabla u) \cdot (v, \nabla v) dx = \int_Q \left(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} v_{x_{\alpha}} + a_0 v \right) dx. \quad (3.3)$$

Используя неравенство Гёльдера (2.13) и оценку (3.2), для функций $u(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$, $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ выводим неравенства:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A}(u), v)_Q| &\leq 2 \sum_{\alpha=1}^n \|a_{\alpha}\|_{\overline{B}_{\alpha}, Q} \|v_{x_{\alpha}}\|_{B_{\alpha}, Q} + 2 \|a_0\|_{\overline{B}_0, Q} \|v\|_{B_0, Q} \\ &\leq 2 \|\mathbf{a}(x, u, \nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)} \|v\|_{\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, функционал $\mathbf{A}(u)$, определяемый равенством (3.3) в пространстве $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, является ограниченным. В случае, если функция v имеет ограниченный носитель и $\text{supp } v = \overline{Q}$, будем писать $(\mathbf{A}(u), v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $u(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\mathbf{A}(u), v) = 0 \quad (3.5)$$

для любой функции $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ с ограниченным носителем.

Пусть каждая N -функция $B_{\alpha}(z) = \int_0^{|z|} b_{\alpha}(\theta) d\theta$ кроме Δ_2 -условия подчиняется требованию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf_{\theta > 0} \frac{b_{\alpha}(\lambda \theta)}{b_{\alpha}(\theta)} = \infty, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Например, легко проверить, что функция

$$B(z) = |z|^a (|\ln |z|| + 1), \quad a > 1,$$

удовлетворяет Δ_2 -условию и требованию (3.6).

Будем считать, что существует $0 < \epsilon < 1$ такое, что выполнены условия

$$B_{\alpha}(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (1.3)–(1.5), (3.6), (3.7), тогда существует обобщенное решение $u(x)$ задачи (1.1), (1.2).

§ 4. Существование и единственность решения в ограниченной области

Здесь и далее $Q \subset \Omega$, Q – ограниченная область в $\mathbb{R}_n$. В этом параграфе будет доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (1.3)–(1.5), (3.6), тогда существует единственная функция $u(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(\mathbf{A}(u), v)_Q = 0 \quad (4.1)$$

для любой функции $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$, и справедлива оценка

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,Q} \leq \mathcal{M}\|\psi\|_{1,Q}. \quad (4.2)$$

Доказательство теоремы 2 основано на абстрактной теореме Ж. Л. Лионса (см. [24; гл. II, теорема 2.1]), приведем ее в следующей формулировке.

ЛЕММА 2. Пусть V – рефлексивное сепарабельное банахово пространство, и пусть оператор $A: V \rightarrow V'$ обладает следующими свойствами: оператор A ограничен, семинепрерывен, монотонный и коэрцитивный, т.е.

$$\frac{(A(u), u)}{\|u\|} \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

при $\|u\| \rightarrow \infty$. Тогда отображение $A: V \rightarrow V'$ сюръективно, т.е. для всякого $F \in V'$ существует $u \in V$ такая, что $A(u) = F$.

Прежде чем перейти к проверке условий леммы 2 приведем вспомогательные оценки и замечания.

Для функций $u(\mathbf{x}) \in \dot{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$, $v(\mathbf{x}) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, $\text{supp } v = \bar{Q}$, используя неравенство Юнга (2.2) и условие (1.4), выводим

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(x, u, \nabla u) \cdot (v, \nabla v)| \\ & \leq \sum_{\alpha=1}^n [\bar{B}_{\alpha}(a_{\alpha}(x, u, \nabla u)) + B_{\alpha}(v_{x_{\alpha}})] + \bar{B}_0(a_0(x, u, \nabla u)) + B_0(v) \\ & \leq \hat{a}_1(Q)\mathbf{B}(u) + \mathbf{B}(v) + \psi_1(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из неравенств (2.11), (2.12) следует, что если N -функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то ограниченность множества функций в пространстве $L_M(Q)$ равносильна ограниченности в среднем. Поэтому ограниченность множества $\Theta \subset W_{\mathbf{B}}^1(Q)$ по норме равносильна ограниченности совокупности чисел $\|\mathbf{B}(u)\|_{1,Q}$, $u \in \Theta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из условий (3.6) следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что для любых $\lambda \geq \lambda_0$ и любых $\theta \geq 0$ справедливы неравенства

$$b_{\alpha}(\lambda\theta) \geq 2b_{\alpha}(\theta), \quad \alpha = 0, 1, \dots, n.$$

Последние неравенства обеспечивают выполнение для любых $z \in \mathbb{R}$ условий

$$B_{\alpha}(z) \leq \frac{1}{2\lambda} B_{\alpha}(\lambda z), \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Тогда согласно [22; I, теорема 4.2] N -функции $\bar{B}_{\alpha}(z)$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, удовлетворяют Δ_2 -условию.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если выполнены условия (3.6), то функции

$$a_\alpha(x, s_\alpha) = 2\varphi(x)B'(s_\alpha) + f_\alpha(x) = 2\varphi(x)b_\alpha(|s_\alpha|) \operatorname{sign} s_\alpha + f_\alpha(x), \\ \alpha = 0, 1, \dots, n,$$

с $\varphi, 1/\varphi, \varphi_1 \in L_{\infty, \operatorname{loc}}(\bar{\Omega})$, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}, \operatorname{loc}}(\bar{\Omega})$ удовлетворяют условиям (1.3)–(1.5).

Действительно, применяя неравенства (2.1), (2.2), выводим неравенство

$$\sum_{\alpha=0}^n a_\alpha(x, s_\alpha) s_\alpha = 2\varphi(x) \sum_{\alpha=0}^n b_\alpha(|s_\alpha|) |s_\alpha| + \sum_{\alpha=0}^n f_\alpha s_\alpha \\ \geq \varphi(x) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) - \varphi(x) \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha\left(\frac{f_\alpha}{\varphi}\right),$$

из которого следует условие (1.3) с

$$\psi = \varphi \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha\left(\frac{f_\alpha}{\varphi}\right) \in L_{1, \operatorname{loc}}(\bar{\Omega}).$$

Учитывая замечание 4 и применяя неравенства (2.9), (2.7), (2.4), (2.8), устанавливаем

$$\sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(a_\alpha(x, s_\alpha)) \leq C \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(2\varphi(x)b_\alpha(|s_\alpha|)) + C \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(f_\alpha) \\ \leq C_1(\varphi) \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(b_\alpha(|s_\alpha|)) + C \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(f_\alpha) \\ \leq C_1(\varphi) \sum_{\alpha=0}^n |s_\alpha| b_\alpha(|s_\alpha|) + C \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(f_\alpha) \\ \leq C_2(\varphi) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) + C \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(f_\alpha).$$

Таким образом, условие (1.4) также выполнено с функциями $\varphi_1 = C_2(\varphi)$, $\psi_1 = C \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(f_\alpha) \in L_{1, \operatorname{loc}}(\bar{\Omega})$.

При условии строгой монотонности функций $b_\alpha(s)$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $s \geq 0$, неравенство (1.5) также выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ подчиняются условиям (3.6), (3.7), тогда

$$B_\alpha(z) \prec\prec B_0(z), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Действительно, из условий (3.6) следуют неравенства (4.5). Зафиксируем произвольное $l > 0$, положим в (4.5) $\lambda = z^\epsilon l$ (ϵ из условия (3.7)). Существует $z_0 > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$\frac{B_\alpha(z)}{B_\alpha(lz^{1+\epsilon})} \leq \frac{1}{2lz^\epsilon}, \quad z \geq z_0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Таким образом, установлено, что

$$B_\alpha(z) \prec\prec B_\alpha(z^{1+\epsilon}), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Соединяя (4.7), (3.7), выводим (4.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Определим пространство $\mathring{V}(Q)$ как множество сужений на Q функций из пространства $\mathring{W}_B^1(\Omega)$. Пространства $W_B^1(Q)$, $\mathring{W}_B^1(Q)$, $\mathring{V}(Q)$ являются рефлексивными сепарабельными банаховыми пространствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала установим неравенство (4.2). Применяя (1.3), выводим соотношение

$$\bar{a}(Q)\|\mathbf{B}(u)\|_{1,Q} \leq \|\psi\|_{1,Q} + (\mathbf{A}(u), u)_Q. \quad (4.8)$$

Далее, полагая в равенстве (4.1) $v = u$ и применяя (4.8), получаем (4.2).

Пусть $u^1(x)$, $u^2(x) \in \mathring{W}_B^1(Q)$ удовлетворяют тождеству (4.1). Запишем его дважды для u^1 , u^2 и вычтем из первого второе, затем положим $v = u^1 - u^2$, в результате устанавливаем

$$\int_Q (\mathbf{a}(x, u^1, \nabla u^1) - \mathbf{a}(x, u^2, \nabla u^2)) \cdot ((u^1 - u^2), \nabla(u^1 - u^2)) dx = 0.$$

Последнее равенство противоречит (1.5), следовательно, $u^1(x) = u^2(x)$ для п.в. $x \in Q$.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$, заданный равенством (3.3) для $u, v \in \mathring{W}_B^1(Q)$, удовлетворяет условиям леммы 2.

Оператор $\mathbf{A}$ можно рассматривать как отображение $\mathbf{A}: \mathring{W}_B^1(Q) \rightarrow (\mathring{W}_B^1(Q))'$. Его ограниченность вытекает из оценок (3.4), (3.2), а монотонность обеспечивается условием (1.5).

Докажем коэрцитивность оператора $\mathbf{A}$. Пользуясь соотношением (4.8), выводим

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{A}(u), u)_Q}{\|u\|_{\mathring{W}_B^1(Q)}} &\geq \frac{1}{\|u\|_{\mathring{W}_B^1(Q)}} (\bar{a}(Q)\|\mathbf{B}(u)\|_{1,Q} - \|\psi\|_{1,Q}) \\ &= \frac{1}{\|u\|_{\mathring{H}_B^1(Q)} + \|u\|_{B_0,Q}} \left(\bar{a}(Q) \int_Q \left(\sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(u_{x_\alpha}) + B_0(u) \right) dx - C_1 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее из условий (3.6) следует, что для любого $R > 0$ найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\|u\|_{B_0,Q} > \lambda_0$, $\|u_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q} > \lambda_0$, $\alpha = 1, \dots, n$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} b_0(|u|) &> Rb_0\left(\frac{|u|}{\|u\|_{B_0,Q}}\right), \\ b_\alpha(|u_{x_\alpha}|) &> Rb_\alpha\left(\frac{|u_{x_\alpha}|}{\|u_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}}\right), \quad \alpha = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пусть $\|u^i\|_{\mathring{W}_B^1(Q)} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Можно считать, что

$$\|u_{x_1}^i\|_{B_1,Q} + \dots + \|u_{x_n}^i\|_{B_n,Q} + \|u^i\|_{B_0,Q} > (n+1)\lambda_0, \quad i \geq i_0.$$

При каждом $i \geq i_0$ найдется хотя бы одно слагаемое больше λ_0 . Пусть для определенности при фиксированном $i \geq i_0$ наибольшим является первое слагаемое $\|u_{x_1}^i\|_{B_1, Q} > \lambda_0$. Соединяя (4.9), (2.8), получаем

$$\frac{(\mathbf{A}(u^i), u^i)_Q}{\|u^i\|_{\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)}} \geq \frac{\bar{a}}{c} \frac{1}{(n+1)\|u_{x_1}^i\|_{B_1, Q}} \int_Q |u_{x_1}^i| b_1(|u_{x_1}^i|) dx - \frac{C_1}{(n+1)\lambda_0}.$$

Далее, применяя (4.10), (2.1), (2.10), выводим

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{A}(u^i), u^i)_Q}{\|u^i\|_{\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)}} &\geq R \frac{C_2}{\|u_{x_1}^i\|_{B_1, Q}} \int_Q |u_{x_1}^i| b_1\left(\frac{|u_{x_1}^i|}{\|u_{x_1}^i\|_{B_1, Q}}\right) dx - C_3 \\ &\geq RC_2 \int_Q B_1\left(\frac{u_{x_1}^i}{\|u_{x_1}^i\|_{B_1, Q}}\right) dx - C_3 = RC_2 - C_3. \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду произвольности R и i , $i \geq i_0$, установлено (4.3).

Докажем семинепрерывность оператора $\mathbf{A}$. Рассмотрим скалярную функцию

$$\lambda(\tau) = \int_Q \mathbf{a}(x, u + \tau w, \nabla u + \tau \nabla w) \cdot (v, \nabla v) dx \quad (4.11)$$

для функций $u, v, w \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$, покажем ее непрерывность в точке $\tau = 0$. Применяя оценку (4.4) и неравенство (2.9), получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(x, u + \tau w, \nabla u + \tau \nabla w) \cdot (v, \nabla v)| &\leq \hat{a}_1(Q) \mathbf{B}(u + \tau w) + \mathbf{B}(v) + \psi_1(x) \\ &\leq C_4(\mathbf{B}(u) + |\tau| \mathbf{B}(w)) + \mathbf{B}(v) + \psi_1(x) \in L_1(Q). \end{aligned}$$

Пользуясь коэрцитивностью и применяя теорему Лебега, можно осуществить предельный переход в (4.11):

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda(\tau) = (\mathbf{A}(u), w)_Q = \lambda(0).$$

Согласно лемме 2 существует $u \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$ такая, что $\mathbf{A}(u) = \mathbf{0}$. Таким образом, для любого $v \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(Q)$ справедливо тождество (4.1).

Теорема 2 доказана.

§ 5. Подготовительные сведения

Сначала приведем вспомогательную лемму (см. [22; гл. II, лемма 13.2], [22; гл. II, лемма 11.2]).

ЛЕММА 3. Пусть N -функция $P(z)$ растет медленнее N -функции $M(z)$ (т.е. $P(z) \prec M(z)$). Тогда ограниченная в пространстве $L_M(Q)$ сходящаяся по мере последовательность функций сходится по норме пространства $L_P(Q)$.

На основе леммы 3 будет доказана

ЛЕММА 4. Пусть если выполнено условие (2.19), то $P(z)$ – произвольная N -функция, а если выполнено условие (2.17), то $P(z) \prec B^*(z)$. Тогда оператор вложения $\dot{H}_{\mathbf{B}}^1(Q) \subset L_P(Q)$ вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства основана на [25; лемма 4]. Пусть $\Theta \subset \dot{H}_B^1(Q)$ – ограниченное множество.

Если выполнено условие (2.17), то ввиду непрерывных вложений $\dot{H}_B^1(Q) \subset L_{B^*}(Q) \subset L_1(Q)$, $L_{B_\alpha}(Q) \subset L_1(Q)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ (см. (2.18), (2.16)), пространство $\dot{H}_B^1(Q)$ непрерывно вложено в $\dot{W}_1^1(Q)$. Множество Θ ограничено в пространстве $L_{B^*}(Q)$.

Если выполнено условие (2.19), то ввиду непрерывного вложения $\dot{H}_B^1(Q) \subset L_M(Q)$ (см. (2.21)) множество Θ ограничено в пространстве $L_M(Q)$ (M – произвольная N -функция такая, что $P(z) \prec\prec M(z)$). Кроме того, ввиду (2.21), (2.16) пространство $\dot{H}_B^1(Q)$ непрерывно вложено в $\dot{W}_1^1(Q)$.

Согласно теореме о компактности вложения $\dot{W}_1^1(Q)$ в $L_1(Q)$ (см. [26; гл. II, теорема 2.2]) множество Θ компактно по мере, тогда, учитывая лемму 3, в обоих случаях устанавливаем компактность множества Θ в пространстве $L_P(Q)$.

ЛЕММА 5. Пусть N -функция $\overline{M}(z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, $g^i(x)$, $i = 1, \dots, \infty$, $g(x)$ – такие функции из пространства $L_M(Q)$, что

$$\|g^i\|_{M,Q} \leq C, \quad g^i \rightarrow g \text{ при } i \rightarrow \infty \text{ п.в. в } Q,$$

тогда $g^i \rightarrow g$ при $i \rightarrow \infty$ слабо в $L_M(Q)$.

Доказательство леммы 5 для $M(z) = |z|^a$, $a > 1$, проведено в [24; гл. I, лемма 1.3]), для N -функции $M(z)$ доказательство осуществляется аналогичным образом.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия (1.3)–(1.5), (3.6), $u^i, u \in W_B^1(Q)$ и

$$\|u^i\|_{W_B^1(Q)} \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (5.1)$$

$$u^i \rightarrow u \quad \text{в } L_P(Q), \quad (5.2)$$

где $P(z)$ – N -функция. Предположим, что последовательность функций

$$\begin{aligned} A^i(x) &= \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(x, u^i, \nabla u^i) - a_\alpha(x, u, \nabla u))(u^i - u)_{x_\alpha} \\ &\quad + (a_0(x, u^i, \nabla u^i) - a_0(x, u, \nabla u))(u^i - u), \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяет условию

$$\int_Q A^i(x) dx \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Тогда существует последовательность натуральных чисел $I \subset \mathbb{N}$ таких, что при $i \rightarrow \infty$, $i \in I$,

$$a_\alpha(x, u^i, \nabla u^i) \rightarrow a_\alpha(x, u, \nabla u) \quad \text{в } L_{\overline{B}_\alpha}(Q), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сильной сходимости (5.2) следует существование последовательности натуральных чисел $I \subset \mathbb{N}$ таких, что при $i \rightarrow \infty$, $i \in I$, п.в. в Q

$$u^i(x) \rightarrow u(x). \quad (5.5)$$

В силу (1.5) $A^i(x) \geq 0$ п.в. в области Q , тогда ввиду (5.3) п.в. в Q

$$A^i(x) \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Обозначим через $Q' \subset Q$ подмножество точек полной меры, для которых имеют место сходимости (5.5), (5.6) и выполнены неравенства (1.3)–(1.5). Установим при $i \rightarrow \infty$, $i \in I$, сходимость

$$u_{x_\alpha}^i(x) \rightarrow u_{x_\alpha}(x), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad \text{всюду в } Q'. \quad (5.7)$$

От противного, пусть в некоторой точке $x^* \in Q'$ нет сходимости. Обозначим

$$s_0^i = u^i(x^*), \quad s_0 = u(x^*), \quad s_\alpha^i = u_{x_\alpha}^i(x^*), \quad s_\alpha = u_{x_\alpha}(x^*), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \\ \widehat{a}_1 = \varphi_1(x^*), \quad \bar{a} = \varphi(x^*).$$

Пусть последовательность $\sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(s_\alpha^i)$, $i \in I$, не ограничена. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \bar{a}/(1 + \widehat{a}_1))$, пользуясь неравенствами (2.2), (2.7) и условиями (1.3), (1.4), выводим

$$\begin{aligned} A^i(x^*) &= \sum_{\alpha=0}^n (a_\alpha(x^*, s_0^i, s^i) - a_\alpha(x^*, s_0, s))(s_\alpha^i - s_\alpha) \\ &\geq \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha(x^*, s_0, s)s_\alpha + \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha(x^*, s_0^i, s^i)s_\alpha^i - \varepsilon \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(a_\alpha(x^*, s_0^i, s^i)) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha^i) - C_1(\varepsilon) \sum_{\alpha=0}^n \bar{B}_\alpha(a_\alpha(x^*, s_0, s)) - C_2(\varepsilon) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) \\ &\geq (\bar{a} - \varepsilon(1 + \widehat{a}_1)) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha^i) - C_3(\varepsilon) \sum_{\alpha=0}^n B_\alpha(s_\alpha) - C_4(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ввиду предположения получаем, что $A^i(x^*)$ неограничена при $i \in I$, что противоречит (5.6). Следовательно, последовательности s_α^i , $i \in I$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ограничены.

Пусть $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ – один из частичных пределов $s^i = (s_1^i, s_2^i, \dots, s_n^i)$ при $i \rightarrow \infty$, $i \in I$, тогда, с учетом (5.5), имеем

$$s_0^i \rightarrow s_0, \quad s_\alpha^i \rightarrow s_\alpha^*, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (5.8)$$

Поэтому из (5.8), (5.6) и непрерывности $a_\alpha(x^*, s_0, s)$ по $s = (s_0, s)$ вытекает, что

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(x^*, s_0, s^*) - a_\alpha(x^*, s_0, s))(s_\alpha^* - s_\alpha) = 0,$$

следовательно, согласно (1.5) $s = s^*$. Это противоречит тому, что в точке x^* нет сходимости.

Таким образом, из (5.5), (5.7) и непрерывности $a_\alpha(x, s_0, s)$ по $s = (s_0, s)$ следует, что при $i \rightarrow \infty$, $i \in I$,

$$a_\alpha(x, u^i, \nabla u^i) \rightarrow a_\alpha(x, u, \nabla u), \quad \alpha = 0, 1, \dots, n, \quad \text{п.в. в } Q.$$

Кроме того, из (5.1), (3.2) и замечания 3 следует ограниченность $a_\alpha(x, u^i, \nabla u^i)$ в $L_{\overline{B}_\alpha}(Q)$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$. Из леммы 5 устанавливаем слабые сходимости (5.4). Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть N -функции $B_0(z), B_1(z), \dots, B_n(z)$ подчиняются условиям (3.6), (3.7), тогда для N -функций $\overline{M}_\alpha(z), (M_\alpha(z) = B_\alpha^{-1}(B_0(z)))$ существуют числа $c > 0, z_0 > 0, \mu > 1$ такие, что справедливы неравенства

$$\overline{M}_\alpha(z) \leq cz^\mu, \quad z \geq z_0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 6 выполнено условие (4.6), поэтому справедливы представления N -функции $B_0(z) = B_\alpha(M_\alpha(z))$ в виде композиций двух N -функций $M_\alpha(z), B_\alpha(z), \alpha = 1, \dots, n$.

Из (3.7) следует существование чисел $l > 0, z_* > 0$ таких, что

$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \leq B_0(lz), \quad z \geq z_*, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

Очевидно, можно считать $l > 1$. Благодаря (2.7) для функции $B_0(z)$ и вогнутости функций $B_\alpha^{-1}(z), \alpha = 1, \dots, n$, из (5.10) следуют неравенства

$$z^{1+\epsilon} \leq B_\alpha^{-1}(c(l)B_0(z)) \leq c(l)B_\alpha^{-1}(B_0(z)) = c(l)M_\alpha(z), \\ z \geq z_*, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Далее, из последнего легко выводим

$$M_\alpha^{-1}(z) \leq c^{1/(1+\epsilon)} z^{1/(1+\epsilon)}, \quad z \geq M_\alpha(z_*), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Применяя неравенство (2.3), получаем

$$\overline{M}_\alpha^{-1}(z) \geq c^{-1/(1+\epsilon)} z^{\epsilon/(1+\epsilon)}, \quad z \geq M_\alpha(z_*), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

В итоге имеем

$$\overline{M}_\alpha(z) \leq c^{1/\epsilon} z^{1+1/\epsilon}, \quad z \geq z_0 = \overline{M}_\alpha^{-1}(M_\alpha(z_*)), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия (1.3)–(1.5), (3.6), (3.7). Тогда для обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) справедлива априорная оценка

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r)} \leq C(r), \quad r > 0, \quad (5.11)$$

в которой $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ – абсолютно непрерывная функция с компактным носителем. Полагая в тождестве (3.5) $v = \xi u$, выводим неравенство

$$\int_{\Omega} \xi \left(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(x, u, \nabla u) u_{x_\alpha} + a_0(x, u, \nabla u) u \right) dx \\ \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} |a_\alpha(x, u, \nabla u)| |u| |\xi_{x_\alpha}(x)| dx = J_1. \quad (5.12)$$

Зафиксируем $r > 0$ и рассмотрим срезающую функцию $\xi(x)$ такую, что $\xi(x) = 1$ для $|x| \leq r$, $\xi(x) = 0$ для $|x| \geq r + 1$ и $\xi(x) > 0$ для $r < |x| < r + 1$. Для краткости будем использовать обозначения

$$\widehat{a}(\Omega(r)) = \widehat{a}(r), \quad \overline{a}(\Omega(r)) = \overline{a}(r), \quad \widehat{a}_1(\Omega(r)) = \widehat{a}_1(r).$$

Применяя (2.2), для $\varepsilon \in (0, 1)$ выводим

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi \left(\overline{B}_{\alpha}(\varepsilon a_{\alpha}(x, u, \nabla u)) + B_{\alpha} \left(\frac{u}{\varepsilon} \frac{\xi_{x_{\alpha}}}{\xi} \right) \right) dx \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi \varepsilon \overline{B}_{\alpha}(a_{\alpha}(x, u, \nabla u)) dx + \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi B_{\alpha} \left(\frac{u}{\varepsilon} \frac{\xi_{x_{\alpha}}}{\xi} \right) dx = J_{11} + J_{12}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Оценим интеграл J_{12} . Поскольку имеют место соотношения (4.6), то справедливы представления N -функции $B_0(z) = B_{\alpha}(M_{\alpha}(z))$ в виде композиций двух N -функций $M_{\alpha}(z)$, $B_{\alpha}(z)$, $\alpha = 1, \dots, n$. Далее, применяя (2.2), (2.9), устанавливаем

$$\begin{aligned} J_{12} &\leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi B_{\alpha} \left\{ M_{\alpha}(\varepsilon u) + \overline{M}_{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) \right\} dx \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi \left(\varepsilon C_2 B_0(u) + C_2 B_{\alpha} \left(\overline{M}_{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) \right) \right) dx \\ &= C_2 \left(\varepsilon n \int_{\Omega} \xi B_0(u) dx + J_2 \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$J_2 = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \xi T_{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) dx, \quad T_{\alpha}(z) = B_{\alpha}(\overline{M}_{\alpha}(z)).$$

Далее, соединяя (5.13), (5.14), используя условие (1.4), выводим

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_{\Omega} \xi \varepsilon \left(\widehat{a}_1(r+1) \sum_{\alpha=1}^n B_{\alpha}(u_{x_{\alpha}}) + (C_2 n + \widehat{a}_1(r+1)) B_0(u) \right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \xi \psi_1 dx + C_2 J_2 \leq \varepsilon C_3(r) \int_{\Omega} \xi \mathbf{B}(u) dx + \int_{\Omega} \xi \psi_1 dx + C_2 J_2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из (5.12), (5.15), применяя (1.3), выводим оценку

$$\overline{a}(r+1) \int_{\Omega} \xi \mathbf{B}(u) dx \leq \varepsilon C_3(r) \int_{\Omega} \xi \mathbf{B}(u) dx + \int_{\Omega} \xi \{\psi_1 + \psi\} dx + C_2 J_2.$$

Выбирая ε достаточно малым, получаем

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r)} \leq C_4 \int_{\Omega(r+1)} \{\psi_1 + \psi\} dx + C_5 J_2. \quad (5.16)$$

Обоснуем конечность последнего интеграла. Поскольку N -функции $B_{\alpha}(z)$ удовлетворяют Δ_2 -условию, то найдутся числа $\beta > 1$, $z_1 > 0$, $C_6 > 0$ такие,

что при $z \geq z_1$ справедливы неравенства $B_\alpha(z) \leq C_6|z|^\beta$, $\alpha = 1, \dots, n$. Тогда ввиду (5.9) существуют числа $\tau > 1$, $z_0 \geq z_1$, $C_7 > 0$ такие, что при $z \geq z_0$ справедливы неравенства $T_\alpha(z) \leq C_7|z|^\tau$, $\alpha = 1, \dots, n$. Далее получаем

$$J_2 \leq \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(r+1) \setminus \Omega(r)} T_\alpha(z_0) dx + C_8 \int_{\Omega(r+1) \setminus \Omega(r)} \xi \left(\frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right)^\tau dx. \quad (5.17)$$

Положим $\eta(z) = 1$ для $z \geq 1$, $\eta(z) = 0$ для $z \leq 0$ и $\eta(z) = z^\tau$ для $0 < z < 1$, $\eta_r(x) = \eta(r+1-|x|)$. Очевидно, что $|\nabla \eta_r(x)| \leq \tau$ и для $\xi(x) = \eta_r^\tau(x)$ справедлива оценка

$$\xi \left(\frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right)^\tau = \eta_r^\tau \left(\tau \frac{|\nabla \eta_r| \eta_r^{\tau-1}}{\eta_r^\tau} \right)^\tau \leq \tau^{2\tau}. \quad (5.18)$$

Соединяя (5.17), (5.18), выводим

$$J_2 \leq C_9(r)r^n. \quad (5.19)$$

Таким образом, из (5.16), (5.19) следует неравенство

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1, \Omega(r)} \leq C_4 \int_{\Omega(r+1)} \{\psi_1 + \psi\} dx + C_{10}(r)r^n.$$

Итак, оценка (5.11) установлена.

Утверждение 1 доказано.

§ 6. Доказательство теоремы существования

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим ограниченные области $\Omega(N)$, $N = 1, 2, \dots$. По теореме 2 для каждого $N = 1, 2, \dots$ в $\Omega(N)$ существует единственная функция $u^N \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(N))$, удовлетворяющая равенству

$$(\mathbf{A}(u^N), v)_{\Omega(N)} = 0 \quad (6.1)$$

для любой функции $v(x) \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(N))$. Согласно утверждению 1 справедливы оценки

$$\|\mathbf{B}(u^N)\|_{1, \Omega(m+2)} \leq C_1(m), \quad N > m+2. \quad (6.2)$$

Кроме того, соединяя (3.2), (6.2), получаем оценки

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^n \|a_\alpha(x, u^N, \nabla u^N)\|_{\bar{B}_\alpha, \Omega(m+2)} &\leq \hat{a}_1(m+2) \|\mathbf{B}(u^N)\|_{1, \Omega(m+2)} \\ &+ \|\psi_1\|_{1, \Omega(m+2)} + n+1 \leq C_2(m), \quad N > m+2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из неравенств (6.2), (6.3) и замечаний 3, 4 заключаем ограниченность последовательностей $\{u^N\}_{N=0}^\infty$, $\{a_\alpha(x, u^N, \nabla u^N)\}_{N=0}^\infty$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$, в пространствах $W_{\mathbf{B}}^1(\Omega(m+1))$, $L_{\bar{B}_\alpha}(\Omega(m+1))$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$, соответственно. Из рефлексивности пространства $\dot{V}(\Omega(m+1))$ следует существование функции

$u^{(m)} \in \dot{V}(\Omega(m+1))$ и последовательности натуральных чисел $I_m \subset \mathbb{N}$ таких, что при $i \rightarrow \infty$, $i \in I_m$, имеют место слабые сходимости

$$u^i \rightharpoonup u^{(m)} \quad \text{в } W_{\mathbf{B}}^1(\Omega(m+1)). \quad (6.4)$$

Поскольку $B_0(z) \prec B^*(z)$ (см. (3.1)), то для любой N -функции $P(z) \prec\prec B_0(z)$ выполнено соотношение $P(z) \prec\prec B^*(z)$. Поэтому в случае (2.17) по лемме 4 пространство $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(m+2))$ компактно вложено в $L_P(\Omega(m+2))$. А в случае (2.19) для любой N -функции $P(z)$ по лемме 4 пространство $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(m+2))$ компактно вложено в $L_P(\Omega(m+2))$. Согласно замечанию 5 $B_\alpha(z) \prec\prec B_0(z)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, поэтому существует $z_0 > 0$ такое, что

$$B_\alpha(z) \leq B_0(z), \quad z \geq z_0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (6.5)$$

Таким образом, в обоих случаях (2.17) и (2.19), пространство $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(m+2))$ компактно вложено в пространства $L_{B_\alpha}(\Omega(m+2))$, $\alpha = 1, \dots, n$.

Положим $\eta(z) = 1$ для $z \geq 1$, $\eta(z) = 0$ для $z \leq 0$ и $\eta(z) = z$ для $0 < z < 1$, положим $\eta_m(x) = \eta(m+1-|x|)$. Очевидно, что $|\nabla \eta_m| \leq 1$. Пользуясь (2.9), (6.5), (6.2), выводим неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(m+2)} \mathbf{B}(u^N \eta_{m+1}) dx \\ &= \int_{\Omega(m+2)} \left(\sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(u_{x_\alpha}^N \eta_{m+1} + u^N (\eta_{m+1})_{x_\alpha}) + B_0(u^N \eta_{m+1}) \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega(m+2)} \left(C_3 \sum_{\alpha=1}^n \{B_\alpha(u_{x_\alpha}^N) + B_\alpha(u^N)\} + B_0(u^N) \right) dx \\ &\leq C_4 \int_{\Omega(m+2)} \left(\sum_{\alpha=1}^n \{B_\alpha(u_{x_\alpha}^N) + B_\alpha(z_0)\} + B_0(u^N) \right) dx \\ &\leq C_4 \|\mathbf{B}(u^N)\|_{\Omega(m+2)} + C_5 \text{mes } \Omega(m+2) \leq C_6(m), \quad N > m+2. \end{aligned}$$

Следовательно (см. замечание 3), последовательность $\{u^N \eta_{m+1}\}_{N=1}^\infty$ ограничена в пространстве $\dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(m+2))$, поэтому при $i \rightarrow \infty$, $i \in I_m$, имеют место сильные сходимости

$$u^i \eta_{m+1} \rightarrow u^{(m)} \eta_{m+1} \quad \text{в } L_{B_\alpha}(\Omega(m+2)), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

из которых следуют сильные сходимости при $i \rightarrow \infty$, $i \in I_m$,

$$u^i \rightarrow u^{(m)} \quad \text{в } L_{B_\alpha}(\Omega(m+1)), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

Запишем (6.1) еще раз в виде

$$(\mathbf{A}(u^i), v)_{\Omega(i)} = 0, \quad v \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(i)), \quad i \in I_m, \quad (6.7)$$

и положим

$$v = v^i \eta_m = (u^i - u^{(m)}) \eta_m \in \dot{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega(i)), \quad i > m+1.$$

В результате для $i \in I_m$ получаем тождества:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(m+1)} a_{\alpha}(x, u^i, \nabla u^i) v_{x_{\alpha}}^i \eta_m dx + \int_{\Omega(m+1)} a_0(x, u^i, \nabla u^i) v^i \eta_m dx \\ & + \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(m+1)} a_{\alpha}(x, u^i, \nabla u^i) v^i (\eta_m)_{x_{\alpha}} dx = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Применяя неравенство Гёльдера (2.13), учитывая сходимость (6.6) и неравенства (6.3), для третьей суммы в (6.8) устанавливаем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega(m+1)} a_{\alpha}(x, u^i, \nabla u^i) v^i (\eta_m)_{x_{\alpha}} dx \right| \\ & \leq 2 \sum_{\alpha=1}^n \|a_{\alpha}(x, u^i, \nabla u^i)\|_{\overline{B}_{\alpha}, \Omega(m+1)} \|v^i\|_{B_{\alpha}, \Omega(m+1)} \\ & \leq C_7(m) \sum_{\alpha=1}^n \|v^i\|_{B_{\alpha}, \Omega(m+1)} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad i \in I_m. \end{aligned}$$

Пользуясь установленной сходимостью в (6.8), приходим к соотношению

$$\int_{\Omega(m+1)} \eta_m \mathbf{a}(x, u^i, \nabla u^i) \cdot (v^i, \nabla v^i) dx \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad i \in I_m.$$

Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(m+1)} \eta_m (\mathbf{a}(x, u^i, \nabla u^i) - \mathbf{a}(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)})) \cdot (v^i, \nabla v^i) dx \\ & + \int_{\Omega(m+1)} \eta_m \mathbf{a}(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)}) \cdot (v^i, \nabla v^i) dx \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad i \in I_m. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из неравенств (3.2) следует, что $\mathbf{a}(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)}) \eta_m \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega(m+1))$. Учитывая это и пользуясь слабой сходимостью (6.4), при $i \rightarrow \infty, i \in I_m$, выводим

$$\int_{\Omega(m+1)} \eta_m \mathbf{a}(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)}) \cdot (v^i, \nabla v^i) dx \rightarrow 0. \quad (6.10)$$

Тогда с учетом (6.10) из (6.9) следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(m+1)} \eta_m (\mathbf{a}(x, u^i, \nabla u^i) - \mathbf{a}(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)})) \cdot (v^i, \nabla v^i) dx \\ & = \int_{\Omega(m+1)} \eta_m A^i(x) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad i \in I_m. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ввиду того, что $\eta_m(x) = 1$ при $x \in \Omega(m)$ и $A^i(x) \geq 0$ при $x \in \Omega(m+1)$, из леммы 6 выводим слабые сходимости при $i \rightarrow \infty, i \in I_m$,

$$a_{\alpha}(x, u^i, \nabla u^i) \rightharpoonup a_{\alpha}(x, u^{(m)}, \nabla u^{(m)}) \quad \text{в } L_{\overline{B}_{\alpha}}(\Omega(m)), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6.12)$$

Зафиксируем натуральное число m и функцию $w \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ с носителем $\text{supp } w \subset \Omega(m)$, при этом тождества (6.7) для $i \in I_m$ принимают вид

$$(\mathbf{A}(u^i), w)_{\Omega(m)} = 0, \quad i > m + 1.$$

Выполняя предельный переход при $i \rightarrow \infty$ и применяя (6.12), получаем следующее равенство для $w \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, $\text{supp } w \subset \Omega(m)$:

$$(\mathbf{A}(u^{(m)}), w)_{\Omega(m)} = 0. \quad (6.13)$$

Построим функцию $u(x) \in \mathring{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$, которая является решением задачи (1.1), (1.2). Фиксируем $m = 1$ и строим функцию $u^{(1)}(x) \in \mathring{V}(\Omega(2))$ и множество $I_1 \subset \mathbb{N}$ такие, что $u^i \rightarrow u^{(1)}$ в $\mathring{V}(\Omega(2))$ при $i \rightarrow \infty$, $i \in I_1$. Для предельной функции $u^{(1)}$ выполняется тождество (6.13) с $m = 1$. Затем фиксируем $m = 2$ и строим функцию $u^{(2)}(x) \in \mathring{V}(\Omega(3))$ и бесконечное множество $I_2 \subset \mathbb{N}$, подчиняющееся дополнительному условию $I_2 \subset I_1$ так, что $u^i \rightarrow u^{(2)}$ в $\mathring{V}(\Omega(3))$ при $i \rightarrow \infty$, $i \in I_2$, и предельная функция $u^{(2)}$ удовлетворяет тождеству (6.13) с $m = 2$. За счет условия $I_2 \subset I_1$ на $\Omega(2)$ обе предельные функции совпадают, т.е. $u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x)$, $x \in \Omega(2)$. Описанную конструкцию можно осуществить для всех $m = 1, 2, 3, \dots$, в результате чего будет построена последовательность функций $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), \dots$, причем каждая функция совпадает с предыдущей в области ее определения, а именно $u^{(m+1)}(x) = u^{(m)}(x)$, $x \in \Omega(m+1)$. В результате при $m \rightarrow \infty$ будет определена функция $u(x)$, $x \in \Omega$, такая, что

$$u(x) = u^{(m)}(x) \in \mathring{V}(\Omega(m+1)), \quad x \in \Omega(m+1). \quad (6.14)$$

Следовательно, $u(x) \in \mathring{W}_{\mathbf{B}, \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$, и в силу равенств (6.14) и тождеств (6.13) функция $u(x)$ удовлетворяет каждому из следующих соотношений для $w \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, $\text{supp } w \subset \Omega(m)$, $m = 1, 2, \dots$:

$$(\mathbf{A}(u), w)_{\Omega(m)} = 0. \quad (6.15)$$

Фиксируем произвольную функцию $v \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ с ограниченным носителем. Поскольку при некотором m $\text{supp } v \subset \Omega(m)$, то тождество (6.15) можно переписать в виде равенства (3.5). Согласно определению 1 функция $u(x)$ является решением задачи (1.1), (1.2).

§ 7. Примеры

В этом параграфе будут приведены примеры уравнений вида (1.1), удовлетворяющих условиям (1.3)–(1.5), (3.6), (3.7).

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 8$, $B_1(z) = B_2(z) = B_3(z) = B_4(z) = |z|^3$, $B_5(z) = B_6(z) = B_7(z) = B_8(z) = z^4$. Поскольку

$$h(\theta) = \theta^{1/6}, \quad \int_0^1 \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta = \infty,$$

то можно определить функцию $B^*(z)$

$$(B^*)^{-1}(z) = 6|z|^{1/6}, \quad B^*(z) = \left(\frac{z}{6}\right)^6.$$

Возьмем $B_0(z) = z^6$. Такой выбор функций $B_\alpha(z)$, $\alpha = 0, 1, \dots, 8$, обеспечивает выполнение условий (3.1), (3.7), (3.6).

Пусть $\varphi(x)$ произвольная положительная функция такая, что $1/\varphi(x), \varphi(x) \in L_{\infty, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $f_0 \in L_{6/5, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $f_\alpha \in L_{3/2, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $f_\alpha \in L_{4/3, \text{loc}}(\bar{\Omega})$, $\alpha = 5, 6, 7, 8$. Положим

$$\begin{aligned} a_0(x, s_0, s) &= \varphi(x) \left(2 \sum_{\alpha=1}^4 s_\alpha^2 s_0 + 3 \sum_{\alpha=5}^8 s_\alpha^2 s_0^2 \operatorname{sign} s_0 + 16 s_0^5 \right) + f_0(x), \\ a_\alpha(x, s_0, s) &= \varphi(x) (3 s_\alpha^2 \operatorname{sign} s_\alpha + 2 s_0^2 s_\alpha) + f_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \\ a_\alpha(x, s_0, s) &= \varphi(x) (4 s_\alpha^3 + 2 |s_0|^3 s_\alpha) + f_\alpha(x), \quad \alpha = 5, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

Для таких функций $a_\alpha(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, 1, \dots, 8$, применяя неравенство Юнга, легко проверить выполнение условий (1.3), (1.4).

Покажем, что условие строгой монотонности (1.5) также справедливо. Рассмотрим функцию $A_1(\theta, z) = |z|^3 + \theta^2 z^2 + \theta^6/3$. Найдем ее гессиан:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} (A_1)_{\theta\theta} & (A_1)_{\theta z} \\ (A_1)_{z\theta} & (A_1)_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z^2 + 10\theta^4 & 4z\theta \\ 4z\theta & 6|z| + 2\theta^2 \end{vmatrix} \\ &= 12|z|^3 + 60|z|\theta^4 + 20\theta^6 - 12\theta^2 z^2 \geq 4|z|^3 + 16\theta^6 + 60|z|\theta^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, A_1 является строго выпуклой по переменным $(\theta, z) \neq (0, 0)$, а ее градиент $2z^2\theta + 2\theta^5$, $3z^2 \operatorname{sign} z + 2\theta^2 z$ — строго монотонно неубывающая функция.

Аналогично, для функции $A_2(\theta, z) = z^4 + z^2|\theta|^3 + \theta^6/3$, найдем ее гессиан:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6z^2|\theta| + 10\theta^4 & 6z\theta^2 \operatorname{sign} \theta \\ 6z\theta^2 \operatorname{sign} \theta & 12z^2 + 2|\theta|^3 \end{vmatrix} = 72z^4|\theta| + 96z^2\theta^4 + 20|\theta|^7 \geq 0.$$

Следовательно A_2 является строго выпуклой по переменным $(\theta, z) \neq (0, 0)$, а ее градиент $3z^2\theta^2 \operatorname{sign} \theta + 2\theta^5$, $4z^3 + 2z|\theta|^3$ — строго монотонно неубывающая функция.

Согласно теореме 1 решение $u(x)$ задачи (1.1), (1.2) существует.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 3$, $B_1(z) = B_2(z) = B_3(z) = |z|^{[5/2, 7/2]}$. Здесь использовано обозначение

$$z^{[c, d]} = \begin{cases} z^c, & z < 1, \\ z^d, & z \geq 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$h(\theta) = \theta^{[1/15, -1/21]}, \quad \int_0^1 \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta < \infty,$$

можно взять $B_0(z) = z^4$. Для таких функций $B_\alpha(z)$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, выполнены условия (3.7), (3.6).

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} a_\alpha(x, s_0, s) &= c^2 |s_\alpha|^{[1/2, 3/2]} s_\alpha + f_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ a_0(x, s_0, s) &= c \sum_{\alpha=1}^3 |s_\alpha|^{[5/4, 7/4]} s_0 + 3s_0^3 + f_0(x), \quad c > 0, \\ f_0 &\in L_{4/3, \text{loc}}(\bar{\Omega}), \quad f_\alpha \in L_{\bar{B}_\alpha, \text{loc}}(\bar{\Omega}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для них выполнены условия (1.3), (1.4).

Для проверки условия монотонности (1.5) при $(\theta_1, z_1) \neq (\theta_2, z_2)$ установим неравенство

$$\begin{aligned} c^2 (z_1 |z_1|^{[1/2, 3/2]} - z_2 |z_2|^{[1/2, 3/2]}) (z_1 - z_2) + (\theta_1^3 - \theta_2^3) (\theta_1 - \theta_2) \\ + c (\theta_1 |z_1|^{[5/4, 7/4]} - \theta_2 |z_2|^{[5/4, 7/4]}) (\theta_1 - \theta_2) > 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Будем считать, что

$$\theta_1 \neq \theta_2, \quad \theta_1, \theta_2 \neq 0, \quad z_1 \neq z_2, \quad z_1, z_2 \neq 0;$$

частные случаи рассматриваются элементарно.

1) Пусть сначала $\theta_1 \theta_2 < 0$ и $z_1 z_2 < 0$. Тогда достаточно установить неравенство

$$c^2 (|z_1|^{[5/2, 7/2]} + |z_2|^{[5/2, 7/2]}) + (\theta_1^4 + \theta_2^4) + c (\theta_1^2 |z_1|^{[5/4, 7/4]} + \theta_2^2 |z_2|^{[5/4, 7/4]}) > 0,$$

которое, очевидно, выполнено.

Рассмотрим остальные случаи. Очевидно, справедливо неравенство

$$(\theta_1 |z_1|^{[5/4, 7/4]} - \theta_2 |z_2|^{[5/4, 7/4]}) (\theta_1 - \theta_2) > \theta_2 (|z_1|^{[5/4, 7/4]} - |z_2|^{[5/4, 7/4]}) (\theta_1 - \theta_2).$$

Поэтому для выполнения (7.1) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} c^2 (z_1 |z_1|^{[1/2, 3/2]} - z_2 |z_2|^{[1/2, 3/2]}) (z_1 - z_2) + (\theta_1^3 - \theta_2^3) (\theta_1 - \theta_2) \\ - c \max\{|\theta_2|, |\theta_1|\} (|z_1|^{[5/4, 7/4]} - |z_2|^{[5/4, 7/4]}) (\theta_1 - \theta_2) > 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

2) Пусть теперь $\theta_1 \theta_2 > 0$ и $z_1 z_2 > 0$. После переобозначений в (7.2) можно считать, что эти числа положительны и $\theta_1 > \theta_2$, $z_1 > z_2$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (|z_1|^{[1/2, 3/2]} z_1 - |z_2|^{[1/2, 3/2]} z_2) (z_1 - z_2) &> (z_1 - z_2)^2 z_1^{[1/2, 3/2]}, \\ (\theta_1^3 - \theta_2^3) (\theta_1 - \theta_2) &> (\theta_1 - \theta_2)^2 \theta_1^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения (7.2) достаточно, чтобы

$$c^2 (z_1 - z_2)^2 z_1^{[1/2, 3/2]} + (\theta_1 - \theta_2)^2 \theta_1^2 - c \theta_1 (z_1^{[5/4, 7/4]} - z_2^{[5/4, 7/4]}) (\theta_1 - \theta_2) > 0. \quad (7.3)$$

Ввиду справедливости неравенств

$$\begin{aligned} c\theta_1(z_1^{[5/4,7/4]} - z_2^{[5/4,7/4]})(\theta_1 - \theta_2) &\leq \frac{7}{4}c\theta_1 z_1^{[1/4,3/4]}(z_1 - z_2)(\theta_1 - \theta_2) \\ &\leq \frac{7}{8}(\theta_1 - \theta_2)^2\theta_1^2 + \frac{7}{8}c^2 z_1^{[1/2,3/2]}(z_1 - z_2)^2, \end{aligned}$$

неравенство (7.3) установлено.

3) Пусть теперь $z_1 z_2 < 0$, а также $\theta_1 \theta_2 > 0$. Комбинируя случаи 1) и 2), убеждаемся в том, что для выполнения (7.2) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} c^2(|z_1|^{[5/2,7/2]} + |z_2|^{[5/2,7/2]}) + (\theta_1^3 - \theta_2^3)(\theta_1 - \theta_2) \\ - c \max\{|\theta_2|, |\theta_1|\}(|z_1|^{[5/4,7/4]} + |z_2|^{[5/4,7/4]})|\theta_1 - \theta_2| > 0. \end{aligned}$$

После переобозначений в последнем соотношении можно считать, что $\theta_1 > \theta_2 > 0$. В связи с этим убедимся в справедливости следующего неравенства:

$$c^2(|z_1|^{[5/2,7/2]} + |z_2|^{[5/2,7/2]}) + (\theta_1 - \theta_2)^2\theta_1^2 - c\theta_1(|z_1|^{[5/4,7/4]} + |z_2|^{[5/4,7/4]})(\theta_1 - \theta_2) > 0,$$

для чего достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} c^2|z_1|^{[5/2,7/2]} + \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2\theta_1^2}{2} - c\theta_1|z_1|^{[5/4,7/4]}(\theta_1 - \theta_2) &> 0, \\ c^2|z_2|^{[5/2,7/2]} + \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2\theta_1^2}{2} - c\theta_1|z_2|^{[5/4,7/4]}(\theta_1 - \theta_2) &> 0. \end{aligned}$$

Поскольку дискриминант

$$c^2\theta_1^2|z_1|^{[5/2,7/2]} - 2c^2\theta_1^2|z_1|^{[5/2,7/2]} < 0,$$

то первое неравенство выполнено, второе рассматривается аналогично.

4) Пусть теперь $z_1 z_2 > 0$, а также $\theta_1 \theta_2 < 0$. Комбинируя случаи 1) и 2), убеждаемся в том, что для выполнения (7.1) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} c^2(|z_1|^{[1/2,3/2]}z_1 - |z_2|^{[1/2,3/2]}z_2)(z_1 - z_2) + (\theta_1^4 + \theta_2^4) \\ + c(\theta_1^2|z_1|^{[5/4,7/4]} + \theta_2^2|z_2|^{[5/4,7/4]}) > 0. \end{aligned}$$

После переобозначений можно считать, что $z_1 > z_2 > 0$, поэтому достаточно справедливости неравенства

$$c^2(z_1 - z_2)^2 z_1^{[1/2,3/2]} + (\theta_1^4 + \theta_2^4) + c(\theta_1^2 z_1^{[5/4,7/4]} + \theta_2^2 z_2^{[5/4,7/4]}) > 0,$$

которое очевидно.

Таким образом, все случаи рассмотрены, неравенство (7.1) доказано.

Согласно теореме 1 решение $u(x)$ задачи (1.1), (1.2) существует.

Список литературы

- [1] A. Benkirane, J. Bennouna, “Existence of entropy solutions for some nonlinear problems in Orlicz spaces”, *Abstr. Appl. Anal.*, **7:2** (2002), 85–102.

- [2] L. Aharouch, J. Bennouna, A. Touzani, “Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces”, *Rev. Mat. Complut.*, **22**:1 (2009), 91–110.
- [3] P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, A. Zimmermann, *Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces*, PhD programme: Mathematical methods in natural sciences (MMNS), preprint no. 2011-013, 2011, <http://mmns.mimuw.edu.pl/preprints/2011-013.pdf>.
- [4] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, *Дифференц. уравнения*, **12**:10 (1976), 1877–1891; англ. пер.: V. P. Mihaïlov, “The Dirichlet problem for a second order elliptic equation”, *Differential Equations*, **12**:10 (1977), 1320–1329.
- [5] А. К. Гущин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p ”, *Матем. сб.*, **203**:1 (2012), 3–30; англ. пер.: A. K. Gushchin, “The Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with an L_p boundary function”, *Sb. Math.*, **203**:1 (2012), 1–27.
- [6] Г. А. Иосифьян, О. А. Олейник, “Аналог принципа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка и единственность решений краевых задач в неограниченных областях”, *УМН*, **31**:4(190) (1976), 261–262.
- [7] Г. А. Иосифьян, О. А. Олейник, “Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения”, *Докл. АН СССР*, **232**:6 (1977), 1257–1260; англ. пер.: O. A. Oleïnik, G. A. Iosif’jan, “Energy estimates of the generalized solutions of boundary value problems for second order elliptic equations, and their applications”, *Soviet Math. Dokl.*, **18** (1977), 241–244.
- [8] Л. М. Кожевникова, “Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 93–128; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Anisotropic classes of uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for quasi-elliptic equations”, *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1165–1200.
- [9] Л. М. Кожевникова, “О существовании и единственности решений задачи Дирихле для псевдодифференциальных эллиптических уравнений в областях с некомпактными границами”, *Уфимск. матем. журн.*, **1**:1 (2009), 38–68.
- [10] А. Л. Гладков, “Задача Дирихле для некоторых вырожденных эллиптических уравнений в неограниченных областях”, *Дифференц. уравнения*, **29**:2 (1993), 267–273; англ. пер.: A. L. Gladkov, “The Dirichlet problem for quasilinear degenerating elliptic equations in unbounded domains”, *Differential Equations*, **29**:2 (1993), 217–223.
- [11] А. Е. Шишков, “Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности”, *Укр. матем. журн.*, **47**:2 (1995), 277–289; англ. пер.: A. E. Shishkov, “Solvability of boundary-value problems for quasilinear elliptic and parabolic equations in unbounded domains in classes of functions that increase at infinity”, *Ukrainian Math. J.*, **47**:2 (1995), 326–340.
- [12] H. Brézis, “Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity”, *Appl. Math. Optim.*, **12** (1984), 271–282.
- [13] М. М. Бокало, “Коректність першої крайової задачі для деяких квазілінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях без умов на нескінченості”, *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-матем.*, 1997, № 47, 40–47.
- [14] F. Bernis, “Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **106**:3 (1989), 217–241.
- [15] J. I. Diaz, O. A. Oleinik, “Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **315**:7 (1992), 787–792.

- [16] L. Boccardo, T. Gallouet, J. L. Vazquez, “Nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$ without growth restrictions on the data”, *J. Differential Equations*, **105**:2 (1993), 334–363.
- [17] Г. И. Лаптев, “Существование решений некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в $\mathbf{R}^N$ без условий на бесконечности”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:4 (2006), 133–147; англ. пер.: G. I. Laptev, “Existence of solutions of certain quasilinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$ without conditions at infinity”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **150**:5 (2008), 2384–2394.
- [18] І. М. Медвідь, “Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах”, *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-матем.*, 2005, № 64, 149–166.
- [19] M. Bendahmane, K. H. Karlsen, “Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbf{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data”, *Potential Anal.*, **22**:3 (2005), 207–227.
- [20] М. М. Bokalo, О. В. Domanska, “On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue–Sobolev spaces”, *Mat. Stud.*, **28**:1 (2007), 77–91.
- [21] О. В. Domanska, “Boundary problems for elliptic system with anisotropic nonlinearity”, *Вісник нац. ун-ту. «Львівська політехніка». Фіз.-матем. науки*, **660**:660 (2009), 5–13.
- [22] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, М., 1958, 271 с.; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skii, Ja. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961, xi+249 pp.
- [23] А. Г. Королев, “Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлича”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1983, № 1, 32–37; англ. пер.: A. G. Korolev, “Embedding theorems for anisotropic Sobolev–Orlicz spaces”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **38**:1 (1983), 37–42.
- [24] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972, 587 с.; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969, xx+554 pp.
- [25] В. С. Климов, “К теоремам вложения анизотропных классов функций”, *Матем. сб.*, **127(169)**:2(6) (1985), 198–208; англ. пер.: V. S. Klimov, “On imbedding theorems for anisotropic classes of functions”, *Math. USSR-Sb.*, **55**:1 (1986), 195–205.
- [26] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973, 576; англ. пер. 1-го изд.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York–London, 1968, xviii+495 pp.

Лариса Михайловна Кожевникова
(Larisa M. Kozhevnikova)

Стерлитамакский филиал Башкирского
государственного университета;
Елабужский институт Казанского федерального
университета
E-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию
26.01.2015 и 19.06.2015

Анна Александровна Хаджи
(Anna A. Khadzhi)

Тюменский государственный университет
E-mail: anna_5955@mail.ru