Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Брайчев, Наименьший тип целой функции с корнями заданных усредненных плотностей, расположенными на лучах или в угле, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 2, 45–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:08:44

УДК 517.547.22

Г. Г. Брайчев

Наименьший тип целой функции с корнями заданных усредненных плотностей, расположенными на лучах или в угле

Рассматривается задача о наименьшем возможном типе целых функций с корнями фиксированных верхней и нижней усредненных плотностей, лежащими на заданном множестве. В частности, дано решение этой задачи в нескольких важных случаях: все корни лежат в угле; между двумя прямыми; на лучах, разделяющих комплексную плоскость на равные углы.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: тип целой функции, верхняя и нижняя усредненные плотности корней.

DOI: 10.4213/sm8483

§ 1. Введение

В классической теории целых функций и ее приложениях большую роль играет зависимость асимптотического поведения функции от распределения ее корней. Эта зависимость хорошо изучена в случае регулярного роста функции, отвечающего правильному распределению нулей (см., например, [1]). Потребности современной теории интерполяции и теории полноты различных систем в функциональных пространствах вызвали в последнее время повышенный интерес к изучению растущих нерегулярно целых функций конечного порядка с неизмеримой последовательностью нулей, расположенных на заданном множестве комплексной плоскости. Важнейшими примерами таких множеств являются прямая, луч, угол. Так, А. Ю. Попов в [2] дал новую оценку радиуса полноты систем экспонент, исследуя рост целых функций экспоненциального типа с вещественными симметричными нулями. Близкие вопросы изучались ранее в работе Р. Редхеффера [3]. Позднее в [4] был найден наименьший возможный тип при порядке $\rho \in (0, 1)$ целых функций с положительными нулями заданной верхней плотности. В этом же классе целых функций в работе [5] В. Б. Шерстюковым определена величина наименьшего типа при условии, что задана не только верхняя, но и нижняя плотность последовательности нулей. Развивая эти результаты, в серии статей [6]–[8] автору удалось определить наименьшую величину типа, когда заданными являются усредненные верхняя и нижняя плотности. Тем самым задача о точной оценке снизу типа целой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00281).

функции порядка $\rho \in (0, 1)$ через классические плотности распределения ее нулей в случае, когда они лежат на луче, полностью исследована.

Следующим естественным шагом в данном направлении является изучение роста целых функций с нулями, расположенными не на одном, а на нескольких лучах или в угле. Совсем недавно А. Ю. Попов (см. [9]) определил наименьший возможный тип при порядке $\rho \in (0, 1)$ целых функций с нулями заданной верхней плотности, расположенными в некотором угле, а В. Б. Шерстюков (см. [10]) решил такую же задачу с дополнительным условием на нижнюю плотность нулей. Автором [11] найдено наименьшее возможное значение типа при порядке $\rho \in (0, m)$ целых функций с нулями заданных верхней и нижней плотностей, расположенными на m лучах, делящих плоскость на равные углы. Как и в случае целых функций с положительными нулями, актуальной является задача о точных оценках типа через интегральные характеристики распределения нулей – усредненные верхнюю и нижнюю плотности.

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований автора, начатых в [7], [8], [11], где можно найти более подробную историю вопроса и библиографию. Здесь мы определяем наименьшее значение типа целых функций с нулями, имеющими заданные верхнюю и нижнюю усредненные плотности. При этом предполагается, что нули лежат либо в некотором угле, либо между двумя прямыми, либо на нескольких правильно расположенных лучах, а также на некоторых более широких множествах. В частности, решена одна из проблем, поставленных в недавнем обзоре [9] (см. § 1, задача 1*).

Введем необходимые понятия и определения. Типом целой функции $f(z)$ при порядке $\rho > 0$ (коротко, ρ -типом) называется величина

$$\sigma_\rho(f) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ – произвольная неограниченная последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек. Поскольку отсутствие точки $\lambda = 0$ в последовательности Λ не влияет ни на одну из рассматриваемых здесь асимптотических характеристик, будем в дальнейшем считать, что $0 \notin \Lambda$. Обозначим через $n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1$ считающую (с учетом кратностей) функцию последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$. Усредненной считающей функцией этой последовательности называют функцию

$$N_\Lambda(r) := \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt.$$

Верхняя и нижняя ρ -плотности последовательности Λ определяются равенствами

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Аналогично определяются и усредненные верхняя и нижняя ρ -плотности Λ :

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Опишем структуру работы. В §§ 2, 3 исследуется случай, когда нули целой функции распределены в угле $\Gamma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}$ и обладают заданными усредненными ρ -плотностями. При этих условиях находится величина наименьшего возможного ρ -типа функции. Главным результатом этих параграфов является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Тип при порядке ρ каждой целой функции $f(z)$ с нулями Λ_f , лежащими в угле Γ_θ и имеющими усредненные ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$, удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^* \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho})(\tau + \cos \theta)}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1} d\tau \right), \quad (1.1)$$

где a_1, a_2 ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) – корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}. \quad (1.2)$$

Равенство в оценке (1.1) достигается на некоторой целой функции с нулями $\tilde{\Lambda}$, лежащими на лучах $\gamma_{\pm\theta} := \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm\theta\}$ и такими, что $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

Выделим несколько важных случаев теоремы 1. Полагая в ней $\alpha^* = 0$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $2\theta \in [0, \pi]$ и имеющими верхнюю усредненную ρ -плотность β^* , удовлетворяет оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta^* e \rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho}. \quad (1.3)$$

Существует целая функция, нулями которой служит некоторая последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \gamma_\theta \cup \gamma_{-\theta}$ с верхней усредненной ρ -плотностью $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$, реализующая равенство в этой оценке.

Говорят, что последовательность Λ измерима, если $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)$, а общее значение $\Delta_\rho^*(\Lambda) := \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)$ называют усредненной ρ -плотностью Λ . Теперь из теоремы 1 при $\alpha^* = \beta^*$ для целых функций с измеримыми нулями вытекает такое утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с измеримыми нулями усредненной ρ -плотности β^* , расположенными в угле раствора $2\theta \in [0, \pi]$, удовлетворяет оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \beta^* \frac{\pi \rho \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho}. \quad (1.4)$$

Равенство реализуется на целой функции, нулями которой служит измеримая последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \gamma_\theta \cup \gamma_{-\theta}$ с усредненной ρ -плотностью $\beta^*/2$ на каждом из лучей $\gamma_{\pm\theta}$.

Если $\theta = 0$, то нули функции расположены на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$. В этом случае теорема 1 дает значение наименьшего ρ -типа целой функции с положительными нулями заданных усредненных ρ -плотностей, найденное ранее в работе [7] (см. также [8]):

при любых заданных $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ экстремальная величина

$$s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*, \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* \}$$

вычисляется по формуле

$$s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho) = \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a > 0} \int_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho})}{\tau + 1} d\tau \right),$$

где a_1 и a_2 по-прежнему являются корнями уравнения (1.2); нижняя грань $s^*(\alpha^*, \beta^*, \rho)$ достигается на некоторой последовательности $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ такой, что $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

Дальнейшее содержание таково. В § 4 мы усиливаем теорему 1, показывая, что ее утверждение остается в силе для функций с нулями, лежащими в некоторых “близких” к углу криволинейных областях. В § 5 решаются аналогичные задачи для целых функций с нулями, расположенными в областях, “близких” не к одному, а к нескольким непересекающимся углам, биссектрисы которых делят плоскость на равные части. Следующий § 6 посвящен важным случаям расположения нулей целых функций порядка $\rho \in (0, 2)$ на одной прямой, между двумя пересекающимися или параллельными прямыми, а также и в чуть более широких множествах. Здесь же даются точные оценки снизу для индикатрисы роста рассматриваемых целых функций. Наконец, в заключительном § 7 устанавливаются некоторые свойства величины экстремального ρ -типа как функции соответствующих параметров.

§ 2. Доказательство теоремы 1: основная оценка

Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$, $\theta \in [0, \pi/2]$ – фиксированные числа, a_1 и a_2 – корни уравнения (1.2). Пусть далее $f(z)$ – целая функция, все нули которой $\Lambda = \Lambda_f$ лежат в угле $\Gamma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}$ и имеют усредненные ρ -плотности

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*.$$

Наша ближайшая задача – доказать неравенство (1.1), связывающее ρ -тип $\sigma_\rho(f)$ такой функции с усредненными плотностями ее нулей.

Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что $f(0) = 1$, и упорядочим нули функции $f(z)$ по возрастанию модуля, записав их в виде

$$\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}, \quad |\theta_n| \leq \theta, \quad r_n = |\lambda_n| \nearrow +\infty.$$

По теореме Адамара (см. [1; гл. I, § 10]) функция $f(z)$ представляется в виде канонического произведения

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим вспомогательную целую функцию

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z)\overline{f(\bar{z})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{\lambda}_n}\right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\bar{\lambda}_n}\right) + \left(\frac{z}{|\lambda_n|}\right)^2\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{r_n} \cos \theta_n + \left(\frac{z}{r_n}\right)^2\right), \end{aligned}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r$, имеем

$$\omega_n(z) := \left|1 - \frac{2z}{r_n} \cos \theta_n + \left(\frac{z}{r_n}\right)^2\right| \leq 1 + \frac{2r}{r_n} \cos \theta_n + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2 = \omega_n(-r).$$

Учитывая теперь, что для $|\theta_n| \leq \theta$ справедливо соотношение $\cos \theta_n \geq \cos \theta$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |F(z)| &= \prod_{n=1}^{\infty} \omega_n(-r) \geq \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2r}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2\right), \\ \ln \max_{|z|=r} |F(z)| &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2r}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2\right) =: \sigma(r). \end{aligned}$$

Заметим, что неравенство превращается в равенство, если $|\theta_n| = \theta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим временно для сокращения записи $b = \cos \theta$. Как и прежде, будем обозначать через $n(t) = n_{\Lambda}(t)$ считающую функцию нулей $f(z)$ и через $N(t) = N_{\Lambda}(t)$ – их усредненную считающую функцию. В дальнейшем зависимость от Λ в обозначениях этих и других характеристик будем опускать там, где это не вызывает недоразумений.

Применяя стандартное интегрирование по частям в интеграле Стилтеса, преобразуем выражение для $\sigma(r)$:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{2r}{t} b + \left(\frac{r}{t}\right)^2\right) dn(t) \\ &= \ln \left(1 + \frac{2r}{t} b + \left(\frac{r}{t}\right)^2\right) n(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2br/t^2 - 2r^2/t^3}{1 + 2br/t + (r/t)^2} n(t) dt \\ &= 2r \int_0^{+\infty} \frac{bt + r}{r^2 + 2brt + t^2} \underbrace{\frac{n(t) dt}{t}}_{dN(t)} \\ &= 2r \left(\frac{bt + r}{r^2 + 2brt + t^2} N(t) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} N(t) \frac{br^2 + 2rt + bt^2}{(r^2 + 2brt + t^2)^2} dt \right). \end{aligned}$$

Здесь обе подстановки обращаются в нуль. Действительно, из условия $f(0) = 1$ следует, что $n(0) = N(0) = 0$, а из конечности величины $\bar{\Delta}_{\rho}^*$ и известного (см. [1; гл. IV, § 1]) неравенства

$$\bar{\Delta}_{\rho} \leq e\rho\bar{\Delta}_{\rho}^* \quad (2.2)$$

вытекает, что $N(t) = O(t^\rho)$ и $n(t) = O(t^\rho)$ при $t \rightarrow +\infty$. После замены переменной $t = r\tau$ в последнем интеграле получаем

$$\sigma(r) = 2 \int_0^{+\infty} N(r\tau) \frac{b\tau^2 + 2\tau + b}{(\tau^2 + 2b\tau + 1)^2} d\tau = 2r^\rho \int_0^{+\infty} \frac{N(r\tau)}{(r\tau)^\rho} \frac{\tau^\rho(b\tau^2 + 2\tau + b)}{(\tau^2 + 2b\tau + 1)^2} d\tau.$$

Подводя итог вычислениям, можем записать соотношение

$$\frac{\ln \max_{|z|=r} |F(z)|}{r^\rho} \geq \frac{\sigma(r)}{r^\rho} = 2 \int_0^{+\infty} \Delta^*(r\tau) K(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где мы обозначили

$$\Delta^*(r) := \frac{N(r)}{r^\rho}, \quad K(\tau) := \frac{\tau^\rho(b\tau^2 + 2\tau + b)}{(\tau^2 + 2b\tau + 1)^2}.$$

В случае, когда $|\theta_n| = \theta$ при всех $n \in \mathbb{N}$, выполняется равенство

$$\frac{\ln \max_{|z|=r} |F(z)|}{r^\rho} = \frac{\sigma(r)}{r^\rho} = 2 \int_0^{+\infty} \Delta^*(r\tau) K(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Оценим снизу функцию $\Delta^*(r)$.

Рассмотрим сначала случай, когда последовательность нулей целой функции неизмерима, т.е. $\underline{\Delta}^* < \overline{\Delta}^*$. Из определения усредненной считающей функции $N(x)$ вытекает, что при всех положительных r, τ, a выполняется оценка

$$N(r\tau) = N\left(\frac{r}{a}\right) + \int_{ra^{-1}}^{r\tau} \frac{n(x)}{x} dx \geq N\left(\frac{r}{a}\right) + n\left(\frac{r}{a}\right) \ln a\tau.$$

Отсюда уже нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \Delta^*(r\tau) &\geq \frac{N(r/a) + n(r/a) \ln a\tau}{(r\tau)^\rho} = \frac{N(r/a)}{(r/a)^\rho} \frac{1 + \nu(r/a) \ln a\tau}{(a\tau)^\rho} \\ &= \Delta^*(r/a) \frac{1 + \nu(r/a) \ln a\tau}{(a\tau)^\rho}, \end{aligned}$$

где обозначено $\nu(r) := n(r)/N(r)$. Далее нам потребуется одно вспомогательное утверждение, доказанное в [7].

ЛЕММА 2.1. Пусть Λ – неизмеримая последовательность положительных чисел, т.е. $\underline{\Delta}^* < \overline{\Delta}^*$. Тогда найдется последовательность $R_j \rightarrow +\infty$, на которой выполняются соотношения

$$\nu(R_j) \geq \rho, \quad \Delta^*(R_j) \rightarrow \overline{\Delta}^*, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Зафиксируем произвольно положительные числа $a > 0$ и $\varepsilon > 0$. Из определения усредненной нижней ρ -плотности последовательности Λ найдем число $c > 0$ так, чтобы при каждом $r \geq aca_2^{1/\rho}$ для всех $\tau \geq c/r$ выполнялось неравенство $\Delta^*(r\tau) \geq \alpha_\varepsilon^* := \alpha^*/(1 + \varepsilon)$. Пусть r пробегает значения $r_j = aR_j$, где

R_j взяты из леммы 2.1. Применяя эту лемму, для всех достаточно больших j , скажем $j \geq j_0$, получим

$$\nu(R_j) = \nu\left(\frac{r_j}{a}\right) \geq \rho, \quad \Delta^*(R_j) = \Delta^*\left(\frac{r_j}{a}\right) \geq \beta_\varepsilon^* := \frac{\beta^*}{1 + \varepsilon}.$$

Продолжая доказательство оценки (1.1), можем записать соотношение

$$\Delta^*(r_j \tau) \geq \beta_\varepsilon^* \frac{1 + \rho \ln a \tau}{(a \tau)^\rho}, \quad \tau \geq \frac{c}{r_j}, \quad j \geq j_0.$$

Введем для $\tau > 0$ вспомогательную функцию

$$\psi_r(\tau) = \begin{cases} \beta_\varepsilon^* \frac{1 + \rho \ln a \tau}{(a \tau)^\rho}, & \tau \in ((aa_2^{1/\rho})^{-1}, (aa_1^{1/\rho})^{-1}), \\ \alpha_\varepsilon^*, & \tau \notin ((aa_2^{1/\rho})^{-1}, (aa_1^{1/\rho})^{-1}). \end{cases}$$

Здесь и ниже $a_1 \leq 1 \leq a_2$ суть корни уравнения (1.2). Обратим внимание на то, что при $\alpha^* = 0$ имеем $a_1 = 0$, $a_2 = e$, и функция $\psi_r(\tau)$ принимает вид

$$\psi_r(\tau) = \begin{cases} \beta_\varepsilon^* \frac{1 + \rho \ln a \tau}{(a \tau)^\rho}, & \tau \in ((ae^{1/\rho})^{-1}, +\infty), \\ 0, & \tau \notin ((ae^{1/\rho})^{-1}, +\infty). \end{cases}$$

Учитывая, что для $\tau \geq cr_j^{-1}$ выполняется $\Delta^*(r_j \tau) \geq \alpha_\varepsilon^*$, можем утверждать, что при всех $r_j \geq aca_2^{1/\rho}$ и $\tau \geq cr_j^{-1}$, $j \geq j_0$, справедливо неравенство

$$\Delta^*(r_j \tau) \geq \psi_{r_j}(\tau).$$

Последнее вместе с (2.3) во всех случаях влечет за собой оценку

$$\frac{\ln \max_{|z|=r_j} |F(z)|}{r_j^\rho} \geq 2 \int_{cr_j^{-1}}^{+\infty} \psi_{r_j}(\tau) K(\tau) d\tau, \quad j \geq j_0. \quad (2.6)$$

Интеграл в правой части преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{cr_j^{-1}}^{+\infty} \psi_{r_j}(\tau) K(\tau) d\tau &= \alpha_\varepsilon^* \left(\int_{cr_j^{-1}}^{(aa_2^{1/\rho})^{-1}} K(\tau) d\tau + \int_{(aa_1^{1/\rho})^{-1}}^{+\infty} K(\tau) d\tau \right) \\ &\quad + \beta_\varepsilon^* \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{1 + \rho \ln a \tau}{(a \tau)^\rho} K(\tau) d\tau \\ &= \alpha_\varepsilon^* \int_{cr_j^{-1}}^{+\infty} K(\tau) d\tau + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \left(\beta_\varepsilon^* \frac{1 + \rho \ln a \tau}{(a \tau)^\rho} - \alpha_\varepsilon^* \right) K(\tau) d\tau \\ &= \alpha_\varepsilon^* \left(\int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau - \int_0^{cr_j^{-1}} K(\tau) d\tau \right) \\ &\quad + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{(\beta_\varepsilon^* a^{-\rho} (1 + \rho \ln a \tau) - \alpha_\varepsilon^* \tau^\rho) K(\tau)}{\tau^\rho} d\tau. \end{aligned}$$

Переходя теперь в неравенстве (2.6) к пределу по $j \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\rho(F)}{2} &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{c\tau_j^{-1}}^{+\infty} \psi_{r_j}(\tau) K(\tau) d\tau \\ &= \alpha_\varepsilon^* \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau + \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{(\beta_\varepsilon^* a^{-\rho}(1 + \rho \ln a\tau) - \alpha_\varepsilon^* \tau^\rho) K(\tau)}{\tau^\rho} d\tau. \end{aligned}$$

Устремив здесь ε к нулю, приходим к неравенству

$$\frac{\sigma_\rho(F)}{2} \geq \underbrace{\alpha^* \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau}_{I_1} + \underbrace{\int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{(\beta^* a^{-\rho}(1 + \rho \ln a\tau) - \alpha^* \tau^\rho) K(\tau)}{\tau^\rho} d\tau}_{I_2}. \quad (2.7)$$

Интегралы I_1 и I_2 в этой оценке возьмем по частям, используя равенство

$$K(\tau) = -\tau^\rho \left(\frac{b\tau + 1}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \right)' = \frac{\tau^\rho (b\tau^2 + 2\tau + b)}{(\tau^2 + 2b\tau + 1)^2}.$$

Для I_1 получим:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau = - \int_0^{+\infty} \tau^\rho d \left(\frac{b\tau + 1}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \right) = -\tau^\rho \left(\frac{b\tau + 1}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad + \rho \int_0^{+\infty} \tau^{\rho-1} \left(\frac{b\tau + 1}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \right) d\tau = \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta. \end{aligned}$$

При вычислении последнего интеграла использовалась известная формула (см. [12; п. 2.2.9]). Таким образом,

$$I_1 = \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta. \quad (2.8)$$

Аналогично вычисляем интеграл I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} (\beta^* a^{-\rho} \ln e(a\tau)^\rho - \alpha^* \tau^\rho) d \left(\frac{b\tau + 1}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \right) \\ &= - \left(\frac{b\tau + 1}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \right) (\beta^* a^{-\rho} \ln e(a\tau)^\rho - \alpha^* \tau^\rho) \Big|_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \\ &\quad + \rho \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^\rho)(b\tau + 1)}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned}$$

Проверим, что внеинтегральное слагаемое равно нулю. Действительно,

$$\beta^* a^{-\rho} \ln e(a\tau)^\rho - \alpha^* \tau^\rho = \beta^* \tau^\rho \left((a\tau)^{-\rho} \ln \frac{e}{(a\tau)^{-\rho}} - \frac{\alpha^*}{\beta^*} \right),$$

а выражение в скобках при $\tau = (aa_j^{1/\rho})^{-1}$ дает $a_j \ln(e/a_j) - \alpha^*/\beta^* = 0$, поскольку a_j , $j = 1, 2$, – корни уравнения (1.2). Следовательно,

$$I_2 = \rho \int_{(aa_2^{1/\rho})^{-1}}^{(aa_1^{1/\rho})^{-1}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^\rho)(b\tau + 1)}{\tau^2 + 2b\tau + 1} \frac{d\tau}{\tau},$$

или, после замены переменной $t = \tau^{-1}$,

$$I_2 = \rho \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + b)}{t^2 + 2bt + 1} dt. \quad (2.9)$$

Подводя итог последним преобразованиям, из (2.7)–(2.9) получаем

$$\frac{\sigma_\rho(F)}{2} \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + b)}{t^2 + 2bt + 1} dt \right).$$

Заметим теперь, что

$$M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)| |\overline{f(\bar{z})}| \leq \max_{|z|=r} |f(z)|^2 = M_f^2(r),$$

откуда

$$\sigma_\rho(F) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_F(r) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_f^2(r) = 2\sigma_\rho(f).$$

Таким образом,

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\sigma_\rho(F)}{2} \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + b)}{t^2 + 2bt + 1} dt \right),$$

или, вспоминая, что $b = \cos \theta$,

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right). \quad (2.10)$$

Наконец, используя свободу в выборе $a > 0$, приходим к требуемой оценке (1.1):

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right).$$

Осталось рассмотреть случай измеримой последовательности нулей целой функции, когда существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \alpha^* = \beta^*.$$

Здесь для любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ найдется число c такое, что при всех $\tau \geq c/r$ выполняется

$$\Delta^*(r\tau) \geq \beta_\varepsilon^* = \frac{\beta^*}{1 + \varepsilon}.$$

Оценивая интеграл в (2.3), с учетом формулы (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Delta^*(r\tau) K(\tau) d\tau &\geq \int_{c/r}^{+\infty} \Delta^*(r\tau) K(\tau) d\tau \geq \beta_\varepsilon^* \int_{c/r}^{+\infty} K(\tau) d\tau \\ &= \beta_\varepsilon^* \left(I_1 - \int_0^{c/r} K(\tau) d\tau \right) = \beta_\varepsilon^* \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + o(1), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Переход в (2.3) к верхнему пределу при $r \rightarrow +\infty$ дает

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\sigma_\rho(F)}{2} \geq \beta_\varepsilon^* \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta,$$

что при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к оценке, совпадающей при $\alpha^* = \beta^*$ с неравенством (1.1). Действительно, когда $\alpha^* = \beta^*$, имеем $a_1 = a_2 = 1$ и интеграл в оценке (1.1) пропадает.

§ 3. Доказательство теоремы 1: построение экстремального примера

Сейчас нам необходимо построить такую последовательность $\tilde{\Lambda} = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, лежащую в угле $\Gamma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}$, $\theta \in [0, \pi/2]$, с усредненной считающей функцией $N_{\tilde{\Lambda}}(r)$, чтобы выполнялись равенства

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(r)}{r^\rho} = \beta^*, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(r)}{r^\rho} = \alpha^*, \quad (3.1)$$

а ρ -тип экстремальной целой функции

$$f_0(z) = \prod_{\lambda_n \in \tilde{\Lambda}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

составленной по $\tilde{\Lambda}$, вычислялся согласно формуле

$$\sigma_\rho(f_0) = \rho \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right),$$

где a_1 и a_2 – корни уравнения (1.2): $a \ln(e/a) = \alpha^*/\beta^*$.

Пусть сначала $\alpha^* = 0$. В этом случае корнями уравнения (1.2) являются числа $a_1 = 0$, $a_2 = e$, и оценка (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(f) &\geq \rho \max_{a>0} \int_0^{ae^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho}(\tau + \cos \theta)}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1} d\tau \\ &= \frac{\beta^* \rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1)}{a^\rho} \Big|_0^{ae^{1/\rho}} = \frac{\beta^* e \rho}{2} \max_{b>0} \frac{\ln(b^2 + 2b \cos \theta + 1)}{b^\rho}. \end{aligned}$$

На последнем шаге вычислений мы обозначили $b = ae^{1/\rho}$. Этим доказана оценка (1.3). Точность этой оценки вытекает из следующего результата А. Ю. Попова (см. [9; теорема 3.1]), который сформулируем в удобной для нас форме: тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $2\theta \in [0, \pi]$ и имеющими верхнюю ρ -плотность $\overline{\Delta}_\rho = \beta$, удовлетворяет оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho};$$

существует целая функция $f_0(z)$, реализующая равенство в этой оценке.

Действительно, в силу неравенства (2.2) экстремальная функция, найденная А. Ю. Поповым, обеспечивает равенство в оценке теоремы 2, поскольку с учетом этой оценки имеем

$$\begin{aligned} \frac{\beta^* e \rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho} &\leq \sigma_\rho(f_0) = \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho} \\ &\leq \frac{\beta^* e \rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho}. \end{aligned}$$

К тому же нетрудно проверить, что нули функции $f_0(z)$ обладают нижними ρ -плотностями $\underline{\Delta}_\rho = \underline{\Delta}_\rho^* = 0$ (см. также § 7, замечание 2 об экстремальных функциях). Часть теоремы 1, соответствующая случаю $\alpha^* = 0$, доказана. Тем самым справедливость теоремы 2 установлена.

Рассмотрим теперь случай $0 < \alpha^* \leq \beta^*$. Распределим искомую последовательность $\tilde{\Lambda}$ одинаково на сторонах угла Γ_θ , положив

$$|\lambda_{2k-1}| = |\lambda_{2k}| = r_k, \quad \arg \lambda_n = (-1)^n \theta,$$

и образуем функцию

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n e^{i\theta}}\right) \left(1 - \frac{z}{r_n e^{-i\theta}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{z}{r_n}\right)^2\right). \quad (3.2)$$

Используя такую форму записи экстремальной функции, сведем задачу к построению положительной последовательности

$$|\tilde{\Lambda}| := (r_n)_{n=1}^{\infty}, \quad 0 < r_1 = \dots = r_{n_1} < r_{n_1+1} = \dots = r_{n_2} < r_{n_2+1} = \dots, \quad (3.3)$$

с так подобранными кратностями $n_1, n_2, \dots$, чтобы $|\tilde{\Lambda}|$ обеспечивала минимальное значение для типа $\sigma_\rho(f_0)$ и удовлетворяла в соответствии с (3.1) условиям

$$\begin{aligned} B &:= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(r)}{2r^\rho} = \frac{\beta^*}{2}, \\ A &:= \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(r)}{2r^\rho} = \frac{\alpha^*}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы обозначили считающую и усредненную считающую функции последовательности $|\tilde{\Lambda}|$ через $n(r)$ и $N(r)$ соответственно и воспользовались очевидными равенствами (в последовательность $\tilde{\Lambda}$ члены входят сопряженными парами)

$$n(r) = \frac{n_{\tilde{\Lambda}}(r)}{2}, \quad N(r) = \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(r)}{2}, \quad r > 0.$$

Непосредственно проверяемая формула

$$r_n = \min\{r : n(r) \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

заменяет построение положительной последовательности (3.3) поиском ее считающей функции $n(r)$ или усредненной считающей функции $N(r)$. Нахождением этих функций мы сейчас и займемся.

Для $r \in [r_{n_k}, r_{n_{k+1}})$ имеем

$$n(r) = n_k, \quad N(r) = N(r_{n_k}) + n_k \ln \frac{r}{r_{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нам будет удобней перейти к функциям

$$\omega(x) := n(e^x), \quad \Omega(x) := N(e^x).$$

График функции $\Omega(x) = \int_0^x \omega(t) dt$ представляет собой ломаную, k -е звено которой имеет уравнение

$$\Omega(x) = \Omega(\ln r_{n_k}) + n_k(x - \ln r_{n_k}), \quad x \in [\ln r_{n_k}, \ln r_{n_{k+1}}).$$

Приступим к построению этого графика. Нам придется исследовать отдельно два случая: $0 < \alpha^* = \beta^*$ и $0 < \alpha^* < \beta^*$.

Пусть вначале $0 < \alpha^* = \beta^*$ (т.е. $0 < A = B$). Рассмотрим функцию $y_A(x) = Ae^{\rho x}$, $x > 0$, и проведем к графику G_A этой функции касательные l_j с угловыми коэффициентами, равными последовательным натуральным числам $j \in \mathbb{N}$. Нетрудно найти абсциссы x_j точек касания: $x_j = (1/\rho) \ln(j/\rho A)$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть $y = \Omega_1(x)$ – уравнение ломаной, j -е звено которой является отрезком касательной l_j , содержащим точку касания $(x_j, Ae^{\rho x_j})$. В силу выпуклости функции $y_A(x)$ график этой ломаной расположен ниже графика G_A . Кроме того, по лемме [13; гл. 3, § 1] на каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ выполняется соотношение

$$0 \leq y_A(x) - \Omega_1(x) \leq \frac{1}{4}(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{4\rho} \ln \frac{j+1}{j} < \frac{1}{4\rho j}.$$

Таким образом,

$$0 \leq y_A(x) - \Omega_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\Omega_1(x)}{e^{\rho x}} = A = B,$$

причем

$$N(r) \leq Ar^\rho, \quad r > 0.$$

Теперь, используя (2.4), (3.2), запишем в прежних обозначениях представление

$$\begin{aligned} \sigma_0(r) &:= \ln \max_{|z|=r} |f_0(z)| = \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2r}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{r}{r_n} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2r}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{r}{r_n} \right)^2 \right) = 2r^\rho \int_0^{+\infty} \Delta^*(r\tau) K(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta^*(r) = N(r)/r^\rho \leq A$, то с учетом формулы (2.8) имеем

$$\frac{\sigma_0(r)}{r^\rho} \leq 2AI_1 = 2A \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau = 2A \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta.$$

Переход к верхнему пределу при $r \rightarrow +\infty$ показывает, что ρ -тип построенной целой функции $f_0(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(f_0) \leq 2A \frac{\pi \rho \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} = \alpha^* \frac{\pi \rho \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho}.$$

Обратное неравенство справедливо для ρ -типа каждой целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с измеримыми нулями усредненной ρ -плотности $\Delta^* = \alpha^*$, расположенными в угле раствора $2\theta \leq \pi$, поскольку из (1.1) при $\alpha^* = \beta^*$ получаем

$$\sigma_\rho(f) \geq \alpha^* \frac{\pi \rho \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho}.$$

В самом деле, в случае, когда $\alpha^* = \beta^*$, корнями уравнения (1.2) служат числа $a_1 = a_2 = 1$ и интеграл в оценке (1.1) исчезает. Итак, теорема 1 при $\alpha^* = \beta^*$ доказана, что говорит о справедливости утверждения теоремы 3.

Продолжим построение экстремальной функции в ситуации, когда $\alpha^* < \beta^*$, т.е. $A < B$. В этом случае наряду с функциями $y_A(x)$ и $\Omega_1(x)$ рассмотрим функцию $y_B(x) = Be^{\rho x}$, $x > 0$, и выберем какую-либо строго возрастающую последовательность натуральных чисел m_n , удовлетворяющую условию

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} \nearrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Пусть $y = \Omega_2(x)$ – уравнение ломаной, снова составленное из уравнений последовательных отрезков касательных к графику G_B функции $y_B(x)$ с угловыми коэффициентами, совпадающими с выбранными числами m_n из (3.5). Как и прежде, легко найти абсциссы ζ_n точек касания этой ломаной с графиком G_B , именно, $\zeta_n = (1/\rho) \ln(m_n/\rho B)$. Легко видеть, что точки пересечения последовательных звеньев ломаной лежат ниже графика G_A в силу условия (3.5). Этого можно добиться уже начиная со второго звена за счет выбора углового коэффициента m_2 (достаточно взять $m_2 > (a_2/a_1)m_1$). Определим теперь абсциссы $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ точек пересечения графика ломаной $y = \Omega_2(x)$ с графиком G_A . Для этого вычислим различными способами угловой коэффициент касательной к графику G_B , являющейся при условии $B > A$ также и секущей графика G_A . Имеем

$$\frac{Be^{\rho \zeta_n} - Ae^{\rho x_n^{(j)}}}{\zeta_n - x_n^{(j)}} = B\rho e^{\rho \zeta_n}, \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Разделим обе части этого равенства на $Be^{\rho \zeta_n}/(\zeta_n - x_n^{(j)})$ и обозначим $y_j = \zeta_n - x_n^{(j)}$. После преобразования полученного соотношения $1 - (A/B)e^{-\rho y_j} = \rho y_j$, к виду $(1 - \rho y_j)e^{\rho y_j} = A/B$ запишем

$$e^{\rho y_j} \ln \frac{e}{e^{\rho y_j}} = \frac{A}{B} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Отсюда получаем $e^{\rho y_j} = a_{2/j}$, т.е. $y_j = \zeta_n - x_n^{(j)} = (1/\rho) \ln a_{2/j}$, $j = 1, 2$, где a_1, a_2 – корни уравнения (1.2). Таким образом,

$$x_n^{(1)} = \zeta_n - \frac{1}{\rho} \ln a_2, \quad x_n^{(2)} = \zeta_n - \frac{1}{\rho} \ln a_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Выпуклость функций $y_A(x)$ и $y_B(x)$ приводит к соотношениям

$$\Omega_2(x) = Be^{\rho\zeta_n} + \rho Be^{\rho\zeta_n}(x - \zeta_n) \in [Ae^{\rho x}, Be^{\rho x}], \quad x \in [x_n^{(1)}, x_n^{(2)}], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Кроме того, по построению имеем

$$\Omega_2(\zeta_n) = y_B(\zeta_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Введем функцию

$$\Omega(x) = \max\{\Omega_1(x), \Omega_2(x)\}, \quad x > 0. \quad (3.8)$$

Графиком функции (3.8) служит ломаная, абсциссы вершин которой (обозначим их $\ln r_n$) определяют некоторую последовательность. Для того чтобы усредненная считающая функция задавалась формулой $N(e^x) = \Omega(x)$, запишем каждый член последовательности с кратностью, равной разности угловых коэффициентов звеньев ломаной с рассматриваемой общей вершиной. Докажем, что полученная в результате новая последовательность $[\tilde{\Lambda}]$ вида (3.3) является искомой.

Действительно, в силу построения и с учетом (3.4), (3.6) имеем

$$\Omega(x) \leq y_A(x), \quad x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n^{(1)}, x_n^{(2)}], \quad (3.9)$$

$$y_A(x) \leq \Omega(x) \leq y_B(x), \quad x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n^{(1)}, x_n^{(2)}]. \quad (3.10)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\zeta_n - \frac{1}{\rho} \ln a_2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \ln \frac{m_n}{\rho B a_2} = +\infty,$$

то из (3.4), (3.7), (3.9), (3.10) заключаем, что выполнены предельные соотношения

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho}, \quad B = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho}.$$

Найденной последовательности $[\tilde{\Lambda}]$, отвечает бесконечное произведение $f_0(z)$ вида (3.2). Для логарифма максимума модуля этой функции, как и в случае $A = B$, воспользуемся представлением

$$\sigma_0(r) = 2r^\rho \int_0^{+\infty} \Delta^*(r\tau) K(\tau) d\tau, \quad \Delta^*(r) = \frac{N(r)}{r^\rho}.$$

Вывод ключевого соотношения (1.1) основывался на оценке величины $\Delta^*(r)$ снизу. Для обоснования экстремального характера функции $f_0(z)$ потребуется оценить $\Delta^*(r)$ сверху. Вернемся к первоначальной переменной $x = \ln t$ и обозначим

$$\xi_n = e^{\zeta_n} = \left(\frac{m_n}{\rho \beta^*} \right)^{1/\rho}, \quad t_n^{(j)} = e^{x_n^{(j)}} = \xi_n a_{2/j}^{-1/\rho}, \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

В силу (3.6), (3.9) имеем

$$N(t) = B\xi_n^\rho + \rho B\xi_n^\rho \ln \frac{t}{\xi_n}, \quad t \in [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}], \quad n \in \mathbb{N},$$

$$N(t) \leq At^\rho, \quad t \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}].$$

Отсюда для величины $\Delta^*(rt) := N_\Lambda(rt)/(rt)^\rho$ при фиксированном $r > 0$ извлекаем соотношения

$$\Delta^*(rt) \leq A, \quad t \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{t_n^{(1)}}{r}, \frac{t_n^{(2)}}{r} \right] =: T, \quad (3.12)$$

$$\Delta^*(rt) = \frac{B\xi_n^\rho}{(rt)^\rho} \left(1 + \rho \ln \frac{rt}{\xi_n} \right), \quad t \in \left[\frac{t_n^{(1)}}{r}, \frac{t_n^{(2)}}{r} \right], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Все нужные оценки усредненной считающей функции последовательности $\tilde{\Lambda}$ получены.

Перейдем к обоснованию экстремальности целой функции (3.2), построенной по $\tilde{\Lambda}$. Оценим сверху величину

$$\frac{\sigma_0(r)}{r^\rho} = \frac{\ln \max_{|z|=r} |f_0(z)|}{r^\rho} = 2 \int_0^{+\infty} \Delta^*(rt) K(t) dt,$$

$$K(t) = -t^\rho \left(\frac{t \cos \theta + 1}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} \right)'.$$

Для этого, привлекая (3.12), (3.13), запишем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Delta^*(rt) K(t) dt &= \int_{\mathbb{R} \setminus T} \Delta^*(rt) K(t) dt + \int_T \Delta^*(rt) K(t) dt \\ &\leq A \int_{\mathbb{R} \setminus T} K(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{B\xi_n^\rho}{(rt)^\rho} \ln e \left(\frac{tr}{\xi_n} \right)^\rho K(t) dt \\ &= A \underbrace{\int_0^{+\infty} K(t) dt}_{I_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \left(\frac{B\xi_n^\rho}{(rt)^\rho} \ln e \left(\frac{tr}{\xi_n} \right)^\rho - A \right) K(t) dt}_{S_n(r)}. \end{aligned}$$

Напомним (см. (2.8)), что $I_1 = (\pi\rho/\sin \pi\rho) \cos \rho\theta$. Обозначим

$$Q(t) = \frac{t \cos \theta + 1}{t^2 + 2t \cos \theta + 1}$$

и преобразуем слагаемые в сумме, интегрируя по частям каждое из них:

$$\begin{aligned} S_n(r) &:= - \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \left[\frac{B\xi_n^\rho}{r^\rho} \ln e \left(\frac{tr}{\xi_n} \right)^\rho - At^\rho \right] Q'(t) dt \\ &= -Q(t) \left[\frac{B\xi_n^\rho}{r^\rho} \ln e \left(\frac{tr}{\xi_n} \right)^\rho - At^\rho \right] \Big|_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} + \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \left(B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho - At^\rho \right) Q(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Подстановка обращается в нуль. В самом деле,

$$\frac{B\xi_n^\rho}{r^\rho} \ln e \left(\frac{t_n^{(j)}}{\xi_n} \right)^\rho - A \frac{(t_n^{(j)})^\rho}{r^\rho} = \frac{(t_n^{(j)})^\rho}{r^\rho} B \left[a_{2/j} \ln \frac{e}{a_{2/j}} - \frac{A}{B} \right] = 0,$$

поскольку a_j , $j = 1, 2$, – корни уравнения (1.2). Таким образом,

$$S_n(r) = \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \left(B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho - A t^\rho \right) Q(t) \frac{dt}{t}. \quad (3.14)$$

Теперь зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и оценим сумму

$$S(r) := \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) = \sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) + \sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) + [S_j(r) + S_{j+1}(r)]. \quad (3.15)$$

Будем использовать простые неравенства

$$Q(t) = \frac{t \cos \theta + 1}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} \leq 1, \quad Q(t) \leq \frac{2}{t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда и из (3.14), пренебрегая отрицательными слагаемыми, получаем для величины $S_n(r)$ две оценки

$$S_n(r) \leq \rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho \frac{dt}{t} = B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho \ln \frac{a_2}{a_1}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} S_n(r) &\leq 2\rho \int_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho \frac{dt}{t^2} = 2\rho B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho \left(\frac{r}{t_n^{(1)}} - \frac{r}{t_n^{(2)}} \right) \\ &= 2\rho B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^{\rho-1} (a_2^{1/\rho} - a_1^{1/\rho}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для дальнейших оценок нам понадобится

ЛЕММА ШТОЛЬЦА. Если положительные последовательности a_j и b_j , где b_j строго монотонна, являются либо бесконечно большими, либо бесконечно малыми, то выполняется равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j}{b_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j+1} - a_j}{b_{j+1} - b_j}$$

при условии, что предел справа существует.

Из (3.5) и (3.11) получаем условие

$$\frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} = \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{1/\rho} \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

которое влечет сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{\rho-1}$. Применяя лемму Штольца, с учетом (3.18) находим

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{j-1} \xi_n^\rho}{\xi_j^\rho} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\xi_j^\rho}{\xi_{j+1}^\rho - \xi_j^\rho} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi_{j+1}/\xi_j)^\rho - 1} = 0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=j+2}^{\infty} \xi_n^{\rho-1}}{\xi_{j+1}^{\rho-1}} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\xi_{j+2}^{\rho-1}}{\xi_{j+2}^{\rho-1} - \xi_{j+1}^{\rho-1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi_{j+2}/\xi_{j+1})^{1-\rho} - 1} = 0. \end{aligned}$$

Теперь, используя (3.16), (3.17), показываем, что равномерно по $r \in [\xi_j, \xi_{j+1}]$ выполняются соотношения

$$\sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) \leq \sum_{n=1}^{j-1} B \left(\frac{\xi_n}{\xi_j} \right)^\rho \ln \frac{a_2}{a_1} \leq B \ln \frac{a_2}{a_1} \frac{\sum_{n=1}^{j-1} \xi_n^\rho}{\xi_j^\rho} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) &\leq \sum_{n=j+2}^{\infty} 2\rho B \left(\frac{\xi_n}{\xi_{j+1}} \right)^{\rho-1} (a_2^{1/\rho} - a_1^{1/\rho}) \\ &\leq 2\rho B (a_2^{1/\rho} - a_1^{1/\rho}) \frac{\sum_{n=j+2}^{\infty} \xi_n^{\rho-1}}{\xi_{j+1}^{\rho-1}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для того чтобы оценить оставшуюся часть $S(r)$, в формуле (3.14) для $S_n(r)$ сделаем замену переменной $t = 1/\tau$:

$$\begin{aligned} S_n(r) &= \rho \int_{a_2^{-1/\rho} \xi_n/r}^{a_1^{-1/\rho} \xi_n/r} \left(B \left(\frac{\xi_n}{r} \right)^\rho - A t^\rho \right) \frac{t \cos \theta + 1}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} \frac{dt}{t} \\ &= \rho \int_{a_1^{1/\rho} \tau / \xi_n}^{a_2^{1/\rho} \tau / \xi_n} \left(B \left(\frac{r}{\xi_n} \right)^{-\rho} - A \tau^{-\rho} \right) \frac{\tau + \cos \theta}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство

$$S_n(r) = \rho \varphi \left(\frac{r}{\xi_n} \right), \quad (3.21)$$

в котором

$$\varphi(a) = \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(Ba^{-\rho} - A\tau^{-\rho})(\tau + \cos \theta)}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1} d\tau, \quad a > 0.$$

Изучим введенную функцию $\varphi(a)$. Покажем сначала, что

$$\varphi(0+) = \varphi(+\infty) = 0. \quad (3.22)$$

Интегрирование по частям дает для $\varphi(a)$ выражение

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \frac{1}{2} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} (Ba^{-\rho} - A\tau^{-\rho}) d(\ln(\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1)) \\ &= \frac{1}{2} [(Ba^{-\rho} - A\tau^{-\rho}) \ln(\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1)] \Big|_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} A\rho \tau^{-\rho-1} \ln(\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1) d\tau =: J_1(a) - J_2(a). \end{aligned}$$

Проверим, что каждая из функций $J_1(a)$, $J_2(a)$ удовлетворяет (3.22). Действительно, поскольку при $k = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\ln(a^2 a_k^{2/\rho} + 2aa_k^{1/\rho} \cos \theta + 1)}{a^\rho} &\sim \frac{2aa_k^{1/\rho} \cos \theta}{a^\rho} = O(a^{1-\rho}) \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0+, \\ \frac{\ln(a^2 a_k^{2/\rho} + 2aa_k^{1/\rho} \cos \theta + 1)}{a^\rho} &\sim \frac{2 \ln a}{a^\rho} \rightarrow 0, \quad a \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

то $J_1(0+) = J_1(+\infty) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\ln(\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau &\sim \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{2 \cos \theta}{\tau^\rho} d\tau \\ &= \frac{2 \cos \theta}{1 - \rho} (a_2^{1/\rho-1} - a_1^{1/\rho-1}) a^{1-\rho} \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0+, \\ \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\ln(\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau &\sim \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \tau^{-\rho} \frac{2 \ln \tau}{\tau} d\tau \\ &\leq a_1^{-1} \left(\frac{\ln^2 aa_2^{1/\rho}}{a^\rho} - \frac{\ln^2 aa_1^{1/\rho}}{a^\rho} \right) \rightarrow 0, \quad a \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Значит, $J_2(0+) = J_2(+\infty) = 0$, что приводит к равенствам

$$\varphi(0+) = J_1(0+) - J_2(0+) = 0, \quad \varphi(+\infty) = J_1(+\infty) - J_2(+\infty) = 0.$$

Таким образом, (3.22) выполнено. Но теперь мы можем утверждать, что непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $\varphi(a)$ достигает своего максимума в некоторой точке a_0 , т.е. $\max_{a>0} \varphi(a) = \varphi(a_0) > 0$.

Используя равенство (3.21), оценим в сумме (3.15) последнее слагаемое

$$J(r) := S_j(r) + S_{j+1}(r) = \rho \left[\varphi\left(\frac{r}{\xi_j}\right) + \varphi\left(\frac{r}{\xi_{j+1}}\right) \right].$$

Пусть сначала $r \in [\xi_j, \sqrt{\xi_j \xi_{j+1}}]$. Тогда $\varphi(r/\xi_j) \leq \varphi(a_0)$. Поскольку

$$0 < \frac{\xi_j}{\xi_{j+1}} \leq \frac{r}{\xi_{j+1}} \leq \sqrt{\frac{\xi_j}{\xi_{j+1}}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

то благодаря (3.22) находим, что

$$\max_{\xi_j \leq r \leq \sqrt{\xi_j \xi_{j+1}}} \varphi\left(\frac{r}{\xi_{j+1}}\right) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Пусть теперь $r \in [\sqrt{\xi_j \xi_{j+1}}, \xi_{j+1}]$. Тогда $\varphi(r/\xi_{j+1}) \leq \varphi(a_0)$. Так как

$$\frac{r}{\xi_j} \geq \sqrt{\frac{\xi_{j+1}}{\xi_j}} \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty,$$

то снова в силу (3.22) имеем

$$\max_{\sqrt{\xi_j \xi_{j+1}} \leq r \leq \xi_{j+1}} \varphi\left(\frac{r}{\xi_j}\right) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

В обоих случаях получаем

$$J(r) \leq \rho \varphi(a_0) + o(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Сочетая эту оценку с (3.19), (3.20), запишем

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) = \sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) + \sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) + J(r) \leq \rho\varphi(a_0) + o(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Возвращаясь к оценке типа построенной функции $f_0(z)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0(r)}{r^\rho} &= 2 \int_0^{+\infty} \Delta^*(rt) K(t) dt \leq 2(AI_1 + S(r)) \\ &\leq 2 \left(A \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \rho\varphi(a_0) + o(1) \right), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Переход к пределу при $r \rightarrow +\infty$ и сравнение с доказанным в § 2 неравенством (1.1) приводит к требуемому результату:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(f_0) &= 2\rho \left(\frac{\pi A}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \varphi(a_0) \right) \\ &= 2\rho \left(\frac{\pi A}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(Ba^{-\rho} - At^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right) \\ &= \rho \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right). \end{aligned}$$

Все случаи рассмотрены. Теорема 1 доказана.

В следующем параграфе мы несколько усиливаем эту теорему, показывая, что ее утверждение остается в силе для целых функций с нулями из более широкого класса множеств.

§ 4. Обобщение теоремы 1

Пусть $k^* \in [0, 1]$ и a_1, a_2 ($a_1 \leq 1 \leq a_2$) – корни уравнения $a \ln(e/a) = k^*$. Обозначим

$$C_\theta^*(k^*, \rho) := \frac{\pi k^*}{\sin \pi\rho} \cos \rho\theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(a^{-\rho} - k^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt, \quad (4.1)$$

а в случае $\theta = 0$ введем еще сокращенное обозначение

$$C^*(k^*, \rho) := C_0^*(k^*, \rho) = \frac{\pi k^*}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{a^{-\rho} - k^* t^{-\rho}}{t + 1} dt.$$

Отметим, что при $\theta = \pi/2$ имеем

$$C_{\pi/2}^*(k^*, \rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/2)} + \max_{b>0} \int_{ba_1^{2/\rho}}^{ba_2^{2/\rho}} \frac{b^{-\rho/2} - k^* t^{-\rho/2}}{t + 1} dt \right) = \frac{1}{2} C^* \left(k^*, \frac{\rho}{2} \right).$$

В самом деле, подставляя в (4.1) при $\theta = \pi/2$ вместо параметра a параметр $\sqrt{b}$ и делая замену переменной $\tau = t^2$, получаем

$$\begin{aligned} C_{\pi/2}^*(k^*, \rho) &= \frac{\pi k^* \cos(\pi\rho/2)}{\sin \pi\rho} + \max_{b>0} \int_{\sqrt{ba_1^{1/\rho}}}^{\sqrt{ba_2^{1/\rho}}} \frac{(b^{-\rho/2} - k^* t^{-\rho})t}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/2)} + \max_{b>0} \int_{ba_1^{2/\rho}}^{ba_2^{2/\rho}} \frac{b^{-\rho/2} - k^* \tau^{-\rho/2}}{\tau + 1} d\tau \right) = \frac{1}{2} C^* \left(k^*, \frac{\rho}{2} \right). \end{aligned}$$

Наконец, для $k^* = 0$ обозначим

$$C_\theta^*(\rho) := C_\theta^*(0, \rho).$$

Прямое вычисление приводит к равенству

$$C_\theta^*(0, \rho) = \max_{a>0} \int_0^{ae^{1/\rho}} \frac{a^{-\rho}(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt = \frac{e}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho},$$

или

$$C_\theta^*(0, \rho) = \frac{e}{2} C_\theta(\rho), \quad (4.2)$$

где величина

$$C_\theta(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho}$$

введена в работе [9].

Для формулировки теоремы нам понадобится следующее определение.

Пусть $\theta \in [0, \pi/2)$. Будем говорить, что последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ принадлежит классу $\tilde{\Gamma}_\theta$, и писать $\Lambda \in \tilde{\Gamma}_\theta$, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\arg \lambda_n| \leq \theta$.

Будем писать $\Lambda \in \tilde{\Gamma}_{\pi/2}$, если все члены последовательности Λ , кроме, быть может, конечного числа, удовлетворяют условию $|\arg \lambda_n| \leq \pi/2$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\theta \in [0, \pi/2]$. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{\Gamma}_\theta$, имеющими верхнюю и нижнюю усредненные ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$, удовлетворяет точной оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \beta^* C_\theta^*(k^*, \rho), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}, \quad (4.3)$$

где величина $C_\theta^*(k^*, \rho)$ определена в (4.1).

Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями $\tilde{\Lambda}$, лежащими на лучах $\gamma_{\pm\theta} := \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm\theta\}$, и имеющими усредненные ρ -плотности $\underline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\theta < \pi/2$, то для произвольного $\theta' > \theta$ найдется такое число N , что все нули функции $f(z)$ с номерами $n > N$ лежат в угле $\Gamma_{\theta'}$. Такое же число найдется и в случае $\theta = \pi/2$, когда нули попадают в угол $\Gamma_{\pi/2}$. Во всех случаях функция $f(z)$ записывается в виде

$$f(z) = \prod_{n < N} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \prod_{n \geq N} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) =: \prod_{n < N} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) f_N(z),$$

где первое произведение может и отсутствовать (произведение по пустому набору индексов считается равным единице). Функции $f(z)$ и $f_N(z)$ отличаются разве что полиномиальным множителем, поэтому их ρ -типы совпадают. Отличие в конечном наборе нулей не влияет на величины их усредненных ρ -плотностей, которые также совпадают:

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_{f_N}) = \overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*, \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_{f_N}) = \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*.$$

Но функция $f_N(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Значит, для $f_N(z)$ справедливо полученное в процессе доказательства этой теоремы неравенство (2.10) (с θ' вместо θ), т.е.

$$\sigma_\rho(f) = \sigma_\rho(f_N) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta' + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta')}{t^2 + 2t \cos \theta' + 1} dt \right).$$

Пользуясь сначала произвольностью $\theta' > \theta$, а затем и свободой в выборе $a > 0$, приходим опять к оценке (1.1), совпадающей с (4.3):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(f) &\geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right) \\ &= \rho \beta^* \left(\frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(a^{-\rho} - k^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right) \\ &= \rho \beta^* C_\theta^*(k^*, \rho). \end{aligned}$$

Последнее утверждение теоремы справедливо благодаря тому, что экстремальная последовательность нулей $\tilde{\Lambda} = \{\lambda_n : \arg \lambda_n = \pm \theta\}$ принадлежит классу $\tilde{\Gamma}_\theta$. Теорема 4 доказана.

Выделим два важных частных случая этой теоремы: $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$. При $\theta = \pi/2$ корни $\Lambda_f = (\lambda_n)$ целых функций $f(z)$ лежат в замкнутой правой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_n \geq 0$. В этом случае справедливо такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями Λ_f , лежащими в правой полуплоскости или на мнимой оси и имеющими верхнюю и нижнюю усредненные ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$, удовлетворяет точной, достижимой оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\rho \beta^*}{2} \left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi \rho/2)} + \max_{b>0} \int_{ba_1^{2/\rho}}^{ba_2^{2/\rho}} \frac{b^{-\rho/2} - k^* t^{-\rho/2}}{t + 1} dt \right) = \frac{\rho \beta^*}{2} C^* \left(k^*, \frac{\rho}{2} \right).$$

При $\theta = 0$, как отмечалось во введении, из теоремы 4 следует обобщение теоремы 1 работы [7], доказанной для целых функций с положительными нулями.

СЛЕДСТВИЕ 2. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями $\Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, имеющими верхнюю и нижнюю усредненные ρ -плотности

$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$ и такими, что $\arg \lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, удовлетворяет точной, достижимой оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \beta^* C^*(k^*, \rho) = \rho \beta^* \left(\frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{a^{-\rho} - k^* \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

где a_1, a_2 ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) – корни уравнения $a \ln(e/a) = \alpha^*/\beta^*$.

Отметим, что следствие 2 сохраняет точную оценку ρ -типа целых функций из [7; теорема 1], значительно расширяя множество комплексной плоскости, где могут располагаться все их нули. Например, при сохранении прочих условий этой теоремы оценка для ρ -типа остается точной и для целых функций с нулями, лежащими при любом $b > 0$ в полуполосе $\{z = x + iy : x \geq 0, |y| \leq b\}$ или даже находящимися во множестве $\{z = x + iy : x \geq |y|^\delta\}$, где $\delta > 1$. В § 5 мы находим точную оценку типа целых функций порядка $\rho \in (0, m)$, $m \in \mathbb{N}$, с нулями на еще более широких множествах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\theta \in [0, \pi/2)$. В условии теоремы 4 требуется, чтобы при любом $\theta' > \theta$ вне угла $\Gamma_{\theta'}$ лежало не более конечного числа корней целой функции. Это требование можно несколько ослабить, разрешая вне указанных углов находиться и бесконечному множеству корней, но с нулевой ρ -плотностью. Аналогичное допущение действует и при $\theta = \pi/2$, когда бесконечно много корней с нулевой ρ -плотностью может располагаться вне полуплоскости $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$. Доказательство теоремы при этом практически не меняется.

§ 5. Расположение нулей целых функций на “правильных” лучах или в углах

Изучим ситуацию, когда нули целой функции лежат на m лучах, исходящих из начала координат и разбивающих комплексную плоскость на равные части, или расположены в множествах, близких к непересекающимся углам, биссектрисами которых служат эти лучи. Нас интересует величина наименьшего типа целой функции с таким расположением нулей, выраженная через их усредненные ρ -плотности. Аналогичная задача для обычных ρ -плотностей нулей, лежащих на лучах, решена в работе [11]. Здесь мы используем некоторые идеи из этой работы. Пусть, как и прежде, $\Gamma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}$. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$V_{\theta, m} = \bigcup_{k=0}^{m-1} \Gamma_{\theta, k, m},$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta, k, m} &= \exp\left(i \frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \Gamma_\theta \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg z \exp\left(-i \frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \right| \leq \theta \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Например, множество $V_{0,1} = \Gamma_{0,0,1}$ есть отрицательный луч $\mathbb{R}_-$, а множество $V_{0,2}$ представляет собой мнимую ось комплексной плоскости. Вообще для заданного $m \geq 2$ множество $V_{0,m} = \bigcup_{k=0}^{m-1} \Gamma_{0,k,m}$ состоит из m лучей, делящих плоскость на равные углы. При этом лучи

$$\Gamma_{0,k,m} = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = r \exp\left(i \frac{(2k+1)\pi}{m}\right), r > 0 \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

являются биссектрисами углов $\Gamma_{\theta,k,m}$.

Нам понадобятся следующие определения. Пусть $\theta \in [0, \pi/2m]$. Будем говорить, что последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ принадлежит классу $\tilde{V}_{\theta,m}$, и писать $\Lambda \in \tilde{V}_{\theta,m}$, если для любого $\theta' \in (\theta, \pi/2m)$ все члены последовательности Λ , кроме, возможно, конечного числа, принадлежат множеству $V_{\theta',m}$. Для значения $\theta = \pi/2m$ пишем $\Lambda \in \tilde{V}_{\pi/2m,m}$, если каждый член последовательности Λ , кроме, возможно, конечного числа, входит в $V_{\pi/2m,m}$. Например, последовательность, члены которой лежат в (наименьших) вертикальных углах, ограниченных двумя прямыми $l_\theta := \{z \in \mathbb{C} : z = te^{i\theta}, t \in \mathbb{R}\}$ и $l_{-\theta} := \{z \in \mathbb{C} : z = te^{-i\theta}, t \in \mathbb{R}\}$, где $\theta \in [0, \pi/4]$, входит в класс $\tilde{V}_{\theta,2}$. Эти определения оставляем в силе, если исключительное множество образовано не конечным числом членов, а некоторой подпоследовательностью нулевой ρ -плотности, или, что эквивалентно, нулевой усредненной ρ -плотности.

Целью параграфа является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, \pi/2m]$. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{V}_{\theta,m}$ заданных усредненных ρ -плотностей $\bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$ удовлетворяет точной оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\rho\beta^*}{m} C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m} \right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}, \quad (5.1)$$

где величина $C_\theta^*(k^*, \rho)$ определена в (4.1).

Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями Λ^* , одинаково распределенными на граничных лучах множества $V_{\theta,m}$ и имеющими усредненные ρ -плотности $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \alpha^*$, $\bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \beta^*$.

В качестве следствия из этой теоремы при $\theta = 0$ получаем такой результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, m)$, нули которой Λ_f имеют заданные усредненные ρ -плотности $\bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$ и расположены на лучах, делящих плоскость на равные углы, или, более общим образом, $\Lambda_f \in \tilde{V}_{0,m}$. Тогда ρ -тип $f(z)$ удовлетворяет точной оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\rho}{m} \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin(\pi\rho/m)} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{m/\rho}}^{aa_2^{m/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho/m} - \alpha^* \tau^{-\rho/m}}{\tau + 1} d\tau \right),$$

где a_1, a_2 ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) – корни уравнения $a \ln(e/a) = \alpha^*/\beta^*$.

Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями, лежащими на таких лучах и имеющими усредненные ρ -плотности $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \alpha^*/m$, $\bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \beta^*/m$ на каждом из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f = \Lambda \in \tilde{V}_{\theta, m}$. Считаем, что $f(0) = 1$. По уже цитированной теореме Адамара такую функцию можно представить в виде произведения

$$f(z) = e^{q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{p_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

в котором

$$p_n(z) = \frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p},$$

а число p и степерь многочлена $q(z)$ не превосходят ρ . Кроме того, $q(0) = 0$ в силу нашего соглашения $f(0) = 1$. Обозначим через

$$\varepsilon_j = \exp\left(i \frac{2\pi j}{m}\right), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

корни степени m из единицы и рассмотрим, следуя [11], функцию

$$F(z) = \prod_{j=0}^{m-1} f(\varepsilon_j z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Положим

$$\lambda_n = r_n \exp\left(i \frac{\pi(2k_n + 1)}{m} + \theta_n\right) = \mu_n \exp\left(i \frac{\pi(2k_n + 1)}{m}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\mu_n = r_n e^{i\theta_n}$, $|\theta_n| \leq \theta$, $r_n \nearrow +\infty$, а $k_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Учитывая, что для любого многочлена $Q(z) = \sum_{s=1}^{m-1} Q_s z^s$ без свободного члена выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} Q(\varepsilon_j z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} Q_s z^s \varepsilon_j^s = \sum_{s=1}^{m-1} Q_s z^s \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^s \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

так же, как в работе [11], устанавливаем, что функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{\mu_n}\right)^m\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.2)$$

Введем функцию

$$F_1(z) = F(z) \overline{F(\bar{z})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{\mu_n}\right)^m\right) \left(1 + \left(\frac{z}{\bar{\mu}_n}\right)^m\right), \quad z \in \mathbb{C} \quad (5.3)$$

(черта означает комплексное сопряжение), и положим

$$F_1\left(\exp\left(\frac{i\pi}{m}\right)z\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\mu_n}\right)^m\right) \left(1 - \left(\frac{z}{\bar{\mu}_n}\right)^m\right) =: L(z^m), \quad z \in \mathbb{C},$$

где

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^m e^{im\theta_n}}\right) \left(1 - \frac{z}{r_n^m e^{-im\theta_n}}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Обозначив $t_n = r_n^m$, $\psi_n = m\theta_n$, можем записать

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_n e^{i\psi_n}}\right) \left(1 - \frac{z}{t_n e^{-i\psi_n}}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $|\psi_n| = |m\theta_n| \leq m\theta \leq \pi/2$, то последовательность нулей Λ_L бесконечного произведения $L(z)$ принадлежит классу $\tilde{\Gamma}_{m\theta}$. Найдём усредненные ρ -плотности нулей введенных функций.

Как обычно, через $n_T(r)$ и $N_T(r)$ мы обозначаем считающую и усредненную считающую функции последовательности $T = (t_n)_{n=1}^{\infty}$ и, чтобы избежать громоздких обозначений, через $n_L(r)$ и $N_L(r)$ – такие же считающие функции последовательности нулей функции $L(z)$. Поскольку эти нули входят в произведение попарно сопряженными, то выполняется равенство $n_L(r) = 2n_T(r)$. Так как $t_n = r_n^m$, то $n_T(r^m) = n_L(r)$. Поэтому, подсчитывая $N_L(r)$ с помощью замены переменной $x = t^m$, получаем

$$N_L(r^m) = \int_0^{r^m} \frac{n_L(x)}{x} dx = \int_0^{r^m} \frac{2n_T(x)}{x} dx = 2m \int_0^r \frac{n_L(t)}{t} dt = 2mN_L(r),$$

т.е. $N_L(r^m) = 2mN_L(r)$. Следовательно,

$$\overline{\Delta}_{\rho/m}^*(\Lambda_L) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_L(r^m)}{(r^m)^{\rho/m}} = 2m \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_L(r)}{r^{\rho}} = 2m\overline{\Delta}_{\rho}^*(\Lambda) = 2m\beta^*$$

и, аналогично,

$$\underline{\Delta}_{\rho/m}^*(\Lambda_L) \geq 2m\alpha^*.$$

Легко сравнить ρ -типы целых функций $F_1(z)$ и $f(z)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |F_1(z)| &= \max_{|z|=r} |F(z)\overline{F(\bar{z})}| = \max_{|z|=r} \left| \prod_{j=0}^{m-1} f(\varepsilon_j z) \overline{f(\varepsilon_j \bar{z})} \right| \\ &\leq \prod_{j=0}^{m-1} \max_{|z|=r} |f(\varepsilon_j z)| \max_{|z|=r} |\overline{f(\varepsilon_j \bar{z})}| = (\max_{|z|=r} |f(z)|)^{2m}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство $\sigma_{\rho}(F_1) \leq 2m\sigma_{\rho}(f)$, или

$$\sigma_{\rho}(f) \geq \frac{1}{2m} \sigma_{\rho}(F_1). \quad (5.4)$$

Сравним теперь ρ -типы целых функций $F_1(z)$ и $L(z)$, опираясь на тождество $F_1(\exp(i\pi/m)z) = L(z^m)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}(F_1) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \max_{|z|=r} |F_1(\exp(i\pi/m)z)|}{r^{\rho}} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \max_{|z|=r} |L(z^m)|}{(r^m)^{\rho/m}} = \sigma_{\rho/m}(L). \end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma_{\rho/m}(L) = \sigma_{\rho}(F_1)$.

Применяя к функции $L(z)$ оценку (4.3) с учетом соотношений

$$\frac{\rho}{m} \in (0, 1), \quad \bar{\Delta}_{\rho/m}^*(\Lambda_L) = 2m\beta^*, \quad \underline{\Delta}_{\rho/m}^*(\Lambda_L) \geq 2m\alpha^*,$$

приходим к неравенству

$$\sigma_{\rho/m}(L) \geq \frac{\rho}{m} 2m\beta^* C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m}\right) = 2\rho\beta^* C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m}\right), \quad k^* = \frac{2m\alpha^*}{2m\beta^*} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Используя это неравенство и установленную выше в (5.4) связь типов функций $f(z)$ и $F_1(z)$, заключаем, что для любой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{V}_{\theta, m}$ усредненных ρ -плотностей $\bar{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^*$ справедлива оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{1}{2m} \sigma_\rho(F_1) = \frac{1}{2m} \sigma_{\rho/m}(L) \geq \frac{1}{2m} 2\rho\beta^* C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m}\right) = \frac{\rho\beta^*}{m} C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m}\right)$$

с постоянной $k^* = \alpha^*/\beta^*$. Значит, для всех целых функций из рассматриваемого класса выполняется неравенство (5.1).

Зафиксируем произвольно числа

$$m \in \mathbb{N}, \quad \rho \in (0, m), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2m}\right], \quad \beta^* > 0, \quad \alpha^* \in [0, \beta^*].$$

Для доказательства точности оценки (5.1) воспользуемся примером экстремальной целой функции

$$f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n e^{im\theta}}\right) \left(1 - \frac{z}{s_n e^{-im\theta}}\right),$$

построенной в § 3 для порядка $\rho/m \in (0, 1)$. Последовательность

$$\Lambda_{f_0} = \tilde{\Lambda} = (s_n e^{\pm im\theta})_{n=1}^{\infty}$$

нулей этой функции обладает усредненными (ρ/m) -плотностями

$$\underline{\Delta}_{\rho/m}^*(\tilde{\Lambda}) = \alpha^*, \quad \bar{\Delta}_{\rho/m}^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*,$$

и расположена на лучах $\gamma_{\pm m\theta} = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm m\theta\}$. Функция $f_0(z)$ доставляет равенство в (4.3), именно

$$\sigma_{\rho/m}(f_0) = \frac{\rho}{m} \beta^* C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m}\right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}. \quad (5.5)$$

Введем функцию $f^*(z) := f_0(-z^m)$. Ее нули образуют множество

$$\Lambda_{f^*} = \tilde{\Lambda} = \bigcup_{k=0}^{m-1} \{\lambda_{n,k}^{\pm}\}_{n=1}^{\infty},$$

где

$$\lambda_{n,k}^{\pm} = \sqrt[n]{s_n} \exp(\pm i\theta) \exp\left(i \frac{\pi(2k+1)}{m}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

расположенное на $2m$ лучах

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : z = t \exp \left(i \left(\pm \theta + \frac{\pi(2k+1)}{m} \right) \right), t > 0 \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Поэтому $\tilde{\Lambda} \in \tilde{V}_{\theta, m}$. Кроме того, поскольку $n_{\Lambda^*}(r) = mn_{\tilde{\Lambda}}(r^m)$, то

$$N_{\Lambda^*}(r) = \int_0^r \frac{n_{\Lambda^*}(x)}{x} dx = m \int_0^r \frac{n_{\tilde{\Lambda}}(x^m)}{x} dx = \int_0^{r^m} \frac{n_{\tilde{\Lambda}}(t)}{t} dt = N_{\tilde{\Lambda}}(r^m).$$

Это, в свою очередь, означает, что $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \alpha^*$. Действительно, например,

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\Lambda^*}(r)}{r^\rho} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\tilde{\Lambda}}(r^m)}{(r^m)^{\rho/m}} = \overline{\Delta}_{\rho/m}^*(\tilde{\Lambda}) = \beta^*.$$

Как и ранее, из определения $f^*(z) = f_0(-z^m)$ следует, что $\sigma_\rho(f^*) = \sigma_{\rho/m}(f_0)$, а сопоставление с (5.5) приводит к заключению

$$\sigma_\rho(f^*) = \sigma_{\rho/m}(f_0) = \frac{\rho}{m} \beta^* C_{m\theta}^* \left(k^*, \frac{\rho}{m} \right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Таким образом, $f^*(z)$ – требуемая экстремальная функция, реализующая равенство в (5.1). Теорема 5 доказана.

Если в этой теореме ограничение на нижнюю усредненную ρ -плотность отсутствует, т.е. $\alpha^* = 0$, то получается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{V}_{\theta, m}$ усредненной верхней ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$ удовлетворяет точной, достижимой оценке*

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta^* e \rho}{m} \max_{a > 0} \frac{\ln(a^{2m} + 2a^m \cos \theta + 1)}{a^\rho}.$$

В самом деле, достаточно в оценку (5.1) подставить величину (4.2) и заменить параметр a на a^m .

В случае $m = 1$ эта теорема несколько усиливает теорему 2 в части ослабления условий на расположение нулей целой функции.

Случай $m = 2$ теоремы 5 и некоторые следствия из нее мы обсудим в следующем параграфе.

§ 6. Расположение нулей целых функций на одной прямой или между двумя прямыми

Выделим наиболее интересные для приложений случаи расположения нулей целых функций на одной прямой или между двумя параллельными (пересекающимися) прямыми, соответствующие значению $m = 2$ теоремы 5. Нам удобнее здесь рассматривать целые функции, имеющие последовательности нулей,

“привязанные” не к мнимой, а к вещественной оси. Ясно, что соответствующий поворот комплексной плоскости не меняет ни величины типа целой функции, ни значений усредненных плотностей ее нулей. Сформулируем результат, вытекающий из теоремы 5 при $m = 2$, в виде отдельного утверждения.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\theta \in [0, \pi/4]$. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями $\Lambda_f \in \tilde{V}_{2,\theta}$ усредненных ρ -плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$, удовлетворяет точной оценке

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(f) &\geq \frac{\rho\beta^*}{2} C_{2\theta} \left(k^*, \frac{\rho}{2} \right) \\ &= \frac{\rho\beta^*}{2} \left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/2)} \cos 2\rho\theta + \max_{a>0} \int_{aa_1^{2/\rho}}^{aa_2^{2/\rho}} \frac{(a^{-\rho/2} - k^* t^{-\rho/2})(t + \cos 2\theta)}{t^2 + 2t \cos 2\theta + 1} dt \right), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $k^* = \alpha^*/\beta^*$ и a_1, a_2 ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) – корни уравнения $a \ln(e/a) = k^*$. Равенство достигается на некоторой целой функции с нулями Λ^* , лежащими на прямых $l_{\pm\theta} = \{z \in \mathbb{C} : z = te^{\pm i\theta}, t \in \mathbb{R}\}$ и имеющими усредненные ρ -плотности $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda^*) = \beta^*$.

Для $\theta = 0$ отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями

$$\Lambda_f = \{\lambda_n\} : \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{|\lambda_n|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

имеющими усредненные ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$, удовлетворяет точной, достижимой оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\rho\beta^*}{2} C^* \left(k^*, \frac{\rho}{2} \right) = \frac{\rho\beta^*}{2} \left(\frac{\pi k^*}{\sin(\pi\rho/2)} + \max_{a>0} \int_{aa_1^{2/\rho}}^{aa_2^{2/\rho}} \frac{a^{-\rho/2} - k^* \tau^{-\rho/2}}{\tau + 1} d\tau \right),$$

где $k^* = \alpha^*/\beta^*$ и a_1, a_2 ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) – корни уравнения $a \ln(e/a) = k^*$.

Обратим внимание на то, что этот результат справедлив, в частности, в случаях, когда нули целой функции расположены:

- а) на вещественной прямой;
- б) между параллельными прямыми $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \pm h\}$ при любом $h > 0$;
- с) более общим образом во множестве

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x|\delta_1(x) \leq y \leq |x|\delta_2(x)\},$$

где $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и для $k = 1, 2$ функции $\delta_k(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Интересно также отметить, что оценки величины ρ -типа из следствий 1 и 3 совпадают. Но следствие 1 справедливо для целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями на оси или в полуплоскости, а следствие 3 – для целых функций порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями на оси или “близкими” к ней.

Особый интерес представляет поведение на мнимой оси целой функции с вещественными нулями, характеризуемое величинами $\overline{\lim}_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(|f(ix)|/|x|^\rho)$, т.е. значениями в точках $\varphi = \pm\pi/2$ индикатора

$$h_\rho(f, \varphi) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^\rho}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

В случае измеримой последовательности нулей, учитывая, что пределы в определениях ее плотностей и усредненных плотностей существуют одновременно, из [14; теорема 7.3.1], [15; теорема 8.2.1] можно извлечь следующий факт.

Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$, все нули которой $\Lambda_f = \Lambda$ являются вещественными. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

$$\exists \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho} = \beta^*, \quad \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln |f(ix)|}{|x|^\rho} = \frac{\pi\rho\beta^*}{2\sin(\pi\rho/2)}.$$

Результат верен также и для канонических произведений порядка $\rho = 1$.

В менее изученном случае целых функций с неизмеримыми вещественными нулями теорема 8 дает точную нижнюю оценку для значений $h_\rho(f, \pm\pi/2)$.

Действительно, если $c \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{z/\lambda_n}, \quad F(z) = f(z)f(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^2\right),$$

то при вещественных $r > 0$ нетрудно установить равенство (см. [11])

$$\max_{|z|=r} |F(z)| = |F(\pm ir)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^2\right) = |f(\pm ir)|^2.$$

Эти же соотношения справедливы и для более простого произведения

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

В любом случае имеем $\ln |f(\pm ir)| = (1/2) \ln |F(\pm ir)|$, и это дает равенство

$$h_\rho\left(f, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} h_\rho\left(F, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sigma_\rho(F).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_F) = 2\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f), \quad \underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_F) = 2\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f).$$

На основании теоремы 8 заключаем, в частности, что индикатор в точках $\varphi = \pm\pi/2$ любой целой функции нецелого порядка $\rho \in (0, 2)$ с вещественными нулями заданных усредненных ρ -плотностей не меньше, чем минимальный возможный ρ -тип на классе таких функций. Дадим точную формулировку.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\rho \in (0, 2)$, $\rho \neq 1$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$, и $f(z)$ – целая функция порядка ρ с вещественными нулями ρ -плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$. Тогда

$$h_\rho\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) = h_\rho\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(\pm ir)|}{r^\rho} \geq \frac{\rho\beta^*}{2} C^*\left(k^*, \frac{\rho}{2}\right), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

При $\rho = 1$ результат верен для функций вида

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

а именно, справедливо неравенство

$$h\left(f, \pm \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{\beta}{2} C^*\left(k^*, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\alpha^*}{2} + \max_{a>0} \Phi_{\alpha^*, \beta^*}^*(a),$$

где величина

$$\Phi_{\alpha^*, \beta^*}^*(a) = \frac{\beta^*}{2\sqrt{a}} \ln \frac{1 + aa_2^2}{1 + aa_1^2} - \alpha^* \arctg \frac{(a_2 - a_1)\sqrt{a}}{1 + aa_1a_2}$$

получена прямым подсчетом интеграла в (4.1) при $\rho = 1/2$.

Можно ли дать оценки индикатора целой функции в точках, отличных от $\varphi = \pm\pi/2$? Как показывает следующий результат, в некоторых случаях разработанный метод предоставляет возможность получать точные оценки индикатора не только в отдельных точках, но и для значений аргумента из определенных промежутков. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$ с отрицательными нулями $\lambda_n = -r_n$, $0 < r_n \nearrow +\infty$. Тогда справедливо представление

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

причем

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^2 &= f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{re^{i\theta}}{r_n}\right) \left(1 + \frac{re^{-i\theta}}{r_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + 2\frac{r}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Но в правой части равенства

$$2 \ln |f(re^{i\theta})| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2r}{r_n} \cos \theta + \left(\frac{r}{r_n}\right)^2\right)$$

без труда узнаем величину $\sigma(r)$, на оценке которой основывалось доказательство теоремы 1. Следует учесть только, что, в отличие от ситуации в этой теореме, считающая функция нулей уменьшается в два раза, поскольку нули теперь располагаются не на двух лучах – сторонах угла, а на одной отрицательной полуоси. Отметим также, что выбор последовательности модулей нулей экстремальной целой функции из теоремы 1 не зависел от раствора угла. Указанные обстоятельства позволяют сформулировать следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ и $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$ с отрицательными нулями Λ_f усредненных ρ -плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$. Тогда для каждого значения $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ справедлива точная оценка

$$h_\rho(f, \theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \geq \rho \beta^* C_\theta^*(k^*, \rho), \quad k^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

или, в развернутом виде,

$$h_\rho(f, \theta) \geq \rho \left(\frac{\pi \alpha^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \max_{a > 0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt \right), \quad (6.2)$$

где a_1, a_2 ($0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$) – корни уравнения $a \ln(e/a) = \alpha^*/\beta^*$.

Существует целая функция, обладающая отрицательными нулями усредненных ρ -плотностей $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \alpha^*$, индикатор которой при всех $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ обеспечивает равенство в (6.2).

При $\alpha^* = 0$ отсюда следует такое утверждение.

ТЕОРЕМА 11. Индикатор каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с отрицательными нулями Λ_f усредненной верхней ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$ для каждого значения $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ удовлетворяет точному неравенству

$$h_\rho(f, \theta) \geq \frac{\beta^* e \rho}{2} \max_{a > 0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho}. \quad (6.3)$$

Существует целая функция, обладающая отрицательными нулями усредненной ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, индикатор которой при всех $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ обеспечивает равенство в (6.3).

При $\alpha^* = \beta^*$ из (6.2) вытекает неравенство

$$h_\rho(f, \theta) \geq \rho \frac{\pi \beta^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Однако для целых функций с измеримой последовательностью отрицательных нулей известна асимптотика $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$, откуда точно находится величина индикатора $h_\rho(f, \theta)$ при всех θ (см., например, [14; гл. 7]):

$$h_\rho(f, \theta) = \rho \frac{\pi \beta^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

§ 7. Свойства экстремальной величины $C_\theta^*(k^*, \rho)$

Наименьший возможный ρ -тип целых функций с нулями на рассмотренных в предыдущих параграфах множествах выражается через величину (4.1):

$$C_\theta^*(k^*, \rho) := \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \max_{a > 0} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(a^{-\rho} - k^* t^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt,$$

имеющую весьма сложный вид. Приведем здесь некоторые ее свойства, полезные на практике, что, в частности, позволит нам несколько полнее охарактеризовать экстремальные целые функции. Выведем также простые оценки для величины $C_\theta^*(k^*, \rho)$ через элементарные функции и неэлементарную функцию (см. (4.2))

$$C_\theta(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho},$$

исследованную ранее в [9; теорема 3.2].

Приступая к изучению функции $C_\theta^*(k^*, \rho)$, покажем сначала, что она является возрастающей и выпуклой по переменной k^* на отрезке $[0, 1]$ при каждом фиксированном значении параметров $\rho \in (0, 1)$ и $\theta \in [0, \pi/2]$. Поскольку максимум выпуклых и возрастающих функций также является функцией выпуклой и возрастающей, то достаточно показать, что при любых фиксированных $\rho \in (0, 1)$, $\theta \in [0, \pi/2]$ и $a > 0$ этими же свойствами обладает функция

$$\varphi(x) = \varphi_{\rho, \theta, a}(x) := \frac{\pi x}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{(a^{-\rho} - xt^{-\rho})(t + \cos \theta)}{t^2 + 2t \cos \theta + 1} dt,$$

в определении которой $a_1 = a_1(x)$ и $a_2 = a_2(x)$ суть корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = x, \quad x \in [0, 1], \quad 0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e.$$

Из этого уравнения легко получаем, что

$$a'_j(x) = -\frac{1}{\ln a_j(x)}, \quad 1 - \frac{x}{a_j(x)} = \ln a_j(x), \quad j = 1, 2.$$

С учетом записанных равенств найдем производную функции $\varphi(x)$, полагая ради краткости $\cos \theta = b$ и $R(t) = (t + b)/(t^2 + 2tb + 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + (a^{-\rho} - xa^{-\rho} a_2^{-1}) R(aa_2^{1/\rho}) \frac{a}{\rho} a_2^{1/\rho-1} a'_2 \\ &\quad - (a^{-\rho} - xa^{-\rho} a_1^{-1}) R(aa_1^{1/\rho}) \frac{a}{\rho} a_1^{1/\rho-1} a'_1 - \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} t^{-\rho} R(t) dt \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \frac{1}{\rho} [(a^{1-\rho} a_1^{1/\rho-1}) R(aa_1^{1/\rho}) - (a^{1-\rho} a_2^{1/\rho-1}) R(aa_2^{1/\rho})] \\ &\quad - \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} t^{-\rho} R(t) dt. \end{aligned}$$

Обозначив для сокращения записи $t_j = aa_j^{1/\rho}$, $j = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta - \frac{1}{\rho} (t_2^{1-\rho} R(t_2) - t_1^{1-\rho} R(t_1)) - \int_{t_1}^{t_2} t^{-\rho} R(t) dt \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta - \frac{1}{\rho} \int_{t_1}^{t_2} t^{-\rho} (tR(t))' dt. \end{aligned}$$

Последнее равенство легко проверяется:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{1-\rho} R(x)}{\rho} + \int_0^x t^{-\rho} R(t) dt \right)' &= \frac{(1-\rho)x^{-\rho} R(x) + x^{1-\rho} R'(x)}{\rho} + x^{-\rho} R(x) \\ &= \frac{1}{\rho} (x^{-\rho} R(x) + x^{1-\rho} R'(x)) = \frac{x^{-\rho}}{\rho} (R(x) + xR'(x)) = \frac{x^{-\rho}}{\rho} (xR(x))'. \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к формуле

$$\varphi'(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta - \frac{1}{\rho} \int_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} t^{-\rho} (tR(t))' dt, \quad (7.1)$$

причем подынтегральное выражение положительно:

$$(tR(t))' = \left(\frac{t^2 + tb}{t^2 + 2tb + 1} \right)' = \frac{bt^2 + 2t + b}{(t^2 + 2tb + 1)^2} > 0, \quad t \geq 0.$$

Из приведенных выше соотношений $a'_j(x) = -1/\ln a_i(x)$, $j = 1, 2$, следует, что функция $a_1(x)$ возрастает на отрезке $[0, 1]$, а функция $a_2(x)$ убывает на этом же отрезке. Значит, интеграл в формуле (7.1) берется по стягивающемуся с ростом $x \in [0, 1]$ отрезку. Величина интеграла при этом убывает, что влечет возрастание $\varphi'(x)$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ выпукла на $[0, 1]$. Кроме того, при всех $x \in [0, 1]$ выполнено

$$\varphi'(x) \geq \varphi'(0) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta - \frac{1}{\rho} \int_0^{ae^{1/\rho}} t^{-\rho} (tR(t))' dt = \frac{1}{\rho} \int_{ae^{1/\rho}}^{+\infty} t^{-\rho} (tR(t))' dt > 0.$$

Поэтому функция $\varphi(x)$ также возрастает на $[0, 1]$. При вычислении несобственного интеграла мы воспользовались результатом из [12; гл. 2, раздел 2.2.9].

Поскольку

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \pi \frac{\cos \rho \theta}{\sin \pi \rho}, \\ \varphi(0) &= \int_0^{ae^{1/\rho}} a^{-\rho} R(t) dt = \frac{e}{2} \frac{\ln(1 + 2ae^{1/\rho} \cos \theta + (ae^{1/\rho})^2)}{(ae^{1/\rho})^\rho} \leq \frac{e}{2} C_\theta(\rho), \end{aligned}$$

то в силу выпуклости $\varphi(x)$ имеем

$$\varphi_{\rho, \theta, a}(x) = \varphi(x) \leq \varphi(1)x + \varphi(0)(1-x) \leq \frac{\pi x \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} + \frac{e}{2} C_\theta(\rho)(1-x).$$

Тогда

$$C_\theta^*(k^*, \rho) = \max_{a>0} \{\varphi_{\rho, \theta, a}(k^*)\} \leq \frac{\pi k^* \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} + \frac{e}{2} C_\theta(\rho)(1-k^*).$$

Снова используя выпуклость $\varphi(x)$ и учитывая, что $\varphi'(1) = \pi \cos \rho \theta / \sin \pi \rho$, запишем

$$\varphi_{\rho, \theta, a}(x) = \varphi(x) \geq \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) = \frac{\pi \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} + \frac{\pi \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} (x-1) = \frac{\pi x \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho}$$

при всех $x \in [0, 1]$. Отсюда заключаем, что

$$C_{\theta}^*(k^*, \rho) = \max_{a>0} \{\varphi_{\rho, \theta, a}(k^*)\} \geq \frac{\pi k^* \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho}.$$

Аналогичным образом получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho, \theta, a}(x) &= \varphi(x) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)x = \frac{e}{2} \frac{\ln(1 + 2ae^{1/\rho} \cos \theta + (ae^{1/\rho})^2)}{(ae^{1/\rho})^\rho} \\ &+ x \left(\frac{\pi \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{ae^{1/\rho}} t^{-\rho} (tR(t))' dt \right). \end{aligned}$$

Если точка $a_0 = a_0(\rho, \theta)$ такова, что

$$C_{\theta}(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1 + 2a \cos \theta + a^2)}{a^\rho} = \frac{\ln(1 + 2a_0 \cos \theta + a_0^2)}{a_0^\rho},$$

то

$$\begin{aligned} C_{\theta}^*(k^*, \rho) &= \max_{a>0} \{\varphi_{\rho, \theta, a}(k^*)\} \geq \varphi_{\rho, \theta, a_0 e^{-1/\rho}}(k^*) \\ &= \frac{e}{2} C_{\theta}(\rho) + k^* \left(\frac{\pi \cos \rho \theta}{\sin \pi \rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^{a_0} t^{-\rho} (tR(t))' dt \right). \end{aligned}$$

Полученную информацию соберем в отдельное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При любых $k^* \in [0, 1]$, $\rho \in (0, 1)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta &\leq C_{\theta}^*(k^*, \rho) \leq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \frac{e}{2} C_{\theta}(\rho) (1 - k^*), \\ C_{\theta}^*(k^*, \rho) &\geq \frac{\pi k^*}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \frac{e}{2} C_{\theta}(\rho) - \frac{k^*}{\rho} B_{\theta}(\rho), \end{aligned}$$

где

$$B_{\theta}(\rho) = \int_0^{a_0} t^{-\rho} \frac{t^2 \cos \theta + 2t + \cos \theta}{(t^2 + 2t \cos \theta + 1)^2} dt$$

и a_0 – точка, на которой достигается максимум в определении $C_{\theta}(\rho)$.

Равенства достигаются по крайней мере в крайних точках $k^* = 0$ и $k^* = 1$, поскольку из приведенных оценок вытекают соотношения

$$\begin{aligned} C_{\theta}^*(0, \rho) &= \frac{e}{2} C_{\theta}(\rho) = \frac{e}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a \cos \theta + 1)}{a^\rho}, \\ C_{\theta}^*(1, \rho) &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказанное при фиксированных

$$\rho \in (0, 1), \quad a > 0, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

строгое возрастание функции $\varphi(x) = \varphi_{\rho, \theta, a}(x)$ влечет строгое возрастание по переменной k^* максимума

$$C_{\theta}^*(k^*, \rho) = \max_{a>0} \{\varphi_{\rho, \theta, a}(k^*)\}.$$

Этот факт позволяет установить интересное свойство экстремальных функций, доставляющих равенства в оценках из теорем 1–9. Именно, каждая такая функция имеет минимально допустимую условиями своих теорем нижнюю усредненную ρ -плотность нулей. В самом деле, если, например, в теореме 4 нули Λ_f функции $f(z)$ имеют нижнюю усредненную ρ -плотность

$$\Delta_{\rho}^*(\Lambda_f) = \alpha_1^* > \alpha^*,$$

то величина ее ρ -типа подчинена условию

$$\sigma_{\rho}(f) \geq \rho \beta^* C_{\theta}^*\left(\frac{\alpha_1^*}{\beta^*}, \rho\right) > \rho \beta^* C_{\theta}^*\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}, \rho\right).$$

Такая функция $f(z)$ не может быть экстремальной в теореме 4. Это же замечание справедливо и в отношении других теорем.

Список литературы

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956, 632 с.; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964, viii+493 pp.
- [2] А. Ю. Попов, “О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1999, №5, 48–52; англ. пер.: A. Yu. Popov, “Completeness of exponential systems with real exponents of a prescribed under density in spaces of analytic functions”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **54**:5 (1999), 47–51.
- [3] R. M. Redheffer, “On even entire functions with zeros having a density”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 32–61.
- [4] А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2005, №1, 31–36; англ. пер.: A. Yu. Popov, “The least possible type under the order $\rho < 1$ of canonical products with positive zeros of a given upper ρ -density”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 32–36.
- [5] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 3–28; англ. пер.: G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, “On the least possible type of entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ with positive zeros”, *Izv. Math.*, **75**:1 (2011), 1–27.
- [6] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями”, *Матем. заметки*, **91**:5 (2012), 674–690; англ. пер.: G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, “On the growth of entire functions with discretely measurable zeros”, *Math. Notes*, **91**:5 (2012), 630–644.
- [7] Г. Г. Брайчев, “Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 31–56; англ. пер.: G. G. Braichev, “The least type of an entire function of order $\rho \in (0, 1)$ having positive zeros with prescribed averaged densities”, *Sb. Math.*, **203**:7 (2012), 950–975.

- [8] Г. Г. Брайчев, “Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей”, *Докл. РАН*, **445**:6 (2012), 615–617; англ. пер.: G. G. Braichev, “Sharp bounds for the type of an entire function of order less than 1 whose zeros are located on a ray and have given averaged densities”, *Dokl. Math.*, **86**:1 (2012), 559–561.
- [9] А. Ю. Попов, “Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ -плотностью корней”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **49**, РУДН, М., 2013, 132–164; англ. пер.: A. Yu. Popov, “Development of the Valiron–Levin theorem on the least possible type of entire functions with a given upper ρ -density of roots”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **211**:4 (2015), 579–616.
- [10] В. Б. Шерстюков, “Минимальное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями заданных плотностей, лежащими в угле”, *Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”*, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 2014, 308–310.
- [11] Г. Г. Брайчев, “Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах”, *Матем. заметки*, **97**:4 (2015), 503–515; англ. пер.: G. G. Braichev, “Sharp estimates of types of entire functions with zeros on rays”, *Math. Notes*, **97**:4 (2015), 510–520.
- [12] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981, 799 с.; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series*, v. 1: *Elementary functions*, Gordon & Breach, New York, 1986, 798 pp.
- [13] Г. Г. Брайчев, *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций*, Прометей, М., 2005, 232 с.
- [14] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia Math. Appl., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, xx+491 pp.
- [15] R. P. Boas, Jr., *Entire functions*, Academic Press, New York, 1954, x+276 pp.

Георгий Генрихович Брайчев
(Georgiy G. Braichev)

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: braichev@mail.ru

Поступила в редакцию
01.02.2015 и 07.08.2015